Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 10

Lineare Abbildungen

Zwischen zwei Vektorräumen interessieren insbesondere die Abbildungen, die mit den Strukturen, also der Addition und der Skalarmultiplikation, verträglich sind.

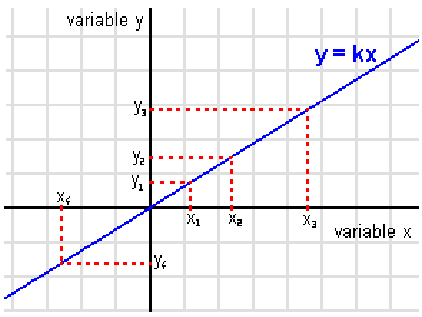
Definition 10.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte, spricht man von K-Linearität. Statt von linearen Abbildungen spricht man auch von *Homomorphismen*. Die Identität $\mathrm{Id}_V\colon V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.



Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

Beispiel 10.2. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K. Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 10.9 (siehe unten) bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(s)$ für ein einziges $s \in K$, $s \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz" auf.

Viele wichtige Funktionen, insbesondere von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sind nicht linear. Beispielsweise ist das Quadrieren $x \mapsto x^2$, die Quadratwurzel, die trigonometrischen Funktionen, die Exponentialfunktion, der Logarithmus nicht linear. Aber auch für solche kompliziertere Funktionen gibt es im Rahmen der Differentialrechnung lineare Approximationen, die zum Verständnis dieser Funktionen beitragen.

Beispiel 10.3. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \longmapsto x_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

Wenn Sie das zehnmal kaufen, müssen Sie zehnmal soviel zahlen. In der linearen Welt gibt es keinen Rabatt.

Beispiel 10.4. Es stehen n verschiedene Produkte zum Verkauf an, wobei das i-te Produkt (pro Einheit) a_i kostet. Ein Einkauf wird durch das n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

repräsentiert, wobei x_i die vom i-ten Produkt gekaufte Menge angibt. Der Preis des Einkaufs wird dann durch $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ beschrieben. Die Preisabbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i .$$

ist linear. Dies bedeutet beispielsweise, dass wenn man zuerst den Einkauf $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ tätigt und eine Woche später den Einkauf $(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)$, dass dann der Preis der beiden Einkäufe zusammen dem Preis entspricht, den man bezahlt hätte, wenn man auf einen Schlag $(x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots, x_n + y_n)$ gekauft hätte.

Beispiel 10.5. Die zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$ gehörende Abbildung (siehe Beispiel 2.6)

$$K^n \longrightarrow K^m,\ \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} s_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} s_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} s_j \end{pmatrix},$$

ist linear.

Beispiel 10.6. Es sei $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen und $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen. Dann ist die Abbildung

$$D\colon\ C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f',$$

die einer Funktion ihre Ableitung zuordnet, linear. In der Analysis wird ja

$$(af + bg)' \,=\, af' + bg'$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine weitere Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bewiesen.

Lemma 10.7. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien*

$$\varphi\colon U \longrightarrow V \text{ und } \psi\colon V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon\ U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.12. □

Lemma 10.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon\ W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.13. □

Festlegung auf einer Basis

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

SATZ 10.9. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f\colon V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I\,.$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft[1]

$$f\left(\sum_{i\in I} s_i v_i\right) \,=\, \sum_{i \in I} s_i f\left(v_i\right)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v \,=\, \sum_{i\in I} s_i v_i$$

schreiben und

$$f(v) \,:=\, \sum_{i\in I} s_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i\in I} s_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} t_i v_i$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(u+v\right) &= f\left(\left(\sum_{i\in I} s_i v_i\right) + \left(\sum_{i\in I} t_i v_i\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right) v_i\right) \\ &= \sum_{i\in I} (s_i + t_i) f\left(v_i\right) \end{aligned}$$

[1] Wenn I eine unendliche Indexmenge ist, so sind hier sämtliche Summen so zu verstehen, dass nur endlich viele Koeffizienten nicht 0 sind.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} s_i f(v_i) + \sum_{i \in I} t_i f(v_i) \\
&= f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i \right) + f\left(\sum_{i \in I} t_i v_i \right) \\
&= f(u) + f(v).
\end{aligned}
$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. □

Insbesondere ist eine lineare Abbildung $\varphi \colon K^n \to K^m$ durch $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ eindeutig festgelegt.

Beispiel 10.10. Wenn man ein Objekt im Raum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 in einer Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis f_1, f_2 darstellen möchte, so arbeitet man typischerweise mit der durch

$$e_1 \longmapsto f_1,\ e_2 \longmapsto f_1 + f_2,\ e_3 \longmapsto f_2$$

definierten linearen Abbildung. Der Punkt (x, y, z) wird dabei auf $(x+y, y+z)$ abgebildet. Statt $f_1 + f_2$ kommen auch andere „Tiefenschrägen“ $af_1 + bf_2$ vor. Das Bild des Objektes unter einer solchen linearen Abbildung nennt man ein *Schrägbild*.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge kann man wieder als Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies für alle endlichdimensionalen Vektorräume, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

Die Wirkungsweise von verschiedenen linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich, dargestellt an einer Gehirnzelle.

Definition 10.11. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bezüglich der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 10.9 definierte lineare Abbildung $\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M)$ die *durch M festgelegte lineare Abbildung.*

Wenn $V = W$, ist, so interessiert man sich häufig, aber nicht immer, für die beschreibende Matrix bezüglich einer einzigen Basis $\mathfrak{v}$ von V.

Beispiel 10.12. Es sei V ein Vektorraum mit Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Wenn man die Identität

$$\mathrm{Id}\colon V \longrightarrow V$$

bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ vorne und der Basis $\mathfrak{w}$ hinten betrachtet, so ist wegen

$$\mathrm{Id}(v_j) = v_j = \sum a_{ij} w_i$$

direkt

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}},$$

d.h. die beschreibende Matrix zur identischen linearen Abbildung ist die Übergangsmatrix zum Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$.

Lemma 10.13. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ mit den zugehörigen Abbildungen*

$$\psi_{\mathfrak{v}}\colon K^n \longrightarrow V$$

und

$$\psi_{\mathfrak{w}}\colon K^m \longrightarrow W.$$

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung mit beschreibender Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$. Dann ist

$$\varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} = \psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi),$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{v}}} & V \\ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K^m & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{w}}} & W \end{array}$$

ist kommutativ. Zu einem Vektor $v \in V$ kann man $\varphi(v)$ ausrechnen, indem man das Koeffiziententupel zu v bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ bestimmt, darauf die

Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ anwendet und zu dem sich ergebenden m-Tupel den zugehörigen Vektor bezüglich $\mathfrak{w}$ berechnet.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.25. □

Satz 10.14. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Dann sind die in Definition 10.11 festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Wir zeigen, dass beide Hintereinanderschaltungen die Identität sind. Wir starten mit einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ und betrachten die Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M))\,.$$

Zwei Matrizen sind gleich, wenn für jedes Indexpaar (i, j) die Einträge übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)))_{ij} &= i - \text{te Koordinate von } (\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M))(v_j) \\ &= i - \text{te Koordinate von } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= a_{ij}.\end{aligned}$$

Sei nun φ eine lineare Abbildung, und betrachten wir

$$\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))\,.$$

Zwei lineare Abbildungen stimmen nach Satz 10.9 überein, wenn man zeigen kann, dass sie auf der Basis $v_1, \ldots, v_n$ übereinstimmen. Es ist

$$(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)))(v_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij}\, w_i.$$

Dabei ist nach Definition der Koeffizient $(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij}$ die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $w_1, \ldots, w_m$. Damit ist diese Summe gleich $\varphi(v_j)$. □

Wir bezeichnen die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W mit $\operatorname{Hom}_K(V, W)$. Satz 10.14 bedeutet alos, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ \varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi),$$

bijektiv mit der angegebenen Umkehrabbildung ist. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow V$$

nennt man auch einen *Endomorphismus*. Die Menge aller Endomorphismen auf V wird mit $\operatorname{End}_K(V)$ bezeichnet.

Isomorphe Vektorräume

Definition 10.15. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine bijektive, lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt *Isomorphismus*.

Ein Isomorphismus von V nach V heißt *Automorphismus*.

Definition 10.16. Es sei K ein Körper. Zwei K-Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Satz 10.17. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind V und W zueinander isomorph genau dann, wenn ihre Dimension übereinstimmt. Insbesondere ist ein n-dimensionaler K-Vektorraum isomorph zum K^n.*

Beweis. Siehe Aufgabe 10.27. □

Bemerkung 10.18. Eine Isomorphie zwischen einem n-dimensionalen Vektorraum V und dem Standardraum K^n ist im Wesentlichen äquivalent zur Wahl einer Basis in V. Zu einer Basis

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$$

gehört die lineare Abbildung

$$\psi_{\mathfrak{v}}\colon K^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto v_i,$$

die also den Standardraum in den Vektorraum abbildet, indem sie dem i-ten Standardvektor den i-ten Basisvektor aus der gegebenen Basis zuordnet. Dies definiert nach Satz 10.9 eine eindeutige lineare Abbildung, die aufgrund von Aufgabe 10.11 bijektiv ist. Es handelt sich dabei einfach um die Abbildung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\,.$$

Die Umkehrabbildung

$$x = \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}\colon V \longrightarrow K^n$$

ist ebenfalls linear und heißt die zur Basis gehörende *Koordinatenabbildung*. Die i-te Komponente davon, also die zusammengesetzte Abbildung

$$x_i = p_i \circ x\colon V \longrightarrow K,\, v \longmapsto (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1}(v))_i,$$

heißt i-te *Koordinatenfunktion*. Sie wird mit v_i^* bezeichnet, und gibt zu einem Vektor $v \in V$ in der eindeutigen Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

die Koordinate λ_i aus. Man beachte, dass die lineare Abbildung v_i^* von der gesamten Basis abhängt, nicht nur von dem Vektor v_i.

Wenn umgekehrt ein Isomorphismus

$$\psi\colon\ K^n \longrightarrow V$$

gegeben ist, so sind die Bilder

$$\psi(e_i), i = 1, \ldots, n,$$

eine Basis von V.

Abbildungsverzeichnis