Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 19

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 19.1. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.2. Berechne das Polynom

$$(3X^2-5X+4)\cdot(X^3-6X^2+1)-(4X^3+2X^2-2X+3)\cdot(-2X^2-5X)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 19.3. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+\mathrm{i})X^2-3X+9\mathrm{i})\cdot((-3+7\mathrm{i})X^2+(2+2\mathrm{i})X-1+6\mathrm{i})\,.$$

Aufgabe 19.4.*

Zeige, dass der Polynomring $K[X]$ über einem Körper K ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 19.5.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q)\leq\max\{\operatorname{grad}(P),\operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P\cdot Q)=\operatorname{grad}(P)+\operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 19.6. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P,Q\in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ\neq 0$.

Aufgabe 19.7. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5\mathrm{i}$ ersetzt.

Aufgabe 19.8.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon K[X] \longrightarrow K,\, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 19.9. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 19.10. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2 + \mathrm{i})Z^2 + 3\mathrm{i}Z + 4 - 5\mathrm{i}$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - \mathrm{i}$.

Aufgabe 19.11.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2\mathrm{i}X^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = \mathrm{i}X - 3 + 2\mathrm{i}$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe 19.12. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Der Körper $\mathbb{Z}/(7)$ wurde in Beispiel 3.9 vorgestellt.

Aufgabe 19.13. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

In den folgenden Aufgaben geht es um die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Aufgabe 19.14. Löse die quadratische Gleichung $3x^2 - 6x + 2 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 19.15. Löse die reelle quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{4}{5} = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe 19.16.*

Beweise die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Aufgabe 19.17.*

Von einem Rechteck sind der Umfang U und die Fläche A bekannt. Bestimme die Längen der Seiten des Rechtecks.

Aufgabe 19.18.*

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Analytische Konzepte wie die Ableitung sollen nicht verwendet werden.

Aufgabe 19.19. Löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 7x^2 - 11 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 19.20.*

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

Aufgabe 19.21. Beweise die Formel

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3} + \cdots + X^2 + X + 1).$$

Aufgabe 19.22.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 19.23. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgabe 19.24. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 19.25.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P = X^n \in K[X]$ mit $n \geq 1$. Zeige, dass sämtliche normierten Teiler von P die Form X^k, $1 \leq k \leq n$, , besitzen.

Aufgabe 19.26.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 19.27. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad d, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 19.28.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe 19.29. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

Aufgabe 19.30. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 19.31.*

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 19.32. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\ Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 19.33. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 19.34. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgabe 19.35.*

Es seien $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.36. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$((4+\mathrm{i})X^3 - \mathrm{i}X^2 + 2X + 3 + 2\mathrm{i}) \cdot ((2-\mathrm{i})X^3 + (3-5\mathrm{i})X^2 + (2+\mathrm{i})X + 1 + 5\mathrm{i})\,.$

Aufgabe 19.37. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+\mathrm{i})X^4 + \mathrm{i}X^2 + (3-2\mathrm{i})X - 1$ und $T = X^2 + \mathrm{i}X + 3 - \mathrm{i}$ durch.

Aufgabe 19.38. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgabe 19.39. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 19.40. (3 Punkte)

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 8X^2 - 8X + 3$$

und

$$Q = X^3 - 5X^2 + 4X + 7.$$

Aufgabe 19.41. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Aufgabe 19.42. Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \ldots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen.

Entwickle eine Fragestrategie für B, die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.