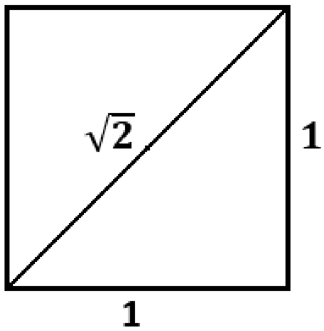
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 48

Kommensurabilität



Die Seitenlänge und die Diagonale in einem Quadrat sind nicht kommensurabel.

Definition 48.1. Zwei Strecken s und t heißen *kommensurabel*, wenn es eine Strecke g mit der Eigenschaft gibt, dass beide Strecken ganzzahlige Vielfache von g sind.

Definition 48.2. Reelle Zahlen $r, s \neq 0$ heißen *kommensurabel*, wenn $\frac{r}{s}$ eine rationale Zahl ist.

Somit handelt es sich um die Äquivalenzrelation zur Untergruppe

$$(\mathbb{Q}^\times, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot)$$

im Sinne von Definition 46.1.

Bemerkung 48.3. Die Frage, inwiefern es über die rationalen Zahlen hinaus weitere sinnvolle Zahlen gibt, geht in die griechische Antike zurück. Die Frage wurde in der Form gestellt, ob je zwei in natürlicher Weise gegebene Strecken zueinander kommensurabel sind, ob es also eine dritte Strecke gibt, von der beide Strecken ganzzahlige Vielfache sind. Die Pythagoreer waren von der Harmonie des Universums überzeugt und das schloss ihrer Auffassung nach mit ein, dass alle Streckenverhältnisse durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Solche ganzzahligen Beziehungen fanden sie in der Musik (Schwingungsverhältnisse) und vermuteten sie für die Planeten und ihre Bewegungen und für die gesamte Geometrie. Es wird darüber spekuliert, ob in den pythagoreischen Kreisen die in Beispiel 42.2 (Grundkurs Mathematik (Osnabrück 2016-2017)) besprochene Überlegung, die die Irrationalität der $\sqrt{2}$ begründet (die Inkommensurabilität von Seitenlänge und

Diagonale in einem Quadrat), bekannt war und sogar geheimgehalten wurde. Jedenfalls setzte sich später in der Antike die Erkenntnis durch, dass es irrationale Zahlen geben muss.

Die Untergruppenbeziehung

$$(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$$

(die man auch als eine Untervektorraumbeziehung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen auffassen kann) führt ebenfalls zu einer Äquivalenzrelation auf den reellen Zahlen. Dabei sind zwei reelle Zahlen äquivalent, wenn ihre Differenz eine rationale Zahl ist.

Restklassenräume

Lemma 48.4. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist die durch*

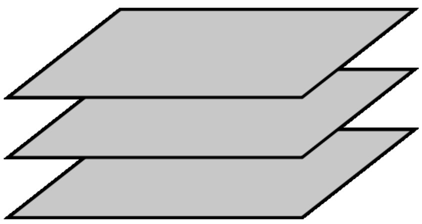
$$v \sim w, \text{ falls } v - w \in U\,,$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis. Dies gilt generell für die Nebenklassen zu einer Untergruppe, wie in der 46. Vorlesung gezeigt wurde. □

Wir geben noch einen direkten Beweis, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Wir gehen die Bedingungen einer Äquivalenzrelation durch. Die Reflexivität folgt aus $v - v = 0 \in U$, die Symmetrie folgt aus $w - v = -(v - w) \in U$, die Transitivität ergibt sich so: Aus $u - v \in U$ und $v - w \in U$ folgt $u - w = (u - v) + (v - w) \in U$.



Die Nebenklassen zu dem Untervektorraum U besitzen eine einfache geometrische Interpretation, eine Nebenklasse ist nichts anderes als ein zu U paralleler affiner Unterraum von V, also ein Raum der Form $P + U$ mit $P \in V$. Die Quotientengruppe besteht aus der Menge dieser affinen Unterräume.

Wir können auf diese Äquivalenzrelation die allgemeinen Ergebnisse für Normalteiler in einer Gruppe und Äquivalenzrelationen anwenden und erhalten eine surjektive Quotientenabbildung (oder Identifizierungsabbildung oder kanonische Projektion)

$$q\colon V \longrightarrow V/\sim,\ v \longmapsto q(v) = [v] = v + U.$$

Statt $V/\sim$ werden wir V/U schreiben. Das Besondere an dieser Situation ist, dass diese Quotientenmenge selbst ein Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung linear ist.

Satz 48.5. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei V/U die Menge der Äquivalenzklassen (die Quotientenmenge) zu der durch U definierten Äquivalenzrelation auf V und es sei*

$$q\colon V \longrightarrow V/U,\ v \longmapsto [v],$$

die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte K-Vektorraumstruktur auf V/U derart, dass q eine K-lineare Abbildung ist.

Beweis. Da die kanonische Projektion zu einer linearen Abbildung werden soll, muss die Addition durch

$$[v] + [w] = [v + w]$$

und die Skalarmultiplikation durch

$$\lambda[v] = [\lambda v]$$

gegeben sein. Insbesondere kann es also nur eine Vektorraumstruktur mit der gewünschten Eigenschaft geben, und wir müssen zeigen, dass durch diese Vorschriften wohldefinierte Operationen auf V/U definiert sind, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. D.h. wir haben für $[v] = [v']$ und $[w] = [w']$ zu zeigen, dass $[v+w] = [v'+w']$ ist. Nach Voraussetzung können wir $v' = v + u$ und $w' = w + u'$ mit $u, u' \in U$ schreiben. Damit ist

$$v' + w' = v + w + u + u'$$

und dies ist wegen $u + u' \in U$ äquivalent zu $v + w$. Zur Skalarmultiplikation sei wieder $v' = v + u$ mit $u \in U$. Dann ist

$$\lambda v' = \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u,$$

und das ist äquivalent zu λv. Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf V/U und der Surjektivität der Abbildung folgt, dass eine Vektorraumstruktur vorliegt und dass die Abbildung linear ist. □

Definition 48.6. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann nennt man die Menge V/U der Äquivalenzklassen mit der in Satz 48.5 bewiesenen Vektorraumstruktur den *Restklassenraum* (oder *Quotientenraum*) von V modulo U.

Satz 48.7. *Es sei K ein Körper und es seien V, Q und W Vektorräume über K. Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $\psi\colon V \to Q$ eine surjektive lineare Abbildung. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon Q \longrightarrow W$$

derart, dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & W \\ \psi \downarrow & \nearrow & \\ Q & & \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. Für jedes Element $u \in Q$ gibt es mindestens ein $v \in V$ mit $\psi(v) = u$. Wegen der Kommutativität muss $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(v)$ gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein $\tilde{\varphi}$ geben kann. Wir haben zu zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Seien also $v, v' \in V$ zwei Urbilder von u. Dann ist

$$v' - v \in \operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

und daher ist $\varphi(v) = \varphi(v')$. Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien $u, u' \in Q$ und seien $v, v' \in V$ Urbilder davon. Dann ist $v + v'$ ein Urbild von $u + u'$ und daher ist

$$\tilde{\varphi}(u + u') = \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = \tilde{\varphi}(u) + \tilde{\varphi}(u').$$

D.h. $\tilde{\varphi}$ ist mit der Addition verträglich. Sei $u \in Q$ mit einem Urbild $v \in V$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist λv ein Urbild von λu und daher ist

$$\tilde{\varphi}(\lambda u) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \tilde{\varphi}(u),$$

also ist $\tilde{\varphi}$ auch mit der Skalarmultiplikation verträglich. □

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung $\tilde{\varphi}$ heißt *induzierte lineare Abbildung* und entsprechend heißt der Satz auch *der Satz über die induzierte Abbildung.*

Korollar 48.8. *Es sei K ein Körper und es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine surjektive lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische lineare Isomorphie

$$\tilde{\varphi}\colon V/ \operatorname{kern} \varphi \longrightarrow W.$$

Beweis. Wir wenden Satz 48.7 auf $Q = V/\operatorname{kern}\varphi$ und die kanonische Projektion $q\colon V \to V/\operatorname{kern}\varphi$ an. Dies induziert eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon V/\operatorname{kern}\varphi \longrightarrow W$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$, die surjektiv ist. Sei $[x] \in V/\operatorname{kern}\varphi$ und $[x] \in \operatorname{kern}\tilde{\varphi}$. Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x) = 0,$$

also $x \in \operatorname{kern}\varphi$. Damit ist $[x] = 0$ in $V/\operatorname{kern}\varphi$, d.h. der Kern von $\tilde{\varphi}$ ist trivial und nach Lemma 11.4 ist $\tilde{\varphi}$ auch injektiv. □

Satz 48.9. *Es sei K ein Körper und es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung

$$V \xrightarrow{q} V/\operatorname{kern}\varphi \xrightarrow{\theta} \operatorname{bild}\varphi \xhookrightarrow{\iota} W\,,$$

wobei q die kanonische Projektion, θ ein Vektorraum-Isomorphismus und i die kanonische Inklusion des Bildraumes in W ist.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 48.8, angewendet aud die surjektive Abbildung

$$V \longrightarrow \operatorname{bild}\varphi.$$

□

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

Bild = Urbild modulo Kern.

Lemma 48.10. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$U \subseteq V$$

ein Untervektorraum. Dann ist

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)\,.$$

Beweis. Die kanonische Projektion

$$V \longrightarrow V/U$$

ist surjektiv und besitzt U als Kern. Nach der Dimensionsformel ist somit

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)\,.$$

□

Lemma 48.11. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung*

$$V = U \oplus W$$

in Untervektorräume U und W. Dann ist

$$V/U \cong W.$$

Beweis. Die Projektion

$$V \longrightarrow W$$

besitzt U als Kern. Daher ergibt sich die Aussage aus Korollar 48.8. $\square$

Abbildungsverzeichnis