第十六章 無理數，虛數ノ計算

1. $\sqrt[n]{a}$ ナル記號ニツイテ

受驗生ノ中ニハ $\sqrt[4]{16}$ ト「16ノ四乘根」トヲ同一ノモノト考ヘテ居ル者ガ多イ。コレハ $\sqrt[4]{16}$ ヲ「16ノ四乘根」ト讀ムタメニ生ズル誤解デ，諸君ハ先ヅコノ誤解ヲ解消シテ貰ハネバナラヌ。〔$\sqrt[4]{16}$ ハ四乘根 16 ト讀ムベキデアル〕「16ノ四乘根」ト云ヘバ四乘スレバ 16 トナル數即チ $x^4=16$ ヲ滿足スル x ノコトデ ±2, $\pm2i$ ノ四ツアル。所ガ，$\sqrt[4]{16}$ ハソノ中ノ正ノ實數ナル 2 ノミヲ表ハス記號デ，一般ニ「a ノ n 乘根」トハ n 乘スレバ a トナル數即チ $x^n=a$ ヲ滿足スル x ノコトデ n 個アルガ $\sqrt[n]{a}$ ハソノ中ノ或一ツノミヲ表ハス記號デ，ドノ一ツヲ表ハスカニツイテハ次ノ規約ガアル。

2. 根號ノ規約

(1) $\sqrt{a}$ ニツイテ

$a>0$ ノトキ $\sqrt{a}$ ハ正數 a ノ平方根ノ中，正(正ノ實數)ナルモノノミヲ表ハシ $a<0$ ノトキ $\sqrt{a}$ ハ負數ノ平方根即チ一ツノ虛數ヲ表ハシ $a=0$ ノトキ $\sqrt{a}$ ハ零ヲ表ハス。

註 例ヘバ 4 ノ平方根ハ ±2 ノ二ツアルガ $\sqrt{4}$ ハ 2 ノミヲ表ハシ，$\sqrt{-4}$ ハ $2i$〔但 $i=\sqrt{-1}$ トス〕ナル虛數ヲ表ハシ $\sqrt{0}=0$ デアル。依テ $\sqrt{a}$ ナル形ノ數ハ正數カ又ハ零カ又ハ虛數ヲ表ハシ，決シテ負數ヲ表ハスコトハナイ。

(2) $\sqrt[3]{a}$ ニツイテ

$a>0$ ノトキ $\sqrt[3]{a}$ ハ正數 a ノ三乘根ノ中實數(正ノ實數)ナルモノノミヲ表ハシ $a<0$ ノトキ $\sqrt[3]{a}$ ハ負數 a ノ三乘根ノ中實數(負ノ實數)ナルモノノミヲ表ハシ $a=0$ ノトキ $\sqrt[3]{a}$ ハ零ヲ表ハス。

註 例ヘバ 8 ノ三乘根ハ 2, 2ω, $2\omega^2$ $\left[\text{但シ } \omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right]$ ノ三ツアルガ $\sqrt[3]{8}$ ハ 2 ノミヲ表ハシ，-8 ノ三乘根ハ -2, -2ω, $-2\omega^2$ ノ三ツアルガ $\sqrt[3]{-8}$ ハ -2 ノミヲ表ハス。

(3) $\sqrt[4]{a}$ ニツイテ

$a>0$ ノトキ $\sqrt[4]{a}$ ハ正數 a ノ四乘根ノ中，正(正ノ實數)ナルモノノミヲ表ハシ $a<0$ ノトキ $\sqrt[4]{a}$ ノ如キ數ハ中等學校デハ取扱ハナイ數デ，負數 a ノ四乘根ハ四ツアルガ $\sqrt[4]{a}$ ハソノ中ノ何レノ一ツヲ表ハスカニ就テハ規約ガナイ(註 參照) $a=0$ ノトキ $\sqrt[4]{a}$ ハ零デアル。

註 例ヘバ 4 ノ四乘根ハ ($x^4=4$ ヲ解イテ) $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{2}i$ ノ四ツアルガ $\sqrt[4]{4}$ ハソノ中デ正ノ實數ナル $\sqrt{2}$ ノミヲ表ハス記號デ，-4 ノ四乘根ハ $x^4=-4$ ノ根デ之ヲ解クト

$$x^4+4=0 \qquad \therefore\ (x^2+2)^2-4x^2=0$$
$$\therefore\ (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$$
$$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{-1}, \qquad x=1\pm\sqrt{-1}$$

ノ四ツアリ悉ク虛數デアル。ソシテ $\sqrt[4]{-4}$ ガコレラノ四ツノ中何レノ一ツヲ表ハスカニ就テハ何ノ規約モナイカラ，諸君ハ $\sqrt[4]{(\text{負數})}$ ノ如キ數ハ取扱ハナクテヨイ。

(4) $\sqrt[n]{a}$ ニツイテ

(イ) n ガ奇數ノトキ a ノ正負ニ拘ラズ實數 a ノ n 乘根(但シ n ハ奇數)ハ n 個アツテ一ツハ實數，他ノ $(n-1)$ 個ハ虛數デアル。ソシテ $\sqrt[n]{a}$(但 n ハ奇數)ハソノ n 個ノ中實數ノモノノミヲ表ハス (ロ) n ガ偶數ノトキ i) $a>0$ ナラバ n 個ノ中一ツハ正ノ實數，一ツハ負ノ實數デ他ノ $(n-2)$ 個ハ虛數デアル。ソシテ $\sqrt[n]{a}$(但シ n ハ偶數)ハソノ中正ノ實數ノモノノミヲ表ハス ii) $a<0$ ナラバ n 個共全部虛數デ $\sqrt[n]{a}$(但シ $a<0$ デ n ガ 4 以上ノ偶數)ハソノ n 個ノ中ノ何レヲ表ハスカニ就テ何ノ規約モナイ。(從ツテ取扱ハナクテヨイ)

特ニ $n=2$ ノトキ即チ負數ノ平方根ダケハ諸君ノ取扱フ範圍ノ數デ $\sqrt{a}$（但 $a<0$）ハ一ツノ虛數ヲ表ハス。

3. 冪根ニ關スル基礎公式

$a,\ b,\ c$ ガ何レモ正數デ，$m,\ n,\ p$ ガ正ノ整數ナルトキ

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$ (2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(3) $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ (4) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ (6) n ガ奇數ノトキ $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

註 コレラノ公式ハ $a,\ b,\ c$ ノ中ニ負ナルモノガアレバ必ズシモ成立シナイ。但シ n ガ奇數ノトキハ公式(6)ニ依ッテ根號內ガ正ナルモノニ直セルシ，n ガ 4 以上ノ偶數デ根號內ガ負ナル場合ハ諸君ハ取扱ハナクテヨイカラ，結局平方根ノ根號內ガ負ナルモノ即チ次ニ述ベル虛數ノ取扱ヒダケヲ注意スレバヨイ。

4. 虛數ノ取扱ヒニ就テ

虛數ノ計算デハ $\sqrt{-1}$ ヲ i デ表ハシ $\sqrt{-3}$ ハ $\sqrt{3}i$，$\sqrt{-4}$ ハ $2i$，$\dfrac{1-\sqrt{-5}}{2}$ ハ $\dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ ノ如ク i ヲ用ヒテ書キ表ハシタ後ニ實數ト同樣ノ計算ヲナシ，結果ニ於テ i^2 ヲ -1 ニ置キ換ヘレバヨイ。從ッテ

$i^3=i^2\times i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,\ i^5=i^4\times i=i$ トナル。

5. 虛數計算ノ特殊公式

(I) $a<0,\ b<0$ ノトキハ

$\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$ デ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ デアル。

其他ノ場合（即チ $a>0,\ b>0$ ノトキ，$a>0,\ b<0$ ノトキ，$a<0,\ b>0$ ノトキ）ハ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ デアル。

(II) $a>0, b<0$ ノトキハ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\neq\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ デ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ デアル。其他ノ場合ハ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ デアル。

例ヘバ (I) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)(-3)}$

$\because\ \sqrt{-2}\sqrt{-3}=(i\sqrt{2})(i\sqrt{3})=i^2\sqrt{2}\sqrt{3}=-\sqrt{6}$

$\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$

$\therefore\ \sqrt{-2}\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)(-3)}$ デ $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$ デアル。

(II) $\sqrt{\dfrac{2}{-3}}\neq\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}$

$$\because\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{2}{-3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{3}}=\dfrac{i\sqrt{3}}{i^2\sqrt{3}}=\dfrac{i\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}\end{array}\right\}\ \therefore\sqrt{\dfrac{2}{-3}}\neq\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\ \text{デ}\ \sqrt{\dfrac{2}{-3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\ \text{デアル}$$

【例題】 $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ ヲ簡單ニセヨ。

【解】 與式ヲ P トスレバ $P=a+2\sqrt{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}+\dfrac{1}{a}-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

$=2\sqrt{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

（イ）$a>0$ ノトキハ $\dfrac{1}{a}>0$ $\therefore\ \sqrt{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}=1$ $\therefore\ P=2$

（ロ）$a<0$ ノトキハ $\dfrac{1}{a}<0$ $\therefore\ \sqrt{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}=-\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}=-1$ $\therefore\ P=-2$

答 $a>0$ ノトキ 2，$a<0$ ノトキ -2

6. 同類根式ト同次根式

$m\sqrt[n]{a}$ ナル形ノ式ニ於テ n ヲ根指數，a ヲ底，m ヲ $\sqrt[n]{a}$ ノ係數トイフ。ソシテ底ト根指數トガ夫々相等シイ根式 例ヘバ $2a\sqrt[3]{ab^2}$ ト $-3a^2b\sqrt[3]{ab^2}$ ノ如キモノヲ同類根式トイヒ，根指數ノ等シイ根式 例ヘバ $\sqrt[5]{a^3b}$ ト $\sqrt[5]{ab^4}$ ノ如キモノヲ同次根式トイフ。

例 111. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

(A) $7\sqrt[3]{250}-8\sqrt[3]{16}-6\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$

(B) $\sqrt{-72}+\sqrt{-8}-\sqrt{-32}$

(C) $(2\sqrt{-3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{-3}-5\sqrt{2})$

方針　(A) ハ根號內ノ完全立方數ヲ根號ノ前ニ出シテ根號內ヲ出來ルダケ簡單ニ（斯クスルコトヲ最簡根式ニ直ストイフ）シタル後，計算スル。(B)，(C) ハ共ニ虛數ノ計算デアルカラ，i デ表ハシタ後ニ計算スル。

【解】(A)　與式$=7\sqrt[3]{5^3\times 2}-8\sqrt[3]{2^3\times 2}-6\sqrt[3]{3^3\times 2}-\sqrt[3]{2}$

$=35\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}-18\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=0$……答

(B)　與式$=i\sqrt{72}+i\sqrt{8}-i\sqrt{32}$

$=6\sqrt{2}\,i+2\sqrt{2}\,i-4\sqrt{2}\,i=4\sqrt{2}\,i$………答

(C)　與式$=(2\sqrt{3}\,i+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}\,i-5\sqrt{2})$

$=24i^2+12\sqrt{6}\,i-10\sqrt{6}\,i-30$

$=-24+2\sqrt{6}\,i-30=2\sqrt{6}\,i-54$ ………答

【試練問題】　次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(i)　$3\sqrt{45}-2\sqrt{20}+7\sqrt{5}$，　(ii) $5\sqrt[3]{81}-7\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{648}$

(iii) $2\sqrt{-75}+3\sqrt{-300}-5\sqrt{-27}$ (iv) $(7+\sqrt{-6})(5-\sqrt{-24})$

答 (i)　$12\sqrt{5}$　(ii) $11\sqrt[3]{3}$　(iii) $25\sqrt{3}\,i$　(iv) $47-9\sqrt{6}\,i$

例 112.　$x=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$　ニ於テ $n=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ナルトキ x ノ値如何。

方針　先ヅ與式ヲ整頓シタ後ニ n ノ値ヲ代入スル。

【解】　$x=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$

$=n^3-3n^2+2n+3n^2-3n+n=n^3$

$\therefore\ x=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\dfrac{-(1+\sqrt{3}\,i)^3}{8}$

$=-\dfrac{1}{8}\left\{1+3\sqrt{3}\,i+3(\sqrt{3}\,i)^2+(\sqrt{3}\,i)^3\right\}$

$=-\dfrac{1}{8}\left\{1+3\sqrt{3}\,i-9-3\sqrt{3}\,i\right\}$　〔$\because\ i^3=i^2\times i=-i$〕

$=-\dfrac{1}{8}(1-9)=1$　　答 1

指導講話　數値計算ハ原式ヲ最簡ニシタル後代入スベシトイフ原則ヲ忘レ，直チニ原式ヘ n ノ値ヲ代入シテ計算ヲ試ミル者以外ニ多ク，之ガ爲ニ途中デ誤算ヲ來ス者ガ多イ。

【試練問題】　$x=\sqrt{-2}$，$y=\sqrt{-3}$ ナル時

$$\frac{\dfrac{2xy}{x+y}-x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x-2y}}+\frac{\dfrac{2xy}{x+y}-y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2x}}$$

ノ數値ヲ小數第二位マデ算出セヨ。　答 -2.44……

6.　分母ノ有理化

• 分數式ノ分母ニ無理數（又ハ無理式）ガアルトキ，ソノ分數式ノ値ヲ變ヘナイデ，**分母ヲ有理數**（又ハ有理式）ニ直スコトヲ**分母ヲ有理化**スルトイフ。

無理數又ハ無理式ヲ有理數又ハ有理式ニ直スタメニ乘ズベキ因數ヲソノ因數ノ**消根因數**又ハ**有理化因數**トイフ。

例ヘバ　$m\sqrt{a}$ ノ消根因數ハ $\sqrt{a}$

$n\sqrt[3]{a}$ ノ消根因數ハ $\sqrt[3]{a^2}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ノ消根因數ハ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ ノ消根因數ハ $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ デアル。

【例】　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$　ノ消根因數ハ何カ。

【解】　先ヅ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$　ヲ乘ジテ…………①

$\{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2$

$=(a+b-c)+2\sqrt{ab}$

次ニ $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$　ヲ乘ジテ…………………②

$\{(a+b-c)+2\sqrt{ab}\}\{(a+b-c)-2\sqrt{ab}\}=(a+b-c)^2-4ab$

$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$

①②ヨリ求ムル消根因數ハ $\{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\}\{(a+b-c)-2\sqrt{ab}\}$ 答

【試問】　$\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$　ノ消根因數ハ何カ。

ヒント　先ヅおいれるノ公式ヲ應用セヨ。

答 $(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{6})(100+30\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900})$

例 112. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(A) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$　(B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}$

(C) $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$

方針　無理分數式ヲ簡單ニセヨトハ分母ヲ有理化セヨ，トイフ事デアル。

(A) ハ $a^3 \pm b^3$ ノ公式，(B) ハおいれるノ公式ヲ適用シテ解決スル

(A)【解】

$$\text{與式}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}+\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}+\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{2+1}=\frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$$

$$=\frac{2(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2)}{3}\cdots\cdots\text{答}$$

(B)【解】

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}=\frac{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4-2-2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}+4-\sqrt[3]{8}-2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2})}$$

$$=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4})^3+2^3-3(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4})(2)}$$

$$=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{2+4+8-12}=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{2}\cdots\cdots\text{答}$$

【別法】　分母ニ $\sqrt[3]{2}$ ナル共通因數ノアルコトニ着眼スルト

$$\text{與式}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$$

STOP　コヽデおいれるノ公式ヲ用ヒテモヨイガ，分母ノ括弧內ハ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ニ於ケル最後ノ式ノ形デアル事ニ着眼スルト $\sqrt[3]{4}(1-\sqrt[3]{2})$ ガ分母ノ有理化因數デアルコトニ氣ガ付ク，依テ

GO　上式 $=\dfrac{\sqrt[3]{4}(1-\sqrt[3]{2})}{2(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{2})}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-2}{2(1-2)}=\dfrac{2-\sqrt[3]{4}}{2}$　答

(C)【解】　分母ノ各因數ノ有理化因數ヲ分母子ニ乘ジテ

$$\text{與式}=\frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})(6+2\sqrt{7})(3-\sqrt{5})(11-4\sqrt{7})}{(36-28)(9-5)(121-112)}$$

STOP　コレデモ分母ハ有理化サレタガ，分子ノ計算ガ少々面倒デアル。ソコデ與式ノ分母，分子ニ於ケル同類根式ニ着眼シテ次ノ如クヤルト簡單ニ出來ル。(尙上記ノ方法ニヨル場合モ分子ノ計算ヲ同類根式ニ着眼シテ取扱ヘバ比較的簡單ニナル。)

GO　先ヅ與式ノ分子，分母ニ於ケル同類根式ノ積ヲ簡約スルト

$$(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})=217+29\sqrt{5}-130=29(3+\sqrt{5})$$

$$(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})=66+2\sqrt{7}-56=2(5+\sqrt{7})$$

$$\therefore\ \frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}=\frac{29(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{7})}{2(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{5})}=\frac{29}{2}\cdots\cdots\text{答}$$

【試練問題】　次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(i) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$　(ii) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

(iii) $\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{3}+1)}$

答 (i) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$　(ii) $\dfrac{c(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{a+b}$　(iii) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

例 113.

(A) $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ。

(B) $\dfrac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-2\sqrt{2}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}}$ ノ値ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

(A) **方針**　分母ガ四項式デアルカラ二項宛組合セテ見ル。

【解】 與式$=\dfrac{(5+\sqrt{6})-(\sqrt{10}+\sqrt{15})}{(5+\sqrt{6})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{15})^2}$

$=\dfrac{5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}}{(31+10\sqrt{6})-(25+10\sqrt{6})}=\dfrac{5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}}{6}$ 答

(B) 方針　上例ニ做ツテモ出來ルガ先ヅ各々ヲ最簡根式ニ直ス事ニ氣付ケバ次ノ樣ニ簡單ニナル。倘近似値ノ計算ハ分母ノ有理化ガ先決問題デ分母ニ近似値ヲ代入シテハナラヌ。

【解】 與式$=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ ……①

$=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1.7320\cdots\cdots}{3}=0.577\cdots\cdots$

答　0.577……

指導補説　上ノ解ニ於テ①式ノ分母子ニ近似値ヲ代入シテ

$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\dfrac{3-2.449\cdots\cdots}{3(1.732\cdots)-3(1.414\cdots)}$ トスル者ガアルガ之ハ絶對ニ禁物デ，分母ニ近似値ヲ代入シテハナラヌ。（但シ對數計算ダケハ例外）

註　次ノ如キ無理數ノ近似値ハ屢々用ヒラレルカラ記憶シテ置クガヨイ。

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$ (ヒトヨヒトヨニヒトミゴロ)	一夜一夜に人見頃
$\sqrt{3}=1.7320508\cdots\cdots$ (ヒトナミニオゴレヤ)	人並におごれや
$\sqrt{5}=2.2360679\cdots\cdots$ (フジサンロクオームナク)	富士山麓おーむ鳴く
$\sqrt{6}=2.449489\cdots\cdots$ (ニヨヨクヨウヤク)	似よよく漸く
$\sqrt{7}=2.64575\cdots\cdots$ (ナニムシイナイ)	菜に虫居ない
$\sqrt{10}=3.1622\cdots\cdots$ (ミイロニ(ナラブ))	三色に並ぶ(2が並ぶ)

【試練問題】 $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ。

答　$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{14}-\sqrt{15}+\sqrt{21}}{2}$

例 114.

(A) $\dfrac{6}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

ヲ計算シテ小數第四位マデ正シク求メヨ。

(B) $\dfrac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

ヲ簡單ニセヨ。

(A) 着眼　分母ガ三項式デアルカラ適當ニ二項ト一項トニ組合セテソノ消根因數ヲ乘ジテ分母ヲ有理化スル。

【解】

與式$=\dfrac{6(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\dfrac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}-\dfrac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{6(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}-\dfrac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

2 デ約シテ

$=\dfrac{3+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{8+6\sqrt{6}}{2}=4+3\sqrt{6}$

$=4+3(2.449489\cdots\cdots)=11.3484\cdots\cdots$ 答

(B)【解】

第一式$=\dfrac{(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\quad)(\quad)(\quad)}{(1-3)(3-5)}$

STOP　コノ分子ヲ整頓シテモ出來ルガ，與式ノ分母ガ二因數ノ積デ分子ガソノ和ニ等シイ事ニ着眼シテ部分分數ニ直セバ簡單ニナル。

GO　第一式$=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

第二式$=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+3}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

依テ　與式$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2}{2}=1\cdots\cdots$ 答

【試練問題】 次式ヲ簡單ニセヨ。

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

(ii) $\dfrac{1-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-4}{(\sqrt{3}-2)(2-\sqrt{5})}$ ノ値ヲ小數第五位マデ正シク計算セヨ。

答 (i) $\sqrt{2}$　(ii) $-1.23606\cdots\cdots$

7. $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ ナル形ノ無理式ノ簡約 (但 a, b ハ正ノ有理數)

定理 19. $a=x+y,\ b=xy$ ヲ滿足スル $x,\ y$ ガ共ニ正ノ有理數ナルトキ

(i) $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

(ii) $\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$　(但シ $x>y$ トス)

【證明ノ要點】 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ノ兩邊ヲ平方スルト

$a+2\sqrt{b}=(x+y)+2\sqrt{xy}$ コノ兩邊ヲ比較シテ

$a=x+y,\ b=xy$

$\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ノトキモ同樣デアル。

註 1. $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ ニ於テ b ガ負數デアル場合ハ與式ガ虛數ノ平方根ヲ表ハスコトニナリ，ソノ變形ハ中等學校ニ於テハヤラナイ事ニナツテキルノデ，諸君ハ b ガ正デ且有理數ナルトキノミヲ取扱ヘバヨイノデアル。

註 2. 公式 (ii) ニ於テ $x<y$ デアルト右邊ハ負數トナリ，左邊ハ根號ノ規約ニヨリ負數ヲ表ハスコトハナイカラ不合理デアル。依テ必ズ $x>y$ トシナケレバナラヌ。

註 3. コノ公式ニ於テハ $\sqrt{b}$ ノ係數ガ必ズ 2 デナケレバナラヌカラ，與式ノ $\sqrt{b}$ ノ係數ガ 2 デナイトキハ，2 トナル樣ニ變形シテカラ公式ヲ適用スルノデアル。例ヘバ

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{2\times9}}=\sqrt{\overset{大}{9}}-\sqrt{\overset{小}{2}}=3-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{13+\sqrt{168}}=\sqrt{13+2\sqrt{42}}=\sqrt{(6+7)+2\sqrt{6\times7}}=\sqrt{6}+\sqrt{7}$$

$$\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{7-\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{14-2\sqrt{45}}{2}}=\frac{\sqrt{\overset{大}{9}}-\sqrt{\overset{小}{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

例 115. (A) $\dfrac{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ ヲ簡單ニセヨ。

(B) $\dfrac{1}{6}(11-\sqrt{101-36\sqrt{5}})$ ヲ簡單ニセヨ。

(C) $\sqrt{1+x^2-\sqrt{1+x^2+x^4}}$ ヲ簡單ニセヨ。

(A)【解】

$$與式=\frac{3+\sqrt{5-\sqrt{13+2\sqrt{12}}}}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}=\frac{3+\sqrt{5-(\sqrt{12}+1)}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}=\frac{3+(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}=7+4\sqrt{3}$$

(B)【解】 $與式=\dfrac{1}{6}\left(11-\sqrt{101-2\sqrt{5\times18^2}}\right)$

STOP サテ積ガ 5×18^2 即チ 1620 デ其和ガ 101 ナル如キ二數ヲ觀察ニヨツテ發見スル事ハ不可能デハナイガ容易デハナイ。コンナ場合ハ次ニ示ス樣ニ一元二次方程式ノ根ノ公式ヲ應用スル。

GO 和ガ 101，積ガ 1620 ナル如キ二數ハ

$$t^2-101t+1620=0 \quad ノ二根デアル。$$

之ヲ解クト $t=\dfrac{101\pm\sqrt{101^2-4\times1620}}{2}=\dfrac{101\pm61}{2}=81$ 又ハ 20

$$\therefore\ \sqrt{101-2\sqrt{5\times18^2}}=\sqrt{\overset{大}{81}}-\sqrt{\overset{小}{20}}=9-2\sqrt{5}$$

依テ 與式$=\dfrac{1}{6}\left\{11-(9-2\sqrt{5})\right\}=\dfrac{1}{6}(2+2\sqrt{5})=\dfrac{1}{3}(1+\sqrt{5})$ 答

(C)【解】 與式$=\sqrt{\dfrac{2+2x^2-2\sqrt{1+x^2+x^4}}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+2x^2-2\sqrt{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}$$

シカルニ　$(1+x+x^2)+(1-x+x^2)=2+2x^2$

STOP　コヽデ $1+x+x^2$ ト $1-x+x^2$ トノ大小ヲ考慮セズニ直チニ

與式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right\}$ トヤルモノガアルガ之ハイケナイ。

GO　シカルニ
$$\left.\begin{array}{l} x>0 \text{ ノトキハ } 1+x+x^2>1-x+x^2 \\ x<0 \text{ ノトキハ } 1+x+x^2<1-x+x^2 \\ x=0 \text{ ノトキハ } 1+x+x^2=1-x+x^2=1 \end{array}\right\}\text{ナル故}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x>0 \text{ ノトキ} & \text{與式}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\overset{\text{大}}{\sqrt{1+x+x^2}}-\overset{\text{小}}{\sqrt{1-x+x^2}}\right\} \\ x<0 \text{ ノトキ} & \text{與式}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}\right\} \\ x=0 \text{ ノトキ} & \text{與式}=0 \end{array}\right\}\text{答}$$

【試練問題】

(i)　次式ノ數値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$\sqrt{4+\sqrt{5}+\sqrt{17-4\sqrt{15}}}$　（東　醫）

(ii)　$\sqrt{73-12\sqrt{35}}$　ヲ簡單ニセヨ。

(iii)　$\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+2x^2}}$　ヲ簡單ニセヨ。

答 (i)　2.732……　(ii)　$3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$

(iii)　$\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{1+2x^2}+1)}{2}$　〔但シ $x\neq0$ ナル實數トス〕

例 116.　$\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ ヲ計算シ小數第三位未滿ヲ四捨五入セヨ。

方針　根號內ノ $\sqrt{5}$ ノ係數ガ 2 トナル樣ニ變形シテ公式ヲ適用スル。

【解】 與式$=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}}$

$$=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$$

STOP　コノ分母子ニ $\sqrt{2}$ ヲ乘ジテ整頓スレバ出來ルガ，コノ樣ナ問題ハ次ノ樣ニ初メカラ直接分母子ニ $\sqrt{2}$ ヲ乘ジルト繁分數式ニナラズニ $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ニ於ケル $\sqrt{5}$ ノ係數ヲ 2 ニスル事ガ出來テ簡單ニナル

【別解】　$\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

分母子ニ $\sqrt{2}$ ヲ乘ジルト

$$=\frac{20}{6-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{20}+6}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{20}{6-(\sqrt{5}+1)}-\frac{2\sqrt{5}+6}{4+(\sqrt{5}-1)}=\frac{20}{5-\sqrt{5}}-\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3}$$

$$=\frac{20(5+\sqrt{5})}{25-5}-2=3+\sqrt{5}=5.23606\cdots\cdots$$

小數第三位未滿ヲ四捨五入シテ　5.236 強　　答 5.236 強

【試練問題】　$\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$　ノ値ヲ小數第二位迄正シク求メ，以下切捨テヨ。　（樽　商）

答　2.44

例 117. $\dfrac{\sqrt{6\sqrt{3}-12}}{\sqrt{3}-1}$ ヲ簡單ニセヨ。

【解】 分子ヲ公式ノ形ニ直スト $\sqrt{6\sqrt{3}-12}=\sqrt{-12+2\sqrt{27}}$

STOP 積ガ 27 デ其和ガ -12 ナル如キ二ツノ正ノ有理數ハ存在セヌカラ公式ハ適用出來ナイ。ソコデ $6\sqrt{3}-12$ ガ負數，從ッテ**分子ハ虛數**デアルカラ $\sqrt{-1}$ ヲ括リ出スト根號内ガ正トナルト考ヘテ

GO 分子$=\sqrt{-12+2\sqrt{27}}=\sqrt{-1}\sqrt{12-2\sqrt{27}}=i(\sqrt{9}-\sqrt{3})$

依テ 與式$=\dfrac{i(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{i\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=i\sqrt{3}$ ……答

【解決ノ急所】「根號内ガ負ナルトキハ $\sqrt{-1}$ ヲ括リ出スコト」ガコノ問題ノ山デアル。コレニ引ッカヽッテ正解シ得ナイ者ガ意外ニ多イ。

【試練問題】 次ノ式ノ平方根ヲ求メヨ。$6\sqrt{3}-4\sqrt{6}$

答 $\pm\sqrt[4]{3}(2-\sqrt{2})$

例 118. $\dfrac{\sqrt[3]{(54\sqrt[6]{125}-189\sqrt[3]{5\sqrt{5}})}(\sqrt{55}+\sqrt{0.\dot{4}\dot{5}})}{\sqrt{1-\dfrac{5+2\sqrt{5}}{11}}}$

ヲ簡單ニセヨ。但シ $0.\dot{4}\dot{5}$ ハ循環小數トス。

方針 相當物々シイ式デアルカラ全部ヲ一度ニヤラズニ**各部分ヲ別々ニ簡約**スル。

【解】 $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5}$ …① $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^3}}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5}$ …②

$0.\dot{4}\dot{5}=0.45+0.0045+0.000045+\cdots\cdots$

$=$〔初項 0.45，公比 0.01 ナル無限等比級數ノ和〕

$=\dfrac{0.45}{1-0.01}=\dfrac{45}{99}=\dfrac{5}{11}$

依テ 分子$=\sqrt[3]{(54\sqrt{5}-189\sqrt{5})}\left(\sqrt{55}+\sqrt{\dfrac{5}{11}}\right)$

$=\sqrt[3]{-135\sqrt{5}}\left(\dfrac{11\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)=-3\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\left(\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)$

②ヲ代入シテ $=-3\sqrt{5}\left(\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)=-\dfrac{180}{\sqrt{11}}$

分母$=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{11}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{11}}$

依テ 與式$=\dfrac{-\dfrac{180}{\sqrt{11}}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{11}}}=\dfrac{-180(\sqrt{5}+1)}{5-1}=-45(\sqrt{5}+1)$ ……答

指導講話 $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ ヲ $\sqrt[3]{\sqrt{5\times5^2}}$ トスル事ニ氣付カナイモノ，及ビ分子ノ計算ノ途中ニ於ケル $\sqrt[3]{-135}$ ヲ $\sqrt[3]{(-3)^3\times5}$ ト考ヘテ$-3\sqrt[3]{5}$ トスル事ニ氣付カヌタメニ失敗スルモノガ多イ。

【試練問題】 $\dfrac{\sqrt[3]{81\sqrt[3]{5\sqrt{5}}+54\sqrt[6]{125}}\left(\sqrt{35}+\sqrt{\dfrac{5}{7}}\right)}{\sqrt{\dfrac{7}{5}}-\sqrt{\dfrac{125}{343}}}$

ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。　（東大農實）

答 78.26……

例 119. 無理式 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ ノ値ヲ $a+b$ ノ形ニテ示シ，a ハ其ノ整數部分，b ハ 1 ヨリ小ナル他ノ部分ナリトセバ，次ノ分數式ノ値如何。但シ答ハ小數第二位マデ求メヨ。

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$$

方針 先ヅ $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ ノ近似値ヲ求メテ a，b ヲ決定スル。

【解】 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{14+2\sqrt{5\times9}}=3+\sqrt{5}=5.236$ ……①

題意ニヨリ　$a=5,\quad b=0.236\cdots\cdots$　②

然ルニ　$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$　③

故ニ求ムル値ハ　$\dfrac{10}{5^2-(0.236\cdots\cdots)^2}=$　?

STOP　分母＝無限小數 0.236…… ノ平方ガアルカラ，之デ分子ヲ割ツテモ商ヲ正確＝求メルコトガ出來ナイ。コレハ分母＝近似値ヲ代入シタ爲デアルカラ，分母ノ有理化ガ先決問題ダト考ヘテ，

GO　題意＝ヨリ　$a+b=3+\sqrt{5}$　且②ヨリ　$a=5$　ナル故

$$b=(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③＝代入シテ

$$\frac{2a}{a^2-b^2}=\frac{10}{5^2-(\sqrt{5}-2)^2}=\frac{10}{16+4\sqrt{5}}=\frac{5}{8+2\sqrt{5}}=\frac{5(8-2\sqrt{5})}{44}$$

$$=\frac{20-\sqrt{125}}{22}=\frac{20-11.18\cdots}{22}=0.400\cdots$$

答　0.40……

[illegible]　b ノ値ヲ見極メ得ナイモノガ大部分デアル。又小數第二位マデ正確＝求メネバナラヌノ＝，コノ點ガ不充分ナ者ガ少クナイ。（即チ分母＝近似値ヲ代入シテヨイ加減＝小數第二位ヲ求メル者ガ多イ）。

【試錬問題】　$\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ ノ整數部分ヲ a 小數部分ヲ b トスルトキ次式ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。〔四捨五入＝ヨリ〕

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}$$

答　7.023 弱

8. $\sqrt{A^2}$ ナル形ノ式ノ取扱ヒ

無理式ノ計算＝於テ根號內ガ完全平方式＝ナツタ場合ハ特ニ警戒ヲ要スル。コノ取扱ヒ方ガ其問題ノ山デ何ノ斷リモナシニ $\sqrt{A^2}=A$ トヤツテハ其問題ハ臺無シデアル。

定理 20.
A＞0 ノトキハ $\sqrt{A^2}=A$ デアルガ
A＜0 ノトキハ $\sqrt{A^2}\neq A$ デ $\sqrt{A^2}=-A$（コレガ最モ大切）
特＝ A＝0 ノトキハ $\sqrt{A^2}=0$ デアル

【説明】　コレハ根號ノ規約＝ヨリ $\sqrt{a}$ ハ a ガ正ノトキハ正數ヲ表ハシ，a ガ負ノトキハ虛數ヲ表ハシ，a ガ零ノトキハ 0 ヲ表ハシ，從ッ

テ $\sqrt{a}$ ナル形ノ式ガ決シテ負數ヲ表ハスコトガナイ，ト云フコトガハツキリト判ツテ居レバ當然理解サレルコトデ，

例ヘバ　$A=3>0$　ノトキ $\sqrt{A^2}=\sqrt{9}=3$　$\therefore \sqrt{A^2}=A$　デアルガ

$A=-3<0$ ノトキ $\sqrt{A^2}=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3\neq A$ デ

$\sqrt{A^2}=-A$ トナリ，

$A=0$ ノトキ $\sqrt{A^2}=\sqrt{0^2}=0$ デアル。

系　逆＝ A ヲ根號內＝入レルトキモ同樣デ
A＞0 ノトキハ $A=\sqrt{A^2}$ デアルガ
A＜0 ノトキハ $A=-\sqrt{A^2}$ トナル。

【基本問題】　$a+b+\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ ヲ簡單＝セヨ。

【解】　$a+b+\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a+b+\sqrt{(a-b)^2}=P$ ト置ケバ

$a>b$ ノトキハ $\sqrt{(a-b)^2}=a-b>0$　$\therefore P=a+b+(a-b)=2a$

$a<b$ ノトキハ $\sqrt{(a-b)^2}=-(a-b)$　$\therefore P=a+b-(a-b)=2b$

$a=b$ ノトキハ $\sqrt{(a-b)^2}=0$　$\therefore P=a+b+0=2a$（又ハ $2b$）

例 10.　$0<x<1$ ナルトキ次式ヲ簡單＝セヨ。

$$\frac{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}}$$

【解】　$\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}=\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=x+\frac{1}{x}$

（$\because$ $x>0$ナル故 $x+\frac{1}{x}>0$）

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

（$\because$ $0<x<1$ ナル故 $x<\frac{1}{x}$　$\therefore x-\frac{1}{x}<0$）

依チ　與式$=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left\{-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left\{-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}}=\dfrac{2x}{\dfrac{2}{x}}=x^2$……答

指導總括　結局ハ$\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4}$ ノ處理ガコノ問題ノ狙ヒ所デアル，全ク夢中デ $x-\dfrac{1}{x}$ ノ正負ヲ考ヘズ＝ヤル者ガ多數アル。何ノタメ＝ $0<x<1$ ガ與ヘテアルカヲ思ヒ合セバ氣付クベキ筈デアラウ。

【試練問題】 $x,\ y$ ハ共＝實數＝シテ且 $(x+y)^2<1$ ナルトキ，
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+2xy-1}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+2xy-1}$$
ノ値ヲ求メヨ。　（成　城）

答．2

> 例 121. $\dfrac{1}{2}<a^2$ ナルトキ$\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}+\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$ ヲ簡單＝セヨ。

方針　根號內＝アル無理式 $\sqrt{1-a^2}$ ノ係數ヲ 2 トスルタメ＝ a ヲ根號內＝入レナケレバナラナイカラ，a ガ正ノ場合ト負ノ場合トヲ別テケ計算スル。

【解】（イ） $a>0$ ナルトキハ　$a=\sqrt{a^2}$ トナルカラ

與式$=\sqrt{1+2\sqrt{a^2(1-a^2)}}+\sqrt{1-2\sqrt{a^2(1-a^2)}}$

STOP　サテ a^2 ト $(1-a^2)$ トノ和ガ 1 デアルカラ各式ハ $\sqrt{\ }\pm\sqrt{\ }$ ナル形＝變形出來ルガ第二式＝於テハ a^2 ト $1-a^2$ トノ大小ヲ決定シナケレバナラヌト考ヘテ

GO　シカル＝ $a^2-(1-a^2)=2a^2-1>0$ （$\because$ $a^2>\dfrac{1}{2}$ ナル故 $2a^2>1$）

$\therefore\ a^2>1-a^2$

$\therefore$ 與式$=(\sqrt{a^2}+\sqrt{1-a^2})+(\overset{大}{\sqrt{a^2}}-\overset{小}{\sqrt{1-a^2}})=2\sqrt{a^2}=2a$

（$\because$ $a>0$ナル故$\sqrt{a^2}=a$）

（ロ） $a<0$ ナルトキハ $a=-\sqrt{a^2}$ トナルカラ

與式$=\sqrt{1-2\sqrt{a^2(1-a^2)}}+\sqrt{1+2\sqrt{a^2(1-a^2)}}$

$=(\overset{大}{\sqrt{a^2}}-\overset{小}{\sqrt{1-a^2}})+(\sqrt{a^2}+\sqrt{1-a^2})=2\sqrt{a^2}=-2a$

（$\because$ $a<0$ ナル故 $\sqrt{a^2}=-a$）

答　$a>0$ ノトキハ $2a$，　$a<0$ ノトキハ $-2a$

指導總括　a ノ取リ得ル範圍＝就テ今少シ嚴密＝取扱フト次ノ樣＝ナル

$a^2>\dfrac{1}{2}$ ヨリ$\left(a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$　$\therefore$ $a>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$又ハ$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ①

次＝ $1-a^2$ ガ負ナル場合ハ $\sqrt{1\pm2a\sqrt{1-a^2}}$ ガ虛數ノ平方根ヲ表ハスコトニナリ，吾人ノ取扱フ數ノ範圍ヲ超エルカラ $1-a^2\geqq0$ デナケレバナラヌ　$\therefore$ $a^2-1\leqq0$ コレヨリ $(a+1)(a-1)\leqq0$

$\therefore$ $-1\leqq a\leqq1$……………………………②

①②ヨリ a ノ取リ得ル範圍ハ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a\leqq1$ 又ハ $-1\leqq a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a\leqq1$ ノトキ 與式$=2a$，$-1\leqq a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ 與式$=-2a$ ト答ヘルノガ正シイノデアルガ，本問ノ主眼點ハ $\sqrt{a^2}$ ノ取扱ヒト $\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$ ノ形＝直ストキ大ナル方ヲ前＝置ク事ト＝アルノデ，a ノ範圍ノ決定ヲ省略シテ置イタ。

【試練問題】 $\sqrt{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}$ ヲ簡單＝セヨ。但シ $a^2\geqq4$ トス

答　$a>0$ ノトキ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-4}+a\right)$，

$a<0$ ノトキ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-4}+a\right)$

註　嚴密＝云ヘバ $a\geqq2$ ノトキ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-4}+a\right)$，

$a\leqq-2$ ノトキ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-4}+a\right)$

第十七章　無理式ノ値

1. 無理式ノ値ヲ求メル問題

有理式ノ値ヲ求メル場合ト大體ハ同一ノ方法ニ依ルガ，無理式ノ場合特ニ注意ヲ要スルノハ $\sqrt{(\quad)^2}$ ナル形ノ式ト $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ナル形ノ式ノ取扱ヒデアル。

（イ）直接代入スル例

例 122. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ヲ計算セヨ。

方針 簡單ナ問題デアルカラ直接數値ヲ代入シテ計算スル。

【解】 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ 與式 $=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

分母子×2

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3}+\frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{6+\sqrt{3}-3+6-\sqrt{3}-3}{6}=\frac{6}{6}=1$$ 答

【試練問題】 $x=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}}$ ナルトキ次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

答 3

例 123. x ハ正ノ數デ $x^2=10x+23$ ナルトキ

$\dfrac{x\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{x^2-x-5}\sqrt[4]{x+2}}$ ノ値ヲ小數第五位マデ求メヨ。

方針 分母ガ分子ヨリ複雜デアルカラ，分母ノ値ヲ先ニ計算スル。

【解】 $x^2=10x+23$ ……① ∴ $x^2-10x-23=0$

根ノ公式ニヨリ $x=5\pm\sqrt{48}=5\pm4\sqrt{3}$

題意ニヨリ x ハ正ノ數ナル故 $x=5+4\sqrt{3}$ ……………………②

STOP コノ値ヲ直接 $\sqrt{x^2-x-5}$ ニ代入シテモヨイガ，①ヲ代入シテ根號內ヲ x ノ一次式ニ直シテカラ代入スル方ガ簡單ニナル。尙 $\sqrt[4]{\ }$ ハ $\sqrt{\sqrt{\ }}$ ト直セバヨイ。

GO ①ヲ代入スルト

$$\sqrt{x^2-x-5}=\sqrt{(10x+23)-x-5}=\sqrt{9x+18}=3\sqrt{x+2}$$

$$=3\sqrt{7+4\sqrt{3}}=3\sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

$$=3(2+\sqrt{3})$$

$$\sqrt[4]{x+2}=\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

依テ 與式 $=\dfrac{(5+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{9(2+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

分母子ニ $\sqrt{2}$ ヲ乘ジルト

$$=\frac{(5+4\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2)+2}{9(2+\sqrt{3})\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\frac{18(2+\sqrt{3})}{9(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=0.73205\cdots\cdots$$

答 0.73205……

【試練問題】 方程式 $y^2-3y-1=0$ ノ負根ヲ x トスルトキ，次ノ式ノ値ヲ求メヨ。 $\dfrac{1-x}{x^2+3\sqrt{1+3x}}+\dfrac{x}{2-\sqrt{x^2-3x}}$ （東醫）

答 1

（ロ）求値式ヲ整頓シテ後ニ代入スル例

例 124. a,b ハ何レモ正數ニシテ $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ ナルトキ

$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ヲ簡單ニセヨ。

方針　求値式ノ分母ヲ有理化シテカラ代入スル。

【解】　$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\mathrm{P}$ トス。先ヅ分母ヲ有理化スルト

$$\mathrm{P}=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\frac{2a+2\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{2x}$$

STOP　コヽデ何ノ斷リモナシニ $\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}$ ヲ $\sqrt{a^2-x^2}$ トシテハナラヌ。$a+x$, $a-x$ ガ共ニ負ナラバ $\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=-\sqrt{a^2-x^2}$ トナリ，其他ノ場合即チ $a+x$, $a-x$ ノ中少クトモ一ツガ正ナラバ $\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=\sqrt{a^2-x^2}$ トナルコトヲハツキリト頭ニ置イテ解答ヲ續ケル。

GO　シカルニ a,b ガ共ニ正デ $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ ナル故 x モ亦正デアル。
從ツテ $a+x$, $a-x$ ガ同時ニ負トナルコトハナイ。($\because$ $a+x>0$)

$$\therefore\ \sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=\sqrt{a^2-x^2}$$

$\therefore$ $\mathrm{P}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$，コレニ $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ ヲ代入スルト

$$\mathrm{P}=\frac{a+\sqrt{a^2-\dfrac{4a^2b^2}{(b^2+1)^2}}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}=\frac{a+\sqrt{\dfrac{a^2\{(b^2+1)^2-4b^2\}}{(b^2+1)^2}}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}\cdots\cdots①$$

$\dfrac{a}{b^2+1}>0$ ナル故　$=\dfrac{a+\dfrac{a}{b^2+1}\sqrt{(b^2-1)^2}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}=\dfrac{b^2+1+\sqrt{(b^2-1)^2}}{2b}$

STOP　$\sqrt{(b^2-1)^2}$ ノ取扱ヒニ注意シテ

GO　$b>1$ ノトキハ $b^2-1>0$　　$\therefore \mathrm{P}=\dfrac{b^2+1+(b^2-1)}{2b}=b$

$b=1$ ノトキ　$b^2-1=0$　　$\therefore \mathrm{P}=\dfrac{1+1+0}{2b}=\dfrac{1}{b}$

$0<b<1$ ノトキ　$b^2-1<0$　　$\therefore \mathrm{P}=\dfrac{b^2+1-(b^2-1)}{2b}=\dfrac{1}{b}$

答　$b>1$ ナルトキ b,　$0<b\leqq 1$ ナルトキ $\dfrac{1}{b}$

指導總括　$\sqrt{(b^2-1)^2}$ ノ取扱ヒガ急所デ b^2 ト 1 トノ大小ヲ考ヘテ三ツノ場合ガ起ルノデアルガ，餘リニ詮索シ過ギテ a ノ値ノ種々ナル場

合ヲモ論ジルモノガアル。吟味ヲ要スベキ所ト不必要ナ所トノ判斷力ヲ養ハネバナラヌ。尙與式ノ分母ヲ有理化スルタメニ分母子ニ乘ジル式 $(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})\neq 0$ ト斷ツテ置ケバ一層ヨイ。

【試練問題】　$x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ トシテ $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ ヲ簡單ニセヨ。但シ a ハ零ヨリ大ナル實數トス。　(水 高)

答　$a>1$ ノトキ $\dfrac{1}{a}$, $a=1$ ノトキ 1, $0<a<1$ ノトキ a

例 125.　$x=a\sqrt{2b-a^2}$ ニ於テ x, a, b ガ實數ナルトキ $\dfrac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}$ ノ値ヲ求メヨ。

【解】　求値式ヲ P トスル。$x\neq 0$ ノトキハ $\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}\neq 0$ ナル故，之ヲ分母子ニ乘ジ

$$\mathrm{P}=\frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}=\frac{(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})^2}{2x}=\frac{b+\sqrt{b+x}\sqrt{b-x}}{x}$$

STOP　コヽマデハ前問ト同一デアルガ，b ノ正負ニツイテ條件ガ與ヘラレテキナイ（前問デハ a, b ハ正數トイフ條件ガアツタ）ソコデ先ヅ b ノ正負ヲ決定シナケレバ $\sqrt{b+x}\sqrt{b-x}$ ノ簡約ガ出來ヌト考ヘテ

GO　題意ニヨリ　$x=a\sqrt{2b-a^2}$ デ x ガ實數ナル故
　　$2b-a^2\geqq 0$　　$\therefore$ $2b\geqq a^2\cdots\cdots①$
シカルニ a モ實數ナル故 $a^2\geqq 0$　　$\therefore$ $b\geqq 0$ ナルヲ要ス。
從ツテ $b+x$, $b-x$ ハ同時ニ負トナル事ハナイ。
($\because$ $b+x<0$, $b-x<0$ トスレバ邊々加ヘテ $2b<0$ トナルカラ)

$\therefore$ $\sqrt{b+x}\sqrt{b-x}=\sqrt{b^2-x^2}$　　$\therefore$ $\mathrm{P}=\dfrac{b+\sqrt{b^2-x^2}}{x}$

$x=a\sqrt{2b-a^2}$ ヲ代入シテ　　$\mathrm{P}=\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2(2b-a^2)}}{a\sqrt{2b-a^2}}$

$$=\frac{b+\sqrt{(b-a^2)^2}}{a\sqrt{2b-a^2}}\cdots\cdots②$$

STOP　警戒式 $\sqrt{(b-a^2)^2}$ ノ取扱ヒニ注意シ，b ト a^2 トノ大小ヲ考ヘテ

GO　①ヨリ　$b \geqq \dfrac{a^2}{2}$ ナル故

i）　$b>a^2$ ノトキ ②ヨリ　　$P=\dfrac{b+(b-a^2)}{a\sqrt{2b-a^2}}=\dfrac{\sqrt{2b-a^2}}{a}$

ii）　$a^2>b>\dfrac{a^2}{2}$ ノトキ　　$P=\dfrac{b-(b-a^2)}{a\sqrt{2b-a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2b-a^2}}$

iii）　$b=a^2$ ノトキ　　$P=\dfrac{a^2+0}{a\sqrt{a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2}}$

$$\therefore \begin{cases} a>0 \text{ ノトキ } P=\dfrac{a}{a}=1 \\ a<0 \text{ ノトキ } P=\dfrac{a}{-a}=-1 \end{cases}$$

特ニ　$b=\dfrac{a^2}{2}$ ノトキハ　$x=0$ トナルカラ　$P=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b}}=\dfrac{2\sqrt{b}}{0}$

$\therefore$　$b=0$ ノトキハ與式ノ値ハ不定，$b\neq 0$ ノトキ與式ノ値ハ求メラレナイ（不能）

指導綱括　$b=\dfrac{a^2}{2}$ ノ場合ハ　$x=0$ トナリ，「求値式ノ分母ガ 0 トナルカラ，此場合ハ省ク」トシテモヨイ。

【試練問題】　$x=2\sqrt{a-1}$　ナルトキ　$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ヲ最モ簡單ナル形ニテアラハセ。但シ $a>1$ トス。

答　$a>2$ ナルトキ $\sqrt{a-1}$，$1<a<2$ ナルトキ $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$，
$a=2$ ナルトキ 1

> **例 126.**　a，b ガ同符號ノ實數ニシテ　$x=\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$　ナルトキ
> $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{(a+b)(x+\sqrt{1+x^2})}$ ノ値ヲ最モ簡單ナル式ニテ表ハセ。

方針　(i)　求値式ノ分母ヲ有理化シテ代入スル。

【解】　求値式ヲ P トスル。

$\sqrt{1+x^2}-x$ ヲ分母子ニ乘ジテ〔但　$\sqrt{1+x^2}-x\neq 0$〕

$$P=\frac{2a\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}{(a+b)\{(1+x^2)-x^2\}}=\frac{2a(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}{a+b}$$

之ニ x ノ値ヲ代入シテ

$$P=\frac{2a\left(1+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}-\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}\sqrt{1+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}\right)}{a+b}$$

$$=\frac{2a\left(\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}\times\dfrac{\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{ab}}\right)}{a+b}$$

シカルニ a，b ガ同符號ナル故

（イ）　$a>0$，$b>0$ ノトキハ $a+b>0$

$$\therefore\ P=\frac{2a\left\{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-\dfrac{(a-b)(a+b)}{4ab}\right\}}{a+b}=\frac{2a\{a+b-(a-b)\}}{4ab}=1$$

（ロ）　$a<0$，$b<0$ ノトキハ $a+b<0$

$$\therefore\ P=\frac{2a\left\{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}+\dfrac{(a-b)(a+b)}{4ab}\right\}}{a+b}=\frac{2a\{a+b+(a-b)\}}{4ab}=\frac{a}{b}$$

答　a，b ガ共ニ正ナルトキ 1，共ニ負ナルトキ $\dfrac{a}{b}$

方針．(ii)　分母ノ有理化ヲシナイデ先ヅ根式 $\sqrt{1+x^2}$ ノ値ヲ簡約シタル後ニ代入スル。

【別解】　$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}}=\dfrac{\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{ab}}$〔$\because$　$ab>0$〕

a，b ハ同符號ナル故

i）　$a>0$，$b>0$ ノトキハ　$a+b>0$　$\therefore\ \sqrt{1+x^2}=\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$

ii）　$a<0$，$b<0$ ノトキハ　$a+b<0$　$\therefore\ \sqrt{1+x^2}=\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}$

コレラノ値ヲ求値式＝代入シテ

（イ）$a>0,\ b>0$ ノトキ

$$P=\frac{2a\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)}{(a+b)\left\{\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right\}}=\frac{2a(a+b)}{(a+b)(2a)}=1$$

（ロ）$a<0,\ b<0$ ノトキ

$$P=\frac{2a\left\{\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}\right\}}{(a+b)\left\{\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}\right\}}=\frac{-2a(a+b)}{(a+b)(-2b)}=\frac{a}{b}$$

答　$a>0,\ b>0$ ノトキ 1，$a<0,\ b<0$ ノトキ $\dfrac{a}{b}$

【試練問題】　a, b ガ相異ナル正數＝シテ $x=\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ ナルトキ

次式ノ値ヲ求ム。　$\dfrac{2a\sqrt{x^2-1}}{(a-b)(x+\sqrt{x^2-1})}$　（水講，神船）

答　$a>b$ ナルトキ 1，$a<b$ ナルトキ $-\dfrac{a}{b}$

雜　例

例 127. $a,\ b$ ガ實數＝シテ $a^2+b^2=a^2b^2$，且ツ $ab+2<0$ ナルトキ次ノ等式ハ眞ナリヤ。

$$\frac{\left(a\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}+b\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}}\right)^2}{ab(ab+2)}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$$

方針　左邊ノ分子ヲ展開シタトキ＝於ケル $\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}}$ ノ取扱ヒガ本問解決ノ急所デアルト考ヘテ

【解】　左邊ノ分子 $=a^2\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)+2ab\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}}+b^2\left(1-\dfrac{1}{b^2}\right)$

$$=a^2+b^2-2+2ab\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}\cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$$

STOP　サテ $1-\dfrac{1}{a^2}$，$1-\dfrac{1}{b^2}$ ガ同時＝負＝ナル事ハナイカト考ヘテ假定ノ條件ヲ變形シテ見ル。

GO　シカル＝假定＝ヨリ $a^2+b^2=a^2b^2$……①　$ab+2<0$……②

②ヨリ $ab<-2$ ナル故 $ab\neq0$，依テ $a^2b^2\neq0$，之デ①ノ兩邊ヲ割ルト

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$　$\therefore 1-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}>0$，　$1-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}>0$

$$\therefore\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{ab}\right)^2}$$

シカル＝②ヨリ $ab<-2$　$\therefore\ \dfrac{1}{ab}<0$　$\therefore$ 上式 $=-\dfrac{1}{ab}$

〔I〕＝代入シテ 左邊ノ分子 $=a^2+b^2-2+2ab\left(-\dfrac{1}{ab}\right)=a^2+b^2-4$

$\therefore$ 左邊 $=\dfrac{a^2+b^2-4}{ab(ab+2)}=\dfrac{a^2b^2-4}{ab(ab+2)}$　〔①ヲ代入シタ〕

$$=\frac{(ab+2)(ab-2)}{ab(ab+2)}=\frac{ab-2}{ab}$$

右邊 $=\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)^2=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{a^2b^2-2ab}{a^2b^2}$　〔①ヲ代入シタ〕

$$=\frac{ab-2}{ab}=\text{左邊}$$

依テ與ヘラレタ等式ハ正シイ。

【試練問題】　$x=3a+b^3$，$y=3b+a^3$，$ab=1$ ナルトキ

$\sqrt[3]{(x+y)^2}-\sqrt[3]{(x-y)^2}$ ノ値ヲ求メヨ。　（宇農，横商專）

答　4

第十八章　指數ノ意義ノ擴張

1. 指數ノ意義ノ擴張

例ヘバ a^3 ハ $a\times a\times a$ ヲ，a^5 ハ $a\times a\times a\times a\times a$ ヲ，一般＝ a^n ハ $\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a\times a}_{n\text{ 個}}$ ヲ表ハス記號デ，指數 3, 5, n 等ハ因數ノ個數ヲ表ハス數デアルカラ**正ノ整數**デアツタノデアルガ，コノ指數ノ意義ヲ擴張シテ $a^{\frac{2}{3}}$, a^{-3}, a^0 ノ如ク**指數ガ分數ヤ負數ヤ零**ナルモノヲモ次ノ如キ規約ノモトニ用ヒル。

2. 分數指數，負ノ指數，零ナル指數ノ意義

(i) $a^{\frac{m}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a^m}$ ヲ　(ii) a^{-m} ハ $\dfrac{1}{a^m}$ ヲ　(iii) a^0 ハ 1 ヲ

表ハスモノトス。但シ (ii), (iii) ＝於テハ $a\neq 0$ トス。

尙 (i) ＝於テ n ガ偶數 (但シ $n=2$ ヲ除ク) デ m ガ奇數ノトキハ $\sqrt[n]{a^m}$ ハ負數ノ偶數乘根ヲ表ハシ諸君ノ取扱フ範圍ノ數デナクナルカラ $a^{\frac{m}{n}}$ ＝於テ n ガ偶數デ m ガ奇數ノトキハ $a\geqq 0$ トスル。

例ヘバ $a^{\frac{3}{4}}$ ＝於テハ $a\geqq 0$ トシテ取扱ヘバヨイ。

3. 分數指數，負ノ指數ノ計算

指數ガ分數ヤ負數ノ場合＝モ次ノ指數ノ法則(27頁參照)ハ適用サレル。

〔指數ノ法則〕 (i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　(ii) $(a^m)^n=a^{mn}$

(iii) $(abc)^m=a^mb^mc^m$　(iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$　(v) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

例ヘバ $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{11}{12}}$ (但シ $a\geqq 0$ トス)

例 128. 次ノ各式ヲ簡單＝セヨ。

(A) $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

(B) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^3$

(C) $(11-6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}\times(3+\sqrt{2})^{-1}$

方針 (A) ハコノママ指數ノ法則 (i) (ii) ヲ適用スル。
(B) ハ根式ヲ分數指數＝直シテ後計算スル。
(C) ハ負ノ指數ヤ分數指數ノ規約＝從ヒ根式ヤ分數式＝直シテカラ計算スル。

【解】(A) 與式 $=x^{\frac{a+b}{(c-a)(b-c)}}\times x^{\frac{c+a}{(b-c)(a-b)}}\times x^{\frac{b+c}{(a-b)(c-a)}}$

$$=x^{\frac{a+b}{(c-a)(b-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b+c}{(a-b)(c-a)}}$$

$$=x^{\frac{a^2-b^2+c^2-a^2+b^2-c^2}{(c-a)(a-b)(b-c)}}=x^0=1$$　**答** 1

(B) 與式 $=\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{b\,a^{-\frac{2}{3}}}\div\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{4}{4}}}{b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{2}{4}}}\right)^3$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}-1}\div a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{-1-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$=\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}}{a\,b^{-\frac{3}{2}}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a$$　**答** a

(C) 與式 $=\dfrac{1}{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}\times\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{2\times 9}}}\times\frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{1}{9-2}=\frac{1}{7}$$　**答** $\dfrac{1}{7}$

指導總括 問題ノ形ヲ觀察シ，分數指數ヤ負ノ指數ヲ根式ヤ分數式＝直シテ計算スルカ，其儘デ指數ノ法則ヲ適用スルカヲ判斷シナケレバナラヌ。

【試棟問題】 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(i) $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}}\left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}}\left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$

(ii) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$

(iii) $(2+\sqrt{3})^{-3}+(2-\sqrt{3})^{-3}$

答 (i) x^{-1}, (ii) $a^{-1}b^{\frac{1}{6}}$ (iii) 52

例 129. $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

ヲ簡單ニセヨ。

方針 (i) 先ヅ負ノ指數ノ規約ニ從ツテ指數ガ正ノ整數トナル樣ニ書キ直シテ後ニ計算スル。

【解】

$$\text{與式}=\frac{a^2+b^2-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{a^2b^2-\dfrac{1}{a^2b^2}}+\frac{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(b-\dfrac{1}{b}\right)}{ab+\dfrac{1}{ab}}$$

$$=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)-(a^2+b^2)}{a^4b^4-1}+\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2b^2-1)}{(a^2b^2+1)(a^2b^2-1)}+\frac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$=\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2+1}=1$$

答 1

方針 (ii) 負ノ指數ノマヽデ指數ノ法則ヲ用ヒテ計算スル。

【別解】

$$\text{與式}=\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})}$$

$$=\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}+(a-a^{-1})(b-b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}$$

$$\text{分子}=a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}$$
$$+(ab-a^{-1}b-ab^{-1}+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})$$
$$=a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}+a^2b^2-b^2-a^2+1-1+a^{-2}+b^{-2}-a^{-2}b^{-2}$$
$$=a^2b^2-a^{-2}b^{-2}$$

依テ $\text{與式}=\dfrac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}=\dfrac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=1$ 答 1

指導綱括 指數ノ法則サヘ十分理解シテ居レバ何レノ方針ニヨルモ容易ニ解決出來ル問題デアル。

【試棟問題】 $\dfrac{(x-x^{-1})(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})(x^2-x^{-2})}{(x+x^{-1})^2+(x^2+x^{-2})}$ ヲ簡單ニセヨ。

答 $x-x^{-1}$

例 130. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ ナルトキ $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x^2+x^{-2}+3}$ ノ數値ヲ求メヨ。

着眼 $x^{\frac{1}{2}}=a,\ x^{-\frac{1}{2}}=b$ トスレバ分子ハ a^3+b^3, 分母ハ a^4+b^4+3 ノ形デアル事ニ着眼シテ求値式ヲ變形スル。

【解】 題意ニヨリ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$

$$\text{分子}=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3$$
$$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\{(x^{\frac{1}{2}})^2-x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+(x^{-\frac{1}{2}})^2\}$$
$$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-3\}\quad〔\because\ x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=x^0=1〕$$
$$=3\{3^2-3\}=18$$

$$\text{分母}=(x+x^{-1})^2+1\quad〔\because\ (x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}〕$$
$$=\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2\}^2+1$$
$$=\{9-2\}^2+1=50$$

依テ $\text{與式}=\dfrac{18}{50}=\dfrac{9}{25}$ 答 $\dfrac{9}{25}$

【試棟問題】 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=5$ ナルトキ $\dfrac{x+x^{-1}+8}{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-5}$ ノ數値ヲ求メヨ

答 $\dfrac{7}{27}$

鍛錬問題八

87. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(i) $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-1)\sqrt{\sqrt{5}+1}}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{\sqrt{5}-1}}}$ (東藝)

88. $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}\times\sqrt{\dfrac{1}{6-3\sqrt{3}}}$ ヲ簡單ニシ，然ル後小數第三位迄正確ニ計算セヨ。

89. $\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$, $\sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}}$,

$\sqrt{20\frac{20}{399}}=20\sqrt{\frac{20}{399}}$ ナル關係ガアル。

之ト類似ナ他ノ二例ヲ擧ゲヨ。 (廣師)

90. $x=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ計算セヨ。

$$2x^4-11x^3-7x^2-9x+14$$ (岐農，神商)

91. $(1-\sqrt{2})x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，$(1+\sqrt{2})y=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ計算セヨ。

$$x(x^2-2y)+y(y^2+3xy)+3x(xy-1)-3y+2$$

92. $\sqrt{15-6\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ ノ整數部分ヲ a，小數部分ヲ b トスルトキ次式ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$$

93. 根式 $\sqrt{x+12-\sqrt{x+a}}$ ニ於テ實數 a ハ實數 x ノ値ノ如何ニ關セズ一定ノ値ヲ表ハスモノトシ x ガ $10+7\sqrt{2}$ ナルトキ其根式ノ値ガ $1+3\sqrt{2}$ ナリトイフ。然ラバ x ガ $1+\sqrt{2}$ ナルトキニ於ケル其根式ノ値如何。 (遞官，無線)

94. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求メヨ。

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1-3x}{\sqrt{2-x-2\sqrt{1-x}}}$$ (海機，富藥)

95. $x=\sqrt{7}$，$y=2\sqrt[4]{3}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ ノ數値ヲ小數第二位マデ求メヨ。但シ小數第二位未滿ヲ四捨五入スベシ。 (三高)

96. $3u^2+6u-1=0$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{u(3u+7)}{1-5u-3u^2}}$ ノ數値ヲ算出セヨ。但シ四捨五入法ニヨリ小數第二位マデ求ム。

97. $2ax-y=2a^3$, $x+ay=3a^2+1$ ナルトキ $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$ ノ値ヲ求メヨ。但シ a ハ正數ナリトス。 (京大醫)

98. $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, $a>0$, $-1<b<1$ 且 $b\neq0$ ナルトキ

$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ノ値ヲ出來ルダケ簡單ニ表ハセ。

99. $x=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ ナル時，次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

100. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^3}=\dfrac{y^2}{b^3}$, $a+b=c$ ナラバ

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ ナル事ヲ證明セヨ。但シ文字ハスベテ實數トス。　（姫　高）

答 87. (i) $2\sqrt{3}$　(ii) $\sqrt{3}+1$　88. 0.498……　89. 例ヘバ $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{7\frac{7}{48}}=7\sqrt{\frac{7}{48}}$　註（簡明ニ二例ヲ擧ゲレバヨイノデアル）。90. 10　91. $4-116\sqrt{2}$　92. 1.74…　93 $\sqrt{13}$　註 先ヅ a ノ値 $1-\sqrt{2}$ ヲ決定セヨ。94. 1　註 先ヅ最後ノ分母ヲ簡單ニセヨ。　95. 19.75弱　96. 2.73强　又ハ　0.73强。

註 與式ニ $\sqrt{3u+3}$ トナル事ニ氣付ケバ最簡。

97. $a>1$ ナルトキ $2a$, $0<a\leqq 1$ ナルトキ 2　98. $\dfrac{1}{b}$

99. $a+b$ 〔但シ $\dfrac{a}{b}>0$ トス〕

100. 註 第一，第二ノ假定式ヲ解クト $x^2=\dfrac{a^3}{c}$, $y^2=\dfrac{b^3}{c}$ ヲ得ル。之ヨリ終結式ヲ導ケ。

第五編　方程式ノ解法

第十九章　方程式解法ノ基礎概念

1. 方程式ノ解法

方程式ヲ解クトハ其方程式中ニ含マレル或特殊文字（即チ未知數）ガ如何ナル値ノトキニソノ兩邊ノ値ガ等シクナルカヲ求メルコト，換言スレバ方程式ノ**兩邊ガ相等シクナルタメノ未知數ノ値ヲ求メルコト**デアル。

註 1. 然シ場合ニ依ツテハ未知數ニ如何ナル値ヲ代入シテモ方程式ガ成立シナイコト，即チ方程式ヲ滿足スル未知數ノ値ガ存在シナイコトヤ（コノ場合ヲ**不能**トイフ）亦未知數ニドンナ値ヲ代入シテモ恒ニ成立スルコト（コノ場合ヲ**不定**トイフ）等ガアルカラ，嚴密ニ云ヘバ「方程式ヲ解ク」トハ「未知數ガ如何ナル値ヲトルトキニソノ方程式ガ成立スルカ，又ハソノ方程式ヲ成立セシムル未知數ノ値ガ一ツモ存在シナイカ，或ハ未知數ガ如何ナル値ノトキニモ恒ニ成立スルカヲ考究スルコトデアル」ト云ハナケレバナラヌ。

註 2. 方程式ノ兩邊ノ値ヲ等シカラシメル未知數ノ値ヲ，ソノ方程式ノ**根**トイフ。

註 3. 簡單ナ問題例ヘバ $2x=6$ ノ如キニ於テハ觀察ニヨツテ直チニソノ根 $x=3$ ヲ求メルコトガ出來ルガ，一般ニハ與ヘラレタ方程式ヲ適當ニ變形（移項シタリ兩邊ニ或式又ハ數ヲ乘除シタリ，兩邊ヲ平方スル等）シナケレバ根ガ求メラレナイ。ソノ變形ノ途中ニ於テ原方程式ノ根デナイ**餘分ノ根ガ含マレテ來タリ**，原方程式ノ**根ガ途中デ失ナハレタリ**スルコトガアルカラ，如何ナル變形ヲシタ場合ニハ根ガ增減シナイカ，如何ナル變形ヲシタトキニ根ガ增減スルカニ付テ次ノ定理ヲ知ツテキナケレバナラヌ。

2. 方程式ノ同値

二ツ又ハ二ツ以上ノ方程式ガ**全ク同ジ根ヲ有スルトキ**，之等

ノ方程式ハ同値デアルトイフ。

> **定理 21.**　方程式ノ兩邊ニ同一ノ數又ハ式ヲ加ヘ或ハ減ジテ得ル方程式ハ原方程式ト同値デアル。從ツテ方程式中ニアル任意ノ項ヲ移項（符號ヲ變ジテ他ノ邊ニ移ス）シテ得ル方程式ハ原方程式ト同値デアル。

例ヘバ　$2x^2-3x+1=x+3$　ノ兩邊カラ　$x+3$　ヲ減ジテ得ル方程式

$2x^2-3x+1-x-3=0$　即　$x^2-4x-2=0$　ハ原方程式ト同値デ，換言スルト　$x+3$　ヲ移項シテ得ル方程式ハ原方程式ト同値デアル

> **定理 22.**　方程式ノ兩邊ニ 0 デナイ常數ヲ乘除シテ得ル方程式ハ原方程式ト同値デアル。

例ヘバ $2x+4=8$ ノ兩邊ヲ $2(2\neq 0)$ デ割ツテ得ル方程式 $x+2=4$ ハ原方程式ト同値 $\dfrac{2x}{3}=5$ ノ兩邊ニ 3 ヲ乘ジテ得ル方程式 $2x=15$ ハ原方程式ト同値デアル。

> **定理 23.**　方程式 $A\times B=0$ ト〔$A=0$ 又ハ $B=0$〕トハ同値デアル。但シ $A=0$ ノ根ハ B ヲ無意味ナラシメズ，$B=0$ ノ根ハ A ヲ無意味ナラシメナイモノトス。

例ヘバ　$(x-2)(x-3)=0$ ト〔$x-2=0$ 又ハ $x-3=0$〕トハ同値デアルガ，$(x-2)\left(\dfrac{x-3}{x^2-4}\right)=0$ ト〔$x-2=0$ 又ハ $\dfrac{x-3}{x^2-4}=0$〕トハ同値デハナイ。何トナレバ $x-2=0$ ノ根ハ $\dfrac{x-3}{x^2-4}$ ノ分母ヲ 0 ナラシメテ無意味ナラシメルカラデアル。

3. 根ガ增減スル場合

> **定理 24.**　方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム式ヲ乘除シテ得ル方程式ハ必ズシモ原方程式ト同値デハナイ。

(1) 未知數ヲ含ム式ヲ兩邊ニ掛ケルトキ

例ヘバ方程式　$2x=3$　ノ根ハ $x=\dfrac{3}{2}$ ダケデアルガ，コノ兩邊ニ $x+1$ ヲ乘ジタ $2x(x+1)=3(x+1)$ ハ移項シテ $2x(x+1)-3(x+1)=0$ 從ツテ $(x+1)(2x-3)=0$ ト同値デ更ニ之ハ〔$x+1=0$ 又ハ $2x-3=0$〕ト同値デアルカラ，原方程式ノ根 $x=\dfrac{3}{2}$ ノ他ニ $x=-1$ ナル餘分ノ根ガ增シタコトニナル。一般ニ方程式　$A=B$　ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム式 P ヲ掛ケルト $P=0$ ヲ滿足スル根ガ增スコトニナル。

註　コノ様ニ解法ノ途中デ增シタ根ノコトヲ餘分根又ハ無緣根トイフ。

(2) 未知數ヲ含ム式デ割ルトキ

例ヘバ $\dfrac{x-1}{2x+1}=\dfrac{x-1}{x-3}$ ハ $x=1$ ナルトキ明ラカニ成立スルカラ $x=1$ ナル根ヲ有スルガ，コノ兩邊ヲ $x-1$ デ割ツタ $\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{x-3}$ ハ $x=1$ ナル根ヲ有シナイ（$\because$ $x=1$ ノトキ左邊$=\dfrac{1}{3}$，右邊$=-\dfrac{1}{2}$）依テ兩邊ヲ $x-1$ デ割ルト $x=1$ ナル根ガ失ナハレル。

一般ニ P ガ未知數ヲ含ム式デアルトキ方程式 $P\cdot A=P\cdot B$ ノ兩邊ヲ P デ割ルト $P=0$ ヲ滿足スル根ガ失ナハレル。從ツテ方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム共通因數ガアル場合之ヲ約シテハナラヌ。

方程式　$P\cdot A=P\cdot B$ ヲ解クニハ移項シテ $P(A-B)=0$ トシ〔$P=0$ 又ハ $A=B$〕ヲ解カネバナラヌ。

(3) 兩邊ヲ平方又ハ立方スルコト

> **定理 25.**　方程式ノ兩邊ヲ平方（又ハ立方）シテ得ル方程式ハ必ズシモ原方程式ト同値デハナイ。

例ヘバ $2x-1=5$ ノ根ハ $x=3$ 唯一ツデアルガ，兩邊ヲ平方シタ

$(2x-1)^2=25$　ヲ解クト　$2x-1=\pm 5$　$\therefore$ $x=3$ 又ハ $x=-2$ トナリ，$2x-1=-5$ ノ根 $x=-2$ ガ餘分ニ含マレル。

一般ニ $A=B$ ノ兩邊ヲ平方シテ $A^2=B^2$ ヲ解クト $A=B$ ノ根ノ外ニ $A=-B$ ヲ滿足スル根ガ餘分ニ含マレル（尙詳シクハ無理方程式ノ解法ニ於テ述ベル）

4. 方程式ノ種類

(1)　係數ニ着眼シテ分類スルト

$$\text{方程式}\begin{cases}\text{數字方程式　（係數ガ數字ノミノ場合）}\\ \text{文字方程式　（文字係數ヲ含ム場合）}\end{cases}$$

(2)　未知數ノ個數ニ着眼シテ分類スルト

$$\text{方程式}\begin{cases}\text{一元方程式　（未知數ガ一種類 } 3x^2-2x+1=0\text{）}\\ \text{二元方程式　（未知數ガ二種類 } ax^2+bxy+cy^2=0\text{）}\\ \left.\begin{array}{l}\text{三元方程式}\\ \text{四元方程式}\\ \quad\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\text{ 多元方程式トイフ。}\end{cases}$$

(3)　式ノ形ニヨリ分類スルト

$$\text{方程式}\begin{cases}\text{代數方程式}\begin{cases}\text{有理方程式}\begin{cases}\text{有理整方程式}\\ \text{有理分數方程式}\end{cases}\\ \text{無理方程式}\cdots\cdots\sqrt{2x-1}=x+3\end{cases}\\ \text{超越方程式}\begin{cases}\text{指數方程式}\cdots\cdots 5^{x-1}=4\\ \text{對數方程式}\cdots\cdots \log(2x-1)+\log 3=2\\ \text{三角方程式}\cdots\cdots 2\sin x+\cos x=1\end{cases}\end{cases}$$

註　分數方程式ハ未知數ガ分母ニアル分數式ヲ含ム方程式ノコトデ，例ヘバ $\frac{1}{2}x^2+3x-1=0$　ノ如キハ分數方程式デハナク係數ガ分數ナル整方程式デアル。同樣ニ無理方程式モ未知數ガ根號內ニアル無理式ヲ含ム方程式ノコトデ $\sqrt{3}\,x+1=0$ ノ如キハ無理方程式デハナイ。

第二十章　一元整方程式ノ解法

1. 一元整方程式ノ次數ト根ノ個數

【次數】　一元整方程式ニ含マル丶未知數ノ**最高冪ノ指數**ガ n ナルトキ，ソノ方程式ハ **n 次ノ方程式**デアルトイフ。

例ヘバ　$ax+b=0\ (a\neq 0)$　ハ一次方程式，　$3x^7+4x^5+6x-7=0$ ハ七次ノ方程式デアル。

【根ノ數】　一元 n 次ノ方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ （但シ\ a_0\neq 0）$$

ノ左邊ハ x ノ n 次式デアルカラ，之ガ n 個ノ相異ナル一次因數ニ分解セラレタ場合ニハ，コノ方程式ハ n 個ノ相異ナル根ヲ有スル。又コノ n 個ノ中ニ相等シイモノガアツテ　例ヘバ

$$a_0(x-\alpha)^3(x-\beta)^2\underbrace{(x-\gamma)(\quad)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-\theta)}_{(n-5)\text{個ノ相異ナル因數}}=0$$

ノ形ニ分解セラレタトキモ，α ヲ三個，β ヲ二個ト數ヘルト矢張リ合計 n 個ノ根ヲ有スルコトニナル。一般ニ**一元 n 次ノ整方程式ニハ n 個ノ根ガアリ，n 個ヨリ多クノ根ヲ有シナイ。**

註　コノ定理ノ嚴密ナ證明ハ程度ヲ越エルカラ，コ丶ニハ省クガ諸君トシテハ唯コンナ定理ガアルト云フコトヲ知ツテ置クト根ノ個數ガ明ラカトナルカラ餘分ノ根ヲ誤ツテ答トシタリ，途中デ根ヲ失フ樣ナ誤リヲ防グコトガ出來テ都合ガヨイ。尙二次方程式 $x^2-4x+4=0$ 即チ $(x-2)^2=0$ ハ通常 $x=2$ ナル**等根**ヲ有スルト答ヘルガ，$(x-2)^3=0$ ノ根ト區別スルタメニ前者ヲ $x=2$ ナル**二重根**，後者ヲ $x=2$ ナル**三重根**トイフコトガアル。

2. 一元一次方程式ノ解法

一元一次方程式ハ未知項ヲ左邊ニ，既知項ヲ右邊ニ移項シテ整頓スルト次ノ形ニナル。

【基本問題】　方程式 $ax=b$　……〔I〕　ヲ解ケ。

【解】　$a\neq 0$ ノトキハ　　$x=\frac{b}{a}$ ナル唯一ツノ根ガアル。

吟味　$a=0$ ノトキハ

（イ）　$b=0$ ナラバ〔I〕ハ $0.x=0$ トナリ **不定**（根ハ無數＝アリ）

（ロ）　$b\neq 0$ ナラバ〔I〕ハ $0.x=b$ トナリ **不能**（根ナシ）

註　$0x=0$ ノ形＝ナツタ場合ハ x ＝如何ナル値ヲ代入シテモ恒＝兩邊ハ 0 トナツテ成立スルカラ，**根ハ無數＝アリ**，$0x=a$〔但 $a\neq 0$〕ノ形＝ナツタ場合ハ x ＝如何ナル値ヲ代入シテモ左邊ハ恒＝ 0 デ右邊ト等シクナラヌカラ，**根ハナイ**ノデアル。前者ノ場合ヲ通常**不定**，後者ノ場合ヲ通常**不能**トイフノデアルガ，內容ヲ理解シナイデ形式的＝不定ヤ不能トイフ言葉ヲ曖昧＝用ヒル者ガアルノデ，上述ノ樣＝內容ヲ附記シテ用ヒルガヨイ。

例 131.　$4bx=3a-\dfrac{2b^2x+a}{1+b}$ ヲ解ケ。

【解】　$1+b\neq 0$（未知數ヲ含マヌ分母ナル故）ヲ兩邊＝乘ジテ分母ヲ拂ヘバ　$4b(1+b)x=3a+3ab-2b^2x-a$

移項シテ整頓スレバ　$2b(3b+2)x=a(3b+2)$ …………①

STOP　コノ兩邊ヲ $2b(3b+2)$ デ割ラネバナラヌカラ，之ガ零ナラザル場合ト零ナル場合ト＝分ケテ解ク。

GO（i）　$b(3b+2)\neq 0$ ノトキ　$x=\dfrac{a}{2b}$ ……………………②

（ii）　$b(3b+2)=0$ ノトキハ $b=0$ 又ハ $3b+2=0$

（イ）　$b=0$ ノトキハ ①ハ $0.x=2a$ トナルカラ

$a=0$ ナラバ **根ハ無數＝アリ**（即チ不定）
$a\neq 0$ ナラバ **根ハナイ**　　　（即チ不能）

（ロ）　$3b+2=0$ ノトキハ

①ハ $0.x=0$ トナリ，**根ハ無數＝アリ**（即チ不定）

[illegible]　1. 本問＝限ラズ未知數ヲ含マヌ分母（$1+b$ ノ如キ）ハ 0 ナラザルモノトシテ取扱ツテオケバヨイ（$1+b=0$ ナル場合ノ吟味ハ不要）

2. $b(3b+2)=0$ ナル場合ヲ吟味スルトキ $b=0$ ヤ $b=-\dfrac{2}{3}$ ヲ ②＝代入シテ，$b=0$ ノトキ $x=\dfrac{a}{0}$ トナリテ不能，$b=-\dfrac{2}{3}$ ナルトキ

$x=\dfrac{a}{-\dfrac{4}{3}}=-\dfrac{3a}{4}$ 等トヤル者ガアルガ之ハ誤リデアル。

【試練問題】　$\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}+\dfrac{x-a-b}{c}=3$ ヲ解ケ。

答　$ab+bc+ca\neq 0$ ノトキ $x=a+b+c$
$ab+bc+ca=0$ ノトキ 根ハ無數＝アル（即チ不定）

3. 一元二次方程式ノ解法

一元二次方程式ハ整頓シテ $ax^2+bx+c=0$ ノ形＝直シ

（イ）　左邊ヲ**因數＝分解**スルカ。

（ロ）　**根ノ公式**ヲ用ヒル。

【根ノ公式】　一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）ノ二根ハ
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ナリ。

註　コノ公式ノ證明ハ毎年出題セラレ，約半數ノ者ガ手ヲ着ケ得ナイトノコトデアル。

證明　$ax^2+bx+c=0$　$\therefore\ ax^2+bx=-c$

STOP　左邊ヲ完全平方式＝導ク方針デ

GO　兩邊ヲ a〔$a\neq 0$〕デ割レバ $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$

兩邊＝$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ヲ加ヘルト　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

[illegible]　單＝ $ax^2+bx+c=0$ ヲ解ケ。トイフ問題ノトキハ

i）　$a\neq 0$ ノトキ，トシテ上ノ解ヲナシタル後更＝

ii）　$a=0$ ノトキハ　$bx+c=0$ トナルカラ

①　$b\neq 0$ ノトキハ $x=-\dfrac{c}{b}$

②　$b=0$ ノトキハ　$c\neq 0$ ナラバ根ナシ　（即チ不能）
$c=0$ ナラバ根ハ無數（即チ不定）

ト附記シナケレバナラヌ。

註　一元二次方程式ニ於テ　x　ノ係數ガ偶數ノトキハ次ノ公式ヲ用ヒルガ便利デアル。

> 公　$ax^2+2b'x+c=0\ (a\neq 0)$ ノ二根ハ
>
> $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$ （但シ b' ハ x ノ係數ノ半分）

尙　$a\neq 0$　デ b 又ハ c ガ 0 ノ場合ハ公式ヲ用ヒナイデ次ノ如ク解ケバヨイ。

$b=0$ ノトキハ $ax^2+c=0$　$\therefore\ x^2=-\dfrac{c}{a}$　$\therefore\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

$c=0$ ノトキハ $ax^2+bx=0$　$\therefore x(ax+b)=0$　$\therefore x=0$ 又ハ $x=-\dfrac{b}{a}$

（イ）數係數ノ場合

> 例 132.　$2000(1+x)^2-70(1+x)-2173=0$ ヲ解ケ。

方針　係數ガ小サクナイカラ公式ヲ適用スル。尙 $(1+x)^2$ ヲ展開シテ整頓シタ後公式ヲ用ヒテモ誤リデハナイガ，$(1+x)$ ヲ束ニシテ取扱フ方ガ遙ニ簡明デアル。

【解】根ノ公式ニヨリ

$$(1+x)=\frac{35\pm\sqrt{35^2+2000\times 2173}}{2000}$$

$$=\frac{35\pm\sqrt{4347225}}{2000}$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 2\ \ 0\ \ 8\ \ 5 \\
2 & 4,34,72,25. \\
2 & 4 \\
\hline
408 & 3472 \\
8 & 3264 \\
\hline
4165 & 20825 \\
5 & 20825 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

STOP　コノ開平ノ演算ガ計算ノ主力デアルカラ之ヲ明示シテ

GO　$1+x=\dfrac{35\pm 2085}{2000}$

故ニ　$1+x=\dfrac{2120}{2000}=\dfrac{53}{50}$　　$\therefore\ x=\dfrac{53}{50}-1=\dfrac{3}{50}$

又ハ　$1+x=\dfrac{-2050}{2000}=\dfrac{-41}{40}$　　$\therefore\ x=\dfrac{-41}{40}-1=-\dfrac{81}{40}$

答　$\dfrac{3}{50}$，$-\dfrac{81}{40}$

注意　一元二次方程式ノ根ハ二ツアルノデ答ヲ $\dfrac{3}{50}$ 又ハ $-\dfrac{81}{40}$ ト書クノハヨクナイ。（∵ $\dfrac{3}{50}$ 又ハ $-\dfrac{81}{40}$ ト書ケバ，コノ何レカ一ツダケガ根デアル樣ニ解サレルカラ）嚴密ニ云ヘバ $\dfrac{3}{50}$ ト $-\dfrac{81}{40}$ ト書クベキデアル。（三高等デハコレヲ主張シテキル）

【試練問題】方程式 $9x^2-6x-16=0$ ノ正根ヲ小數第三位マデ正シク求メヨ。但シ途中ノ計算ヲ明示セヨ。（山形高）

答　1.707

（ロ）x^2 ノ係數ガ無理數ノ場合

方針　1. 觀察ニヨツテ因數ニ分解スルカ。
2. 根ノ公式ヲ用ヒル（x^2 ノ係數ヲ有理化シテカラ）カ。
3. x^2 ノ係數ト x ノ係數トヲ比較シテ置換法ヲ用ヒル。

> 例 133.　次ノ方程式ヲ解ケ。
>
> (A)　$(\sqrt{3}+1)x^2-(\sqrt{3}+7)x-2+4\sqrt{3}=0$
>
> （根ヲ四捨五入ニヨリ小數第二位マデ）
>
> (B)　$2(8-3\sqrt{7})x^2-3(3-\sqrt{7})x-10=0$
>
> （根ヲ小數第三位マデ正シク）

(A)　着眼　係數ヲ次ニ示ス樣ニ組合セルト左邊ガ一次因數ニ分解出來ル事ニ着眼スル。

$$\begin{array}{ccccc}
(\sqrt{3}+1) & \diagdown\!\!\diagup & -2 & \cdots\cdots\rightarrow & -2 \\
1 & \diagup\!\!\diagdown & -(2\sqrt{3}-1) & \cdots\cdots\rightarrow & -\sqrt{3}-5\quad(+ \\
\hline
 & & & & -(\sqrt{3}+7)\cdots x\text{ ノ係數}
\end{array}$$

【解】左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$\{(\sqrt{3}+1)x-2\}\{x-(2\sqrt{3}-1)\}=0$$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1=0.732\cdots\cdots\fallingdotseq 0.73$强

又ハ　$x=2\sqrt{3}-1=2(1.7320\cdots\cdots)-1=2.464\cdots\cdots\fallingdotseq 2.46$强

答　0.73强，2.46强

[illegible] 1. 四捨五入ノ結果ニハ必ズ強又ハ弱ヲ附記スルコト，

2. $2\sqrt{3}-1$ ノ近似値ハ時間ガアレバ $\sqrt{12}$ ヲ開平シテ

$2\sqrt{3}-1=\sqrt{12}-1=(3.464\cdots\cdots)-1=2.464\cdots\cdots$ トスル方ガヨイ

3. 左邊ノ因數分解ヲ試ミテ失敗スレバ躊躇セズニ次ニ示ス解法ヲ用ヒル（計算ハヤヽ複雜ニナルガ，落付イテヤレバ必ズ出來ル方法デアル）

【別解】 兩邊ニ $(\sqrt{3}-1)+0$ ヲ掛ケテ x^2 ノ係數ヲ有理化スルト

$$2x^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+7)x+2(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}-1)=0$$

$$\therefore\ 2x^2-2(3\sqrt{3}-2)x+2(7-3\sqrt{3})=0$$

根ノ公式ニヨリ

$$x=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\sqrt{(3\sqrt{3}-2)^2-4(7-3\sqrt{3})}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\sqrt{3}}{2}$$

依テ $x=\dfrac{4\sqrt{3}-2}{2}=2\sqrt{3}-1$ 　又ハ　$x=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{2}=\sqrt{3}-1$

以下ハ前ノ解ト同樣デアル。

注 x^2 ノ係數ヲ有理化セズニ公式ヲ用ヒテモ出來ルガ分母ガ無理數ニナルカラ拙イ。

(B) $2(8-3\sqrt{7})x^2-3(3-\sqrt{7})x-10=0$ ……………①

方針 視察ニヨツテ容易ニ一次因數ニ分解出來ナイ。ソノゴ x^2 ノ係數ト x ノ係數トノ間ニ特殊關係ガナイカト考ヘテ $(3-\sqrt{7})$ ヲ平方シテ見ルト $(3-\sqrt{7})^2=9-6\sqrt{7}+7=2(8-3\sqrt{7})$ トナリ丁度 x^2 ノ係數ニ等シクナル。ソコデ置換法ヲ用ヒル方針デ與式ヲ書キ直ス。

【解】　$(3-\sqrt{7})^2=9-6\sqrt{7}+7=2(8-3\sqrt{7})$ トナル故

①ハ　$(3-\sqrt{7})^2x^2-3(3-\sqrt{7})x-10=0$ …………①′

$(3-\sqrt{7})x=y$ ト置ケバ　$y^2-3y-10=0$

$\therefore\ (y-5)(y+2)=0$　$\therefore\ y=5$ 又ハ $y=-2$

（イ） $y=5$ ナルトキハ　$(3-\sqrt{7})x=5$

$$\therefore\ x=\frac{5}{3-\sqrt{7}}=\frac{5(3+\sqrt{7})}{2}=\frac{5(3+2.6457\cdots\cdots)}{2}=14.114\cdots\cdots$$

（ロ） $y=-2$ ナルトキハ　$(3-\sqrt{7})x=-2$

$$\therefore\ x=\frac{-2}{3-\sqrt{7}}=-(3+\sqrt{7})=-(3+2.6457\cdots)=-5.645\cdots$$

答 14.114，-5.645

[illegible] 1.「小數第三位マデ正シク」ノ場合ハ四捨五入スルノデハナイ「小數第三位マデ求メヨ」ノ場合モ同樣デアル。

2. $\sqrt{7}=2.6457$ ト書クノハヨクナイ。$\sqrt{7}=2.6457\cdots\cdots$ トスルカ $\sqrt{7}\fallingdotseq 2.6457$ ト書クベキデアル。

3. コノ問題ノ樣ニ x^2 ノ係數ガ x ノ係數ノ丁度平方ニ等シイカ又ハソノ 2 倍，3 倍又ハ半分等特殊關係ガ存在スル事ガ多イカラ，一度ハ之ヲ試ミルガヨイ。モシ特殊關係ガナケレバ x^2 ノ係數ヲ有理化シテ根ノ公式ヲ用ヒル。コノ問題モ勿論公式ヲ用ヒテ次ノ樣ニ解ケルガコノ場合ハ相當ナ計算ハ覺悟シテ取リカヽラネバナラヌ。

【別解】 兩邊ニ $(8+3\sqrt{7})$ ヲ乘ジテ x^2 ノ係數ヲ有理化スルト

$$2x^2-3(3+\sqrt{7})x-10(8+3\sqrt{7})=0$$

公式ニヨリ　$x=\dfrac{3(3+\sqrt{7})\pm\sqrt{9(3+\sqrt{7})^2+80(8+3\sqrt{7})}}{4}$

$$=\frac{3(3+\sqrt{7})\pm\sqrt{784+294\sqrt{7}}}{4}$$

$$=\frac{3(3+\sqrt{7})\pm\sqrt{784+2\sqrt{7\times147^2}}}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{和ガ } 784\text{，積ガ } 7\times147^2 \text{ ナル如キ二數ハ}\\ \qquad t^2-784t+7\times147^2=0 \text{ ノ二根ニ等シイ}\\ \text{公式ニヨリ}\quad t=392\pm\sqrt{392^2-7\times147^2}=392\pm49=441\text{又ハ}343\end{array}\right\}$$

$$\therefore\ \sqrt{784+2\sqrt{7\times147^2}}=\sqrt{441}-\sqrt{343}=21+7\sqrt{7}$$

$\therefore\ x=\dfrac{3(3+\sqrt{7})\pm(21+7\sqrt{7})}{4}$ （以下ハ省略スル）

【試練問題】 $(2+\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}+1)x-6=0$ ノ正根ヲ小數第三位迄求メヨ。（以下切捨）

答 0.732

(ハ)　文字係數ノ場合

例 134. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$(a-b)^2x^2-4abx=(a+b)^2$$

方針　見掛ケハ二次方程式デアルガ，文字係數デアルカラ x^2 ノ係數ガ 0 デナイ場合ト 0 ナル場合トヲ考ヘナケレバナラヌ。

【解】 移項シテ　$(a-b)^2x^2-4abx-(a+b)^2=0$

(i)　$a-b\neq 0$ ナルトキ左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$\{(a-b)^2x-(a+b)^2\}\{x+1\}=0$$

$a-b\neq 0$　∴　$x=\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ 又ハ $x=-1$

(ii)　$a-b=0$ ノトキハ $a=b$，從ツテ與ヘラレタ方程式ハ

$$-4b^2x=4b^2 \quad \text{トナル故}$$

$b\neq 0$ ノトキハ　$x=-1$；　$b=0$ ナラバ $ax=0$ トナリ不定

答
- $a\neq b$ ナルトキ　$\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ ト -1
- $a=b\neq 0$ ノトキ　-1
- $a=b=0$ ノトキ　不定（根ハ無數ニアル）

指導總括　$a-b\neq 0$ ノ場合ハ根ノ公式ニヨリ

$$x=\frac{2ab\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{(a-b)^2}=\frac{2ab\pm(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$$

∴ $x=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ 又ハ $x=\dfrac{-(a-b)^2}{(a-b)^2}=-1$　トシテモヨイ。

【試練問題】 $(1-a^2)(x+a)-2a(1-x^2)=0$　ヲ解ケ。

答　$a\neq 0$ ノトキ a ト $-\dfrac{a^2+1}{2a}$，$a=0$ ノトキ 0

(ニ)　一元二次方程式ノ根ノ形

例 135. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ ノ二根ガ二ツノ無理數 $m+\sqrt{p}$ 及ビ $n-\sqrt{q}$ ナルトキハ $m=n$，$p=q$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ a,b,c,m,n ハスベテ有理數ニシテ p,q ハ何レモ平方數ナラザル正ノ有理數ナリトス。

方針　$m+\sqrt{p}$，$n-\sqrt{q}$ ガ根ナル故コレラノ値ヲ原方程式ニ代入シタトキノ兩邊ノ値ガ相等シクナケレバナラヌコトヲ用ヒテ證明スル。

證明　$m+\sqrt{p}$ ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナル故

$$a(m+\sqrt{p})^2+b(m+\sqrt{p})+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$$

STOP　有理數ト無理數トヲ含ム等式デアルカラ定理3ヲ應用スル方針デ　(有理數)+(有理數)×(無理數)=0 ノ形ニ整頓スル。

GO　〔I〕ヲ整頓スルト $(am^2+ap+bm+c)+(2am+b)\sqrt{p}=0\cdots〔\mathrm{I}〕'$
シカルニ a, b, c, m ハスベテ有理數デ $\sqrt{p}$ ハ無理數（∵ p ハ平方數ナラザル正ノ有理數）ナル故，〔I〕′ ガ成立スルタメニハ

$$\begin{cases} am^2+ap+bm+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 2am+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

ガ同時ニ成立スルコトガ必要デ且十分デアル。

亦 $n-\sqrt{q}$ モ根ナル故

$$a(n-\sqrt{q})^2+b(n-\sqrt{q})+c=0$$

$$\therefore\ (an^2+aq+bn+c)-(2an+b)\sqrt{q}=0\cdots\cdots\cdots\cdots〔\mathrm{II}〕$$

之ガ成立スルタメニハ同樣ニ

$$\begin{cases} an^2+aq+bn+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots③ \\ 2an+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots④ \end{cases}$$

STOP　①,②,③,④ヲ用ヒテ $m=n$，$p=q$ ヲ證明スレバヨイト考ヘテ

GO　②－④ヨリ　　$2a(m-n)=0$

シカルニ $a\neq 0$　　∴ $m=n\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤ヲ①ニ代入シテ　$an^2+ap+bn+c=0\cdots\cdots①'$

①′－③ヨリ　　$a(p-q)=0$

シカルニ $a\neq 0$　　∴ $p=q$　　∴ $m=n$，$p=q$ ナリ。

指導總括　コノ證明ニヨリ，一元二次方程式ノ根ノ形ニ就テ次ノ定理ガ得ラレル。

> **定理 24.** **係數ガ有理數**ナル一元二次方程式ノ**一根ガ** $m+\sqrt{p}$ **ナル形ノ無理數**デアレバ，**他ノ一根**ハ**必ズ** $m-\sqrt{p}$ **ナル形ノ無理數**デアル。

註　コノ定理ハ係數ガ無理數ノ場合ハ勿論成立シナイ。

【試練問題】 係數ガ實數ナル一元二次方程式ノ一根ガ $m+i\sqrt{p}$ ナル形ノ虚數デアレバ，他ノ一根ハ必ズ $m-i\sqrt{p}$ ナル形ノ虚數デアル。但シ m ハ實數，p ハ正ノ實數トス。【定理】
コレヲ證明セヨ。

4. 一元高次方程式（三次以上）ノ解法

一元高次方程式ノ一般解法ハナク，諸君ノ解キ得ルノハ次ノ何レカノ場合ニ限ル。

1. **總テノ項ヲ一邊ニ集メテ因數分解**シテ解ク。
   （剩餘定理ヲ用ヒル事ガ多イ）
2. **置換法**ニヨツテ**二次又ハ一次方程式**ヲ導イテ解ク。
3. **逆數方程式ノ解法**（特殊解）ニ依ツテ解ク。

(1) 因數ニ分解スル場合

例 136. 方程式 $x^3=1$ ヲ解ケ。

【解】 移項シテ $x^3-1=0 \quad \therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

$$\therefore x-1=0 \text{ 又ハ } x^2+x+1=0$$

$$\therefore x=1 \quad \text{又ハ } x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

答 1 ト $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

1 ノ立方根ニ就テ

例 136 ヨリ 1 ノ立方根ハ 1 ト $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ト $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ トノ三ツアルコトガワカル。所ガ $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 及ビ $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ヲ平方シテ見ルト

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \text{トナリ，}$$

$$\text{逆ニ} \quad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{トナル。}$$

即チ $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ト $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ トノ何レカ一方ヲ平方スルト他方ニナルカラ，ソノ一ツヲ ω デ表ハスト他ハ ω^2 デ表ハサレル。
依テ通常 1 ノ立方根ハ 1 ト ω ト ω^2 トノ三ツデ表ハス。

註 1. ω ニツイテハ種々ナ性質ガアルガ諸君トシテハ
(1) ω ハ $x^2+x+1=0$ ノ根即チ $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ ノ何レカ一ツヲ表ハス記號デアルコト，從ツテ，
(2) $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ デアルコトハ是非心得テ居テ貰ヒ度イ。

註 2. ω ヲ用ヒルト 8 ノ立方根ハ 2，2ω，$2\omega^2$ ノ三ツデ表ハサレル。

$$\left(\begin{array}{l} \because\ x^3=8 \text{ ノ兩邊ヲ } 8 \text{ デ割ルト } \left(\dfrac{x}{2}\right)^3=1 \\ \qquad \therefore \dfrac{x}{2}=1,\ \omega,\ \omega^2 \quad \therefore x=2,\ 2\omega,\ 2\omega^2 \end{array}\right)$$

同樣ニ -27 ノ立方根ハ -3，-3ω，$-3\omega^2$ ノ三ツ
一般ニ a ノ立方根ハ $\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{a}\,\omega$，$\sqrt[3]{a}\,\omega^2$ ノ三ツデ表ハサレル。

例 137. 次ノ方程式ヲ解ケ。
(A) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$
(B) $(x-2)(x-3)(x-4)=24$

(A) 方針 左邊ヲ因數分解スル方針デ項ヲ組合セテ見テモウマク出來ナイカラ，剩餘定理ヲ應用スル。

【解】 $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ ト置クト
$f(1)=1+2-7-8+12=0$
$\therefore f(x)$ ハ $(x-1)$ ナル因數ヲ有スル（剩餘定理）
又 $f(2)=16+16-28-16+12=44-44=0$
$\therefore f(x)$ ハ $(x-2)$ ナル因數ヲモ有スル。
依テ $f(x)$ ハ $(x-1)(x-2)$ 即チ x^2-3x+2 デ割切レル。
割算ヲ實行シテ

原方程式ハ

$$(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)=0$$

$$\therefore (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=0$$

$\therefore$ $x=1$ 又ハ $x=2$ 又ハ $x=-2$

又ハ $x=-3$

$$\begin{array}{r} x^2+5x+6 \\ x^2-3x+2\,\overline{)\,x^4+2x^3-\ 7x^2-8\ x+12} \\ x^4-3x^3+\ 2x^2 \qquad\qquad \\ \hline 5x^3-\ 9x^2-\ 8x \qquad \\ 5x^3-15x^2+10x \qquad \\ \hline 6x^2-18x+12 \\ 6x^2-18x+12 \\ \hline 0 \end{array}$$

答　1, 2, −2, −3

指導總括　1. 左邊ノ因數分解ノミ＝止メテ根ヲ求ムル事ヲ忘レルモノヤ又逆＝根ハ求メテ得テモ與式＝$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$ $\therefore x=1$ 又ハ 2 云々ト斷定シ方程式解法ノ形式ノ整ハナイモノガアル。

2. $(x-1)$ ナル一因數ヲ發見シタトキ直チ＝ $f(x)$ ヲ $x-1$ デ割リ

$$(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)=0 \quad \text{トシ}$$

$$(x-1)\{x^2(x+3)-4(x+3)\}=0$$

$\therefore$ $(x-1)(x+3)(x^2-4)=0$ トシ，之ヲ解イテモヨイ。

(B)　$(x-2)(x-3)(x-4)=24$ ……………①

方針　移項シテ括弧ヲ去リ　$x^3-9x^2+26x-48=0$ トシ

コノ左邊ヲ $f(x)$ ト置イテ -48 ノ因數 ±1, ±2, ±3, ……等ヲ代入シテ 0 トナルモノヲ求メ (A) ＝倣ツテヤレバ出來ルガ，與ヘラレタ方程式ノ括弧ヲ活用シ，原方程式ノマヽ左邊ノ x ＝數値ヲ代入スル方ガ計算ガ簡單デアル。

【解】 ①ノ左邊＝ $x=6$ ヲ代入スルト

$$(x-2)(x-3)(x-4)=4\times3\times2=24=\text{右邊}$$

依テ①ハ $x=6$ ナル一根ヲ有スル事ヲ知ル。

移項シテ整頓スレバ　$x^3-9x^2+26x-48=0$ …………①′

左邊ヲ $x-6$ デ割リ　$(x-6)(x^2-3x+8)=0$

$$\therefore\quad x=6 \text{ 又ハ } x=\frac{3\pm\sqrt{9-32}}{2}=\frac{3\pm i\sqrt{23}}{2}$$

答　6 ト $\dfrac{3\pm i\sqrt{23}}{2}$

指導總括　括弧ノマヽデ數値ヲ代入シテ一根ヲ發見シタ點ガ本例ノ主眼

點デアル。倘折角正シク解キ乍ラ「虚根ハ題意＝適セズ」等ト誤認シテ之ヲ捨テルモノガアル。

【試練問題】 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(i)　$x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$

(ii)　$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0$

答 (i) ±1, $\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$,

(ii) $-(a+b+c)$, $-\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab}\}$

例 138. $x^4-(2+a+b)x^3+\{4+2(a+b)+ab\}x^2-2(ab+2a+2b)x+4ab=0$ ノ實根ヲ求メヨ。但シ a, b ハ實數トス。

方針　(1) 矢張リ剩餘定理ヲ應用シテ $4ab$ ノ因數 ±1, ±2, ±4, $\pm a$, $\pm2a$, $\pm4a$, $\pm b$, $\pm2b$, $\pm4b$ 等ヲ代入シテ 0 トナルモノヲ見付ケテ因數＝分解スル。

【解】 與式ノ左邊＝ $x=a$ ヲ代入スルト

$$a^4-2a^3-a^4-a^3b+4a^2+2a^3+2a^2b+a^3b-2a^2b-4a^2-4ab+4ab=0$$

同樣＝ $x=b$ ヲ代入シテモ 0 トナルカラ左邊ハ $(x-a)(x-b)$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル。割算ヲ實行シテ（答案＝ハ計算ヲ示セ）

$$(x-a)(x-b)(x^2-2x+4)=0$$

$\therefore$ $x=a$ 又ハ $x=b$ 又ハ $x=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm\sqrt{-3}$

a, b ハ實數ナル故 $x=a$ 及ビ $x=b$ ハ題意＝適スル。

$1\pm\sqrt{-3}$ ハ虚數デアルカラ題意＝適シナイ。　答 a ト b

方針　2. 係數ガ a, b ＝關シテ對稱ナルコト＝着眼シ，$a+b$ ト ab トヲ束＝シテ置換法＝ヨル。

【解】 $a+b=p$, $ab=q$ ト置クト原方程式ハ

$$x^4-(2+p)x^3+(4+2p+q)x^2-2(q+2p)x+4q=0$$

STOP x ニツイテハ四次；p, q ニツイテハ一次ナルコトニ着眼シ

GO p, q ニツイテ整頓スルト

$$-p(x^3-2x^2+4x)+q(x^2-2x+4)+(x^4-2x^3+4x^2)=0$$

$$\therefore\ (x^2-2x+4)(x^2-px+q)=0$$

$$\therefore\ x^2-2x+4=0 \quad 又ハ \quad x^2-(a+b)x+ab=0$$

（以下ハ前頁ノ解法ト同様デアル）

【試練問題】 $x^3-(a^2+b^2+ab)x-ab(a+b)=0$ ヲ解ケ。

答 $-a,\ -b,\ a+b$

(2) 置換法ニヨル解法

例 139. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(A) $1000x^6-6119x^3+9261=0$

(B) $(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4=0$

[illegible] (A) ハ $x^3=y$ ト置クト二次方程式ニナル。

(B) ハ $6x^4$ ニ着眼シテ左邊ノ四ツノ因數ヲ x ノ係數ト常數項トガ揃フ様ニ二ツ宛組合セテ y ト置ク。

(A)【解】 $x^3=y$ ト置クト $1000y^2-6119y+9261=0$

根ノ公式ニヨリ $y=\dfrac{6119\pm\sqrt{6119^2-4000\times9261}}{2000}$

$$=\frac{6119\pm\sqrt{398161}}{2000}=\frac{6119\pm631}{2000}$$

$$\therefore\ x^3=\frac{6750}{2000}=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\omega,\ \frac{3}{2}\omega^2$$

又ハ $x^3=\dfrac{5488}{2000}=\dfrac{343}{125}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^3$

$$\therefore\ x=\frac{7}{5},\ \frac{7}{5}\omega,\ \frac{7}{5}\omega^2$$

	6 3 1
6	39,81,61
6	36
123	381
3	369
1261	1261
1	1261
	0

答 $\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\omega,\ \dfrac{3}{2}\omega^2,\ \dfrac{7}{5},\ \dfrac{7}{5}\omega,\ \dfrac{7}{5}\omega^2,$

[illegible] $x^3=\dfrac{27}{8}$ ヨリ $x=\dfrac{3}{2}$ ノミヲ求メ虚根ヲ忘レルモノガ多イ。

(B)【解】 $(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4=0$

二ツ宛組合セテ $\{(x+1)(3x-1)\}\{(2x+1)(4x-1)\}+6x^4=0$

$$\therefore\ (3x^2+2x-1)(8x^2+2x-1)+6x^4=0 \cdots\cdots\cdots ①'$$

$2x-1=y$ ト置ケバ $(3x^2+y)(8x^2+y)+6x^4=0$

整頓スルト $30x^4+11x^2y+y^2=0$

$$\therefore\ (5x^2+y)(6x^2+y)=0$$

$y=2x-1$ ナル故 $5x^2+2x-1=0$ 又ハ $6x^2+2x-1=0$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5} \quad 又ハ \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$$

答 $\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{5},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$

[illegible] ①′ ニ於テ $3x^2+2x-1=y$ ト置キ $y(5x^2+y)+6x^4=0$ トスレバヤヽ簡單ニナル。

【試練問題】

(i) $x^4-22x^2+81=0$ ヲ解ケ（根ハ小數第三位マデ）

(ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ ヲ解ケ。 （城 醫）

答 (i) $\pm2.162,\ \pm4.162$ (ii) $1,\ -6,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{39}\,i}{2}$

(3) 相反方程式（逆數方程式）ノ解法

總テノ項ヲ一邊ニ集メテ $A=0$ ノ形ニ整頓シタトキ A ガ相反式（兩端カラノ係數ガ順次ニ夫々相等シイ式）トナル方程式ヲ**相反方程式**トイフ。ソシテコノ形ノ方程式ニ a ナル根ガアルト必ズ其逆數 $\dfrac{1}{a}$ ナル根モアルコトカラ之ヲ**逆數方程式**トモイフ。ソシテコレヲ解クニハ相反式ノ特徴ヲ利用シテ次ノ如キ特殊ナ解法ニヨル。

（イ）偶數次ノ相反方程式

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+cx^2+bx+a=0$（但シ n ハ偶數）

ヲ解クニハ x ガ 0 ナラザルコトヲ述ベテ兩邊ヲ $x^{\frac{n}{2}}$ デ割ツタ後

$x+\dfrac{1}{x}=y$ ト置ク。

例 140. $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ ヲ解ケ。

【解】　$6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ ……………………①

$x^2\neq0$ ナル故（∵ $x=0$ トスレバ $6=0$ トナリ不合理デアルカラ）

兩邊ヲ x^2 デ割レバ　$6x^2-5x-38-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$

$$\therefore\ 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=y$ ト置クト　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$ トナルカラ

$$6(y^2-2)-5y-38=0$$
$$\therefore\ 6y^2-5y-50=0$$
$$\therefore\ (2y+5)(3y-10)=0$$
$$\therefore\ y=-\frac{5}{2}\quad 又ハ\quad y=\frac{10}{3}$$
$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}\quad 又ハ\quad x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$$

$x\neq0$ ナル故	$2x^2+5x+2=0$	$3x^2-10x+3=0$
	$(2x+1)(x+2)=0$	$(3x-1)(x-3)=0$
∴	$x=-\dfrac{1}{2}$ 又ハ -2	$x=\dfrac{1}{3}$ 又ハ 3,

答　$-\dfrac{1}{2},\ -2,\ \dfrac{1}{3},\ 3,$

指導要括　1. 四ツノ根ガ二ツ宛互ニ逆數デアルコトニ注意セヨ。

2. 剰餘定理ヲ用ヒテ左邊ヲ因數ニ分解シテモ勿論出來ル。

（ロ）奇數次ノ相反方程式

解法　左邊カラ $(x+1)$ 又ハ $(x-1)$ ナル因數ガ必ズヲ括リ出サレテ

$(x\pm1)\times$（偶數次ノ相反式）$=0$ ノ形ニナル。

例 141. $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0$ ヲ解ケ。

方針　係數ノ等シイ項ヲ二項組合セテ $(x+1)$ ナル因數ヲ括リ出ス。

【解】係數ノ相等シキ項ヲ二ツ宛組合セルト

$$6(x^5+1)+11x(x^3+1)-33x^2(x+1)=0$$
$$\therefore\ (x+1)\{6(x^4-x^3+x^2-x+1)+11x(x^2-x+1)-33x^2\}=0$$
$$\therefore\ (x+1)(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)=0$$
$$\therefore\ x+1=0\ 又ハ\ 6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$$

（イ）$x+1=0$ ノトキ $x=-1$

（ロ）$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ ノトキ

STOP　コレハ偶數次ノ相反方程式デアルカラ前例ニ倣ツテ解ケバヨイ（前例ト全ク同一デアルカラコヽニハ省ク）

答　$-1,\ 2,\ \dfrac{1}{2},\ -3,\ -\dfrac{1}{3}$

【試練問題】 $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$ ヲ解ケ。

答　$-1,\ -2,\ -\dfrac{1}{2},\ 1$（二重根）

（ハ）準相反方程式（奇數次ノ項ノ係數ガ絶對値相等シクテ異符號）

例 142. $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$ ヲ解ケ。

方針　相反方程式ニ倣ツテ解キ　$x-\dfrac{1}{x}$ ヲ y ト置ク。

【解】$x^2\neq0$ デ兩邊ヲ割ルト（$x=0$ トスレバ $6=0$ トナルカラ）

$$6x^2-25x+12+\frac{25}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$
$$\therefore\ 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$$

$x-\dfrac{1}{x}=y$ ト置クト　$x^2+\dfrac{2}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=y^2+2$ トナルカラ

$$6(y^2+2)-25y+12=0$$
$$\therefore\ 6y^2-25y+24=0$$

$\therefore \quad (2y-3)(3y-8)=0$

$\therefore \quad y=\dfrac{3}{2}$ 又ハ $y=\dfrac{8}{3}$

$\therefore \quad x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$	又ハ $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{3}$
$x\neq 0 \quad \therefore \quad 2x^2-3x-2=0$	$\therefore \quad 3x^2-8x-3=0$
$(2x+1)(x-2)=0$	$(3x+1)(x-3)=0$
$\therefore \quad x=-\dfrac{1}{2}$ 又ハ 2	$\therefore \quad x=-\dfrac{1}{3}$ 又ハ 3

答 $2,\ -\dfrac{1}{2},\ 3,\ -\dfrac{1}{3}$

註 四ツノ根ハ二ツ宛他ノ一根ノ逆數ノ符號ヲ變ジタモノデアル。

【試練問題】 $3x^4-8x^3-6x^2+8x+3=0$ ヲ解ケ。

答 $1,\ -1,\ 3,\ -\dfrac{1}{3}$

(4) 一根又ハ二根ガ與ヘラレタ場合

例 143. x ニツイテノ三次式 $x^3-8x^2-(a+1)x+4a$ アリ。コノ式ノ値ヲ 28 ナラシムル x ノ値ノ一ツガ -2 ナルトキ，他ノ二ツヲ四捨五入シテ小數第二位マデ求メヨ。

方針 一根 $x=-2$ ガ與ヘラレテ居ル事ニ着眼シ之ヲ代入シテ先ヅ a ヲ求メ，然ル後 與式$=28$ ナル方程式ノ他ノ二根ヲ求メル。

【解】 題意ニヨリ $x^3-8x^2-(a+1)x+4a=28$ ……①

ノ一根ガ -2 ナル故 $-8-32+2(a+1)+4a=28$

之ヲ解キテ $a=11$

①ニ代入シテ $x^3-8x^2-12x+16=0$ ……②

STOP コレヲ解クノニ再ビ $x=-2$ ナル根ヲ有スル事ヲ利用シテ左邊ヲ因數ニ分解スル。

GO $x=-2$ ガ此方程式ノ一根ナル故左邊ハ $(x+2)$ ナル因數ヲ有ス。

割算ヲ實行シテ $(x+2)(x^2-10x+8)=0$

$\therefore \quad x=-2$ 又ハ $x=5\pm\sqrt{25-8}$

依テ他ノ二根ハ $5+\sqrt{17}=5+4.123\cdots\cdots=9.123\cdots\cdots$

$5-\sqrt{17}=5-4.123\cdots\cdots=0.876\cdots\cdots$

四捨五入シテ第二位マデ求メルト 9.12 强 ト 0.88 弱

答 9.12 强 ト 0.88 弱

[illegible] 1. 答ニ强弱ヲ附記セヌ者ガアル。

2. $5-\sqrt{17}=5-4.123\cdots\cdots=0.876\cdots\cdots$ トスベキデアルノニ $5-4.123=0.877$ トスル者ガ多イ。0.877 トシテモ四捨五入シタ結果ハ矢張リ 0.88 弱トナリ答ニ變リハナイガ減點ヲ免レナイ。

【試練問題】 三次方程式 $x^3-ax^2-72=0$ ノ一ツノ根ガ -6 ナルコトヲ知リテ他ノ二根ヲ小數第三位マデ四捨五入シテ求メヨ。

答 2.606 弱 ト -4.606 弱

註 $x=-1\pm\sqrt{13}=-1\pm3.6055\cdots\cdots$ ヲ得タル後 $2.6055\cdots\cdots$ ヲ四捨五入シテ 2.606 弱ト答ヘル事ニ異論ハナイガ $-4.6055\cdots\cdots$ ヲ四捨五入シテ -4.606 トシタ場合ニ强，弱ノ何レヲ附記スルカニ付テハ二樣ニ考ヘラレルガ，正數ノ場合ト同樣ニ繰上ゲタ場合ニハ弱，切捨テタ場合ニハ强トシテ置ク。

例 144. $x^4-2x^3-22x^2+62x-15=0$ ノ一根ガ $2-\sqrt{3}$ ナルコトヲ知リテ之ヲ解ケ。

方針 一根ガ $2-\sqrt{3}$ ナル故與方程式ノ左邊ハ $x-(2-\sqrt{3})$ デ割切レル筈デアルト考ヘテ解ク（別解ヲ後ニ示ス）

【解】 題意ニヨリ $x^4-2x^3-22x^2+62x-15=0$ ……①

ノ一根ガ $2-\sqrt{3}$ ナル故 ①ノ左邊ハ $x-(2-\sqrt{3})$ ナル因數ヲ有スル筈デアル。割算ヲ實行スルト

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3-\sqrt{3}\,x^2-(19+2\sqrt{3})x+15(2+\sqrt{3}) \\
\hline
x-(2-\sqrt{3}) & x^4-2x^3-22x^2+62x-15 \\
 & x^4-(2-\sqrt{3})x^3 \\
\cline{2-2}
 & -\sqrt{3}\,x^3-22x^2 \\
 & -\sqrt{3}\,x^3+(2\sqrt{3}-3)x^2 \\
\cline{2-2}
 & -(19+2\sqrt{3})x^2+62x \\
 & -(19+2\sqrt{3})x^2+(32-15\sqrt{3})x \\
\cline{2-2}
 & 15(2+\sqrt{3})x-15 \\
 & 15(2+\sqrt{3})x-15 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

次ニ　商　$x^3-\sqrt{3}\,x^2-(19+2\sqrt{3})x+15(2+\sqrt{3})$ ニ於テ $x=3$ ヲ代入スルト　$27-\underset{\sim\sim}{9\sqrt{3}}-57-\underset{\sim\sim}{6\sqrt{3}}+30+\underset{\sim\sim}{15\sqrt{3}}=0$ トナルカラ，コノ式ハ更ニ $x-3$ デ割切レル。割算ヲ實行シテ

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+(3-\sqrt{3})x-5(2+\sqrt{3}) \\
\hline
x-3 & x^3-\sqrt{3}\,x^2-(19+2\sqrt{3})x+15(2+\sqrt{3}) \\
 & x^3-3x^2 \\
\cline{2-2}
 & (3-\sqrt{3})x^2-(19+2\sqrt{3})x \\
 & (3-\sqrt{3})x^2-(9-3\sqrt{3})x \\
\cline{2-2}
 & -5(2+\sqrt{3})x+15(2+\sqrt{3}) \\
 & -5(2+\sqrt{3})x+15(2+\sqrt{3}) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

依テ　**原方程式**ハ

$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-3\}\{x^2+(3-\sqrt{3})x-5(2+\sqrt{3})\}=0$　トナル

第三式ヲ更ニ因數ニ分解シテ

$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-3\}(x+5)\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$

$\therefore$　$x=2-\sqrt{3}$　又ハ　$x=3$　又ハ　$x=-5$　又ハ　$2+\sqrt{3}$

答　$3,\ -5,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$

指導綱要　コレデ解クコトハ出來タガ，途中ノ計算ガ相當複雜ナタメニ答ヲ求メ得ナイ者ガ多イ。コノ樣ナ場合ニ $2-\sqrt{3}$ ト共軛ナル數 $2+\sqrt{3}$ ヲ利用シ，次頁ノ準定理ヲ應用スルト次ノ樣ニ簡單ニ解キ得ル。

【別解】　與式ノ**係數ガ有理數**デ，題意ニヨリ一根ガ $2-\sqrt{3}$ ナル故，ソノ共軛數 $2+\sqrt{3}$ ナル根ヲモ有スル筈デアル。依テ與方程式ノ左邊ヲ $\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}$ 即チ x^2-4x+1 デ割ツテ見ルト

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-15 \\
\hline
x^2-4x+1 & x^4-2x^3-22x^2+62x-15 \\
 & x^4-4x^3+x^2 \\
\cline{2-2}
 & 2x^3-23x^2+62x \\
 & 2x^3-8x^2+2x \\
\cline{2-2}
 & -15x^2+60x-15 \\
 & -15x^2+60x-15 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

依テ**原方程式**ハ $(x^2-4x+1)(x^2+2x-15)=0$　トナル。

$\therefore$　$x^2-4x+1=0$　又ハ　$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore$　$x=2\pm\sqrt{3}$　又ハ　$x=-5$ 又ハ 3

答　$2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ -5,\ 3$

指導綱要　$2-\sqrt{3}$ ト共軛ナル $2+\sqrt{3}$ ヲ利用スルコトニヨリ，割算ニ於ケル係數ガ有理數トナツタ點ヲ味フベキデアル。

> **（準定理）**　**係數ガ有理數**ナル一元高次方程式ニ $p+\sqrt{q}$ ナル無理數ノ根ガアレバ，ソノ共軛數 $p-\sqrt{q}$ モ亦ソノ方程式ノ根デアル。但シ p ハ有理數，q ハ完全平方數ナラザル正ノ有理數トス。

註　コノ定理ノ證明ハヤヽ程度ヲ越エルノデ，中等學校ノ教科書ニハナイガ參考ノ爲ニ示スコトニスル。

證明　一元高次方程式ヲ　$f(x)=0$ ……………①　トス。
コヽニ $f(x)$ ハ係數ガ有理數ナル三次以上ノ整式デアル。

STOP　$f(x)$ ガ $p+\sqrt{q}$ 及ビ $p-\sqrt{q}$ ナル二根ヲ同時ニ有スルコトヲ示セバヨイカラ，$f(x)$ ガ二次式 $\{x-(p+\sqrt{q})\}\{x-(p-\sqrt{q})\}$ デ割切レルコトヲ示セバヨイト考ヘテ

GO　$f(x)$ ヲ二次式 $\{x-(p+\sqrt{q})\}\{x-(p-\sqrt{q})\}$ 即チ $x^2-2px+(p^2-q)$ デ割ツタトキノ剩餘ハ一般ニハ x ノ一次式ナルベキ故，之ヲ $mx+n$（但シ m, n ハ有理數）トシ商ヲ $Q(x)$ トスルト次ノ恒等式ガ成立ス

$f(x)\equiv\{x-(p+\sqrt{q})\}\{x-(p-\sqrt{q})\}Q(x)+mx+n$ ……②

方程式 $f(x)=0$ ガ $p+\sqrt{q}$ ナル根ヲ有スル故 $f(p+\sqrt{q})=0$ デナケレバナラヌ。

依テ②ヨリ　$m(p+\sqrt{q})+n=0$

$\therefore$　$(mp+n)+m\sqrt{q}=0$ ……………③

m, n, p ハ何レモ有理數デ $\sqrt{q}$ ハ無理數ナル故 ③ ガ成立スルタメニハ　$mp+n=0$ 且 $m=0$ ガ同時ニ成立シナケレバナラヌ。

$\therefore\ m=0$ 且 $n=0$

②ニ代入シテ　$f(x)=\{x-(p+\sqrt{q})\}\{x-(p-\sqrt{q})\}Q(x)\cdots$④

$\therefore\ f(x)=0$ ナル方程式ハ $p-\sqrt{q}$ ナル根ヲモ有スル。

> 系　**係數ガ實數**ナル一元高次方程式ニ $p+i\sqrt{q}$ **ナル形ノ虚根ガ**アレバ必ズ**其共軛數** $p-i\sqrt{q}$ ナル根モアル。
> 但シ p ハ實數，q ハ正ノ有理數トス。

註　定理ニ傚ツテ各自ソノ證明ヲ試ミヨ。

【試練問題】　$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ハ方程式 $x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$ ノ一根ナルコトヲ示セ。更ニ此ノ方程式ノ殘リノスベテノ根ヲ求メヨ。

答　他ノ三根ハ $2-\sqrt{3}$，$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$

註　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ノ分母ヲ有理化シタ後例解ノ別法ニ傚ヘ。

鍛 錬 問 題 九

101. $\dfrac{x-a+c}{b-c}+\dfrac{x-b+c}{a-c}+\dfrac{x-a-b}{c}=0$ ヲ解ケ。

102. 先ヅ一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ公式ヲ求メ，次ニソノ公式ヲ用ヒ　$3x^2+7x-5=0$　ヲ解ケ。

103. (i)　次ノ二次方程式ノ根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$\sqrt{3}\,x^2+2\sqrt{7}\,x+4=0$

(ii)　二次方程式 $(53-20\sqrt{7})x^2+5(5-2\sqrt{7})x+4=0$ ノ根ヲ小數第三位マデ求メ，第三位未滿ヲ四捨五入セヨ。

104. x ニ關スル二次方程式ニ於テ

(i)　係數ガ有理數ナルトキ，一根ガ無理數ナラバ他ノ根モ亦無理數ナリ。

(ii)　係數ガ實數ナルトキ，一根ガ虚數ナラバ他ノ根モ亦虚數ナリ，之ヲ證明セヨ。

105. 四乘シテモ數値ノ變ラヌ數ヲ求ム。

106. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(i)　$x^3-x-120=0$　(東商豫)

(ii)　$(x^2+3x-3)^2-6x^3-13x^2+18x=0$　(愛　醫)

(iii)　$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

107. 次ノ三次方程式ヲ解ケ。

$abx^3+(a^2-b)x^2=1$　(日醫豫)

108. 次ノ各方程式ハ何レモ $x=3$ ナル一根ヲ有ス。コレニ由リテ各方程式ヲ解ケ。

(a)　$7x^2-mx+12=0$

(b)　$nx^2-11x+15=0$

(c)　$x^3-21x^2+125x-213=0$　(長　工)

109. $x^4-12mx^2+7nx+2=0$ ノ二根ガ -1，-2 ナリト云フ。他ノ二根ヲ求メヨ。

110. $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ハ方程式 $x^4-12x^3+43x^2-42x+6=0$ ノ一根ナルコトヲ示セ，更ニコノ方程式ノ殘リノスベテノ根ヲ求メヨ。

答　**101.** $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{c}\neq 0$ 即チ

$b(a-b)+c(b-c)\neq 0$ ノトキ $a+b-2c$，

$b(a-b)+c(b-c)=0$ ノトキハ根ハ無數ニアル(即チ不定)

102. $\dfrac{-7\pm\sqrt{109}}{6}$　103. (i) -1.372, -1.682　(ii) 3.431 弱 ト 13.722 强　105. $0, 1, \omega, \omega^2$　106. (i) 5, $\dfrac{-5\pm\sqrt{-71}}{2}$ (ii) ±1, ±3, (iii) $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, 1 (二重根)　107. $\dfrac{1}{a}$ ト $\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2b}$　108. (a) 3, $\dfrac{4}{7}$, (b) 3, $\dfrac{5}{2}$, (c) 3, $9\pm\sqrt{10}$

109. $m=\dfrac{1}{2}$, $n=-\dfrac{3}{7}$,　他ノ二根ハ $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

110. 他ノ三根ハ　$3+2\sqrt{2}$,　$3+\sqrt{3}$,　$3-\sqrt{3}$

第二十一章　分數方程式ノ解法

1. 分數方程式ノ解法

分數方程式ハ分母ニ未知數ヲ含ム式ガアルカラ，之ヲ解クニハ

1. 與ヘラレタ方程式ヲ整頓シタル後
2. 分母ヲ拂フカ (分母ノ L.C.M. ヲ兩邊ニ乘ジテ) 又ハ置換法ニヨツテ整方程式ニ導イテ之ヲ解キ
3. 原方程式ノ分母ヲ零ナラシムルヤ否ヤノ驗シヲ行フ。

註　分數方程式ノ解法上最モ大切ナコトハ最後ノ驗シデ，驗シヲ忘レル者ヤ，何故驗シヲシナケレバナラヌカヲ理解シテキナイ者ガ多イ。試ミニ

方程式 $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{2}$ ヲ解ケ。　(廣　師)

ニ對スル文部時報ノ講評ヲ見ルト

「得タル根ガ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメザルコトヲ述ベヌ者ヤ，或ハ形式的ノ受驗準備ノ爲カ $x=9$, $x=4$ ガ分母ヲ零ナラシメナイコトヲ證明シタ上ニ尙實際ニコレラノ値ヲ代入シテ 左邊=右邊 ナルコトヲ驗算シテ居ル者ガ三割位モアツタ」ト述ベラレテアル。

2. 驗シノ必要ナ理由

原方程式ノ分母ヲ零ナラシムル根ニ對シテハソノ分數式ハ無意味ノ式ニナルカラ明ラカニ原方程式ヲ滿足シナイ。依テ之ヲ捨テナケレバナラヌトイフ事ハ直チニ理解サレル事デアルガ，コノ樣ナ原方程式ノ根デナイ根 (即チ無緣根) ガ何故，何處デ導入セラレタカ？ヲ考ヘテ見ルト，コレハ分母ヲ拂フトキニ未知數ヲ含ム式ヲ兩邊ニ乘ジル爲デアル。

ソシテ第十九章ニ於テ述ベタ樣ニ方程式 A=B ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム式 P ヲ乘ジルト原方程式ノ根ノ外ニ P=0 ヲ滿足スル根ガ餘分ニ含マレルノデアルカラ，分數方程式ノ解法ノ途中デ分母ヲ拂フ爲ニ分母ノ L. C. M. ヲ乘ジルト，ソノ L. C. M. ヲ零ナラシムル根 (即チ原方程式ノ分母ヲ零ナラシムル根) ダケガ餘分ニ含マレルコトニナル。

從ツテ驗シトシテハ

㋑　得タル根ガ原方程式ノ分母ヲ零ナラシムルヤ否ヤヲ驗シ分母ヲ零ナラシムルモノハ之ヲ捨テ，分母ヲ零ナラシメナイモノハ直チニ原方程式ノ根ナリト斷定スレバヨイノデ　左邊=右邊　ヲ驗ス必要ハナイ。

註　數係數ノ分數方程式ノ場合ハ上記ノ方法デ驗シヲスレバヨイガ，文字係數ノ場合ニハ上記ノ方法ノ他ニ，次ノ方法ヲ用ヒルコトガアル。

㋺　原方程式〔I〕ノ分母ヲ零ナラシムル未知數ノ値ヲ分母ヲ拂ツテ得ル整方程式〔II〕ニ代入シテ之ヲ滿足スルヤ否ヤヲ驗シ，以テ〔I〕ト〔II〕トガ同値ナリヤ否ヤヲ驗ス方法。

註　㋺ニ就テハ文字係數ノ場合 (257 頁) ニ於テ詳シク說明スル。

例 145.　$\dfrac{2x^2}{2x+3}=\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+5}{(x-2)(2x+3)}$ ヲ解ケ。

【解】

$$\frac{2x^2}{2x+3}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+5}{(x-2)(2x+3)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

兩邊ニ $(x-2)(2x+3)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$2x^2(x-2)=(x-1)(2x+3)-(x+5)$$

整頓スルト　$x^3-3x^2+4=0$

左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$(x-2)(x^2-x-2)=0$$

$$\therefore\ (x-2)^2(x+1)=0 \qquad \therefore\ x=2\ (\text{二重根})\ \text{又ハ}\ x=-1$$

【驗シ】 $x=2$ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメルカラ①ノ根デハナイ。
$x=-1$ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメヌカラ①ノ根デアル。

答 -1

指導標語　驗シハ必ズ答案ニ明示スベキモノデアル。

【試練問題】 $\dfrac{2x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{x}{x+2}+1$ ヲ解ケ。

答 根ナシ

3. 分母ヲ拂フ事ヲ急グナ

分數式ノ計算ノトキニ全部一度ニ通分スルヨリ適當ニ組合セテ通分スル方ガ簡單ニ出來ル事ガ多カツタ樣ニ，分數方程式ノ解法ニ於テモ直チニ分母ヲ拂フヨリ適當ニ組合セテ通分シ，之ヲ簡約シタ後ニ分母ヲ拂フ方ガ遙カニ簡單ニ出來ル場合ガ多イカラ，分母ヲ拂フコトヲ急ガナイデ，先ヅ式ノ變形，整頓ニ對シテ頭ヲ用ヒル樣ニ心掛ケヨ。

例 146. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

着眼　直チニ分母ヲ拂フト三次方程式ニナルガ，兩邊ヲ別々ニ通分スルト分子ガ揃フ事ニ着眼シテ先ヅ通分スル。

【解】 $$\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3} \cdots\cdots ①$$

兩邊ヲ別々ニ通分スルト

$$\frac{5x-13}{6}=\frac{5x-13}{(x-2)(x-3)} \cdots\cdots ②$$

STOP　コノ揃ツタ分子ヲ無斷デ消シテ

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)} \cdots\cdots ③$$

$(x-2)(x-3)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂ヒ

$$x^2-5x+6=6 \qquad \therefore\ x^2-5x=0 \qquad \therefore\ x=0\ \text{又ハ}\ 5$$

コレラノ値ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。
依テ求ムル根ハ 0 ト 5 ナリト誤ル者ガ多イ。
②ヨリ③ニ移ルコトハ兩邊ヲ $(5x-13)$ デ割ツタコトニナリ，兩邊ヲ未知數ヲ含ム式 P デ割ルト P ヲ 0 ナラシメル根ガ失ナハレルトイフ大切ナ事(223 頁參照)ヲ無視シタ大過失デ，コンナ事ヲヤツテハ折角ノ好着眼ガ臺ナシデアル。

GO　②ヲ移項スルト

$$(5x-13)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right)=0 \cdots\cdots ②'$$

$$\therefore\ 5x-13=0\ \text{又ハ}\ \frac{1}{6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)} \cdots\cdots ④$$

兩邊ニ $(x-2)(x-3)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$5x-13=0\ \text{又ハ}\ x^2-5x=0$$

$$\therefore\ x=\frac{13}{5}\ \text{又ハ}\ x=0\ \text{又ハ}\ 5$$

コレラノ値ハ何レモ原方程式 ① ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ所要ノ根デアル。

答 $\dfrac{13}{5}$, 0, 5

指導標語　方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム共通因數ガ出來タ場合ニ決シテ之ヲ約シテハナラヌ。移項スルト ②′ ノ樣ニ共通因數ガ括リ出サレテソノ共通因數ヲ 0 ナラシムル根ガ得ラレルノデアル。コノ事ガハツキリト理解出來レバ ②′ ノ式ヲ省イテ②ヨリ直チニ④ニ移ツテモヨイ

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+4}=\frac{4}{x+5}-\frac{5}{x+6}.$$ (宇　農)

答 -1 ト $-\dfrac{9}{2}$

例 147. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(A) $$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x+7}=\frac{x-3}{x+1}+\frac{x+4}{x+8}$$

(B) $$\frac{4x-5}{2x-3}-\frac{15x-23}{3x-4}=\frac{12x-17}{6x-10}-\frac{20x-29}{4x-5}$$

着眼　各分數式ノ分子ガ分母ヨリ低次デナイコト＝着眼シテ $\frac{x-2}{x+2}$ ヲ $1-\frac{4}{x+2}$ ノ如ク（常數＋分數式）ノ形＝直スト分子ノ次數ガ低クナルコト＝着眼シテ各分數式ヲ變形スル。

(A)【解】 各分子ヲ其分母デ割ツテ

$$\left(1-\frac{4}{x+2}\right)+\left(1-\frac{4}{x+7}\right)=\left(1-\frac{4}{x+1}\right)+\left(1-\frac{4}{x+8}\right)$$

兩邊カラ 2 ガ消エテ $\frac{4}{x+2}+\frac{4}{x+7}=\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x+8}$

$4\neq0$ ナル故　$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+8}$ ……①

兩邊ヲ別々＝通分スルト $\frac{2x+9}{(x+2)(x+7)}=\frac{2x+9}{(x+1)(x+8)}$

$$\therefore\ (2x+9)\left\{\frac{1}{(x+2)(x+7)}-\frac{1}{(x+1)(x+8)}\right\}=0$$

$(x+2)(x+7)(x+1)(x+8)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$(2x+9)\{x^2+9x+8-(x^2+9x+14)\}=0$$

$$\therefore\ (2x+9)(-6)=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{9}{2}$$

コノ値ハ原方程式ノ分母ヲ零＝シナイカラ所要ノ根デアル。

指導補説　コレデ出來タガ①ヲ移項シテ差ノ形＝直シテカラ通分スルト分子ガ x ヲ含マヌ式トナツテ次數ガ下ル事＝着眼スルト

【別法】 ①ヨリ　$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7}$

$$\therefore\ \frac{6}{(x+2)(x+8)}=\frac{6}{(x+1)(x+7)}$$

$6\neq0$　$\therefore\ \frac{1}{(x+2)(x+8)}=\frac{1}{(x+1)(x+7)}$

$(x+2)(x+8)(x+1)(x+7)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$x^2+8x+7=x^2+10x+16$$

$$\therefore\ x=-\frac{9}{2}$$

コノ値ハ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ所要ノ根デアル。

答 $-\frac{9}{2}$

(B)　$\frac{4x-5}{2x-3}-\frac{15x-23}{3x-4}=\frac{12x-17}{6x-10}-\frac{20x-29}{4x-5}$

【解】 各分子ヲ其分母デ割ツテ書キ直スト

$$\left(2+\frac{1}{2x-3}\right)-\left(5-\frac{3}{3x-4}\right)=\left(2+\frac{3}{6x-10}\right)-\left(5-\frac{4}{4x-5}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-4}=\frac{3}{6x-10}+\frac{4}{4x-5}$$

STOP　コノマヽ通分シテモ出來ルガ，通分シタトキノ分子ガ x ヲ含マヌ式トナル樣＝組合セヲ考ヘテ移項シテ見ルト

GO　$\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{6x-10}=\frac{4}{4x-5}-\frac{3}{3x-4}$

兩邊ヲ別々＝通分スルト

$$\frac{(6x-10)-(6x-9)}{(2x-3)(6x-10)}=\frac{(12x-16)-(12x-15)}{(4x-5)(3x-4)}$$

$$\therefore\ \frac{1}{(2x-3)(6x-10)}=\frac{1}{(4x-5)(3x-4)}$$

以下各自試ミヨ。　答 $\frac{10}{7}$

指導補説　分數式ヲ組合セル場合ハ，通分シタ結果「分子ガ揃ハヌカ？」「分子ガ低次式＝ナラヌカ？」ト考ヘテ見ヨ。勿論何レ＝モナラヌコトガアルカラ其時ハ其儘通分スルカ，分母ヲ拂ツテ解ケバヨイ。

【試練問題】 (i)　$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}$ ヲ解ケ。

(ii)　$\frac{5x-48}{x-11}+\frac{2x-11}{x-9}=\frac{2x-17}{x-12}+\frac{5x-33}{x-8}$ ヲ解ケ

（鹿　農）

答 (i) -4,　(ii) 10

例 148.　$\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3$ ヲ解ケ。

着眼　左邊ハ三ツノ分數式ノ和デ右邊＝ 3 ガアルカラコノ 3 ヲ三ツ＝分ケテ一ツ宛左邊ノ分數式ト組合セテ見ル。

【解】 $\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3$

∴ $\left(\frac{x+3}{3-x}-1\right)+\left(\frac{x+6}{6-x}-1\right)+\left(\frac{x+9}{9-x}-1\right)=0$

∴ $\frac{2x}{3-x}+\frac{2x}{6-x}+\frac{2x}{9-x}=0$ 〔分子ガ揃ツタ〕

$2x\left(\frac{1}{3-x}+\frac{1}{6-x}+\frac{1}{9-x}\right)=0$

$(3-x)(6-x)(9-x)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$2x\{(6-x)(9-x)+(3-x)(9-x)+(3-x)(6-x)\}=0$

∴ $2x=0$ 又ハ $3x^2-36x+99=0$

∴ $x=0$ 又ハ $x^2-12x+33=0$

∴ $x=6\pm\sqrt{3}$

$x=0$ 及ビ $6\pm\sqrt{3}$ ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ原方程式ノ根デアル。

答 0, $6\pm\sqrt{3}$

【試練問題】 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4$ ヲ解ケ。

答 $\frac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$

4. 置換法ノ活用

分數式又ハ其一部ヲ他ノ一文字デ置換ヘルコトニヨツテ低次式ヲ導クコトヲ工夫スル。

例 149. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(A) $\frac{x^2-5x}{x+1}+\frac{24(x+1)}{x(x-5)}+14=0$

(B) $\frac{5}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2+2x-2}-\frac{8}{x^2+2x+1}=0$

(A) 着眼 コノマヽ分母ヲ拂フト四次方程式ニナルカラ，$\frac{x^2-5x}{x+1}$ ト $\frac{x+1}{x(x-5)}$ トガ互ニ逆數デアルコトニ着眼シテ何レカ一方ヲ y ト置クト他ハ $\frac{1}{y}$ トナリ，分母ヲ拂ヘバ y ニツイテノ二次方程式ニナル。

【解】 $\frac{x^2-5x}{x+1}=y$ ト置クト $\frac{x+1}{x(x-5)}=\frac{1}{y}$ トナルカラ

原方程式ハ $y+\frac{24}{y}+14=0$ ……①

$y\neq0$ トシテ分母ヲ拂フト $y^2+14y+24=0$

∴ $(y+2)(y+12)=0$

∴ $y=-2$ 又ハ $y=-12$

コレラノ値ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ①ノ根デアル。

$y=\frac{x^2-5x}{x+1}$ ナル故 $\frac{x^2-5x}{x+1}=-2$ 又ハ $\frac{x^2-5x}{x+1}=-12$ ……②

分母ヲ拂ヒ $x^2-3x+2=0$ 又ハ $x^2+7x+12=0$

∴ $x=1$ 又ハ 2, 又ハ $x=-3$ 又ハ -4

コレラノ値ハ何レモ②及ビ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ所要ノ根デアル。

答 1, 2, −3, −4

[illegible] 置換法ニ氣付カズ，其儘分母ヲ拂フ者ハ正シイ答ニ到達シ得ナイ者ガ多イ。尙置換法ニ依ツタ場合 y ノ値ガ①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ事ヲ述ベナイ者ガアル。

(B) $\frac{5}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2+2x-2}-\frac{8}{x^2+2x+1}=0$ ……①

着眼 未知項ガ悉ク x^2+2x ナルコトニ着眼シテ x^2+2x ヲ y ト置ケ。

【解】 $x^2+2x=y$ ト置ケバ

①ハ $\frac{5}{y+2}+\frac{1}{y-2}-\frac{8}{y+1}=0$ ……②

$(y+2)(y-2)(y+1)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$5(y-2)(y+1)+(y+2)(y+1)-8(y+2)(y-2)=0$

整頓スルト $y^2+y-12=0$ ∴ $(y+4)(y-3)=0$

$$\therefore\ y=-4 \text{ 又ハ } y=3$$

コレラノ値ハ②ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。……………………③

且 $y=x^2+2x$ ナル故　$x^2+2x+4=0$ 又ハ $x^2+2x-3=0$

$$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{-3} \text{ 又ハ } x=1 \text{ 又ハ } -3$$

コレラノ値ガ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ事ハ③ヨリ明ラカデアル。

答 $1,\ -3,\ -1\pm i\sqrt{3}$

指導總括 x^2+2x ヲ y ト置ク代リ＝ x^2+2x+2 ヤ x^2+2x-2 等ヲ y ト置イテモヨイ。倘置換法ヲ用ヒタ場合 y ノ負根ヲ捨テル者ガ時々アル（之ハ無理方程式ノ解法デ $\sqrt{\ }=y$ ト置イテ解イタ場合＝ y ノ負根ヲ捨テルカラ之ト混同シテ居ルノデアラウ）

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=2\frac{1}{6}$$ （東　師）

答 $2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

例 150. $\frac{x^3}{8}-\frac{27}{x^3}=\frac{15}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}\right)-\frac{71}{2}$ ヲ解ケ。

着眼 直チ＝分母ヲ拂フト六次方程式＝ナル。　ソコデ未知項ノ形ヲ觀察シ，$\frac{x}{2}$ ト $\frac{3}{x}$ トヲ束＝シテ取扱フト　左邊ハ a^3-b^3 ノ形，右邊ノ括弧内ハ a^2+b^2 ノ形デアル事＝着眼シテ置換法ヲ用ヒル。

【解】

$$\frac{x^3}{8}-\frac{27}{x^3}=\frac{15}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}\right)-\frac{71}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{x^2}\right)=\frac{15}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}\right)-\frac{71}{2} \quad \cdots\cdots ①'$$

STOP $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^2+2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{x}\right)=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^2+3$ トナル事＝着眼シテ

GO $\frac{x}{2}-\frac{3}{x}=y$ ト置ケバ $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}=y^2+3$ トナル故

①′ ハ　$y\left(y^2+3+\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{2}(y^2+3)-\frac{71}{2}$

兩邊×2　$2y^3+9y=15y^2+45-71$

$$\therefore\ 2y^3-15y^2+9y+26=0$$

$y=-1$ トスルト左邊ハ 0 トナルカラ，左邊ハ $(y+1)$ ナル因數ヲ有スル。

$$\therefore\ (y+1)(2y^2-17y+26)=0$$

$$\therefore\ (y+1)(2y-13)(y-2)=0$$

$$\therefore\ y=-1 \text{ 又ハ } \frac{13}{2} \text{ 又ハ } 2$$

$$\therefore\ \frac{x}{2}-\frac{3}{x}=-1 \text{ 又ハ } \frac{x}{2}-\frac{3}{x}=\frac{13}{2} \text{ 又ハ } \frac{x}{2}-\frac{3}{x}=2$$

分母ヲ拂ヒ $x^2+2x-6=0$ 又ハ $x^2-13x-6=0$ 又ハ $x^2-4x-6=0$

$$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{7} \text{ 又ハ } x=\frac{13\pm\sqrt{193}}{2} \text{ 又ハ } x=2\pm\sqrt{10}$$

コレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイ。

答 $-1\pm\sqrt{7},\ \frac{13\pm\sqrt{193}}{2},\ 2\pm\sqrt{10}$

指導總括 $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}$ ハ $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{x}\right)$ トモ變形出來ルガ，左邊＝ $\frac{x}{2}-\frac{3}{x}$ ナル因數ノアルコト＝着眼シテ $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^2+3$ トシタ。コノ置換＝氣付カズ＝盲目的＝分母ヲ拂フ者ハ殆ド失敗＝終ル

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$ （水　高）

答 $6,\ -2,\ 3\pm\sqrt{21}$

5. 文字係數ノ場合

文字係數ノ場合モソノ解法（項ヲ組合セタリ，分母ヲ拂ツタリスル點）ハ數係數ノ場合ト變リハナイガ特＝注意スベキ點ハ根ノ吟味デ，數係數ノ場合ノ様＝單＝視察＝ヨリ原方程式ノ分母ヲ零ナラシムルヤ否ヤノ判定ヲ下スコトガ出來ナイ。從ツテ驗シトシテハ次ノ方法ヲ用ヒル。

④ 得タル根ヲ原方程式ノ分母ノ L.C.M. ニ代入シテ整頓シタ上，ソレガ 0 トナル事ガアルカ，ナイカヲ吟味スル（コレハ根ガ比較的簡單ナ形ノ場合ニ用ヒル）

⑪ 原方程式〔I〕ノ分母ヲ 0 ナラシムル値ヲ，分母ヲ拂ツテ得ル方程式〔II〕ニ代入シテ之ヲ滿足スルヤ否ヤ（即チ II ガ I ノ分母ヲ 0 ナラシムル根ヲ有スルヤ否ヤ）ヲ吟味シテ〔I〕ト〔II〕トガ同値ナリヤ否ヤヲ驗ス。（コレハ根ガ複雜ナ形ノトキニ用ヒル）

例 151. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}$ ヲ解ケ。

但シ $ab\neq cd$ トス。

着眼 分子ガ分母ヨリ高次デアルカラ先ヅ兩邊ヲ（整式＋分數式）ノ形ニ直シテカラ分母ヲ拂ツテ解キ根ノ吟味ニ主力ヲ注グ。

【解】 分子ヲ展開シテ $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x-(a+b)}=\dfrac{x^2-(c+d)x+cd}{x-(c+d)}$ ……①

分子ヲ分母デ割ツテ $x+\dfrac{ab}{x-(a+b)}=x+\dfrac{cd}{x-(c+d)}$

$$\therefore\ \frac{ab}{x-(a+b)}-\frac{cd}{x-(c+d)}=0 \quad\text{……①}'$$

$\{x-(a+b)\}\{x-(c+d)\}$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヘバ

$$ab\{x-(c+d)\}-cd\{x-(a+b)\}=0 \quad\text{……②}$$

$$\therefore\ (ab-cd)x=ab(c+d)-cd(a+b) \quad\text{……②}'$$

シカルニ題意ニヨリ $ab\neq cd$ ナル故 $ab-cd\neq 0$

$$\therefore\ x=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd} \quad\text{……③}$$

【驗シ】 ④ニヨル方法，

$x=\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$ ナルトキ

①ノ分母ノ L. C. M. $\{x-(a+b)\}\{x-(c+d)\}$

$$=\left\{\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}-(a+b)\right\}\left\{\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}-(c+d)\right\}$$

$$=\left\{\frac{ab(c+d)-ab(a+b)}{ab-cd}\right\}\left\{\frac{cd(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}\right\}$$

$$=\frac{abcd(a+b-c-d)^2}{(ab-cd)^2}$$

依テ $abcd(a+b-c-d)\neq 0$ ノトキ③ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ①ノ根デアルガ，$abcd(a+b-c-d)=0$ ノトキ③ハ①ノ分母ヲ零ナラシメルカラ①ノ根デハナイ。

答 $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$ 但シ $abcd(a+b-c-d)\neq 0$ トス。

$abcd(a+b-c-d)=0$ ノトキハ 根ナシ。

【驗シノ別法】（⑪ニヨル方法） ①ノ分母ヲ 0 ナラシムル x ノ値即チ $x=a+b$，$x=c+d$ ヲ②ニ代入シテ見ルト

$x=a+b$ ノトキ ②ノ左邊$=ab(a+b-c-d)$，　右邊$=0$

$x=c+d$ ノトキ ②ノ左邊$=-cd(c+d-a-b)=cd(a+b-c-d)$

依テ $abcd(a+b-c-d)\neq 0$ ノトキハ②ハ $a+b$，$c+d$ ナル根即チ①ノ分母ヲ 0 ナラシムル根ヲ有シナイ。從ツテ①ト②トハ同値デアル

コノトキ②ノ根 $x=\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$ ハ同時ニ①ノ根デアル。

答 $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$ 但シ $abcd(a+b-c-d)\neq 0$ トス。

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。但シ $a\neq b$ トス。

$$\frac{x+b}{x-b}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{2(a+b)}{x}$$

答 $a+b\neq 0$ ノトキ $\begin{cases} ab\neq 0 \text{ ナラバ } x=\dfrac{ab}{a-b}, \\ ab=0 \text{ ナラバ根ナシ。} \end{cases}$ $a+b=0$ ノトキ 不定

例 152. 方程式 $\dfrac{p+qx}{q+px}=\dfrac{r+sx}{s+rx}$ ヲ解ケ。

【解】 $\dfrac{p+qx}{q+px}-\dfrac{r+sx}{s+rx}=0$ ……①

$(q+px)(s+rx)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヘバ

$$(p+qx)(s+rx)-(r+sx)(q+px)=0$$

整頓スレバ $(qr-ps)x^2-(qr-ps)=0$

$\therefore\ qr-ps\neq 0$ ノトキハ $x^2=1$　$\therefore\ x=\pm 1$

$qr-ps=0$ ノトキハ 根ハ無數ニアル（即チ不定）

STOP 根ガ簡單デアルカラ驗シハ④ヲ採用シヤウト考ヘテ

GO【驗シ】

$x=1$ ノトキ ①ノ分母ノ L.C.M. $(q+px)(s+rx)=(q+p)(s+r)$

∴ $\begin{cases}(p+q)(r+s)\neq 0 & \text{ナルトキハ } x=1 \text{ ハ①ノ根デアルガ} \\ (p+q)(r+s)=0 & \text{ナルトキハ } x=1 \text{ ハ①ノ根デハナイ。}\end{cases}$

$x=-1$ ノトキ ①ノ分母ノ L.C.M. $(q+px)(s+rx)=(q-p)(s-r)$

∴ $\begin{cases}(q-p)(s-r)\neq 0 & \text{ナルトキハ } x=-1 \text{ ハ①ノ根デアルガ} \\ (q-p)(s-r)=0 & \text{ナルトキハ } x=-1 \text{ ハ①ノ根デハナイ。}\end{cases}$

答 1. $qr-ps=0$ ナルトキハ不定（根ハ無數ニアリ）
2. $(p+q)(r+s)\neq 0$, $(q-p)(s-r)\neq 0$ ナルトキハ $x=\pm 1$
3. $(p+q)(r+s)\neq 0$, $(q-p)(s-r)=0$ ナルトキハ $x=1$
4. $(p+q)(r+s)=0$, $(q-p)(s-r)\neq 0$ ナルトキハ $x=-1$
5. $(p+q)(r+s)=0$, $(q-p)(s-r)=0$ ナルトキハ 根ナシ

指導總括 驗シノトキ $x=\pm 1$ ヲ分母ノ L.C.M. ニ代入シナイデ各ノ分母ニ別々ニ代入シテ見ルモノガアル。之ハ誤リデハナイガ，分母ガ澤山アル場合ニ各々ノ分母ヲ零ナラシメザルタメノ條件ヲ綜合スル事ガ困難ナ場合ガ多イカラ，分母ノ L.C.M. ニ代入シテ見ル方ガ簡明デアル。

【試練問題】 $\dfrac{1}{a+2+x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}$ ヲ解ケ。　（弘高文）

答 $\begin{cases}a\neq -2 \text{ ノトキ } -2 \text{ ト } -a \\ a=-2 \text{ ノトキ　不定}\end{cases}$

例 153. x ニ關スル次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$$

着眼 兩邊ヲ別々ニ通分スルト分子ガ揃フ事ニ着眼シテ，先ヅ通分シテ後，分母ヲ拂フ。尙 a, b ハ原方程式ノ分母ニ與ヘラレタ既知數デアルカラ零ナラザルモノトシテ取扱フ。

【解】 兩邊ヲ別々ニ通分スルト

$$\frac{(a+b)x-(a^2+b^2)}{ab}=\frac{(a+b)x-(a^2+b^2)}{(x-a)(x-b)}\cdots\cdots①$$

$ab(x-a)(x-b)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$\{(a+b)x-(a^2+b^2)\}\{(x-a)(x-b)-ab\}=0\cdots\cdots②$$

∴ $(a+b)x-(a^2+b^2)=0\cdots\cdots③$ 又ハ $x^2-(a+b)x=0\cdots\cdots④$

$a+b\neq 0$ ノトキハ $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$, 又ハ $x=a+b$ 又ハ $x=0$

$a+b=0$ ノトキハ ③ハ $0\times x=a^2+b^2\neq 0$（$\because a\neq 0,\ b\neq 0$）トナリ根ナシ

④ハ $x^2=0$ トナリ $x=0$ ナル等根ヲ有スル。

【驗シ】1. $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 〔但 $a+b\neq 0$〕 ノトキ

①ノ分母ノ L.C.M. $ab(x-a)(x-b)=ab\left(\dfrac{b^2-ab}{a+b}\right)\left(\dfrac{a^2-ab}{a+b}\right)$

$=\dfrac{-a^2b^2(a-b)^2}{(a+b)^2}$ トナル。

然ルニ $a+b\neq 0$ 又 $ab\neq 0$（$\because$ a, b ハ原方程式ノ分母ノ既知數）

∴ $\begin{cases}a-b\neq 0 \text{ ノトキハ } \dfrac{a^2+b^2}{a+b} \text{ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ①ノ根デアルガ} \\ a-b=0 \text{ ノトキハ } \dfrac{a^2+b^2}{a+b} \text{ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメ從ッテ①ノ根デハナイ。}\end{cases}$

2. $x=a+b$〔但 $a+b\neq 0$〕ノトキ

①ノ分母ノ L.C.M. $ab(x-a)(x-b)=ab(b)(a)\neq 0$〔$\because a\neq 0\ b\neq 0$〕

∴ $x=a+b$ ハ①ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ①ノ根デアル。

3. $x=0$ ノトキ

①ノ分母ノ L.C.M. $ab(x-a)(x-b)=ab(-a)(-b)\neq 0$

∴ $x=0$ モ①ノ根デアル。

以上ノ結果ヲ綜合スルト $a+b$ ト 0 トハ常ニ原方程式ノ根デアルガ $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ ハ $a+b\neq 0$ 且 $a-b\neq 0$ ナル條件附デ原方程式ノ根デアル。

答 $a+b$, 0, $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$〔但シ $a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$ トス〕

$a+b=0$ 又ハ $a-b=0$ ノトキハ $a+b$ ト 0 ノミ。

【試棟問題】 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ヲ解ケ。

答 $a+b$ ト $\dfrac{2ab}{a+b}$〔但シ $(a+b)(a-b)\neq 0$ トス〕
$a+b=0$ 又ハ $a-b=0$ ノトキハ $a+b$ ノミ。

例 154. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x-m+4}+\frac{2}{x-4}=0$$

【解】 $\dfrac{1}{x+m}+\dfrac{1}{x-m+4}+\dfrac{2}{x-4}=0$ ……①

$(x+m)(x-m+4)(x-4)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$(x-m+4)(x-4)+(x+m)(x-4)+2(x+m)(x-m+4)=0$ ……②

整頓スルト $4x^2+4x-2(m^2-4m+8)=0$

$\therefore\ 2x^2+2x-(m^2-4m+8)=0$ ……②′

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+2(m^2-4m+8)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{2m^2-8m+17}}{2}\ \cdots\cdots ③$$

STOP 根ガ複雜ナ形デアルカラ，コレヲ分母ノ L. C. M. ニ代入スルト
$\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{D}}{2}+m\right)\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{D}}{2}-m+4\right)\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{D}}{2}-4\right)$ トナリ，
m ノ如何ナル値ニ對シテ之ガ 0 トナルカ，或ハ決シテ 0 トナラナイカノ判定ガ容易デナイ，ソコデ驗シハ㋺ヲ採用シヤウト考ヘテ

GO ③ガ①ノ根ナルタメニハ①ト②トガ同值，從ツテ①ノ分母ヲ 0 ナラシムル x ノ値 $x=-m,\ m-4,\ 4$ ガ悉ク②ノ根デナケレバヨイ。
コレラノ値ヲ②ニ代入スルト
$x=-m$ ノトキ ②ノ左邊$=(-2m+4)(-m-4)=2(m-2)(m+4)$
$x=m-4$ ノトキ ②ノ左邊$=(2m-4)(m-8)=2(m-2)(m-8)$
$x=4$ ノトキ ②ノ左邊$=2(4+m)(8-m)=-2(m+4)(m-8)$
依テ $(m-2)(m+4)(m-8)\neq 0$ ノトキハ②ハ①ノ分母ヲ零ナラシムル根ヲ有セズ，依テ①ト②トハ同値デアル。從ツテ②ノ根 ③ ハ $(m-2)(m+4)(m-8)\neq 0$ ノトキハ①ノ根デアル。

STOP コヽデ吟味ヲヤメテ

答 $\dfrac{-1\pm\sqrt{2m^2-8m+17}}{2}$

但 $(m-2)(m+4)(m-8)\neq 0$ トス。

トシテモ誤リデハナイガ餘力ノアルモノハ $(m-2)(m+4)(m-8)=0$ ノトキハ如何？ト考ヘテ更ニ吟味ヲ續ケル。

GO $(m-2)(m+4)(m-8)=0$ ノトキ即チ $m=2$ 又ハ $m=-4$ 又ハ $m=8$ ナルトキハ②ハ①ノ分母ヲ零ナラシムル根ヲ有スルコトニナルカラ①ト②トハ同値デハナイ。〔依テ②ノ根ヲ直チニ採用スルコトガ出來ナイカラ①ガ如何ナル方程式ニナルカヲ考究スル〕

(イ) $m=2$ ナルトキ ①ハ $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-4}=0$ ……①′
分母ヲ拂ツテ整頓スルト $4(x-1)=0$ $\therefore\ x=1$
コノ値ハ①′ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ ①′即チ①ノ根デアル。

(ロ) $m=-4$ ナルトキ ①ハ $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+8}+\dfrac{2}{x-4}=0$ ……①″
コレヲ解イテ $x=-5$（コノ値ハ①″ノ分母ヲ 0 ニセズ）

(ハ) $m=8$ ナルトキ ①ハ $\dfrac{1}{x+8}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{2}{x-4}=0$ ……①‴
コレヲ解イテ $x=-5$（コノ値ハ①‴ノ分母ヲ 0 ニセズ）

答 $(m-2)(m+4)(m-8)\neq 0$ ノトキ $\dfrac{-1\pm\sqrt{2m^2-8m+17}}{2}$
$m=2$ ナラバ $x=1$; $m=-4$ 又ハ $m=8$ ナルトキハ $x=-5$

[illegible] 1. ②ノ根ヲ無條件デ答トスルモノ 2. 吟味ヲスル事ニ氣付キ乍ラ之ヲナス力ヲ有シナイモノ 3. $(m-2)(m+4)(m-8)\neq 0$ ナルトキノミ根アリテ其他ノ場合ハ根ナシト誤ルモノ，等夫々ノ實力ノ差ガ吟味ニ於テ識別シ得ル問題デアル。

尙 $x=-m,\ m-4,\ 4$ ヲ②ニ代入スル代リニ②′ニ代入シテモ同樣ノ結果ヲ得ルガ，括弧ヲ活用シテ②ニ代入シタ點ヲ見逃シテハナラヌ。

例 155. 方程式 $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}+\dfrac{c}{x+c}=3$ ヲ解ケ。
但シ a, b 及ビ c ハ何レモ零ナラザル常數トス。

着眼 右邊ノ3ヲ移項シテ各分數式ト一ツ宛組合セルト分子ガ揃フ事ニ着眼シテ解ク

【解】 移項スルト $\left(\dfrac{a}{x+a}-1\right)+\left(\dfrac{b}{x+b}-1\right)+\left(\dfrac{c}{x+c}-1\right)=0$

$$\therefore\quad \frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}+\frac{-x}{x+c}=0 \cdots\cdots ①$$

兩邊ニ $(x+a)(x+b)(x+c)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$x\{(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)\}=0 \cdots\cdots ②$$

整頓スルト $x\{3x^2+2(a+b+c)x+(bc+ca+ab)\}=0$

$$\therefore\quad x=0 \text{ 又ハ } x=\frac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3} \cdots ③$$

STOP 根ガ無理式デアルカラ驗シハ⑰ノ方法ヲ採用スル。

GO【驗シ】 コレラノ値ガ①ノ根ナルタメニハ①ト②ガ同値，從ッテ①ノ分母ヲ 0 ナラシムル x ノ値 $x=-a,\ x=-b,\ x=-c$ ガ②ノ根デナケレバヨイ。

$$\left.\begin{array}{l} x=-a \text{ ノトキ ②ノ左邊}=-a(b-a)(c-a) \\ x=-b \text{ ノトキ ②ノ左邊}=-b(a-b)(c-b) \\ x=-c \text{ ノトキ ②ノ左邊}=-c(a-c)(b-c) \end{array}\right\}\text{トナル。}$$

題意ニヨリ a, b, c ハ零ナラザル故 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ナルトキハ $-a,\ -b,\ -c$ ハ②ヲ滿足シナイ。依テ①ト②トハ同値デアル。從ッテ②ノ根③ハ悉ク原方程式ノ根デアル。

STOP 次ニ $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ ナル場合ヲ吟味シナケレバナラヌガ，之ハ次ニ示ス樣ニ大分複雜デアルカラ，一應ハコノ程度ニ止メテ次ノ如ク答ヘル

GO　　答 0 ト $\dfrac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$

但シ $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ トス。

讀者諸君 少クトモコヽマデハヤラネバナラヌ。尚餘力ガアレバ次ノ吟味ヲ附記スル。

吟味 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ ノ場合ハ次ノ四ツノ場合ガ起ル。

(イ) $a=b\neq c$ ナルトキ ①ハ $\dfrac{-2x}{x+b}+\dfrac{-x}{x+c}=0 \cdots\cdots ①'$

$(x+b)(x+c)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$-x\{3x+(b+2c)\}=0 \qquad \therefore\quad x=0 \text{ 又ハ } x=-\frac{b+2c}{3}$$

$x=0$ ノトキ ①′ ノ分母ノ L. C. M. $(x+b)(x+c)=bc\neq 0$

〔$\because\ b\neq 0,\ c\neq 0$〕

$x=-\dfrac{b+2c}{3}$ ノトキ $(x+b)(x+c)=\left(\dfrac{2b-2c}{3}\right)\left(\dfrac{c-b}{3}\right)\neq 0$

〔$\because\ b\neq c$〕

$\therefore\ x=0$ 及ビ $x=-\dfrac{b+2c}{3}$ ハ共ニ①′從テ①ノ根デアル。

(ロ) $b=c\neq a$ ノトキ ①ハ $\dfrac{-x}{x+a}+\dfrac{-2x}{x+c}=0$ トナリ

(イ)ト同樣ニシテ $x=0$ 及ビ $x=-\dfrac{c+2a}{3}$ ガ根

(ハ) $c=a\neq b$ ノトキハ $x=0$ 及ビ $x=-\dfrac{a+2b}{3}$ ガ根

(ニ) $a=b=c$ ノトキ ①ハ $\dfrac{-3x}{x+a}=0$ トナルカラ $x=0$ ノミガ根デアル。

以上ヲ綜合シテ

答 1. $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ノトキハ

0 ト $\dfrac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$ ノ三根

2. $a=b\neq c$ ノトキハ 0 ト $-\dfrac{b+2c}{3}$ ノ二根

3. $b=c\neq a$ ノトキハ 0 ト $-\dfrac{c+2a}{3}$ ノ二根

4. $c=a\neq b$ ノトキハ 0 ト $-\dfrac{a+2b}{3}$ ノ二根

5. $a=b=c$ ノトキハ 0 ノミ

【試練問題】 $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}+3=0$ ヲ解ケ。

答 $abc(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ノトキ

0 ト $\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$

註 尚詳シク吟味スルト

$$abc \neq 0 \text{ デ} \begin{cases} a=b+c \text{ ノトキハ } 0 \text{ ト } \dfrac{b+2c}{3} \\ b=c+a \text{ ノトキハ } 0 \text{ ト } \dfrac{c+2a}{3} \\ c=a+b \text{ ノトキハ } 0 \text{ ト } \dfrac{a+2b}{3} \\ a=b=c \text{ ノトキハ } 0 \text{ ノミ} \end{cases}$$

$a=b=c=0$ ノトキハ　根ナシ。

例 156.　分數方程式 $\dfrac{a(a+2)}{2x}-\dfrac{a(a-1)}{2(x-1)}=1$ ガ根ヲ有スルタメニハ a ノ値ヲ如何ニスベキカ。

方針　先ヅ分母ヲ拂ツテ根ヲ求メ，驗シヲ行ツテ a ガ如何ナル値ノトキニ原方程式ガ根ヲ有シナクナルカヲ考ヘル。

【解】

$$\frac{a(a+2)}{2x}-\frac{a(a-1)}{2(x-1)}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$2x(x-1)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$a(a+2)(x-1)-a(a-1)x-2x(x-1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

整頓スルト

$$2x^2-(3a+2)x+a(a+2)=0$$

$$\therefore \{2x-(a+2)\}\{x-a\}=0$$

$$\therefore x=\frac{a+2}{2} \quad \text{又ハ} \quad x=a$$

【驗シ】 i)　$x=\dfrac{a+2}{2}$ ノトキ

①ノ分母ノ L. C. M. $x(x-1)=\left(\dfrac{a+2}{2}\right)\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a(a+2)}{4}$

$\therefore$ $a(a+2)\neq 0$ ノトキ $\dfrac{a+2}{2}$ ハ①ノ根デアルガ

$a=0$ 又ハ $a=-2$ ノトキ $\dfrac{a+2}{2}$ ハ①ノ根デハナイ……③

ii)　$x=a$ ノトキ　分母ノ L. C. M. $x(x-1)=a(a-1)$

$\therefore$ $a(a-1)\neq 0$ ノトキハ　a ハ ①ノ根デアルガ

$a=0$ 又ハ $a=1$ ノトキ　a ハ ①ノ根デハナイ …………④

STOP　サテコレラヲ綜合シテ見ルト $a(a+2)\neq 0$，且 $a(a-1)\neq 0$ 即チ $a\neq 0$，且 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ ナルトキ ①ハ $\dfrac{a+2}{2}$，a ナル二根ヲ有シ

$a(a+2)\neq 0$，$a(a-1)=0$ 即チ $a=1$ ナルトキ $\dfrac{a+2}{2}$ ナル一根ヲ有シ

$a(a+2)=0$，$a(a-1)\neq 0$ 即チ $a=-2$ ナルトキハ a ナル一根ヲ有シ

$a(a+2)=0$，$a(a-1)=0$ 即チ $a=0$ ナルトキハ ①ハ一根ヲモ有シナイコトニナルト考ヘテ次ノ樣ニ答ヘル。

GO　③，④ヨリ $a=0$ ナルトキハ ② ノ二根 $\dfrac{a+2}{2}$ 及ビ a ガ共ニ①ノ分母ヲ 0 ナラシメ，從ツテ ① ハ根ヲ有シナイコトニナルカラ，①ガ根ヲ有スルタメニハ $a\neq 0$ デナケレバナラヌ。

答 $a\neq 0$ ナル任意ノ値

指導總括　**STOP**　ノ欄ニ述ベタ事ヲ熟慮シナイデ $a\neq 0$，$a\neq -2$，$a\neq 1$ ヲ答トスル者ガ非常ニ多イ。

【試練問題】　分數方程式 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+a}{x(x-1)}=0$ ガ根ヲ有スルタメニハ，a ノ値ヲ如何ニスベキカ。　(京醫豫)

答　-3 ト 5 トヲ除イタ任意ノ値ニスレバヨイ。

鍛錬問題十

111. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^2-2x-2}{x(x-2)}=\dfrac{3}{(x+1)(2-x)}$

(ii) $\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}=\dfrac{2x+5}{2x+9}$

112. $\dfrac{1}{x-2}+3\sqrt{6}=\dfrac{1}{x+1}+6$ ノ根ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

113. (i) $\dfrac{x+4}{x+1}+\dfrac{x-4}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-5}{x-4}$ ヲ解ケ。(德 工)

(ii) $\dfrac{4x-3}{x-1}+\dfrac{3x-8}{x-3}=\dfrac{7x+2}{x}$ ヲ解ケ。

114. $6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=38$, $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3$

ナル各方程式ヲ解キ，共通根アリヤ否ヤヲ示セ。(和 商)

115. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ ヲ解ケ。(神 船)

116. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $\dfrac{3x+1-a}{x-a}=2-3a$　(ii) $\dfrac{a+b}{x+b}+\dfrac{a+c}{x+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{x+b+c}$

(iii) $\dfrac{x+a}{a-x}+\dfrac{x+b}{b-x}+\dfrac{x+c}{c-x}=3$ (東 美)

117. 分數方程式 $\dfrac{(a+1)(b+1)}{x+1}+\dfrac{(a-1)(b-1)}{x-1}=\dfrac{2ab}{x}$ ガ根ヲ有セザルトキ a^2+ab+b^2 ノ値如何，但シ $a\neq b$ トス。

118.* A, A′ B, B′ ガ何レモ x ニ付テノ多項式ナルトキ $\dfrac{A'}{A}+\dfrac{B'}{B}=0$ ナル分數方程式ニ於テ，各分數式ハ既約分數式ニシテ且 A, B ハ公約數ヲ有セザルトキ，コノ方程式ノ兩邊ニ A, B ノ最小公倍數ヲ乘ジテ分母ヲ拂ツテ得ル方程式ハ，原方程式ノ根ヲ根トシ，共他ノモノヲ根トセザルコトヲ證明セヨ。

答 111. (i) 根ナシ，　(ii) $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{4}$　112. 0.65……ト 0.34……

113. (i) 5 ト $\dfrac{11}{4}$　(ii) $\dfrac{3}{2}$　114. 〔I〕ノ根ハ 3, $\dfrac{1}{3}$, -2, $-\dfrac{1}{2}$, 〔II〕ノ根ハ $\dfrac{11}{2}$ ナル故共通根ナシ。(試驗官ノ言) 豫想通リ $x=3$ ガ共通根ト答ヘタモノガ全受驗者ノ $\dfrac{1}{3}$ ヲ占メタ。ヤハリ分數方程式ノ根ノ吟味ヲ忘レテシマツタ者ガ多イ。ト

115. 1 ト $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

116. (i) $(3a+1)(2a+1)\neq 0$ ノトキ $\dfrac{3a^2-a-1}{3a+1}$,

$(3a+1)(2a+1)=0$ ノトキ根ナシ。

(ii) $x=a$ 〔但シ $(a+b)(a+c)(a+b+c)\neq 0$ トス〕及ビ

$x=-\dfrac{b^2+c^2}{b+c}$ 〔但シ $bc(b+c)(b-c)\neq 0$ トス〕

(iii) $abc(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ノトキ

0 ト $\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$

$a=b\neq c$ ナラバ 0 ト $\dfrac{b+2c}{3}$, $b=c\neq a$ ナラバ 0 ト $\dfrac{c+2b}{3}$

$c=a\neq b$ ナラバ 0 ト $\dfrac{a+2b}{3}$, $a=b=c\neq 0$ ノトキ 0 ノミ

$a=b=c=0$ ナラバ根ナシ　　117. 1

第二十二章　一元無理方程式ノ解法

1. 無理方程式ノ一般解法

無理方程式ハ根號内ニ未知數ヲ含ム根式ヲ含ム方程式デアルカラ之ヲ解クニハ

1. 適當ニ移項シテ A=B〔A, B ノ中少クトモ一ツハ無理式〕ノ形ニ直シ
2. 兩邊ヲ平方又ハ立方シテ整方程式ヲ導キ（必要アラバ幾回モ繰返ス）
3. コノ整方程式ヲ解イテ根ヲ求メ
4. ソノ根ガ原方程式ノ根カ無緣根カノ吟味ヲスル。

註　コヽデ最モ大切ナコトハ根ノ吟味デ，特ニ分數方程式ノ根ノ吟味ト比較シテ，ソノ無緣根ノ導入サレル原因ヲ異ニスル點，從ツテソノ吟味ノ方法ヤ目的ヲ異ニスル點ヲ充分理解シテ貰ハナケレバナラヌ。

2. 無理方程式ノ根ノ吟味ニ就テ

第十九章ニ於テ方程式ノ兩邊ヲ平方又ハ立方シテ得ル方程式ハ必ズシモ原方程式ト同値デハナイ，事ヲ述ベテ置イタ。所ガ無理方程式ノ解法ニ於テハ途中デ兩邊ヲ平方又ハ立方シナケレバナラヌカラ，得タル根ガ果シテ原方程式ノ根デアルカ，途中デ導入セラレタ無緣根デアルカヲ吟味シナケレバ安心シテ原方程式ノ根デアルト斷定スルコトハ出來ナイ。ソコデコレヲ吟味スル方法トシテハ

得タル根ヲ原方程式ノ左邊，右邊ニ別々ニ代入シテ整頓シ
左邊=右邊
トナルヤ否ヤヲ驗ス方法

ガ最モ多ク用ヒラレルノデアルガ，之ガ唯一無二ノ驗算法デハナク，無緣根ガ如何ニシテ導入セラレ，如何ナル方程式ノ根デアルカヲ明ラカニスルコトニヨリ，兩邊ニ數値ヲ代入シナイデ無緣根ナリヤ否ヤヲ判定スル事モ出來ルノデアル。

3. 無緣根ノ導入セラレル理由

方程式　$A=B$ ……………………①

ノ兩邊ヲ平方シタ　$A^2=B^2$ ……………………②

ハ移項スルト　$(A-B)(A+B)=0$　トナルカラ

原方程式　$A=B$ ノ根ノ外ニ　$A+E=0$　即チ　$A=-B$ ナル方程式ノ根ガ餘分ニ含マレルコトニナル。

從ツテ　$A+B \neq 0$ 即チ　$A \neq -B$ ナルコトガ明ラカナトキハ　$A=B$ ノ兩邊ヲ平方シテモ無緣根ハ導入セラレナイ。依テ次ノ定理ヲ得ル。

定理　26. $A+B \neq 0$ 即チ $A \neq -B$ ノトキハ
方程式 $A=B$ ト $A^2=B^2$ トハ同値デアル。

例ヘバ　$\sqrt{x^2-3x+5}=13$ ……………①

ノ兩邊ヲ平方シテ　$x^2-3x+5=169$ ……………②

移項シテ　$x^2-3x-164=0$

根ノ公式ニヨリ　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+656}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{665}}{2}$ ……③

吟味　（イ）　數値代入法ニヨルト

$$①ノ左邊=\sqrt{\left(\frac{3\pm\sqrt{665}}{2}\right)^2-3\left(\frac{3\pm\sqrt{665}}{2}\right)+5}$$

$$=\sqrt{\frac{9\pm6\sqrt{665}+665}{4}-\frac{9\pm3\sqrt{665}}{2}+5}$$

$$=\sqrt{\frac{337\pm3\sqrt{665}-9\mp3\sqrt{665}}{2}+5}$$

$$=\sqrt{\frac{328}{2}+5}=\sqrt{164+5}=\sqrt{169}=13=右邊$$

依テ　$\dfrac{3\pm\sqrt{665}}{2}$ ハ共ニ①即チ原方程式ノ根デアル。

（ロ）　定理 26 ヲ用ヒルト

①ノ兩邊ヲ平方スルトキニ導入セラレル無緣根ハ

$\sqrt{x^2-3x+5}=-13$ ……①′

ヲ滿足スル根デナケレバナラヌ。然ルニ ①′ ノ左邊ハ根號ノ規約ニヨリ決シテ負トナル事ハナイカラ ①′ ヲ滿足スル根ハ存在シナイ。

従ッテ①ノ兩邊ヲ平方シテ得ル方程式②ハ①ト同値デアル。

依テ②ノ根 $\dfrac{3\pm\sqrt{665}}{2}$ ハ同時ニ①ノ根デアル。

ト斷定スレバヨイ。

又例ヘバ　$\sqrt{x+3}=2-x$ …………①

ノ兩邊ヲ平方シテ　$x+3=4-4x+x^2$ ………②

移項シテ　$x^2-5x+1=0$　$\therefore\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

コノ吟味ニ於テ

$x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ ノトキ　①ノ右邊 $=2-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}<0$ ナル故

$\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ ハ①ノ根デハナイ（$\because$ ①ノ左邊ハ根號ノ規約ニヨリ負數デナイカラ）ト斷定スレバヨイノデ，コンナ場合ニ更ニ

①ノ左邊 $=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}+3}=\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{\sqrt{22+2\sqrt{21}}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{21}+1}{2}$

ト計算シテ見テ始メテ左邊≠右邊トヤルノハ無駄デアル。

例 157. 無理方程式 $\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}$ ヲ解キ，若シ餘分ノ根出デ來レル時ハ，ソレハ如何ニシテ出デ來レルカヲ示セ。

【解】　$\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}$ ……………①

兩邊ヲ平方スルト　$1-x=1-4\sqrt{x}+4x$ ……………②

移項シテ　$4\sqrt{x}=5x$

再ビ兩邊ヲ平方シテ　$16x=25x^2$

$\therefore\ x(25x-16)=0$　$\therefore\ x=0$ 又ハ $\dfrac{16}{25}$

【驗シ】①ノ兩邊ヲ平方シタカラ①ニ就テ驗ス

$x=0$ ノトキ $\begin{cases}①ノ左邊=\sqrt{1}=1\\①ノ右邊=1-\sqrt{0}=1\end{cases}$

$\therefore\ x=0$ ハ①ノ根デアル。

$x=\dfrac{16}{25}$ ノトキ $\begin{cases}①ノ右邊=1-2\sqrt{\dfrac{16}{25}}=1-\dfrac{8}{5}<0\\①ノ左邊ハ根號ノ規約ニヨリ負數デハナイ。\end{cases}$

依テ　$x=\dfrac{16}{25}$ ハ①ヲ滿足セズ即チ無緣根デアル。　　答 0

【無緣根ノ導入セラレタ理由】

①ノ兩邊ヲ平方シテ得ル②ハ

$(\sqrt{1-x})^2=(1-2\sqrt{x})^2$

即チ　$\{\sqrt{1-x}-(1-2\sqrt{x})\}\{\sqrt{1-x}+(1-2\sqrt{x})\}=0$　ト同値デアル。

従ッテ　$\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}$　即チ原方程式ノ根ノ外ニ

$\sqrt{1-x}+(1-2\sqrt{x})=0$　即チ　$\sqrt{1-x}=-(1-2\sqrt{x})$ ……③

ナル方程式ノ根ヲ餘分ニ含ムコトニナル。

試ミニ無緣根 $\dfrac{16}{25}$ ヲ③ニ代入シテ見ルト

③ノ左邊 $=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$

③ノ右邊 $=-\left(1-2\sqrt{\dfrac{16}{25}}\right)=-\left(1-\dfrac{8}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \dfrac{16}{25}$ ハ③ノ根デアル。

依ッテ無緣根 $\dfrac{16}{25}$ ハ①ノ兩邊ヲ平方シタトキニ導入セラレタ根デアル。

3. 根式ガ一ツアル無理方程式ノ解法

1. 根式ノミヲ一邊ニ殘シ，他ノ總テノ項ヲ他ノ邊ニ集メテ兩邊ヲ平方シテ解キ，根ノ驗シヲスル。
2. 根式ヲ y ト置キ，y ニ關スル整方程式ヲ導イテ解ク。

注 置換法ニヨッテ簡單ニ解キ得ル場合ガ多イ。解法 1 ニヨル場合ノ驗シヲスルトキ，有理式ノ計算ヲ先ニヤレバ，前例ノ樣ニ根式ノ値ヲ計算シナイデ無緣根ナリヤ否ヤノ判定ヲ下シ得ル事ガアル。解法 2. ニヨル場合ハ y ノ負根ハ捨テ正根ノミヲトレバ無緣根ハ導入セラレナイ。

例 158. 無理方程式 $\sqrt{x^2+5x+7}=2x$ ヲ驗算ヲ要シナイ方法デ解キ，其ノ根ノ値ヲ小數點以下第三位マデ求メ，第三位ヲ四捨五入セヨ。

方針　無理方程式ノ驗算トハ左邊，右邊ノ數値ヲ比較シテ原方程式ノ根ナリヤ否ヤヲ驗ス事デアルカラ，驗算ヲ要シナイ方法トハ數値ヲ代入シナイデ無緣根ナリヤ否ヤノ判定ヲ下ス方法デ解ケバヨイト考ヘテ

【解】　$\sqrt{x^2+5x+7}=2x$ …………①

①ノ**左邊**ハ根號ノ規約ニヨリ**負數ヲ表ハス事ハナイ**。從ツテ $x<0$ ノトキハ①ノ右邊ハ負トナリ明ラカニ①ヲ滿足シナイ。

又 $x=0$ ノトキハ 左邊$=\sqrt{7}$，右邊$=0$ トナル故 ①ヲ滿足シナイ。

依テ①ノ兩邊ヲ平方シテ得ル根ノ中負又ハ零ナルモノヲ捨テ，正ナルモノノミヲ取レバ驗算ヲ要シナイ。

（∵ $x>0$ ナルトキ $\sqrt{x^2+5x+7}\neq-2x$ ナル故①ノ**兩邊ヲ平方スルモ無緣根ハ導入セラレナイ**カラ）

①ノ**兩邊ヲ平方**スルト　$x^2+5x+7=4x^2$　∴ $3x^2-5x-7=0$

根ノ公式ニヨリ　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+84}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{109}}{6}$

x ノ**正ナル値**ヲトレバ　$x=\dfrac{5+\sqrt{109}}{6}=\dfrac{5+10.4403\cdots\cdots}{6}$

$=2.573\cdots\cdots$

四捨五入スルト　$\fallingdotseq 2.57$ 强　　**答** 2.57 强

指導綱領　無理方程式ノ驗算ノ意味ガヨク理解サレテキナイモノニハ手ノツケナイ問題デアル。コノ樣ナ基本的ナ事項ハ十分ニ理解シテ置カネバナラヌ。

【試練問題】 次ノ方程式ノ根ノ近似値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$x-\sqrt{2x-1}=5$　（四捨五入）

答 9.162 强

例 159. $2x^2-14x+3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$ ヲ解ケ。

方針　移項シテ $3\sqrt{x^2-7x+10}=-(2x^2-14x+18)$ ノ兩邊ヲ平方スルト四次方程式トナッテ解法ガ容易デナイ。ソコデ根號內ノ未知項 x^2-7x ト根號ノ外ニアル未知項 $2x^2-14x$ トノ同冪項ノ係數ガ比例ヲナス事ニ着眼シテ根式ヲ y ト置ク。

【解】 與ヘラレタ方程式ヲ書キ直スト

$2(x^2-7x+10)+3\sqrt{x^2-7x+10}-2=0$

$\sqrt{x^2-7x+10}=y$ トオケバ　$2y^2+3y-2=0$

∴ $(2y-1)(y+2)=0$

∴ $y=\dfrac{1}{2}$ 又ハ $y=-2$

y 即チ $\sqrt{x^2-7x+10}$ ハ**根號ノ規約ニヨリ負數ニ等シイ事ハナイ**。

依テ　$y=-2$ ハ捨テ　$y=\dfrac{1}{2}$

即チ　$\sqrt{x^2-7x+10}=\dfrac{1}{2}$ ……………①

兩邊ヲ平方スルト　$x^2-7x+10=\dfrac{1}{4}$ ……………②

∴ $4x^2-28x+39=0$

∴ $x=\dfrac{14\pm\sqrt{196-156}}{4}=\dfrac{14\pm2\sqrt{10}}{4}=\dfrac{7\pm\sqrt{10}}{2}$

吟味　①式ノ兩邊ヲ平方スルモ無緣根ハ導入セラレナイ。

（∵ $\sqrt{x^2-7x+10}+\dfrac{1}{2}\neq0$ 即チ $\sqrt{x^2-7x+10}\neq-\dfrac{1}{2}$ ナル故）

且原方程式ヨリ ① ヲ導ク途中ニ於テモ無緣根ハ導入セラレナイカラ②ト原方程式トハ同値デアル。依テ②ノ根 $\dfrac{7\pm\sqrt{10}}{2}$ ハ共ニ原方程式ノ根デアル。

答 $\dfrac{7\pm\sqrt{10}}{2}$

指導綱領　始メカラ不適當ナコトガ明ラカナ根即チ $\sqrt{x^2-7x+10}=-2$ ノ兩邊ヲ平方シテ根ヲ求メ，之ヲ答トシタリ，反對ニ折角正シイ根ヲ得ナガラ之ヲ原方程式ニ代入シテ驗シヲ行ヒ計算違ヒノタメニ正シイ根ヲ棄テヽシマフ樣ナ者ガ多イ。

【試錬問題】　$x^2-x+3\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{x}{2}+7$　ヲ解ケ。

答　$2,\ -\frac{1}{2}$

例 160. 方程式　$2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$　ヲ解ケ。

着眼　1. コノマヽ兩邊ヲ平方スルト x^4 ノ項ガ消エテ低次ニナルコトニ着眼シテ兩邊ヲ平方シテ解ク。

【解】　$2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$ ……………………①

兩邊ヲ平方シテ　$\underset{\sim\sim}{4x^4}+9x^2+441-\underset{\sim\sim\sim}{12x^3}+126x-84x^2=\underset{\sim\sim}{4x^4}-\underset{\sim\sim\sim}{12x^3}+16x^2$

整頓スルト　$91x^2-126x-441=0$

7 デ割ツテ　$13x^2-18x-63=0$

$(x-3)(13x+21)=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $x=-\frac{21}{13}$.

【驗シ】　①ノ兩邊ヲ平方シタカラ①ニ代入シテ見ル

（イ）　$x=3$ ノトキ　①ノ左邊$=18-9-21<0$

①ノ右邊ハ負ニナラヌ。

依テ　$x=3$ ハ①ヲ滿足セズ（無縁根）

（ロ）　$x=-\frac{21}{13}$ ノトキ

①ノ左邊$=\frac{882}{169}+\frac{63}{13}-21=-\frac{1848}{169}$

①ノ右邊$=-\frac{42}{13}\sqrt{\frac{441}{169}+\frac{63}{13}+4}$

$=-\frac{42}{13}\times\frac{44}{13}=-\frac{1848}{169}=$左邊

依テ　$-\frac{21}{13}$ ハ原方程式ノ根デアル。　　答　$-\frac{21}{13}$

註　$x=-\frac{21}{13}$ ノ驗シノトキ，右邊ノ値ヲ最後マデ計算セズニ①ノ左邊右邊ガ共ニ負トナルカラ無縁根デハナイ（∵ 無縁根ニ對シテハ①ノ兩邊ハ異符號）ト斷定シテモヨイノデアルガ，コレデハ不安ニ思フ者ガ多イト思フカラ最後マデ計算ヲ示シテオイタ。

着眼　2. 根號内ノ未知項 x^2-3x ニ着眼シ $2x^2-3x$ ヲ $x^2+(x^2-3x)$ ト變形シテ置換法ヲ用ヒル。

【別解】　與式ヨリ $(x^2-3x+4)+x^2-25=2x\sqrt{x^2-3x+4}$ …………①

$\sqrt{x^2-3x+4}=y$ ト置ケバ

$y^2+x^2-25=2xy$

移項シテ　$(y-x)^2=25$

$\therefore\ y-x=\pm 5$

STOP　コヽデ前例ト同様ニ考ヘテ　-5　ヲ捨テル者ガアルガ之ハヨクナイ（前例デハ左邊ガ y 即チ根式ノミデアツタ）

GO　$\therefore\ y=x+5$　　又ハ　$y=x-5$

シカルニ　$y=\sqrt{x^2-3x+4}$　ナル故

$\sqrt{x^2-3x+4}=x+5$ ……②　又ハ　$\sqrt{x^2-3x+4}=x-5$ ……③

②ノ兩邊ヲ平方スルト

$x^2-3x+4=x^2+10x+25$

$\therefore\ -13x=21$

$\therefore\ x=-\frac{21}{13}$

③ノ兩邊ヲ平方スルト

$x^2-3x+4=x^2-10x+25$

$\therefore\ 7x=21$

$\therefore\ x=3$

吟味　①ヨリ②又ハ③ヲ導ク途中ニ於テハ無縁根ハ導入セラレナイ。依テコレラノ値ヲ②又ハ③ニ就テ驗ス。

（イ）　$x=-\frac{21}{13}$ ナルトキ

②ノ右邊$=-\frac{21}{13}+5=\frac{44}{13}>0$

$$\left(\text{②ノ左邊}=\sqrt{\frac{441}{169}+\frac{63}{13}+4}=\sqrt{\frac{1936}{169}}=\frac{44}{13}\right)$$

依テ　$x=-\frac{21}{13}$ ハ②ノ根従ツテ原方程式ノ根デアル。

（ロ）　$x=3$　ノトキ

③ノ右邊$=3-5<0$

左邊ハ負デナイ。

依テ　$x=3$ ハ③ノ根デハナイ。

従ツテ原方程式ノ根デハナイ。

答　$-\frac{21}{13}$

指導總括　吟味（イ）ニ於ケル〔　〕内ノ計算ハ省イテモヨイ。

【試錬問題】　$4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$ ヲ解ケ。　（横濱）

答　$-\frac{9}{2}$ ト 1

例 161. (A)　$x^2-3x+1=\sqrt{(x-2)^2}$ ヲ解ケ。

着眼　根號内ガ完全平方式デアルコト＝着眼スルト兩邊ヲ平方シナイデ整方程式＝直セルコトガ判ル。尙 $\sqrt{(\quad)^2}$ ノ取扱ヒハ警戒ヲ要スルコトヲ念頭＝置イテ，

【解】　$x^2-3x+1=\sqrt{(x-2)^2}$ ……………①

(イ)　$x \geqq 2$ ナルトキ　$\sqrt{(x-2)^2}=x-2$ トナル故

①ハ　$x^2-3x+1=x-2$

∴　$x^2-4x+3=0$　∴　$x=3$ 又ハ 1

STOP　コレラノ値ヲ①＝代入シテ驗シヲ行フモノガアルガ，コレハヨクナイ。①ノ兩邊ヲ平方シタノデハナク $x \geqq 2$ ナル條件ノモト＝解イタノデアルカラ，ト考ヘテ

GO　シカル＝ $x \geqq 2$ トシテ解イタカラ $x=1$ ハ適シナイ。
$x=3$ ハ適スル。

(ロ)　$x<2$ ナルトキ　$\sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)$ トナル故

①ハ　$x^2-3x+1=-(x-2)$

∴　$x^2-2x-1=0$　∴　$x=1\pm\sqrt{2}$

シカル＝ $x<2$ トシテ解イタカラ　$1+\sqrt{2}$ ハ適シナイ。
$1-\sqrt{2}$ ハ適スル。

依テ求ムル根ハ 3 ト $1-\sqrt{2}$ トデアル。　答　3, $1-\sqrt{2}$

【試錬問題】　$x^2+3\sqrt{x^2}-2=0$ ヲ解ケ。

答　$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

4. 根式ガニツアル場合

(イ) 根號内ガ共ニ一次ノトキ

例 161. (B)　方程式 $\sqrt{2x-2}-\sqrt{4x-7}=1$ ヲ解ケ。

方針　(1)　兩邊ヲ平方シタ結果ガナルベク簡單ナ式トナル樣＝考ヘテ移項シテカラ平方シテ解ク。

【解】　$\sqrt{2x-2}-\sqrt{4x-7}=1$ ……………①

移項シテ　$\sqrt{2x-2}=\sqrt{4x-7}+1$ ……………①′

兩邊ヲ平方スルト　$2x-2=4x-7+2\sqrt{4x-7}+1$

STOP　マダ根式ガ一ツアルカラ，コノ根式ノミヲ一邊＝殘シ，他ノ項ヲ移項シテ再ビ平方スル。

GO　移項シテ　$4-2x=2\sqrt{4x-7}$

∴　$2-x=\sqrt{4x-7}$ ……………②

再ビ兩邊ヲ平方スルト　$4-4x+x^2=4x-7$

∴　$x^2-8x+11=0$　∴　$x=4\pm\sqrt{5}$

【驗シ】

(イ)　$x=4+\sqrt{5}$ ノトキ①ノ左邊 $=\sqrt{8+2\sqrt{5}-2}-\sqrt{16+4\sqrt{5}-7}$
$=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{9+2\sqrt{20}}$
$=\sqrt{5}+1-(\sqrt{5}+2)=-1\neq$ 右邊

(ロ)　$x=4-\sqrt{5}$ ノトキ①ノ左邊 $=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{9-2\sqrt{20}}$
$=\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}-2)=1=$ 右邊

依テ　$4-\sqrt{5}$ ガ求ムル根デアル　答　$4-\sqrt{5}$

【驗シノ別法】（同値關係ヲ述ベテ①ヨリモ簡單ナ②＝就テ驗ス）

①′ノ兩邊ヲ平方シテモ無縁根ハ導入セラレナイ。

〔∵　$\sqrt{2x-2}\neq-(\sqrt{4x-7}+1)$ ナル故〕

從ツテ②ハ①′即チ①ト同値デアル。依テ驗シハ②＝就テ行フ。

(イ)　$x=4+\sqrt{5}$ ノトキ ②ノ左邊 $=2-4-\sqrt{5}<0$
右邊ハ根號ノ規約＝ヨリ負デハナイ。

依テ $4+\sqrt{5}$ ハ②ノ根デナイ。從ツテ①ノ根デモナイ。

(ロ)　$x=4-\sqrt{5}$ ノトキ

②ノ左邊 $=2-4+\sqrt{5}=\sqrt{5}-2$

右邊 $=\sqrt{16-4\sqrt{5}-7}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-2$

依テ $4-\sqrt{5}$ ハ②ノ根，從ツテ①ノ根デアル。

方針　(2)　置換法＝ヨル（根式ノ何レカ一方ヲ y ト置ク）

【別解】　$\sqrt{2x-2}-\sqrt{4x-7}=1$ ……………①

$\sqrt{2x-2}=y$ ト置クト $2x-2=y^2$　∴　$2x=y^2+2$

依テ①ハ　$y-\sqrt{2(y^2+2)-7}=1$

$\therefore\quad y-1=\sqrt{2y^2-3}$ ……………②

兩邊ヲ平方スルト　$y^2-2y+1=2y^2-3$

$\therefore\quad y^2+2y-4=0\qquad \therefore\quad y=-1\pm\sqrt{5}$

シカル＝ y 即チ $\sqrt{2x-2}$ ハ負ナラザル故 $-1-\sqrt{5}$ ハ捨テル。

$y=-1+\sqrt{5}$ ノトキ②ノ左邊＝$\sqrt{5}-2>0$ ナル故②ヲ満足スル。

$\therefore\quad y=-1+\sqrt{5}$ 即チ $\sqrt{2x-2}=-1+\sqrt{5}$ ………③

③ノ兩邊ヲ平方スルモ無緣根ハ導入セラレナイ。

$\therefore\quad 2x-2=6-2\sqrt{5}$

$\therefore\quad x=4-\sqrt{5}$

コノ解法＝於テハ無緣根ハ導入セラレテキナイカラ $4-\sqrt{5}$ ハ所要ノ根デアル。

答 $4-\sqrt{5}$

【試練問題】 $\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{2}$ ヲ解ケ。 (東府高)

答 $1+\sqrt{3}$

(ロ) 根號内ガ二次ノトキ

例 162. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(A) $\sqrt{2x^2+4x+3}+\sqrt{2x^2+4x-3}=3+\sqrt{7}$

(B) $2\sqrt{x^2-9x+18}-\sqrt{x^2-4x-12}=x-6$

着眼 (A) ハ根號内ノ未知項ノ係數ガ揃ツテヰル場合ノ例,

(B) ハ根號内ノ未知項ノ係數ガ揃ツテヰナイ場合ノ例デアル。

根號内ガ共＝二次式ノ場合ハ大抵 (A), (B) 何レカノ形デアルカラ, ソノ何レノ形デアルカヲ觀察シ, 夫々ソノ特徵ヲ利用シテ解ク。

(A)　$\sqrt{2x^2+4x+3}+\sqrt{2x^2+4x-3}=3+\sqrt{7}$ …………①

方針 未知項ガ揃ツテヰルカラ, 移項シテ平方スレバ未知項ガ消去セラレルコト＝着眼シテ解ク。

【解】 移項スレバ $\sqrt{2x^2+4x+3}=(3+\sqrt{7})-\sqrt{2x^2+4x-3}$

兩邊ヲ平方スレバ

$2x^2+4x+3=(3+\sqrt{7})^2-2(3+\sqrt{7})\sqrt{2x^2+4x-3}+2x^2+4x-3$

整頓スルト　$(3+\sqrt{7})\sqrt{2x^2+4x-3}=5+3\sqrt{7}$ …………②

STOP コノマヽ兩邊ヲ平方スルト x^2 ノ係數ガ無理數＝ナルカラ, 左邊ノ係數ヲ有理化スル事ヲ考ヘテ

GO 兩邊＝ $(3-\sqrt{7})$ ヲ乘ジ $2\sqrt{2x^2+4x-3}=(5+3\sqrt{7})(3-\sqrt{7})$

整頓スルト　$\sqrt{2x^2+4x-3}=2\sqrt{7}-3$

再ビ兩邊ヲ平方スルト　$2x^2+4x-3=28-12\sqrt{7}+9$

$\therefore\quad x^2+2x-(20-6\sqrt{7})=0$ ……③

$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{1+(20-6\sqrt{7})}$

$=-1\pm\sqrt{21-6\sqrt{7}}$

【驗シ】 $x=-1+\sqrt{21-6\sqrt{7}}$ ノトキ

①ノ左邊＝$\sqrt{2(-1+\sqrt{21-6\sqrt{7}})^2+4(-1+\sqrt{21-6\sqrt{7}})+3}+\sqrt{}$

STOP コノ樣＝ x ノ値ヲ直接代入シテ計算シテモ勿論出來ルガ, 未知項 $2x^2+4x$ ヲ束＝シテ取扱フト次ノ樣＝簡單＝ナル。

GO $x=-1\pm\sqrt{21-6\sqrt{7}}$ ハ③ノ根ナル故, コレラノ x ノ値＝對シテハ $x^2+2x-(20-6\sqrt{7})=0$ 即チ $x^2+2x=20-6\sqrt{7}$ デアル。

依テ　①ノ左邊$=\sqrt{2(20-6\sqrt{7})+8}+\sqrt{2(20-6\sqrt{7})-3}$

$=\sqrt{43-2\sqrt{7\times6^2}}+\sqrt{37-2\sqrt{7\times6^2}}$

$=\sqrt{36}-\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{9}=6-\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3$

$=3+\sqrt{7}=$右邊

依テ $-1\pm\sqrt{21-6\sqrt{7}}$ ハ共＝原方程式ノ根デアル。

答 $-1\pm\sqrt{21-6\sqrt{7}}$

指導講話 1. 無理數ノ係數ヲ簡單＝シテ取扱フ事ヲ心掛ケルベキデ②ヲソノマヽ平方スルト $(8+3\sqrt{7})x^2+2(8+3\sqrt{7})x-(68+24\sqrt{7})=0$ トナルガ, コノ場合モ $(8-3\sqrt{7})$ ヲ乘ジテ x^2 ノ係數ヲ有理化スルト矢張リ③ヲ得ル。　2. 未知項ノ係數ガ揃ツテ居ル事＝着眼シ $\sqrt{2x^2+4x+3}=y$ ト置クト $\sqrt{2x^2+4x-3}=\sqrt{y^2-6}$, トナル故原方程式ハ $y+\sqrt{y^2-6}=3+\sqrt{7}$ トナル。之ヲ解イテモヨイ。尙コノ場合 $\sqrt{2x^2+4x-3}=y-6$ ト誤ル者ガ多イ。

(B)　$2\sqrt{x^2-9x+18}-\sqrt{x^2-4x-12}=x-6$ ……………①

着眼　根號内ノ未知數ノ係數ガ揃ツテキナイカラ，置換法デハ簡單ニナラヌ。ソコデ移項シテ平方シテ解ク。

【解】　移項スルト　$2\sqrt{x^2-9x+18}=\sqrt{x^2-4x-12}+x-6$ …①′

STOP　コノ兩邊ヲ平方スルトキ右邊ヲ三項式ト考ヘナイデ $(x-6)$ ヲ束ニシテ取扱フト計算ガ簡單ニナル。

GO　①′ ノ兩邊ヲ平方スルト

$$4(x^2-9x+18)=x^2-4x-12+2(x-6)\sqrt{x^2-4x-12}+(x-6)^2$$

移項シテ整頓スルト　$x^2-10x+24=(x-6)\sqrt{x^2-4x-12}$ …②

STOP　コノ兩邊ヲ平方スルト四次方程式ニナリ容易ニ解キ得ナイ。ソコデ右邊ノ $(x-6)$ ニ着眼シ，左邊ニモ $(x-6)$ ナル因數ガナイカト考ヘテ左邊ヲ因數ニ分解スルト

GO　②ヨリ　$(x-4)(x-6)=(x-6)\sqrt{x^2-4x-12}$

$\therefore\ x-6=0$　　又ハ　$x-4=\sqrt{x^2-4x-12}$

$x-6=0$ ノトキ　$x=6$

兩邊ヲ平方スルト　$x^2-8x+16=x^2-4x-12$　$\therefore\ x=7$

【驗シ】(イ)　$x=6$ ノトキ

$$\begin{cases}①\text{ノ右邊}=6-6=0\\ ①\text{ノ左邊}=2\sqrt{36-54+18}-\sqrt{36-24-12}=0\end{cases}$$

(ロ)　$x=7$ ノトキ

$$\begin{cases}①\text{ノ右邊}=7-6=1\\ ①\text{ノ左邊}=2\sqrt{49-63+18}-\sqrt{49-28-12}=4-3=1\end{cases}$$

依テ $x=6$ 及ビ 7 ハ共ニ原方程式ノ根デアル。

答　6ト7

指導綜括　コノ様ニ根號内ガ二次式デ未知項ガ揃ツテキナイ場合ハ平方シタ結果共通因數ガ括リ出サレル事ガ多イカラ，コノ事ヲ念頭ニ置イテ兩邊ヲ整頓シテ見ヨ。尙コノ問題ハ與式ノ根號内ノ二次式ガ何レモ因數ニ分解セラレテ $2\sqrt{(x-3)(x-6)}-\sqrt{(x+2)(x-6)}=x-6$ Ⓐ トナル事ニ氣付キ $(x-6)$ ヲ束ニシテ計算スルト，途中ノ計算モ，驗シノ計算モ簡單ニナルガ，コノ様ニウマク因數ニ分解サレナイ問題モアルノデ因數ニ分解シナイ解法ヲ示シテ置イタ。

尙Ⓐヨリ $\sqrt{x-6}\,(2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6})=0$ トスルノハヨクナイ。何トナレバ $x-3$, $x-6$ ガ共ニ負ナルトキ $\sqrt{(x-3)(x-6)}$ ヲ $\sqrt{x-3}\sqrt{x-6}$ ト變形出來ヌカラデアル。

【試練問題】　次ノ方程式ヲ解ケ。

(i)　$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$　（鳥　農）

(ii)　$\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2-5x+3}=x+1$　（明　專）

答　(i)　$3,\ -\dfrac{5}{3}$　(ii)　$\dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

(5)　根式ガ三ツ以上アル場合

方針　平方シタ結果ナルベク未知項ガ消エル様ニト考ヘテ移項シテカラ平方スル。

> **例 163.**　次ノ方程式ヲ解ケ。
>
> (A)　$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$
>
> (B)　$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{4x-3}=0$
>
> (C)　$\sqrt{2x}+\sqrt{2x-\sqrt{4x+1}}=1$

(A)**【解】**　$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$ ……………①

移項シテ　$\sqrt{x+8}=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$ ……………①′

兩邊ヲ平方スルト　$x+8=2x+3+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}$

STOP　コノ右邊ノ $\sqrt{x}\sqrt{x+3}$ ヲ $\sqrt{x(x+3)}$ トスル者ガアルガ，コレハヨクナイ。

（$\because$　$x<0$, $x+3<0$ ナラバ $\sqrt{x}\sqrt{x+3}\neq\sqrt{x(x+3)}$ ナル故）

GO　移項シテ　$5-x=2\sqrt{x}\sqrt{x+3}$ ……………②

兩邊ヲ平方スルト　$25-10x+x^2=4x^2+12x$

$\therefore\quad 3x^2+22x-25=0$

$\therefore\quad (3x+25)(x-1)=0$　$\therefore\ x=-\dfrac{25}{3}$ 又ハ $x=1$

【驗シ】（イ） $x=-\frac{25}{3}$ ノトキ

$$①ノ左邊=\sqrt{-\frac{25}{3}+8}-\sqrt{-\frac{25}{3}+3}$$

$$=\frac{i}{\sqrt{3}}-\frac{4i}{\sqrt{3}}=-\frac{3i}{\sqrt{3}}$$

$$右邊=\sqrt{-\frac{25}{3}}=\frac{5i}{\sqrt{3}}\neq 左邊$$

（ロ） $x=1$ ナルトキ

①ノ左邊$=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$,　　右邊$=\sqrt{1}=1$

$\therefore$ $x=1$ ハ①ノ根デアル。

答 1

指導補説 ①′ノ兩邊ヲ平方スルモ無縁根ハ導入セラレナイ事ヲ述ベテ驗シヲ②ニ就テ行ツテモヨイ。

(B) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{4x-3}=0$ ……①

着眼 x ノ係數ヲ比較シ，2 ト 3；1 ト 4 トヲ組合セルトソノ和ガ共ニ 5 トナルコトニ着眼シテ移項スル。

【解】 ①ヨリ　$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$ ……①′

兩邊ヲ平方スルト

$$5x-2+2\sqrt{2x+3}\sqrt{3x-5}=5x-2+2\sqrt{x+1}\sqrt{4x-3}$$

$$\therefore\ \sqrt{2x+3}\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}\sqrt{4x-3}\ \cdots\cdots ②'$$

再ビ兩邊ヲ平方スルト　$6x^2-x-15=4x^2+x-3$

$$\therefore\ 2x^2-2x-12=0$$

$$\therefore\ x^2-x-6=0\qquad \therefore\ x=3 \text{ 又ハ } -2$$

【驗シ】 $x=3$ ノトキ

①ノ左邊$=\sqrt{9}-\sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{9}=3-2+2-3=0=$右邊

$x=-2$ ノトキ

①ノ左邊$=\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+\sqrt{-11}-\sqrt{-11}=0=$右邊

依テ 3 及ビ -2 ハ共ニ原方程式ノ根デアル。

答 3 ト -2

(C) $\sqrt{2x}+\sqrt{2x-\sqrt{4x+1}}=1$ ……①

着眼 二重根號ニ着眼シ，二重根號ノ式ノミヲ一邊ニ殘シテ移項スル。

【解】 ①ヨリ　$\sqrt{2x-\sqrt{4x+1}}=1-\sqrt{2x}$

兩邊ヲ平方スルト　$2x-\sqrt{4x+1}=1-2\sqrt{2x}+2x$

$\therefore$　$\sqrt{4x+1}=2\sqrt{2x}-1$

再ビ兩邊ヲ平方スルト　$4x+1=8x-4\sqrt{2x}+1$

$\therefore$　$4\sqrt{2x}=4x$　　$\therefore\ \sqrt{2x}=x$

更ニ兩邊ヲ平方シテ　$2x=x^2$　　$\therefore$ $x=0$ 又ハ $x=2$

【驗シ】 $x=0$ ノトキ　①ノ左邊$=0+\sqrt{0-\sqrt{1}}=\sqrt{-1}\neq$右邊

$x=2$ ノトキ　①ノ左邊$=\sqrt{4}+\sqrt{4-\sqrt{9}}=2+1\neq$右邊

依テ 0 及ビ 2 ハ共ニ原方程式ヲ滿足セズ　　答 根ナシ

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$

(ii) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$

(iii) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$　　（廣 工）

答 (i) 2,　(ii) -1,　(iii) $\frac{16}{25}$

6. 立方根ヲ含ム場合

整方程式ニ直スタメニ兩邊ヲ三乘シナケレバナラヌガ，兩邊ヲ三乘シタ場合モ，次ノ理由ニヨリ驗シガ必要デアル。

> $A=B$ ノ兩邊ヲ三乘シテ得ル方程式 $A^3=B^3$ ハ $A^3-B^3=0$ 即チ $(A-B)(A^2+AB+B^2)=0$ ト同値デアルカラ $A=B$ ノ根ノ外ニ $A^2+AB+B^2=0$ ノ根ガ餘分ニ含マレル。

> **例 164.** $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}=\sqrt[3]{a-b}$ ヲ解ケ。
> 但シ $a\neq b$ ナリトス。

着眼 コノマヽ兩邊ヲ三乘スルト左邊ニ於テ x ガ消エル事ニ着眼シテ

移項セズ＝兩邊ヲ三乘スル。尙二項式ヲ三乘ハ

公式　（イ）　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　ヲ用ヒルヨリモ

（ロ）　$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$　ヲ用ヒル方ガ簡單。

【解】　$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}=\sqrt[3]{a-b}$ ……………… ①

兩邊ヲ三乘スルト

$(a+x)-(b+x)-3\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x})=a-b$

整頓スルト　$\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x})=0$ …… ②

STOP　コノマヽ兩邊ヲ三乘スルト（$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}$）ノ三乘ヲ繰返スコトニナリ，簡單ニナラヌカラ，コノ（　）內ハ①ノ左邊ト同一式ナルコトニ着眼シテ①ヲ代入スル事ガ解決ノ急所デアル。

GO　②＝①ヲ代入　$\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}\sqrt[3]{a-b}=0$

兩邊ヲ三乘スルト　$(a+x)(b+x)(a-b)=0$

シカルニ $a\neq b$ ナル故 $a-b\neq 0$　$\therefore x=-a$ 又ハ $x=-b$

【驗シ】　$x=-a$　ナルトキ

①ノ左邊＝$\sqrt[3]{a-a}-\sqrt[3]{b-a}=0-\sqrt[3]{b-a}=\sqrt[3]{a-b}$＝右邊

$x=-b$　ナルトキ

①ノ左邊＝$\sqrt[3]{a-b}-\sqrt[3]{b-b}=\sqrt[3]{a-b}$＝右邊

依テ $x=-a$ 及ビ $-b$ ハ共＝原方程式ヲ滿足スル。

答　$-a,\ -b$

指導總括　三乘根ヲ含ム場合ハ公式（ロ）ヲ用ヒテ三乘スル事ト，②＝①ヲ代入スル事ヲ忘レテハナラヌ。

【試練問題】　$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$　ヲ解ケ。

答　$\pm\frac{1}{2}$

7. 分數式ヲ含ム無理方程式ノ解法

與ヘラレタ方程式ノ形ヲ觀察シテ次ノ何レニヨルカヲ考ヘヨ。

(1)　先ヅ分母ヲ拂ツテ解クカ，　(2)　先ヅ兩邊ヲ平方スルカ，

(3)　先ヅ分母ヲ有理化スルカ，　(4)　適當＝組合セテ通分スルカ，

(5)　合除比ノ理ヲ應用スルカ，　(6)　逆數關係ヲ利用シテ解クカ，

注　何レノ解法ヲ用ヒタ場合デモ，驗シ（無理方程式，分數方程式ノ双方＝對スル）ヲ答案＝書ク事ヲ忘レテハナラヌ。

例 165.　次ノ方程式ヲ解ケ。

$$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{3x+7}=\frac{8}{\sqrt{3x+4}}$$

着眼　1. 根式ガ三ツアルガ左邊ノ第一式ト右邊ノ分母トガ同類根式デアル事＝着眼シテ**先ヅ分母ヲ拂フ**ト第一式ガ有理式＝ナル。

【解】　$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{3x+7}=\frac{8}{\sqrt{3x+4}}$ ……………… ①

$\sqrt{3x+4}$　ヲ兩邊＝乘ジテ分母ヲ拂フト

$2(3x+4)+3\sqrt{3x+7}\sqrt{3x+4}=8$

$\therefore\ \sqrt{3x+7}\sqrt{3x+4}=-2x$ ……………… ②

兩邊ヲ平方スルト　$9x^2+33x+28=4x^2$

$\therefore\ 5x^2+33x+28=0$

$(5x+28)(x+1)=0$　$\therefore x=-\frac{28}{5}$ 又ハ -1

【驗シ】　$x=-\frac{28}{5}$，及ビ -1 ハ共＝①ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ①ト②トハ同値デアル。依ツテ驗シハ②＝就テ行フ。

（イ）　$x=-\frac{28}{5}$　ノトキ　②ノ右邊＝$\frac{56}{5}$

②ノ左邊＝$\sqrt{-\frac{84}{5}+7}\sqrt{-\frac{84}{5}+4}$

$=\sqrt{-\frac{49}{5}}\sqrt{-\frac{64}{5}}\overset{*}{=}\frac{7i}{\sqrt{5}}\cdot\frac{8i}{\sqrt{5}}=\frac{-56}{5}\neq$ 右邊

（ロ）　$x=-1$　ノトキ　②ノ右邊＝2,

②ノ左邊＝$\sqrt{4}\sqrt{1}=2$＝右邊

$\therefore$　-1 ハ②ノ根從ツテ原方程式ノ根デアル。　答　-1

指導總括　驗シ（イ）ノ途中＝於テ

$\sqrt{-\frac{49}{5}}\sqrt{-\frac{64}{5}}=\sqrt{\left(-\frac{49}{5}\right)\left(-\frac{64}{5}\right)}=\frac{56}{5}$＝右邊ト誤リ，

$-\frac{28}{5}$ ヲ答＝採用スル者ガアル。コレハ $a<0,\ b<0$ ノトキ

$\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ ナル公式ヲ忘レタ爲ノ誤リデアル。

着眼 2. 同類根式ヲ一邊ニ集メルト逆數ノ差ノ形ニナル事ニ着眼スルト次ノ如キ別解ヲ得ル。

【別解】 移項スルト　$3\sqrt{3x+7}=\dfrac{8}{\sqrt{3x+4}}-2\sqrt{3x+4}$ ……①

兩邊ヲ平方スルト　$9(3x+7)=\dfrac{64}{3x+4}-32+4(3x+4)$ …②

分母ヲ拂ヒ整頓スルト　$45x^2+297x+252=0$

$\therefore\ 5x^2+33x+28=0$

（以下ハ前解法ト全ク同一デアルカラ略ス）

[illegible] ①ニハ根式ガ三ツ含マレテキタガ，逆數關係ヲ利用シタ爲ニ兩邊ヲ一度平方スルダケデ直チニ有理方程式 ② ヲ導キ得タ點ヲ味フベキデアル。

【試練問題】 $3\sqrt{x^2-2}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2}}$ ヲ解ケ。　（機 工）

答 $\pm\sqrt{3}$

例 165. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(A) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$

(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$

着眼 何レモ分母ヲ有理化スルト分母ガ簡單ナ式ニナル事ニ着眼シテ分母ノ有理化ヲ先ニヤル。

(A)〔解〕 $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$ ……①

分母ヲ有理化スルト〔但 $x+\sqrt{x^2-1}\neq0$，$x-\sqrt{x^2-1}\neq0$ トス〕

$\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{1}-\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{1}=8\sqrt{x^2-1}$ ……②

整頓スルト　$4x\sqrt{x^2-1}=8\sqrt{x^2-1}$ ……②′

移項シテ　$4(x-2)\sqrt{x^2-1}=0$　$\therefore\ x=2$ 又ハ $x=\pm1$，

【驗シ】 $x=2$ 及ビ ±1 ハ何レモ①ノ分母及ビ分母ヲ有理化スルタメニ分母子ニ乘ジタ式ヲ 0 ナラシメナイカラ②ト①從ツテ②ヲ整頓シタ②′ト①トハ同値デアル。ソシテ $x=2$ 及ビ ±1 ガ②′ヲ滿足スル事ハ明ラカデアルカラ，コレラハ何レモ原方程式ノ根デアル。

答 2，±1

【別法】 ①ノ左邊ニ於ケル分母ハ互ニ共軛ナル事ニ着眼シテ先ヅ左邊ヲ通分スルト

①ハ　$\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=8\sqrt{x^2-1}$

$\therefore\ \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)}=8\sqrt{x^2-1}$

以下ハ前解法ト同樣ニナル。

(B)　$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ ……①

着眼 左邊ノ分母ガ互ニ共軛デハナイカラ（根號内ガ異ナル故）別解ニ傚ツテ通分シテモ簡單ニナラヌ。ソコデ各分母ヲ別々ニ有理化スル

【解】 $\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\neq0$ 又 $\sqrt{2-x}-\sqrt{2}\neq0$ トシテ

コレラヲ左邊ノ各分母，分子ニ乘ジテ分母ヲ有理化スルト

$\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{(2+x)-2}+\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{(2-x)-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{x}-\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ ……①′

分母ヲ拂フト　$\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

移項シテ　$\sqrt{2+x}=\sqrt{2-x}-\sqrt{2}$ ……②

兩邊ヲ平方スルト　$2+x=2-x-2\sqrt{2}\sqrt{2-x}+2$

$\therefore\ \sqrt{2}\sqrt{2-x}=1-x$

再ビ兩邊ヲ平方シテ　$4-2x=1-2x+x^2$

$\therefore\ x^2=3$　$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

【驗シ】 $x=\pm\sqrt{3}$ ハ①ノ分母ヲ有理化スルタメニ乘ジタ二式ヲ 0 ナラシメナイカラ①ト①′トハ同値デ且 $\pm\sqrt{3}$ ハ①′ノ分母ヲモ 0 ナラシメナイ。依テ①′ト②トハ同値，從ツテ驗シハ②ニ於テ行フ。

（イ） $x=\sqrt{3}$ ノトキ

$$②ノ\begin{cases}左邊=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\\[2ex] 右邊=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{2}}\neq 左邊\end{cases}$$

（ロ） $x=-\sqrt{3}$ ノトキ

$$②ノ\begin{cases}左邊=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\\[2ex] 右邊=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=左邊\end{cases}$$

$\therefore$ $x=\sqrt{3}$ ハ不適，$x=-\sqrt{3}$ ハ適ス。

答 $-\sqrt{3}$

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $$\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1$$

(ii) $$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}\,x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}\,x}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}\,x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}\,x}}$$

答 (i) $\pm\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}$， (ii) 1，

例 167.

方程式 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$ ヲ解ケ。

方針 1. 右邊ノ分母 $\sqrt{3x^2+4x-4}$ ハ $\sqrt{(x+2)(3x-2)}$ トナルコトニ着眼シテコノマヽ兩邊ヲ平方シテ見ル。

【解】 $$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}\cdots\cdots①$$

兩邊ヲ平方スレバ

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{3x-2}=\frac{16}{(x+2)(3x-2)}$$

移項シテ整頓スルト

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}}=\frac{8-2x}{(x+2)(3x-2)}$$

STOP 左邊ノ分母ヲ有理化スルト兩邊ノ分母ガ同一式トナル事ニ着眼シテ，

GO 左邊ノ分母ヲ有理化スレバ

$$\frac{\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}}{(x+2)(3x-2)}=\frac{8-2x}{(x+2)(3x-2)}$$

兩邊ノ分母ハ相等シキ故分子ヲ等置スレバ

$$\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}=8-2x$$

再ビ兩邊ヲ平方スレバ $3x^2+4x-4=64-32x+4x^2$

$$\therefore\ x^2-36x+68=0$$

即チ $(x-2)(x-34)=0$ $\quad\therefore$ $x=2$ 又ハ 34

【驗シ】 （イ） $x=2$ ノトキ

①ノ左邊 $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ 右邊 $=\dfrac{4}{\sqrt{12+8-4}}=\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore$ $x=2$ ハ①ノ根ナリ

（ロ） $x=34$ ノトキ

①ノ左邊 $=\dfrac{1}{\sqrt{36}}+\dfrac{1}{\sqrt{102-2}}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{15}$

右邊 $=\dfrac{4}{\sqrt{3468-136-4}}=\dfrac{4}{60}=\dfrac{1}{15}\neq$ 左邊

依テ $x=34$ ハ無縁根ナリ 答 2

方針 2. 先ヅ左邊ヲ通分シテ後ニ兩邊ヲ平方シテ見ル。

【別解】 $$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}\cdots\cdots①$$

左邊ヲ通分スルト $\dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$ ……②

兩邊ヲ平方スルト $\dfrac{4x+2\sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}}{3x^2+4x-4}=\dfrac{16}{3x^2+4x-4}$

兩邊ノ分母ハ同一ナル故 $4x+2\sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}=16$

$$\therefore\ \sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}=8-2x$$

コノ兩邊ヲ平方シテ解ク（以下省略）

指導總括 ②ヨリ何等ノ説明ヲモ加ヘナイデ

$$\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+2)(3x-2)}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$$

トシ兩邊ノ分母ハ同一ナル故ト述ベテ $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=4$ トスルモノガアルガ，$x+2<0$，$3x-2<0$ ノトキハ

$\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}\neq\sqrt{(x+2)(3x-2)}$ ナル故無斷デ上記ノ如キ變形ヲシテハナラヌ。コノ變形ヲスルナラバ次ノ様ニ斷ラネバナラヌ。

【解】
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}\cdots\cdots①$$

左邊ヲ通分スルト $\dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-2}}\cdots\cdots②$

$x+2$，$3x-2$ ガ共ニ負ナルトキハ①ノ左邊ハ虛數，①ノ右邊ハ實數トナリ，①ハ成立シナイ。依テ①ノ根ニ對シテハ $x+2$，$3x-2$ ガ共ニ負ナルコトハナイ。

依テ②ノ左邊ノ分母 $=\sqrt{(x+2)(3x-2)}=\sqrt{3x^2+4x-2}$

$\therefore$ ②ヨリ $\dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{3x^2+4x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-2}}\cdots\cdots②'$

兩邊ノ分母ハ同一ナル故分子ヲ等置シテ

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=4\cdots\cdots③$$

$\sqrt{x+2}$ ヲ移項シテ平方スルト $3x-2=16-8\sqrt{x+2}+x+2$

$\therefore\ 4\sqrt{x+2}=10-x$

兩邊ヲ平方シテ整頓スルト $x^2-36x+68=0$

$\therefore\ x=2$ 又ハ $x=34$

【驗シ】 コレラノ値ニ對シテハ $x+2$ 及ビ $3x-2$ ハ共ニ正ナル故①ト③トハ同値デアル。依テ驗シハ③ニ於テ行フ。

（イ） $x=2$ ノトキ ③ノ左邊 $=\sqrt{4}+\sqrt{4}=4=$ 右邊 $\therefore x=2$ ハ適ス

（ロ） $x=34$ ノトキ ③ノ左邊 $=\sqrt{100}+\sqrt{36}=16\neq$ 右邊 $\therefore x=34$ ハ適セズ。

答 2

例 168. 方程式 $\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x+28}-\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+28}+\sqrt{2x+4}}$ ヲ解ケ

着眼 與ヘラレタ方程式ガ $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$ ナル形デアルカラ合除比ノ理ヲ用ヒテ變形シ簡單ナ方程式ヲ導イテ解ク。

註 合除比ノ理トハ「$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ ナルトキハ $\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{C+D}{C-D}$

但シ $A-B\neq0$，$C-D\neq0$ トス。」デアルガ

逆ニ $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$ ナル形ノ式ニ合除比ノ理ヲ用ヒテ變形スルト

$\dfrac{(a-b)+(a+b)}{(a-b)-(a+b)}=\dfrac{(c-d)+(c+d)}{(c-d)-(c+d)}$ 即チ $\dfrac{2a}{-2b}=\dfrac{2c}{-2d}$

依テ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナル形ノ式ヲ導キ得ル。

【解】
$$\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2x+28}-\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+28}+\sqrt{2x+4}}\cdots\cdots①$$

合除比ノ理ニヨリ $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x+28}}{\sqrt{2x+4}}\cdots\cdots②$

但シ $x-1\neq0$，$2x+4\neq0$ トス。

②ノ兩邊ヲ平方スルト $\dfrac{x+5}{x-1}=\dfrac{2x+28}{2x+4}$

$\therefore\ 1+\dfrac{6}{x-1}=1+\dfrac{12}{x+2}\quad\therefore\ \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x+2}$

分母ヲ拂ヘバ $x+2=2x-2\quad\therefore\ x=4$

【驗シ】 $x=4$ ノトキ ①ノ左邊 $=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$，右邊 $=\dfrac{6-\sqrt{12}}{6+\sqrt{12}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$\therefore\ x=4$ ハ原方程式ノ根デアル。

吟味 ②ノ分母 $\sqrt{x-1}\sqrt{2x+4}=0$ ノトキハ $x=1$ 又ハ $x=-2$

$x=1$ トスレバ ①ノ左邊 $=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=1$，右邊 $=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}+\sqrt{6}}\neq1$

$x=-2$ トスレバ ①ノ左邊 $=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{-3}}{\sqrt{3}+\sqrt{-3}}\neq$ 右邊（$\because$ 右邊 $=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}}=1$）

$\therefore\ x=1$ 及ビ $x=-2$ ハ共ニ①ノ根デハナイ。

答 4

指導總括 最後ノ吟味ヲヤラナイ者ガ多イ。大抵ノ參考書ニモコレヲヤツテナイガ，②ノ分母ヲ零ナラシメル x ノ値ガ原方程式ヲ滿足スルコトガアルカラ（次ノ例 169 參照）コノ吟味ガ必要デアル。

例 169. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{x}{a}$ ヲ解ケ。

方針 矢張リ合除比ノ理ヲ用ヒテ變形シテ見ル。

【解】 $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{x}{a} \quad \cdots\cdots ①$$

合除比ノ理ヨリ $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\dfrac{x+a}{x-a}$ 〔但 $x-a\neq 0$ トス〕……②

兩邊ヲ平方スルト $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{(x+a)^2}{(x-a)^2}$ $\therefore \dfrac{-(x+a)}{x-a}=\dfrac{(x+a)^2}{(x-a)^2}$

$x-a\neq 0$ トシテ分母ヲ拂フト

$$-(x-a)(x+a)=(x+a)^2$$

$$\therefore (x+a)\{(x+a)+(x-a)\}=0 \quad \therefore x=-a \text{ 又ハ } 0$$

【驗シ】 (イ) $x=-a$ ナルトキ

①ノ右邊 $=\dfrac{-a}{a}=-1$ 〔a ハ①ノ分母ノ既知數ナル故 0 ナラズ〕

左邊 $=\dfrac{\sqrt{0}+\sqrt{2a}}{\sqrt{0}-\sqrt{2a}}=-1$ $\therefore x=-a$ ハ①ノ根ナリ。

(ロ) $x=0$ ナルトキ

①ノ右邊 $=0$, 左邊 $=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a}}=\dfrac{2\sqrt{a}}{0}\neq 0$ $\therefore x=0$ ハ根ナラズ。

STOP コレダケデハ不完全デ $x-a=0$ ナルトキノ吟味ガ必要デアル

GO $x-a=0$ ナルトキハ $\left.\begin{array}{l} ①ノ右邊=\dfrac{a}{a}=1 \\ ①ノ左邊=\dfrac{\sqrt{2a}+0}{\sqrt{2a}-0}=1 \end{array}\right\}$ $\therefore x=a$ モ①ノ根ナリ

答 $\pm a$

指導總括 $x-a=0$ ナル場合ヲ忘レテ $-a$ ノミヲ答トスル者ガ多イ。
尙コノ問題ハ直チニ分母ヲ拂ヒ同類根式ヲ一邊ニ集メテ解クト次ノ樣ニ無難ニ解キ得ル。

【別解】 ①ノ分母ヲ拂フト

$$a\sqrt{a+x}+a\sqrt{a-x}=x\sqrt{a+x}-x\sqrt{a-x}$$

同類根式ヲ一邊ニ集メルト $(x+a)\sqrt{a-x}=(x-a)\sqrt{a+x}$

兩邊ヲ平方スルト $(x+a)^2(a-x)=(x-a)^2(a+x)$

コレヲ解キテ $x=-a$, 又ハ $x=a$ 又ハ $x=0$

【驗シ】 上ノ解法ニ於ケル驗シト同樣デアルカラ略ス。 **答** $\pm a$

例 170. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}=1$$

着眼 1. 根號內ガ互ニ他ノ逆數ナル事ニ着眼シテ置換法ヲ用ヒル。但シ根號內ガ互ニ逆數ナルトキ一方ヲ y ト置クト他ノ一ツガ $\dfrac{1}{y}$ デ表ハサレルノハ根號內ガ正ナルトキニ限ルコトヲ念頭ニ置イテ解カネバナラヌ。

$\because$ 根號內ガ負ナルトキ例ヘバ $A<0$ ナルトキ $\sqrt{A}=y$ ト置ケバ $\sqrt{\dfrac{1}{A}}$ ハ $\dfrac{1}{y}$ トハナラナイデ $\sqrt{\dfrac{1}{A}}=-\dfrac{1}{y}$ トナルノデアル。

例ヘバ $\sqrt{-3}=y$ ト置クト $y=i\sqrt{3}$ $\therefore \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{i\sqrt{3}}=\dfrac{i}{-\sqrt{3}}$

シカルニ $\sqrt{-\dfrac{1}{3}}=i\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ $\therefore \sqrt{-\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{y}$

【解】 $$\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

左邊ノ根號內ハ共ニ正デナケレバナラヌ。

($\because$ 根號內ガ負ナルトキハ①ノ左邊ハ純虛數一純虛數トナリ①ハ成立セズ。又根號內ノ一方ガ 0 ナルトキハ他ノ根號內ノ分母ガ 0 トナリ，コノトキモ①ハ成立セズ。)

依テ $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}}=y$ トオケバ $\sqrt{\dfrac{1-x}{x-2}}=\dfrac{1}{y}$ トナル故

①ハ $y-\dfrac{1}{y}=1$ $\therefore y^2-y-1=0$ 〔$y\neq 0$ ナル故〕

$$\therefore y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

シカルニ y 即チ $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}}$ ハ負デハナイカラ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ハ適シナイ

$$\therefore \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

兩邊ヲ平方スルト 〔コノトキ無緣根ハ導入セラレナイ〕

$$\frac{x-2}{1-x}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \quad 即 \quad \frac{x-2}{1-x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$1-x\neq 0$ トシテ分母ヲ拂ヒ　$2x-4=3+\sqrt{5}-(3+\sqrt{5})x$

$$\therefore \quad (5+\sqrt{5})x=7+\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad x=\frac{7+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{(7+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}=\frac{15-\sqrt{5}}{10}$$

【驗シ】 コノ値ハ①ノ分母ヲ0ナラシメナイ。且②ノ兩邊ヲ平方スルモ無緣根ハ導入セラレナイカラ $\frac{15-\sqrt{5}}{10}$ ハ原方程式ノ根デアル。

答 $\frac{15-\sqrt{5}}{10}$

着眼 2. 左邊ガ逆數ノ差ノ形ナル事ニ着眼シテコノマヽ兩邊ヲ平方スル。

【別解】 ①ノ兩邊ヲ平方スルト

$$\frac{x-2}{1-x}-2\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}+\frac{1-x}{x-2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

STOP コノ場合ハ $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$ ノ取扱ヒガ急所デ，根號内ガ共ニ正ナラバ $\sqrt{}\sqrt{}=1$，共ニ負ナラバ $\sqrt{}\sqrt{}=-1$ トナル事ヲ念頭ニ置イテ

GO 根號内ハ共ニ正デナケレバナラヌ（∵ 前ノ解法ト同樣ノ理由ニ依ル）依テ $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}=\sqrt{\left(\frac{x-2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{x-2}\right)}=1$

〔但 $(1-x)(x-2)\neq 0$〕

從ツテ②ハ　$\frac{x-2}{1-x}-2+\frac{1-x}{x-2}=1$

STOP コノ分母ヲ拂フカ，$\frac{x-2}{1-x}=y$ ト置イテ解ク（各自試ミヨ）

【試練問題】

方程式　$3\sqrt{\frac{4x-3}{x-2}}+2\sqrt{\frac{x-2}{4x-3}}=5$ ヲ解ケ。（東 齒）

答 $\frac{19}{32}$ ト $\frac{1}{3}$

8. 文字係數ノ無理方程式ノ解法

ソノ解法ハ數係數ノ場合ト變リハナイガ，特ニ注意スベキ事ハ

1. 根ノ吟味（驗シ）ガ面倒ナ事ガ多イカラ，ソノ覺悟デ取カヽラネバナラヌ。特ニ $\sqrt{a^2}$ ナル形ノ式ノ取扱ヒニハ注意ヲ要スル。
2. 文字係數ノ無理方程式ニ於テハ特ニ斷リナキ限リ「根號内ハ正又ハ0ナル場合ノミ」ヲ考ヘ，根號内ガ負（即チ虚數）ノ場合ハ考ヘナクテヨイ。（中等程度デハ無理デアルカラ）
3. 根號内ガ正又ハ0ナル場合ノミヲ取扱フ事ヲ念頭ニ置イテ解クト驗シノ場合ニ根號内ノ計算ヲスル事ナシニ無緣根ナリヤ否ヤノ判定ヲ下シ得ル事ガアル。

例 171. 方程式 $\sqrt{1-x^2}+ax=1$ ヲ解ケ。但シ $\sqrt{}$ ハ平方根ノ中ノ正數又ハ零ノミヲ表ハスモノトスル。

【解】 移項シテ　$\sqrt{1-x^2}=1-ax \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$

兩邊ヲ平方スルト　$1-x^2=1-2ax+a^2x^2$

$$\therefore \quad (a^2+1)x^2=2ax$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 又ハ } (a^2+1)x=2a$$

$a^2+1\neq 0$〔但 a ハ實數ナルモノトス〕

$$\therefore \quad x=0 \text{ 又ハ } x=\frac{2a}{a^2+1}$$

【驗シ】（イ） $x=0$ ノトキ ①ノ左邊 $=\sqrt{1}=1$，右邊 $=1-0=1$

$\therefore$ $x=0$ ハ①ノ根デアル。

（ロ） $x=\frac{2a}{a^2+1}$ ノトキ ①ノ右邊 $=1-\frac{2a^2}{a^2+1}=\frac{1-a^2}{a^2+1}$

①ノ左邊 $=\sqrt{1-\frac{4a^2}{(a^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}}=\frac{\sqrt{(a^2-1)^2}}{a^2+1}$

STOP 警戒式 $\sqrt{(a^2-1)^2}$ ノ取扱ヒニ注意シテ

GO

$$\begin{cases} a^2>1 \text{ ナルトキハ 左邊}=\frac{a^2-1}{a^2+1}\neq\text{右邊} \\ a^2\leqq 1 \text{ ナルトキハ 左邊}=\frac{-(a^2-1)}{a^2+1}=\frac{1-a^2}{a^2+1}=\text{右邊} \end{cases}$$

$\therefore$ $a^2>1$ ナルトキハ $\frac{2a}{a^2+1}$ ハ①ノ根ナラズ。

$a^2\leqq1$ ナルトキハ $\frac{2a}{a^2+1}$ ハ①ノ根デアル。

答 $\begin{cases} a^2\leqq1 \text{ ナルトキハ } 0 \text{ ト } \frac{2a}{a^2+1} \\ a^2>1 \text{ ナルトキハ } 0 \text{ ノミ} \end{cases}$

【驗シノ別法】 $x=0$ ノ場合ハ上ト同樣＝（簡單＝出來ルカラ）

$x=\frac{2a}{a^2+1}$ ノトキ ①ノ右邊$=1-\frac{2a^2}{a^2+1}=\frac{1-a^2}{a^2+1}$

シカル＝①ノ左邊ハ但書＝ヨリ **正又ハ零**ノミヲ表ハスカラ，①ヲ滿足スルタメニハ $\frac{1-a^2}{a^2+1}\geqq0$ 從ツテ $1-a^2\geqq0$ ∴ $a^2\leqq1$ デナケレバナラヌ。$a^2>1$ ノトキハ①ノ右邊ガ負トナルカラ①ハ成立シナイ。

依テ $\frac{2a}{a^2+1}$ ハ $a^2\leqq1$ ナルトキハ①ノ根デアルガ $a^2>1$ ノトキハ①ノ根デハナイ。

【試練問題】 $\sqrt{9-x^2}=ax+3$ ヲ解ケ。但シ a ハ實數トス。

答 $a^2\leqq1$ ナルトキハ 0 ト $\frac{-6a}{a^2+1}$，$a^2>1$ ナラバ 0 ノミ

例 172. $a+b=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ヲ解ケ。但シ $a\neq b$ 且 $ab>0$ トス。

方針 分母ヲ拂ツテ同類根式ヲ一邊ニ集メテカラ平方スル。

【解】 $a+b=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ……①

$x+\sqrt{1+x^2}\neq0$ トシテ分母ヲ拂ヘバ

$$(a+b)x+(a+b)\sqrt{1+x^2}=2a\sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore\ (a+b)x=(a-b)\sqrt{1+x^2} \cdots\cdots②$$

兩邊ヲ平方スルト $(a^2+2ab+b^2)x^2=(a^2-2ab+b^2)(1+x^2)$

$$\therefore\ 4abx^2=(a-b)^2$$

シカル＝ $ab>0$ ∴ $x=\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ……③

【驗シ】(イ) $x=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ナルトキ

$$①ノ右邊=\frac{2a\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}}=\frac{2a\sqrt{(a+b)^2}}{a-b+\sqrt{(a+b)^2}}$$

STOP 警戒式 $\sqrt{(a+b)^2}$ ノ取扱ヒ＝注意シテ

GO $\begin{cases} a+b>0 \text{ ノトキ 右邊}=\frac{2a(a+b)}{a-b+(a+b)}=\frac{2a(a+b)}{2a}=a+b \\ a+b<0 \text{ ノトキ 右邊}=\frac{-2a(a+b)}{a-b-(a+b)}=\frac{a(a+b)}{b}\neq a+b \\ ab>0 \text{ ナル故 } a+b=0 \text{ ニハナラヌ。} \end{cases}$

依テ $\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ハ $\begin{cases} a+b>0 \text{ ノトキハ①ノ根デアルガ,} \\ a+b<0 \text{ ナルトキハ①ノ根デハナイ。} \end{cases}$

(ロ) $x=-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ナルトキ

$$①ノ右邊=\frac{2a\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}}{-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}}=\frac{2a\sqrt{(a+b)^2}}{-(a-b)+\sqrt{(a+b)^2}}$$

∴ $\begin{cases} a+b>0 \text{ ノトキ 右邊}=\frac{2a(a+b)}{-(a-b)+(a+b)}=\frac{2a(a+b)}{2b}\neq a+b \\ a+b<0 \text{ ノトキ 右邊}=\frac{-2a(a+b)}{-(a-b)-(a+b)}=\frac{-2a(a+b)}{-2a}=a+b \end{cases}$

依テ $-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ハ $\begin{cases} a+b<0 \text{ ノトキハ①ノ根デアルガ,} \\ a+b>0 \text{ ナルトキハ①ノ根デハナイ。} \end{cases}$

答 $\begin{cases} a+b>0 \text{ ナラバ } \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \text{ ガ根} \\ a+b<0 \text{ ナラバ } -\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \text{ ガ根} \end{cases}$

【試練問題】 次ノ無理方程式ヲ解ケ。

$x+\sqrt{x^2+b^2}=a$ 但シ a，b ハ實數トシ，根號ハ正又ハ零ヲ表ハスモノトス。 （京醫專）

答 $a>0$ ナルトキ $\frac{a^2-b^2}{2}$，$a<0$ ナルトキ根ナシ

$a=0$ ナルトキ $\begin{cases} b\neq 0 \text{ ナラバ根ナシ} \\ b=0 \text{ ナラバ } x\leqq 0 \text{ ナル任意ノ實數} \end{cases}$

例 173. $\dfrac{(x-a)^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}-(x-b)^{\frac{1}{2}}}=a-b$ ヲ解ケ。

着眼 $(x-a)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{A}$, $(x-b)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{B}$ ト置クト左邊ハ $\dfrac{\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}$ 即チ $\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2$ ノ形トナル事ニ着眼シテ取扱フ。

【解】 $$\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}-(x-b)^{\frac{1}{2}}}=a-b \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$(x-a)^{\frac{1}{2}}-(x-b)^{\frac{1}{2}}\neq 0$ トシテ左邊ヲ約分スルト

$$(x-a)^{\frac{2}{2}}+(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}+(x-b)^{\frac{2}{2}}=a-b$$

$$\therefore\ x-a+(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}+x-b=a-b \cdots\cdots\cdots ②$$

移項シテ　$(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}=-2(x-a) \cdots ③$

兩邊ヲ平方スルト　$(x-a)(x-b)=4(x-a)^2$

$$\therefore\ x-a=0 \text{ 又ハ } x-b=4(x-a)$$

$$\therefore\ x=a \text{ 又ハ } x=\frac{4a-b}{3}$$

【驗シ】i) $x=a$ ナルトキ $x-a=0$, $x-b=a-b$

$\therefore$ ①ノ左邊 $=\dfrac{-(a-b)^{\frac{3}{2}}}{-(a-b)^{\frac{1}{2}}}$ $\therefore \begin{cases} a\neq b \text{ ノトキ左邊}=(a-b)=\text{右邊} \\ a=b \text{ ノトキ分母ガ } 0 \text{ トナル故不適} \end{cases}$

$\therefore$ $a\neq b$ ノトキノミ $x=a$ ハ①ノ根ナリ。

ii) $x=\dfrac{4a-b}{3}$ ナルトキ $x-a=\dfrac{a-b}{3}$, $x-b=\dfrac{4(a-b)}{3}$

$$\therefore\ ①\text{ノ左邊}=\frac{\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-8\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-2\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-7\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\left(\frac{a-b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\therefore$ $a=b$ ノトキハ左邊ノ分母ハ 0 トナル故 不適

$a\neq b$ ノトキハ左邊 $=7\left(\dfrac{a-b}{3}\right)\neq$ 右邊

$\therefore$ $\dfrac{4a-b}{3}$ ハ①ヲ滿足セズ。

答 $\begin{cases} a\neq b \text{ ナルトキハ } a \\ a=b \text{ ナルトキハ 根ナシ} \end{cases}$

【試驗問題】 $\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3x(a-b)}$ ヲ解ケ。

答 $a(a-b)\neq 0$ ナラバ $0,\ 3b$

$a(a-b)=0$ ナラバ $0,\ 3b,\ 3a$

例 174.* a ハ負數ニシテ其ノ絶對値ハ 1 ヨリ小ナラズトスルトキ $a(x+1)+\sqrt{x^2+x+1}$ ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ。但シ $\sqrt{p}$ ノ如キハ p ガ正數ナルトキ，p ノ正ナル平方根ヲ表ハスモノトス。

【解】 $$a(x+1)+\sqrt{x^2+x+1}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ求ムレバヨイ。

移項シテ　$\sqrt{x^2+x+1}=-a(x+1) \cdots\cdots ①'$

兩邊ヲ平方スルト　$x^2+x+1=a^2(x^2+2x+1)$

$$\therefore\ (a^2-1)x^2+(2a^2-1)x+(a^2-1)=0 \cdots\cdots ②$$

STOP 見掛上ハ二次方程式デアルガ文字係數デアルカラ x^2 ノ係數ガ 0 ナル場合ト $\neq 0$ ナル場合トニ分ケテ解カネバナラヌ。

GO I. $a^2-1\neq 0$ ナルトキハ，根ノ公式ニヨリ

$$x=\frac{-(2a^2-1)\pm\sqrt{(2a^2-1)^2-4(a^2-1)^2}}{2(a^2-1)}=\frac{-(2a^2-1)\pm\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)} ③$$

STOP コノ値ヲ①′ノ左邊ニ代入シテ根號内ノ二次式ヲ計算シ，右邊ト比較スルコトハ容易デナイ。ソコデ根號内ノ式 x^2+x+1 ハ x ノ實數値ニ對シテハ常ニ正 $\left[\because\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$ ナルコトニ着眼シ，x ノ値即チ③ガ實數ナル事ヲ證明スレバ①′ノ左邊ハ正ト斷定出來ルカラ，右邊ノ正負ノミヲ考ヘテ無緣根カ否カノ判定ガ出來ルト考ヘテ

GO 題意ニヨリ a ハ負數デ其ノ絶對値ハ 1 ヨリ小ナラザル故 $a\leqq -1$

$\therefore\ a^2\geqq 1$ 故ニ $4a^2-3>0$ $\therefore\ \dfrac{-(2a^2-1)\pm\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)}$ ハ實數デアル。

シカルニ ①′ ノ左邊$=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$ トナル故 x ノ實數値ニ對シテハ常ニ正，從ツテ③ノ値ニ對シテ ①′ ノ左邊ハ正デアル。

（イ） $x=\dfrac{-(2a^2-1)+\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)}$ ノトキ

$$①' ノ右邊=-a\left\{\frac{\sqrt{4a^2-3}-1}{2(a^2-1)}\right\}>0$$

（$\because\ a<0$, 且 $a^2>1$ ナル故 $-a>0$, $(a^2-1)>0$, $\sqrt{4a^2-3}>1$）

依テ $\dfrac{-(2a^2-1)+\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)}$ ハ ①′ ノ根デアル。

（ロ） $x=\dfrac{-(2a^2-1)-\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)}$ ノトキ

$$①' ノ右邊=-a\left\{\frac{-\sqrt{4a^2-3}-1}{2(a^2-1)}\right\}<0$$

依テ $\dfrac{-(2a^2-1)-\sqrt{4a^2-3}}{2(a^2-1)}$ ハ無緣根デアル。

II　$a^2-1=0$ ナルトキ　$a=\pm 1$

題意ニヨリ $a<0$ ナル故 $a=1$ ハ適セズ　$\therefore\ a=-1$

$a=-1$ ナルトキ　②ハ $(2-1)x=0$　$\therefore\ x=0$

コノトキ　①ノ左邊$=(-1)(0+1)+\sqrt{1}=-1+1=0=$右邊

I, II ヲ綜合シテ

答 $\begin{cases} a<-1 \text{ ナルトキ } \dfrac{-(2a^2-1)+\sqrt{4a^2-3}}{2a^2-1} \\ a=-1 \text{ ナルトキハ }\quad 0 \end{cases}$

x ノ實數値ニ對シテ x^2+x+1 ハ常ニ正ナル事位ハ數學ノ常識トシテ心得テ置イテ貰ヒタイ。
スルト但書ヲ讀ンダトキ，直チニ「x ガ實數デアレバ ①′ ノ左邊ハ正ナルコト」ニ氣付ク筈デアル。

鍛錬問題十一

119. $x-\sqrt{a-x}=b$ ヲ解ケ。但シ $a>b>0$ トス。
尙無緣根アリトスレバ如何ナル方程式ノ根ナルカヲ附記セヨ。

120. (i) $x^2-10x+31-5\sqrt{x^2-10x+25}=0$ ヲ解ケ。
(ii) $10x^2+17x-6-5x\sqrt{4x^2+17x-6}=0$ ヲ解ケ。(神　商)

121. (i) $\sqrt{2+x}-\sqrt{5-2x}=2$ ヲ解ケ。
(ii) $\sqrt{5x^2+7x+2}-\sqrt{4x^2+7x+18}=x-4$ ヲ解ケ。

122. 方程式 $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}}=1$ ヲ解ケ。

123. 次ノ方程式ノ實根ヲ求メヨ。

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=2$$ (八　高)

124. $(2x+3)^{\frac{1}{3}}(3x-2)^{-\frac{1}{3}}-(2x+3)^{-\frac{1}{3}}(3x-2)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$ ヲ解ケ。

125. $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}-\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}=2$ ヲ解ケ。(松山高)

126. 方程式 $x=\sqrt{px+q}$ ヲ解ケ。
但シ p, q ハ零デナイ實數トスル。(城大豫)

127. $2x+2\sqrt{x^2-2}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}}$ ヲ滿足スル x ノ値ニ對シテ
$\dfrac{13}{\sqrt{\dfrac{17}{2}-\dfrac{10\sqrt{6}}{7}x}}$ ヲ四捨五入シテ小數第一位迄計算セヨ。(海兵經)

128. $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1+x}}\neq 1$ ナルトキ，x ヲ y ノ項ニテ表ハセ。

129. $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$ ナルトキ a^2+b^2 ノ値ヲ求メヨ。

答 119. $\dfrac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2}$ 無緣根ハ $x+\sqrt{a-x}=b$ ノ根

120. (i) 2,3,7,8　(ii) 3, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{6}{17}$　121. (i) $\dfrac{5+4\sqrt{19}}{9}$　(ii) 4

122. 1　123. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　124. $-\dfrac{22}{19}$, $\dfrac{19}{22}$　125. $-\sqrt{2}\,a$

126. $q>0$ ナルトキ $\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $q<-\dfrac{p^2}{4}$ ナラバ　根ナシ

$0>q\geqq-\dfrac{p^2}{4}$ ナルトキ $\begin{cases} p>2 \text{ ナラバ } \dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2} \\ p<0 \text{ ナラバ　根ナシ} \end{cases}$

127. 7.5 弱,　128. $x=\dfrac{-4y(y^2-1)}{(y^2+1)^2}$　129. 1

第二十三章　聯立方程式ノ解法

1. 聯立方程式ヲ解クトハ

二ツ以上ノ方程式ヲ同時ニ滿足スル未知數ノ値ヲ求メタリ，又ハ同時ニ滿足スル未知數ノ値即チ根ガ幾組デモ(無數ニ)アルカ，或ハ根ガ一組モナイカヲ考究スルコトデアル。

2. 聯立方程式ノ同値ニ關スル定理

定理 27.

聯立方程式 $\left.\begin{matrix} A=B \\ C=D \end{matrix}\right\}$ ……① ト $\left.\begin{matrix} lA+mC=lB+mD \\ C=D \end{matrix}\right\}$ ……②

トハ同値デアル。但シ $l \neq 0$ トスル。　　(加減法ノ原理)

證明 ①ノ根ニ對シテハ $lA=lB$ 又 $mC=mD$ ナル故

①ノ根ハ $lA+mC=lB+mD$ ヲ滿足スル。又①ノ根ガ $C=D$ ヲ滿足スルコトハ明ラカデアル。依テ①ノ根ハ總テ②ヲ滿足スル。

逆ニ②ノ根ニ對シテハ $mC=mD$, 又 $lA+mC=lB+mD$ ナル故 $lA=lB$ ヲ滿足スル。シカルニ $l \neq 0$ ナル故 $A=B$ ヲ滿足スル。

又②ノ根ガ $C=D$ ヲ滿足スルコトハ明ラカデアル。

依テ②ノ根ハ總テ①ヲ滿足スル。

故ニ①ノ根ト②ノ根トハ全ク一致シ從ツテ①ト②トハ同値デアル。

系 1. 聯立方程式 $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ ト $\begin{cases} A+B=C+D \\ A-B=C-D \end{cases}$ トハ同値デアル

系 2. 聯立方程式 $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ ト $\begin{cases} lA+mC=lB+mD \\ l'A+m'C=l'B+m'D \end{cases}$

トハ同値デアル。但シ $lm'-l'm \neq 0$ トスル。

註 定理 25 及ビ其系ハ加減消去法（未知數ノ一ツヲ消去スルタメニ適當ナル數ヲ兩邊ニ乘ジテ邊々加減シテ解ク解法）ノ原理デアル。コノ定理ニヨリ，加減法ニヨツテ解イテ得タ根ハ原方程式ノ根ト同一デアルカラ，驗シヲ答案ニ書ク必要ハナイ。

定理 28. 方程式 $A=B$ ニ於テ A, B 中ニ含マル、x ノ代リニ p（但シ p ハ x ヲ含マザルモノトス）ヲ代入シタモノヲ夫々 A', B' トスルト，

聯立方程式 $\begin{cases} A=B \\ x=p \end{cases}$ ……① ト $\begin{cases} A'=B' \\ x=p \end{cases}$ ……② トハ同値デアル。

(代入法ノ原理)

證明 $x=p$ ノトキニ $A=A'$, $B=B'$ トナツタノデアルカラ①ヲ滿足スル根（即チ $A=B$, $x=p$ ガ成立スル未知數ノ値）ニ對シテ②ハ明ラカニ成立シ，②ヲ滿足スル根（即 $A'=B'$, $x=p$ トナル未知數ノ値）ニ對シテ①（即チ $A=B$, $x=p$）ハ明ラカニ成立スルカラ①ト②トハ同値デアル。

註 コレハ聯立方程式ノ解法ニ用ヒラレル代入法（未知數ノ一ツヲ表ハス式ヲ作リ，他ノ方程式ニ代入シテ解ク法）ノ原理デ，代入法ニヨツテ得タ根ハ原方程式ノ根ト同一デアルカラ矢張リ答案ニ驗シヲ書ク必要ハナイ。

第二十四章　聯立一次方程式ノ解法

1. 聯立二元一次方程式ノ一般解法

【基本問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

但シ a, b, c, a', b', c' ハ何レモ 0 ナラズトスル。

【解】

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a'x+b'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times b'$－②$\times b$ ヨリ　$(ab'-a'b)x=bc'-b'c \cdots\cdots\cdots ③$

$\therefore$ $ab'-a'b\neq 0$ ノトキハ　$x=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$

之ヲ①又ハ②ニ代入シテ解キ　$y=\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$

吟味 (i) $ab'-a'b\neq 0$ ノトキハ

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$ ナル唯一組ノ根ガアル。

(ii) $ab'-a'b=0$ ナルトキハ

(イ) $bc'-b'c=0$ ナラバ ③ハ $0x=0$ トナリ，之ヲ滿足スル x ノ値ハ無數ニアリ，之ニ應ズル y ノ値モ無數ニアルカラ根ハ幾組モ（無數ニ）存在スル。（即チ不定デアル）

(ロ) $bc'-b'c\neq 0$ ナラバ③ヲ滿足スル x ノ値ハ存在シナイ。從ツテ①②ヲ同時ニ滿足スル x, y ノ値ハ一組モナイ（即チ不能デアル）

注　$ab'-a'b=0$ ノ場合ノ吟味ハ諸君トシテハコノ程度ニ扱ツテ置イテモヨイノデアルガ，不定ヤ不能ノ意味ヲ理解セズ形式的ニ之ヲ用ヒル者ガ多イノデ，今少シ突込ンデ吟味ヲシテ見ル。

【嚴密ナ吟味】

$ab'-a'b=0$ ナルトキハ $ab'=a'b$ $\therefore$ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ トナル。

從ツテ

(イ) $bc'-b'c=0$ ナラバ $bc'=b'c$ $\therefore$ $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

$\therefore$ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ 即チ①,②ノ係數ハ比例ヲナス。

コノ比ノ値ヲ k トオケバ $a=a'k,\ b=b'k,\ c=c'k$〔$k\neq 0$ $\because$ $abc\neq 0$〕

依テ　①ハ　$(a'x+b'y+c')k=0$ トナリ

②ハ　$a'x+b'y+c'=0$

從ツテ①ハ②ノ兩邊ニ零ナラザル常數 k ヲ乘ジテ得ル方程式トナルカラ②ノ根ハ悉ク①ヲモ滿足スル。シカルニ②ヲ滿足スル根ハ幾組デモ無數ニ多ク存在スル（$\because$ ②ヨリ $y=\dfrac{-a'x-c'}{b'}$ トナル故コノ x ニ種々ナル値ヲ代入シ夫々ニ應ジテ y ノ値ガ定マルカラ）依テ①,②ヲ同時ニ滿足スル x, y ノ値ハ幾組モ（無數ニ多ク）存在スル。（コノコトヲ聯立方程式ハ不定デアルトイフ）

(ロ) $bc'-b'c\neq 0$ ノトキ　$bc'\neq b'c$　$\therefore$ $\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

$\therefore$ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$　今 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=k$ ト置クト $\dfrac{c}{c'}\neq k$

$\therefore$ $a=a'k,\quad b=b'k\quad c\neq c'k$

依テ　$c=c'k+d$〔コヽニ $d\neq 0$〕ト置クト

①ハ　$(a'x+b'y+c')k+d=0$ トナリ

②ハ　$a'x+b'y+c'=0$

シカルニ $d\neq 0$ ナル故②ヲ滿足スル根ハ①ヲ滿足セズ，亦①ヲ滿足スル根ハ②ヲ滿足シナイ。依テ ①,②ヲ同時ニ滿足スル x, y ノ値ハ存在シナイ（コノコトヲ聯立方程式ハ不能デアルトイフ）

例 175. 次ノ x, y ニ關スル二元一次聯立方程式ヲ解ケ。

$6x+(a-1)y-5a+2=0$　①

$(a+6)x-2y+7a+22=0$　②

根ヲ求メル事ハ容易デアルカラ，コノ問題ハ根ノ吟味ガ主眼點デアル事ニ着眼シテ根ノ吟味ニ主力ヲ注ゲ。

【解】 ①×2+②×$(a-1)$ ヨリ

$$(a^2+5a+6)x=-(7a^2+5a-18)$$

$$\therefore\ (a+2)(a+3)x=-(7a-9)(a+2)\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$\therefore\ (a+2)(a+3)\neq 0$ ノトキハ　$x=-\dfrac{7a-9}{a+3}$

次ニ①×$(a+6)$−②×6 ヨリ

$$(a+2)(a+3)y=5(a+2)(a+12)\ \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$\therefore\ (a+2)(a+3)\neq 0$ ノトキハ　$y=\dfrac{5(a+12)}{a+3}$

吟味　(i)　$(a+2)(a+3)\neq 0$ ノトキハ上記ノ如キ**唯一組ノ根**ヲ得ル。

(ii)　$(a+2)(a+3)=0$ ノトキハ $a=-2$ 又ハ $a=-3$

(イ)　$a=-2$ ナルトキハ

③ハ $0x=0$ トナリ之ヲ満足スル x ノ値ハ無數ニ多ク存在シ從ツテ①,②ヲ同時ニ満足スル **x, y ノ値ノ組モ無數ニ存在**スル（即チ**不定**）

(ロ)　$a=-3$ ナルトキハ

③ノ左邊ハ 0，右邊$\neq 0$ トナル故③ヲ満足スル x ノ値ハ存在シナイ。從ツテ①,②ヲ同時ニ満足スル **x, y ノ値ハ一組モナイ**（**即チ不能**）

答　$(a+2)(a+3)\neq 0$ ナルトキ　$x=-\dfrac{7a-9}{a+3}$，$y=\dfrac{5(a+12)}{a+3}$

$a=-2$ ナルトキハ **不定**，　$a=-3$ ナルトキハ **不能**

【吟味ノ別法】 $a=-2$ ヤ，$a=-3$ ナルトキハ原方程式ガ如何ニナルカヲ考ヘテ次ノ如ク吟味ヲスルト不定ヤ不能ノ意味ガ一層明ラカニナル

(イ)　$a=-2$ ナルトキ $\begin{cases} ①ハ\quad 2x-y+4=0\cdots\cdots\cdots\cdots ①' \\ ②ハ\quad 2x-y+4=0\cdots\cdots\cdots\cdots ②' \end{cases}$

依テ①,②ハ**全ク同一ノ方程式**トナリ $y=2x+4$ ヲ満足スル如キ x, y ノ値（幾組デモアル）ニ對シテ①，②ハ**同時ニ成立**シ，**根ハ幾組モアル**（**即チ不定**）

(ロ)　$a=-3$ ナルトキ $\begin{cases} ①ハ\quad 6x-4y+17=0\cdots\cdots\cdots ①'' \\ ②ハ\quad 3x-2y+1=0\ \cdots\cdots\cdots ②'' \end{cases}$

②″ヲ満足スル x, y ノ値ニ對シテハ $6x-4y+2=0$ トナル故 ②″ノ根ハ ①″ヲ満足セズ 又 ①″ ヲ満足スル x, y ノ値ニ對シテハ②″ハ成立シナイ。依テ①②ヲ同時ニ満足スル x, y ノ値ハ**一組モナイ**（**即チ不能**）

指導總括　コノ様ナ問題ニ對シテ形式的ニ x, y ノ値ヲ求メ a ノ値ニ對シテ何等吟味ヲシナイ者ガアル。又 a ノ値ニ對シテ吟味ハシテキルガ ③ヨリ $x=\dfrac{-(7a-9)(a+2)}{(a+2)(a+3)}$ ノ形ニシタ上デ

$a+2=0$ ナラバ $x=\dfrac{0}{0}$ デ不定，$a+3=0$ ナラバ $x=-\dfrac{30}{0}$ デ不能トイフ様ニ**形式的ニ不定ヤ不能トイフ言葉ヲ用ヒ**，不定トイフノガ「**根ガ幾組モ存在スル事**」不能トイフノハ「**根ガ一組モ存在シナイ事**」デアルトイフ事ヲ理解シテキナイ者ガ多イ。

尚又 $7a-9=0$ ナラバト**分子マデモ吟味**スル者ガアルガ之ハ吟味ノ目的ガ理解サレテキナイモノデ，③ヨリxヲ求メルタメニ **$(a+2)(a+3)$ デ割ラネバナラヌ故**，之ガ 0 ナル場合ト，0 ナラザル場合ニ對スル吟味ガ必要ナノデ，ソレ以外ノ a ノ値ニ對シテハ吟味ノ必要ハナイ。

【試練問題】 次ノ方程式ノ根ヲ吟味セヨ。

$$\begin{cases}(3k+1)x+(5k-2)y=4k-3\\(9-k)x+2(k+2)y=k+1\end{cases}$$

（海　兵）

答　$(k-1)(k-2)\neq 0$ ナルトキ $x=\dfrac{3k+10}{11(k-2)}$，$y=\dfrac{7(k-4)}{11(k-2)}$

$k=1$ ナルトキハ 不定，　　$k=2$ ナルトキハ 不能

例 176. 次ノ二方程式ヲ満足スル x, y ノ組ガ，相異ル二組以上アルトキ，$\dfrac{p^2}{a^6}+\dfrac{q^2}{b^6}$ ノ値ヲ求メヨ。

$$ax+by+3=0,\quad \frac{p}{a^2}x+\frac{q}{b^2}y-1=0$$

方針　與ヘラレタ方程式ヲ解イテ見テ根ガ「相異ナル二組以上」アルノハ如何ナル場合カヲ考ヘル。

【解】　$ax+by+3=0\ \cdots\cdots ①$　$\dfrac{p}{a^2}x+\dfrac{q}{b^2}y-1=0\cdots\cdots ②$

①ヨリ　　$ax+by=-3\cdots\cdots\cdots\cdots ①'$

②ヨリ　　$pb^2x+qa^2y=a^2b^2\cdots\cdots\cdots\cdots ②'$

STOP 聯立一次方程式デアルカラ加減消去法＝ヨリ先ヅ x ヲ求メテ見ヤウト考ヘテ

GO ①$\times qa^2-$②$\times b$ ヨリ $(qa^3-pb^3)x=-(3qa^2+a^2b^3)$……③

（イ） $qa^3-pb^3\neq 0$ ノトキハ $x=\dfrac{-a^2(3q+b^3)}{qa^3-pb^3}$ ナル唯一ツノ根ガアル。之ヲ ①′ ＝代入シテ y ヲ求メ，x,y ノ値ガ唯一組得ラレルカラ題意＝適シナイ。

（ロ） $qa^3-pb^3=0$, $3qa^2+a^2b^3\neq 0$ ノトキハ③ヲ滿足スル x ノ値ハ存在セズ，從ツテ①，②ヲ滿足スル x, y ノ値ガ一組モ存在シナイカラ題意＝適シナイ。

（ハ） $qa^3-pb^3=0$ 且 $3qa^2+a^2b^3=0$ ナルトキハ③ヲ滿足スル x ノ値ハ無數＝存在シ，ソレラノ値ヲ ①′ ＝代入シ，夫々＝應ズル y ノ値ヲ求メルコトガ出來ルカラ，①,②ヲ同時＝滿足スル x,y ノ値ガ幾組モ存在スル。依テ①,②ヲ滿足スル x,y ノ組ガ相異ナル二組以上アルノハ

$$qa^3-pb^3=0\cdots\cdots④\qquad 3qa^2+a^2b^3=0\cdots\cdots⑤$$

ガ同時＝成立スルトキデアル。

STOP ④,⑤ヲ用ヒテ求値式 $\dfrac{p^2}{a^6}+\dfrac{q^2}{b^6}$ ノ値ヲ求ムレバヨイト考ヘ

GO ⑤ヨリ $a^2\neq 0$〔∵ ②ノ分母〕 $\therefore 3q+b^3=0$ $\therefore q=-\dfrac{b^3}{3}$

之ヲ④＝代入シテ $-\dfrac{a^3b^3}{3}-pb^3=0$, $b\neq 0$ $\therefore p=-\dfrac{a^3}{3}$

$$\therefore \text{求値式}\ \frac{p^2}{a^6}+\frac{q^2}{b^6}=\frac{\frac{a^6}{9}}{a^6}+\frac{\frac{b^6}{9}}{b^6}=\frac{2}{9}\qquad \text{答}\ \frac{2}{9}$$

[illegible] 聯立方程式ノ不定ノ意味ヲ理解セズ根ノ吟味ヲ形式的＝取扱ツテ居ルモノ＝ハ「相異ナル二組以上」ナル題意ガ了解出來ズ從ツテ手ノツケラレナイ問題デアル。

【試練問題】 二元一次方程式 $ax+by+c=0$, $lx+my+n=0$ ＝於テ，若シ其ノ一方ヲ滿足スル x, y ノ解ノ二組ガ他方ヲモ滿足スルナラバ，兩方程式ノ係數間＝如何ナル關係ガアルカ。

但シ係數ハ何レモ零デナイトスル。 （滿醫大豫. 藥專）

答 $\dfrac{a}{l}=\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}$

例 177. x ノ絕對値ト y ノ絕對値トノ和ガ 5 ナルトキ方程式 $2x-3y=12$ ヲ解ケ。

着眼 絕對値ノ取扱ヒ方ガ解決ノ急所デアルカラ，絕對値＝對スル次ノ根柢事項ヲハツキリト念頭＝置イテ解カネバナラヌ。

【絕對値＝就テ】

a ノ絕對値ヲ表ハスニハ $|a|$ ナル記號ヲ用ヒルト便利デアル。ソシテ例ヘバ $+3$ ノ絕對値ハ 3, -5 ノ絕對値ハ 5 デ，一般＝正數ノ絕對値ハ其數自身ニ等シク，負數ノ絕對値ハ其數ノ符號ヲ變ジテ得ル正數ニ等シク 0 ノ絕對値ハ 0 デアルカラ $a\geqq 0$ ナルトキハ $|a|=a$, $a<0$ ナルトキハ $|a|=-a$ ナル關係ガ成立スル。

【解】 x ノ絕對値ヲ $|x|$, y ノ絕對値ヲ $|y|$ デ表ハスト

題意＝ヨリ $\begin{cases}|x|+|y|=5\cdots\cdots\cdots\cdots①\\ 2x-3y=12\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

$x\geqq 0$, $y\geqq 0$ ナルトキハ $|x|=x$, $|y|=y$

$x<0$, $y<0$ ナルトキハ $|x|=-x$, $|y|=-y$ トナルカラ

㋑ $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ ナルトキ

①ハ $x+y=5$ ……①′
②ハ $2x-3y=12$ ……②
①′×2−②ヨリ $5y=-2$ $\therefore y=-\dfrac{2}{5}$

シカル＝ $y\geqq 0$ トシタカラコノ値ハ適シナイ。

㋺ $x\geqq 0$, $y<0$ ナルトキハ

①ハ $x-y=5$ ……①″
②ハ $2x-3y=12$ …②
①″×2−②ヨリ $y=-2$
①″＝代入シテ $x=3$

コレラノ値ハ $x\geqq 0$, $y<0$ ナル假定＝反シナイ。

$\therefore x=3$, $y=-2$ ハ所要ノ根デアル。

㋩ $x<0$, $y\geqq 0$ トスルト

①ハ $-x+y=5$ ……①‴
②ハ $2x-3y=12$ …②
①‴×2+②ヨリ $-y=22$ $\therefore y=-22$
$y\geqq 0$ トシタカラコノ値ハ適シナイ。

㊂ $x<0$。$y<0$ トスルト

①ハ　$-x-y=5$ ……①''''
②ハ　$2x-3y=12$ …②

①''''$\times 2+$②ヨリ　$-5y=22$　$\therefore y=-\dfrac{22}{5}$
之ヲ ①'''' ニ代入シテ　$x=-\dfrac{3}{5}$

コレラノ値ハ $x<0$，$y<0$ ナル假定ニ反シナイ

$\therefore\ x=-\dfrac{3}{5}$，$y=-\dfrac{22}{5}$ ハ適スル。

答 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 及ビ $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{22}{5} \end{cases}$

【試練問題】 聯立方程式ノ組 $|x|+y^2=3$，$2|y|+x=4$ ノ實數解ヲ求メヨ。但シ $|x|$，$|y|$ ハ夫々 x，y ノ絶對値ヲ示ス。

答 $x=2$，$y=1$ 及ビ $x=2$，$y=-1$

2. 聯立三元一次方程式ノ解法

一般方針トシテハ未知數ヲ順次ニ消去シテ一根ヲ求メ之ヲ代入シテ他ノ根ヲ求メルノデアルガ，**常數項ガ 0 ナル二ツノ三元一次方程式**即 $ax+by+cz=0$，$a'x+b'y+c'z=0$ ナル形ノ方程式ガ與ヘラレタ場合ハ次ノ定理ヲ用ヒテ $x:y:z$ ヲ求メ，之ヲ利用シテ解クト簡單ニナル場合ガ多イ。

定理 29. $\begin{cases} ax+by+cz=0 & ① \\ a'x+b'y+c'z=0 & ② \end{cases}$ ナルトキハ

$x:y:z=(bc'-b'c):(ca'-c'a):(ab'-a'b)$ ナリ

但シ $(bc'-b'c)(ca'-c'a)(ab'-a'b)\neq 0$ トス。

證明　①$\times b'-$②$\times b$ ヨリ　$(ab'-a'b)x=(bc'-b'c)z$

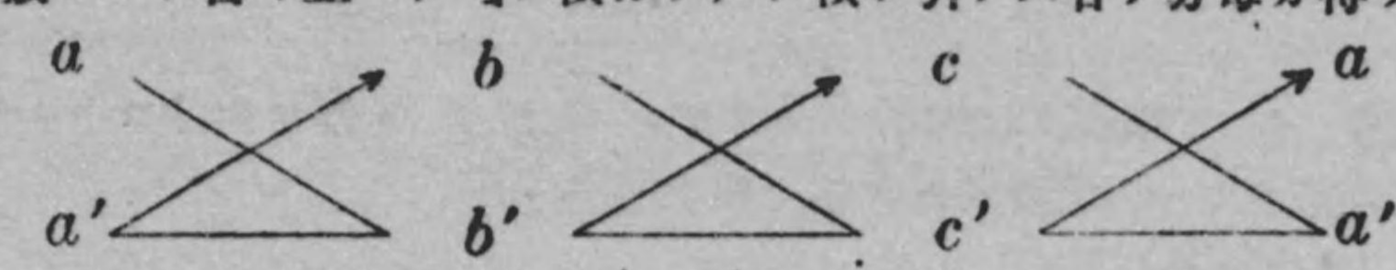
$(bc'-b'c)(ab'-a'b)\neq 0$　$\therefore\ \dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$ ……①

②$\times a-$①$\times a'$ ヨリ　$(ab'-a'b)y=(ca'-c'a)z$

$(ab'-a'b)(ca'-c'a)\neq 0$　$\therefore\ \dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$ ……②

①，②ヨリ　$\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$

注　コノ定理ヲ Pule of Cross Multiplication ト云ヒ，次ノ形式ニ係數ノミヲ書キ並ベテ↘ノ積カラ↗ノ積ヲ引ケバ各ノ分母ガ得ラレル



z ノ分母　　x ノ分母　　y ノ分母

（イ）一般法ニヨル例

例 178. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3 \cdots\cdots ① \\ x-by+b^2z=b^3 \cdots\cdots ② \\ x-cy+c^2z=c^3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

方針　先ヅ係數ノナルベク簡單ナモノ即チコノ問題デハ x ヲ消去シテ y,z ノミヲ含ム方程式二ツヲ導ク。

【解】 ②$-$①ヨリ　$(a-b)y-(a^2-b^2)z=-(a^3-b^3)$

$a\neq b$ ノトキ　$y-(a+b)z=-(a^2+ab+b^2)$ ……④

③$-$②ヨリ　$(b-c)y-(b^2-c^2)z=-(b^3-c^3)$

$b\neq c$ ノトキ　$y-(b+c)z=-(b^2+bc+c^2)$ ……⑤

④$-$⑤ヨリ　$(c-a)z=c^2-a^2+b(c-a)$

$c\neq a$ ノトキ　$z=a+b+c$ ……⑥

⑥ヲ⑤ニ代入シテ　$y-(b+c)(a+b+c)=-(b^2+bc+c^2)$

$\therefore\ y=bc+ca+ab$ ……⑦

⑥⑦ヲ①ニ代入シテ　$x-a(ab+bc+ca)+a^2(a+b+c)=a^3$

$\therefore\ x=abc$

吟味　$a=b$ 又ハ $b=c$ 又ハ $c=a$ ナルトキハ①，②，③ノ何レカ二ツガ同一ノ方程式トナルカラ，根ハ無數ニ(幾組モ)アル。即チ不定

答 $\begin{cases} a,b,c\ \text{ノ中何レノ二ツモ等シクナイトキ} \\ \quad x=abc,\ y=bc+ca+ab,\ z=abc \\ a,b,c\ \text{ノ中少クトモ何レカ二ツガ相等シキトキハ　不定} \end{cases}$

例 179. $27x+6y=89.1$ ············①
$6x+15y+z=70.9$ ········②
$y+54z=106.2$ ············③
}ヲ解ケ。

着眼 y ノ係數ガ比較的小サイガ，③ガ x ヲ含マナイコトニ着眼シ①ト②カラ x ヲ消去シテ③ト組合セル。

【解】 ②×9−①×2 ヨリ

$$123y+9z=459.9 \cdots\cdots④$$

④×6−③ヨリ

$$\begin{cases} 738y+54z=2759.4 \cdots\cdots ④\times 6 \\ \quad y+54z=106.2 \cdots\cdots ③ \end{cases} \quad (-$$

$$737y=2653.2$$

$$\therefore \ y=3.6 \cdots\cdots⑤$$

⑤ヲ①ニ代入シテ $27x=89.1-21.6=67.5$

$$\therefore x=2.5 \cdots\cdots⑥$$

⑤ヲ③ニ代入 $54z=106.2-3.6=102.6$

$$\therefore \ z=1.9$$

答 $x=2.5$, $y=3.6$, $z=1.9$

指導補[illegible] ①ガ z ヲ含マナイコトニ着眼シ，②ト③カラ z ヲ消去シテ①ト組合セテモヨイ。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲトケ。

$$1.1x-0.7y-1.3z=0.01$$
$$1.7x-1.3y+z=-0.05$$
$$1.6x+y=0.62$$

（陸 士）

答 $x=0.2$, $y=0.3$, $z=0$

（ロ） 常數項ガ 0 ナル一次方程式ガニツアル例

例 180. $x+y+z=0$ ··························①
$(a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0$ ········②
$abx+acy+bcz=1$ ························③
}ヲ解ケ。
但シ a, b, c ハ相異ナル常數トス

着眼 ①②ハ常數項ガ 0 ナル三元一次方程式ナル事ニ着眼シ，コノ二式ヨリ $x:y:z$ ヲ求メテ之ヲ利用スル。

【解】 ①ト②ヨリ Rule of Cross Multiplication ニヨツテ x, y, z ノ比ヲ求メルト

$$\frac{x}{(b+c)-(a+c)}=\frac{y}{(a+b)-(b+c)}=\frac{z}{(a+c)-(a+b)}$$

$$\therefore \ \frac{x}{b-a}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{c-b}$$

STOP コノマヽ $=k$ ト置イテモヨイガ，分母ヲ輪環ノ順ニ整頓シテ

GO
$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{b-c}=k \text{ ト置ケバ}$$

$$x=(a-b)k, \ y=(c-a)k, \ z=(b-c)k \cdots\cdots④$$

STOP k ノ値サヘ決定スレバ④ヨリ x, y, z ノ値ガ同時ニ定マルト考ヘテ k ノ値ヲ求ムル方針デ進ム。

GO ④ヲ③ニ代入スルト

$$ab(a-b)k+ca(c-a)k+bc(b-c)k=1$$

$$\therefore \ -(b-c)(c-a)(a-b)k=1$$

a, b, c ハ不等ナル故 $(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$

$$\therefore \ k=-\frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)} \cdots\cdots⑤$$

⑤ヲ④ニ代入シテ

$$x=-\frac{1}{(b-c)(c-a)}, \ y=-\frac{1}{(a-b)(b-c)}, \ z=-\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$ 答

【試練問題】 $x+y+z=0$, $ax+by+cz=0$, $a^2x+b^2y+c^2z=abc$ ナルトキ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ ノ値ヲ求メヨ。但シ a, b, c ハ何レモ零ナラズ，且相異ナル常數トス。

答 1

例 181. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ ax+by+cz=bc+ca+ab \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

方針　一見シテハ何レノ常數項モ0デハナイカラ一般法ニヨルベキ問題ノ様デアルガ，③ヲ移項シテ

$(ax-ab)+(by-bc)+(cz-ca)=0$　ト組合セ

$a(x-b)+b(y-c)+c(z-a)=0$　ト變形シテ　$(x-b)$，$(y-c)$ $(z-a)$ ヲ束ニシテ取扱フト①ト③トガ共ニ常數項ガ0ナル形ニナル事ニ着眼シテ解ク。

【解】　③ヨリ　$a(x-b)+b(y-c)+c(z-a)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③'$

①ヨリ　$(x-b)+(y-c)+(z-a)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①'$

③′ト①′ヨリ $(x-b)$，$(y-c)$，$(z-a)$ ノ比ヲ求メルト

$$\frac{x-b}{b-c}=\frac{y-c}{c-a}=\frac{z-c}{a-b}$$

コレラノ相等シキ分數式ノ値ヲkト置ケバ

$x-b=(b-c)k$，$y-c=(c-a)k$，$z-a=(a-b)k$

$\therefore$　$x=b+(b-c)k$，$y=c+(c-a)k$，$z=a+(a-b)k \cdots\cdots ④$

STOP　コレヨリ k ヲ決定スレバヨイト考ヘル方針ハ前問ト同様デアル。

GO　④ヲ②ニ代入シテ

$$\frac{b+(b-c)k}{a}+\frac{c+(c-a)k}{b}+\frac{a+(a-b)k}{c}=3$$

$abc \neq 0$（與ヘラレタ方程式ノ分母ノ既知數）

$\therefore$　$bc\{b+(b-c)k\}+ca\{c+(c-a)k\}+ab\{a+(a-b)k\}=3abc$

$\therefore$　$\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}k=3abc-a^2b-b^2c-c^2a$

$\therefore$　$-(b-c)(c-a)(a-b)k=3abc-a^2b-b^2c-c^2a$

$(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$ トシテ　$k=\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a-3abc}{(b-c)(c-a)(a-b)} \cdots\cdots ⑤$

⑤ヲ④ニ代入シテ　$x=b+\dfrac{(b-c)(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$

$$=\frac{b(c-a)(a-b)+a^2b+b^2c+c^2a-3abc}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{abc-a^2b-b^2c+ab^2+a^2b+b^2c+c^2a-3abc}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{a(b^2-2bc+c^2)}{(c-a)(a-b)}=\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}$$

同様ニシテ　$y=\dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$，　$z=\dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$

答　$x=\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}$，$y=\dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$，$z=\dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$

但シ　$(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$　トス。

指導總括　更ニ $(b-c)(c-a)(a-b)=0$ ノ場合ヲ吟味スルト $a=b \neq c$，又ハ $b=c \neq a$，又ハ $c=a \neq b$ ナルトキハ不能，$a=b=c$ ナルトキハ不定トナルノデアルガ，コノ程度ノ問題デハ $(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$ ノ場合ノミヲ示セバ十分デアラウ。

【試練問題】

$$\left.\begin{aligned} &x+y+z=a+b+c, \\ &bx+cy+az=a^2+b^2+c^2, \\ &cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2 \end{aligned}\right\}\text{ヲ解ケ。}$$

答　$x=b+c-a$，$y=c+a-b$，$z=a+b-c$

但シ　$(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$　トス。

3. 條件附聯立一次方程式ノ解法

（イ）根ニ條件ガアル場合

例 182. 次ノ聯立方程式ニ適合スル y ノ値ガ x ノ値ノ3倍トナル爲ニハ m ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。又其ノ x 及ビ y ノ値ハ如何。

$$(5m+11)x-(m+4)y+12=0$$
$$(m+15)x+(2m-1)y-20=0$$

方針　1. x，y ノ値ヲ求メタ後 $y=3x$ ナル條件ニ代入シテ m ヲ求メル。

【解】　$(5m+11)x-(m+4)y=-12$ ………①

$(m+15)x+(2m-1)y=20$ ………②

①×$(2m-1)$+②×$(m+4)$ ヨリ $(11m^2+36m+49)x=92-4m$

$11m^2+36m+49\neq0$ トシテ　$x=\dfrac{92-4m}{11m^2+36m+49}$ ……③

②×$(5m+11)$−①×$(m+15)$ ヨリ　$y=\dfrac{112m+400}{11m^2+36m+49}$ ……④

y ノ値ガ x ノ値ノ 3 倍ナルタメニハ

$$\frac{112m+400}{11m^2+36m+49}=3\left(\frac{92-4m}{11m^2+35m+49}\right)$$

分母$\neq0$ トシテ　$112m+400=276-12m$

$\therefore\ 124m=-124\qquad\therefore\ m=-1,$

$m=-1$ ハ③,④ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ適スル。

③＝代入シテ　$x=\dfrac{92+4}{11-36+49}=\dfrac{96}{24}=4$

④＝代入シテ　$y=\dfrac{-112+400}{11-36+49}=\dfrac{288}{24}=14$

答　$m=-1,\ x=4,\ y=14$

方針　2. y ノ値ガ x ノ値ノ 3 倍ナルタメニハ①,②ノ外＝更＝ $y=3x$ ナル方程式ガ成立スレバヨイト考ヘテ

【解】　$(5m+11)x-(m+4)y=-12$ ………①

$(m+15)x+(2m-1)y=20$ ………②

y ガ x ノ 3 倍ナルタメニハ　$y=3x$ ………③

ガ同時ニ成立スル如キ x, y 及ビ m ノ値ヲ決定スレバヨイ。

STOP　コヽデ①, ②カラ x, y ノ値ヲ求メテ③＝代入スルト前解ト全ク同ジ解法＝ナルカラ別解ヲ示ス。

GO　③ヲ①＝代入スルト $(5m+11)x-(3m+12)x=-12$

$\therefore\ (2m-1)x=-12\qquad\therefore\ x=\dfrac{-12}{2m-1}$ ……④

③ヲ②＝代入シテ　$(7m+12)x=20\qquad\therefore\ x=\dfrac{20}{7m+12}$ ……⑤

④⑤ヲ等置シテ　$\dfrac{-12}{2m-1}=\dfrac{20}{7m+12}\qquad\therefore\ \dfrac{-3}{2m-1}=\dfrac{5}{7m+12}$

$(2m-1)(7m+12)\neq0$ トシテ分母ヲ拂フト $-21m-36=10m-5$

$\therefore\ 31m=-31\quad\therefore\ m=-1$

$m=-1$ ハ④⑤ノ分母ヲ0ナラシメナイカラ適スル。

$m=-1$ ヲ④＝代入シテ $x=\dfrac{-12}{-3}=4$, 之ヲ③＝代入シテ $y=12$

答　$m=-1,\ x=4,\ y=12$

【試練問題】 x, y ヲ未知數トスル次ノ聯立方程式

$2mx+8y=3m+1,\ 3x-(m-8)y=m-3$

＝於テ x, y ガ相等シクナル如キ m ノ値如何。　（福　高）

答　$m=7$ 又ハ -1

（ロ）未知數ノ個數ヨリ方程式ノ個數ノ方ガ多イトキ

例 183. x, y ＝關スル三ツノ方程式

$(k-1)x+2y=2k-1,\ 2x+4y=3k,\ (3k-2)x-2y=k-2$

ガ x, y ノ値ノ同ジ組＝對シテ成リ立ツヤウ＝ k ノ値ヲ定メヨ。又ソノトキノ x, y ノ値ヲ求メヨ。

方針　「x, y ノ値ノ同ジ組」＝對シテ三ツノ方程式ガ同時＝成立スルタメニハ何レカ二ツノ方程式ヲ同時＝滿足スル x, y ノ値ガ, 第三ノ方程式ヲモ滿足スレバヨイト考ヘテ,

【解】
$$\begin{cases}(k-1)x+2y=2k-1 &\cdots\cdots ①\\ 2x+4y=3k &\cdots\cdots ②\\ (3k-2)x-2y=k-2 &\cdots\cdots ③\end{cases}$$

STOP　y ノ係數＝着眼シ, 先ヅ①ト③トヲ聯立方程式トシテ解ク。

GO　①＋③ヨリ　$(4k-3)x=3k-3$

$4k-3\neq0$ トシテ　$x=\dfrac{3k-3}{4k-3}$ ……④

④ヲ①＝代入シテ $2y=2k-1-\dfrac{(k-1)(3k-3)}{(4k-3)}=\dfrac{5k^2-4k}{4k-3}$

$\therefore\ y=\dfrac{5k^2-4k}{2(4k-3)}$ ……⑤

④, ⑤ハ①ト③トヲ同時ニ滿足スル x, y ノ値デアルカラ，①, ②, ③ガ x, y ノ値ノ同ジ組ニ對シテ成リ立ツタメニハ④, ⑤ガ②ヲモ滿足スル事ガ必要デ且十分デアル。依テ ④⑤ヲ②ニ代入シテ

$$\frac{6k-6}{4k-3}+\frac{10k^2-8k}{4k-3}=3k \cdots\cdots⑥$$

$4k-3 \neq 0$ トシテ分母ヲ拂ヒ　$10k^2-2k-6=12k^2-9k$

$$\therefore\ 2k^2-7k+6=0$$

即チ $(2k-3)(k-3)=0$　$\therefore\ k=\frac{3}{2}$ 又ハ 2

コレラノ値ハ④, ⑤, ⑥ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ適スル。

$k=\frac{3}{2}$ ノトキ　④ヨリ $x=\frac{1}{2}$　⑤ヨリ $y=\frac{7}{8}$

$k=2$ ノトキ　④ヨリ $x=\frac{3}{5}$　⑤ヨリ $y=\frac{6}{5}$

答 $k=\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{7}{8}$ 又ハ $k=2$, $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{6}{5}$

【別法】 k ヲモ未知數ト考ヘルト方程式三ツニ對シテ未知數モ三ツニナルカラ①, ②, ③ヲ x, y, k ニ關スル三元聯立方程式ト考ヘ前例ノ別解ニ倣ツテ解ケバヨイ。（各自試ミヨ）

指導綱括 「x, y ノ値ノ同ジ組」ヲ $x=y$ ト誤解シ，$x=y$ ヲ代入シテ解クモノヤ，k ノ値ガ⑥ノ分母ヲ 0 ナラシメザルコトヲ述ベナイモノガ多イ。

【試練問題】 次ノ三ツノ方程式ガ x, y ノ同ジ値ニヨツテ滿足セラルヽトキハ a ハ如何ナル値ヲ有スルカ。

$ax+y=1,\ x+5ay=2,\ 2x+6y=3$

答 $\frac{7}{15}$ 又ハ 1

例 184. 二組ノ聯立方程式

$$\text{I}\begin{cases} ax+by+cz=3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6 \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=9 \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} ax-by+cz=1 \\ ax+by-cz=1 \\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0 \end{cases}$$

ガ同一ノ根ヲ有スルトキ，ソノ根及ビ a, b, c ノ値如何。

I, II ヲ夫々別々ニ解イテ，各々ヨリ得タル x, y, z ノ値ヲ夫々等置シテ a, b, c ノ値ヲ求ムレバヨイ筈デアルガ，I, II ヲ別々ニ解ク事ガ容易デナイ。（分數方程式ト文字方程式トノ聯立デアルカラ）ソコデ I, II ガ同一ノ根ヲ有スルトハ同ジ x, y, z ノ値ニ對シテ與ヘラレタ六ツノ方程式ガ同時ニ成立ツコトデアルコトニ氣付クト次ノ如ク解ケル。

【解】

$$\text{I}\begin{cases} ax+by+cz=3 \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6 \cdots ② \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=9 \cdots ③ \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} ax-by+cz=1 \cdots\cdots ④ \\ ax+by-cz=1 \cdots\cdots ⑤ \\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0 \cdots ⑥ \end{cases}$$

I, II ガ同一ノ根ヲ有スルトキハ，同ジ x, y, z ノ値ニ對シテ，コレラノ六ツノ方程式ガ同時ニ成立スル筈デアル。

今 $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$, $\frac{1}{z}=Z$ ト置クト

②ヨリ　$X+Y+Z=6 \cdots\cdots ②'$

③ヨリ　$2X-Y-3Z=9 \cdots\cdots ③'$

⑥ヨリ　$5X-2Y-3Z=0 \cdots\cdots ⑥'$

②′×3+③′ヨリ　$5X+2Y=27 \cdots\cdots ⑦$

⑥′−③′ヨリ　$3X-Y=-9 \cdots\cdots ⑧$

⑦+⑧×2 ヨリ　$11X=9$　$\therefore\ X=\frac{9}{11}$

之ヲ⑧ニ代入シテ　$Y=\frac{126}{11}$　①ニ代入シテ　$Z=-\frac{69}{11}$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{9}{11},\ \frac{1}{y}=\frac{126}{11},\ \frac{1}{z}=-\frac{69}{11} \cdots\cdots ⑨$$

$$\therefore\ x=\frac{11}{9},\ y=\frac{11}{126},\ z=-\frac{11}{69} \cdots\cdots ⑩$$

コレラノ値ハ何レモ②, ③, ⑥ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ適スル。

STOP 次ニ⑩ヲ①, ④, ⑤ニ代入スルト a, b, c ノミヲ未知數トスル方程式ガ三ツ得ラレルカラ，之ヲ聯立方程式トシテ解クト a, b, c ノ値ガ得ラレルガ ax, by, cz ヲ束ニシテ取扱フ方ガ樂デアル。

GO 次ニ ①−④ヨリ $2by=2$　$\therefore\ b=\frac{1}{y}=\frac{125}{11}$

④+⑤ヨリ $2ax=2$　$\therefore\ a=\frac{1}{x}=\frac{9}{11}$

①－⑤ヨリ　$2cz=2$　$\therefore\ c=\dfrac{1}{z}=-\dfrac{69}{11}$

答　$x=\dfrac{11}{9}$，$y=\dfrac{-11}{126}$，$z=-\dfrac{11}{69}$；$a=\dfrac{9}{11}$，$b=\dfrac{126}{11}$，$c=-\dfrac{69}{11}$

【試練問題】　x,y ＝關スル次ノ二組ノ聯立方程式ガ同ジ解ヲモツト云フ。a,b ノ値如何。

(1) $\begin{cases}\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1,\\ 5ax-7by=9,\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dfrac{10}{x}-\dfrac{7}{y}=\dfrac{8}{3},\\ ax+by=7,\end{cases}$　（靜　高）

答　$a=\dfrac{29}{12}$，$b=\dfrac{13}{18}$

第二十五章　聯立二元二次方程式及ビ，二元高次方程式ノ解法

1. 聯立二元二次方程式

二元二次方程式ノ一般ノ形ハ　$\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}_{\text{二次ノ項}}+\underbrace{lx+my}_{\text{一次ノ項}}+\underbrace{p}_{\text{常數項}}=0$

デアルカラ聯立二元二次方程式ノ一般ノ形ハコノ様ナ形ノ式ガ二ツ與ヘラレ，之ヲ同時＝滿足スル x,y ノ値ヲ求メルコト＝ナル。所ガ中等程度デハコノ様ナ聯立方程式ノ一般解法（如何ナル場合＝モ適用セラレル解法）ハヤラナイノデ，**特殊ナ場合**（例ヘバ常數項ガナイトカ，係數ガ丁度因數分解出來ル様＝ナツテキルトカ）**ノミヲ取扱フ**ノデアルカラ，夫々ノ問題＝應ジテ其**特徴ヲ觀察シテ解法ヲ工夫**シナケレバナラヌ。諸君ノ解キ得ル主ナル形ハ

（イ）與ヘラレタ方程式ノ**何レカ一ツガ一次方程式**デアルカ，

（ロ）與ヘラレタ方程式ノ**何レカ一ツガ「二ツノ一次因數ノ積＝0」**ナル形＝ナルカ，

（ハ）與ヘラレタ二ツノ方程式ヲ**邊々加ヘ**又ハ**邊々減ジテ一次方程式**又ハ一邊ガ**一次因數＝分解サレル方程式**ヲ導キ得ルカ，

（ニ）x,y **＝關シテ對稱**（コノトキハ $x+y$，xy，$x-y$ 等ヲ束＝シテ取扱フ）デアルカ，

等デ，ソノ何レノ方針＝依ル場合＝モ**一元方程式ヲ利用スル**トイフ點ガ共通デアルカラ，聯立二次方程式ヲ解ク＝ハ常＝「**一次方程式ガ欲シイ**」トイフ事ヲ念頭＝置イテ考ヘル事ガ大切デアル。

尙二元二次ノ同次方程式 $ax^2+bxy+cy^2=0$〔一次ノ項モ常數項モナイ〕ハ必ズ $(lx+my)(l'x+m'y)=0$ ナル形＝變形出來テ**一次方程式ヲ導キ得ル事**ヲ記憶シテ置イテ貰イタイ。

(1)　一ツガ一次方程式ノ場合

例 185.　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$，$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=a+b$　ヲ解ケ。

方針　第一式ガ x,y ＝關シテ一次デアルカラ x ヲ y（又ハ y ヲ x）デ表ハシテ第二式＝代入スル。

【解】　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ ……①　$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=a+b$ ……②

①ヨリ　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{2b-y}{b}$　$\therefore\ x=\dfrac{a(2b-y)}{b}$ …………③

③ヲ②＝代入スルト　$\dfrac{a(2b-y)^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b}=a+b$

$b\neq0$（分母ノ既知數）ナル故分母ヲ拂ツテ整頓スレバ

$$(a+b)y^2-4aby+(3a-b)b^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

STOP　見懸上ハ二次方程式デアルガ文字係數デアルカラ　x^2　ノ係數 $a+b$ ガ 0 ナル場合モアルト考ヘテ

GO（イ）$a+b\neq0$ ノトキ

④ヨリ　$\{(a+b)y-(3a-b)b\}\{y-b\}=0$　$\begin{array}{ccc}(a+b) & \times & -(3a-b)b\\ 1 & & -b\end{array}$

$\therefore\ y=\dfrac{(3a-b)b}{a+b}$　又ハ　$y=b$

③＝代入シテ $x=\dfrac{(3b-a)a}{a+b}$，　$x=a$

(ロ)　$a+b=0$ ノトキ　$a=-b$ トナルカラ

④ハ　$4b^2y-4b^3=0$　$\therefore$ $y=b$　③ヨリ　$x=a$

答 $\begin{cases} a+b\neq0 \text{ ノトキ } x=a,\ y=b;\ x=\dfrac{(3b-a)a}{a+b},\ y=\dfrac{(3a-b)b}{a+b} \\ a+b=0 \text{ ノトキ } x=a,\ y=b \text{ ノミ} \end{cases}$

【別法】 $\dfrac{x}{a}=\mathrm{X}$,　$\dfrac{y}{b}=\mathrm{Y}$ ト置ケバ

①ハ　$\mathrm{X}+\mathrm{Y}=2$, ……①′,　②ハ　$a\mathrm{X}^2+b\mathrm{Y}^2=0$……②′

①′ヨリ　$\mathrm{Y}=2-\mathrm{X}$　之ヲ②′ニ代入シテ解クト少シ計算ガ樂ニナル。

指導總括　一次ト二次トノ聯立方程式ハ一次ノ方カラ一ツノ未知數ヲ表ハス式ヲ作ツテ二次ノ方ニ代入スルノガ原則デアル。

【試練問題】 $x^2+y^2=a^2+b^2$,　$x-y=a-b$　ヲ解ケ。

答　$x=a$,　$y=b$;　$x=-b$,　$y=-a$

(2)　少クトモ一方ガ一次因數ニ分解セラレル場合

【定理】 聯立方程式 $\begin{cases}\mathrm{A}=0\\ \mathrm{B}=0\end{cases}$ ニ於テ A ガ二因數ニ分解セラレテ $\mathrm{A}=\mathrm{P}.\mathrm{Q}$ トナルトキハ二組ノ聯立方程式 $\begin{cases}\mathrm{P}=0\\ \mathrm{B}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\mathrm{Q}=0\\ \mathrm{B}=0\end{cases}$ ト原方程式トハ同値デアル。

例 186. (A) x, y ガ有理數デ，聯立方程式

$$\begin{cases}(x-y)^2-9=(x-y-3)(x+2y)\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ x^2-4y^2=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

ニ適合スルトキ x^2+xy+6 ノ値ヲ求メヨ。

着眼　①ノ左邊ガ因數ニ分解サレテ右邊ト共通因數ガ得ラレルコトニ着眼シ，①ヨリ一次方程式ヲ導イテ解ク。

【解】 ①ヨリ　$(x-y-3)(x-y+3)=(x-y-3)(x+2y)$……①′

移項シテ　$(x-y-3)(x-y+3-x-2y)=0$

$\therefore$　$x=y+3$　又ハ　$y=1$……………………①″

STOP　①″ノ各ヲ②ト組合セルト①,②ト同値デアルト考ヘテ

GO　(イ)　$x=y+3$……③ ナルトキ

②ニ代入スレバ　$y^2+6y+9-4y^2=9$

$\therefore$　$3y^2-6y=0$　$\therefore$　$y=0$ 又ハ $y=2$

i)　$y=0$ ナルトキ　③ヨリ　$x=3$　コノトキ　$x^2+xy+6=15$

ii)　$y=2$ ナルトキ　③ヨリ　$x=5$　コノトキ　$x^2+xy+6=41$

(ロ)　$y=1$ ナルトキハ

②ニ代入スレバ　$x^2=13$　$\therefore$ $x=\pm\sqrt{13}$

題意ニヨリ x ハ有理數ナルベキ故之ハ適セズ　答　15 又ハ 41

指導總括　①′ノ兩邊ヲ $x-y-3$ デ割リ $y=1$ ノミヲ考ヘテ $x=y+3$ ナル場合ヲ忘レル者ガアル。

【試練問題】 $(x+y+1)^2=(x-y+5)^2$,　$(x+y+1)^2=x^2+y^2$ ヲ解ケ。　(セブランス　醫大豫)

答　$x=-3$,　$y=-\dfrac{5}{4}$;　$x=-\dfrac{5}{6}$,　$y=2$

例 186. (B) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x \qquad ①$$

$$x^2-xy=\frac{18}{5} \qquad ②$$

方針　②ハ簡單デハアルガ，明ラカニ一次ノ有理因數ニハ分解出來ヌ。ソコデ①ガ一次因數ニ分解出來ナイカ？ト考ヘテ移項シテ見ル。

【解】 ①ヨリ　$(4x^2-20xy+25y^2)-(2x-5y)-6=0$

$\therefore$　$(2x-5y)^2-(2x-5y)-6=0$

$\therefore$　$(2x-5y-3)(2x-5y+2)=0$

$\therefore$　$y=\dfrac{2x-3}{5}$……③ 又ハ $y=\dfrac{2x+2}{5}$……④

③ヲ②ニ代入シテ

$x^2-\dfrac{2x^2-3x}{5}=\dfrac{18}{5}$

$\therefore$　$3x^2+3x-18=0$

$\therefore$　$x^2+x-6=0$

$\therefore$　$x=2$ 又ハ -3

④ヲ②ニ代入シテ

$x^2-\dfrac{2x^2+2x}{5}=\dfrac{18}{5}$

$\therefore$ $3x^2-2x-18=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{55}}{3}$

$x=2$ ノトキ ③ヨリ $y=\frac{1}{5}$ ｜ ④ヨリ $y=\frac{1}{5}\left\{\frac{2\pm2\sqrt{55}}{3}+2\right\}=\frac{8\pm2\sqrt{55}}{15}$

$x=-3$ ノトキ $y=-\frac{9}{5}$

答 $\begin{cases}x=2\\ y=\frac{1}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\ y=-\frac{9}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1\pm\sqrt{55}}{3}\\ y=\frac{8\pm2\sqrt{55}}{15}\end{cases}$ 〔複號同順〕

指導綱括 ①ヲ移項スレバ左邊ガ一次因數ニ分解サレル式トナル事ニ氣付カヌ者ガ多イ。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x^2+y^2=41(x-y)^2,\ x^2-y^2=9$

答 $\begin{cases}x=\pm5\\ y=\pm4\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm4i\\ y=\pm5i\end{cases}$ (複號同順)

例 187. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x^2-3xy+2y^2+x-y=0$

$x^3-y^3+(x-y)(x-1)(y-1)=0$

着眼 第一式ハ二次，第二式ハ三次方程式デアルカラ，低次ナ方ノ第一方程式カラ二ツノ一次方程式ガ導キ得ナイカト考ヘテ因數分解ヲ試ミル。

【解】

$x^2-3xy+2y^2+x-y=0 \cdots\cdots ①$

$x^3-y^3+(x-y)(x-1)(y-1)=0 \cdots\cdots ②$

①ヨリ　$(x-y)(x-2y)+(x-y)=0$

$\therefore\ x-y=0$ 又ハ $x-2y+1=0 \cdots\cdots ①'$

STOP コノ各ヲ②ニ代入シ，前問ト同様ノ方法デ解ケルガ，コノ問題ハ更ニ②ノ左邊ガ容易ニ因數ニ分解サレル事ニ着眼シテ

GO 又②ヨリ　$(x-y)\{(x^2+xy+y^2)+(x-1)(y-1)\}=0$

$\therefore\ (x-y)\{x^2+2xy+y^2-(x+y)+1\}=0$

$\therefore\ x-y=0$ 又ハ $(x+y)^2-(x+y)+1=0 \cdots ②'$

①′ト②′ヨリ原方程式ハ，次ノ四組ノ聯立方程式ト同値デアル。

㋑ $\begin{cases}x-y=0\\ x-y=0\end{cases}$　　㋩ $\begin{cases}x-2y+1=0\\ x-y=0\end{cases}$

㋺ $\begin{cases}x-y=0\\ (x+y)^2-(x+y)+1=0\end{cases}$　　㋥ $\begin{cases}x-2y+1=0\\ (x+y)^2-(x+y)+1=0\end{cases}$

㋑ノ場合ハ $x=y$ ナル任意ノ値ニ對シテ兩式ハ同時ニ成立スル。

㋺ノ場合ハ $x=y$ ヲ第二式ニ代入シテ $4x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{4}$　$\therefore\ x=y=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$ (之ハ㋑ニ含マレル)

㋩ノ場合ハ $x=y$ ヲ第一式ニ代入シテ $x-2x+1=0$　$\therefore\ x=1$

$\therefore\ x=y=1$ (之モ①ニ含マレル)

㋥ノ場合ハ $x=2y-1 \cdots\cdots ③$ ヲ第二式ニ代入シテ

$(3y-1)^2-(3y-1)+1=0$　$\therefore\ 9y^2-9y+3=0$

$\therefore\ 3y^2-3y+1=0$　$\therefore\ y=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{6}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{6}$

③ニ代入シテ　$x=\frac{6\pm2i\sqrt{3}}{6}-1=\frac{\pm i\sqrt{3}}{3}$

答 $x=y$ ナル任意ノ數 (實數デモ虛數デモヨイ)

又ハ $x=\frac{\pm\sqrt{3}\,i}{3},\ y=\frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{6}$ (複號同順)

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x^2-xy-2y^2+x+4y-2=0$

$2x^2-xy-y^2-x-5y-6=0$　(東　外)

答 $\begin{cases}x=-\frac{8}{5}\\ y=\frac{1}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4\\ y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$

(3) 邊々加減シテ一次方程式ヲ導キ得ル場合

與ヘラレタ方程式ノ何レモガ一次方程式デモナク，又一次因數ニモ分解サレヌ場合ニハ二式ヲ邊々加ヘ又ハ減ジテ一次方程式カ因數分解可能ノ式ガ導キ出セヌカト工夫シテ見ル。

(イ) 一次方程式ヲ得ル例

例 188. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x^2-6xy-7x+4y-4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2xy-x^2+3x-y+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

着眼 ①,②ニ於ケル二次ノ項ノ係數ガ比例ヲナスコトニ着眼シテ①+②×3 ヲ作ルト二次ノ項ガ消去セラレテ一次方程式ヲ得ル。

【解】 ①+②×3 ヨリ $2x+y-1=0$

$\therefore\ y=1-2x \cdots\cdots\cdots\cdots ③$

STOP ③ヲ①又ハ②ノ何レト組合セテモ原方程式ト同値デアルガ，係數ノ小サイ②ト組合セル。

GO ③ヲ②ニ代入スルト $2x(1-2x)-x^2+3x-(1-2x)+1=0$

整頓スルト $5x^2-7x=0$ $\therefore\ x=0$ 又ハ $x=\dfrac{7}{5}$

$x=0$ ノトキ ③ヨリ $y=1$； $x=\dfrac{7}{5}$ ノトキ $y=-\dfrac{9}{5}$

答 $x=0,\ y=1$；$x=\dfrac{7}{5},\ y=-\dfrac{9}{5}$

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$2xy-13x-8y+49=0$

$-9x+3xy-19y+77=0$ （大 藥）

答 $x=3,\ y=5$； $x=5,\ y=8$

(ロ) 因數分解可能ノ式ヲ導キ出ス例

例 189. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(A) $\begin{cases} x^2+3xy-x+3=0 & ① \\ xy+4y^2-2y-5=0 & ② \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x^2-xy=3x+7 \\ xy-y^2=3y+3 \end{cases}$

(A) 着眼 ①,②ニ於ケル二次ノ項ノ和ガ $(x+2y)^2$，一次ノ項ノ和ガ $-(x+2y)$ ナル事ニ着眼シテ①+②ヲ作ル。

【解】 ①+②ヨリ $(x+2y)^2-(x+2y)-2=0$

$\therefore\ (x+2y-2)(x+2y+1)=0$

$\therefore\ x=2-2y$ 又ハ $x=-(2y+1)$

STOP コノ一次式ヲ①,②ノ何レニ代入スルガ簡單カト考ヘテ，①ハ x ニ就テ二次，②ハ x ニ就テ一次デアル事ニ着眼シテ②ニ代入スル。

GO (イ) $x=2-2y \cdots\cdots ③$ ノトキ

②ニ代入 $2y-2y^2+4y^2-2y-5=0$

$\therefore\ 2y^2=5$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

③ニ代入シテ $x=2\mp\sqrt{10}$

(ロ) $x=-(2y+1) \cdots ④$ ノトキ

②ニ代入スルト

$2y^2-3y-5=0$

$(2y-5)(y+1)=0$

$\therefore\ y=\dfrac{5}{2}$ 又ハ $y=-1$

④ヨリ $x=-6,\quad x=1$

答 $\begin{cases} x=2-\sqrt{10} \\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2+\sqrt{10} \\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

(B) $x^2-xy=3x+7 \cdots\cdots ①$ $xy-y^2=3y+3 \cdots\cdots ②$

着眼 ①－②ヲ作ルト二次ノ項ガ $x^2-2xy+y^2$，一次ノ項ガ $3(x-y)$ トナルコトニ着眼スル。

【解】 ①－②ヨリ $(x-y)^2=3(x-y)+4$

$\therefore\ (x-y)^2-3(x-y)-4=0$

$\therefore\ (x-y-4)(x-y+1)=0$

$\therefore\ x=y+4 \cdots\cdots ③$ 又ハ $x=y-1 \cdots\cdots ④$

③ヲ②ニ代入シテ

$y^2+4y-y^2=3y+3$

$\therefore\ y=3$

③ヨリ $x=7$

④ヲ②ニ代入シテ

$y^2-y-y^2=3y+3$

$\therefore\ y=-\dfrac{3}{4}$

④ヨリ $x=-\dfrac{7}{4}$

答 $x=7,\ y=3$；$x=-\dfrac{7}{4},\ y=-\dfrac{3}{4}$

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(i) $x^2+xy=8x+3,\ y^2+xy=8y+6$

(ii) $x^2+x+y^2=3$ $2xy+x=-1$ （日大理）

答 (i)　$x=3,\ y=6;\ x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{2}{3}$

(ii)　$x=1,\ y=-1;\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4},\ y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{3}{2},$　　　(複號同順)

(ハ) 二次ノ同次方程式ヲ導ク例

例 190. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$5x^2-xy+3y^2=17\cdots\cdots\cdots\cdots①$$
$$3x^2-xy-3y^2=3\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

着眼　**未知項ガ悉ク二次**デアルカラ**常數項ヲ消去**スルト**二次ノ同次方程式**ガ得ラレル事ニ着眼シテ解ク。

【解】 ②×17−①×3 ヨリ (常數項ヲ消去スル)

$$36x^2-14xy-60y^2=0$$
$$\therefore\quad 18x^2-7xy-30y^2=0$$
$$\therefore\quad (2x-3y)(9x+10y)=0$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & -3 & \to -27 \\ 9 & & +10 & \to +20 \\ \hline & & & -7 \end{array}$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2}y\cdots\cdots③\qquad \text{又ハ}\quad x=-\frac{10}{9}y\cdots\cdots④$$

③ヲ②ニ代入スルト

$$\frac{27}{4}y^2-\frac{3}{2}y^2-3y^2=3$$
$$\therefore\quad y^2=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\quad y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

③ニ代入シテ　$x=\pm\sqrt{3}$

④ヲ②ニ代入スルト

$$\frac{100}{27}y^2+\frac{10}{9}y^2-3y^2=3$$
$$\therefore\quad y^2=\frac{81}{49}$$
$$\therefore\quad y=\pm\frac{9}{7}$$

④ニ代入シテ　$x=\mp\frac{10}{7}$

答 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}\quad \begin{cases} x=\pm\frac{10}{7} \\ y=\mp\frac{9}{7} \end{cases}$　〔複號同順〕

指導總括　此種ノ問題ハ通常「**常數項ヲ消去セヨ**」ト教ヘラレテキル事ト思フガ，コノ解法ノ主眼點ハ常數項ノ消去ニアルノデハナクテ，常數項ヲ消去シタ結果ガ**二次ノ同次方程式ヲ得ル**點ニアル。從ツテ消去スベキ項ハ必ズシモ常數項トハ限ラナイ。例ヘバ

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2-xy+y^2-2y=0\cdots\cdots① \\ 2x^2+4xy=5y\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{array}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

ノ如キ問題ニ於テハ①ニ於ケル $2y$ ト②ニ於ケル $5y$ ノミガ一次デ他ハ何レモ x, y **ニ關シテ二次**デアル事ニ着眼シテ ①×5−②×2 ヨリ**一次ノ項ヲ消去**シテ**二次ノ同次方程式ヲ導イテ解ク**ノデアル。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(i)　$x^2+xy+y^2=7,\quad x^2+2xy=8$　　(上 醫)

(ii)　$x^2-2y^2=4y,\quad 3x^2+xy-2y^2=16y$

答 (i) $x=\pm2,\ y=\pm1;\quad x=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　(複號同順)

(ii) $x=0,\ y=0;\quad x=\frac{12}{7},\ y=\frac{4}{7};\quad x=-4,\ y=2$

2. 高次方程式ノ場合

例 191. 次ノ聯立方程式ノ實數根ヲ求メヨ。

$$9x^2y^2-27xy^2-98x^2+297x-9=0,\quad x^2+y^2=10$$

着眼　四次ト二次トノ聯立方程式デアルガ，y ノミニ着眼スルト二次ノ項ノミデ一次ノ項ガナイカラ y^2 ヲ束ニシテ取扱フ。

【解】

$$9x^2y^2-27xy^2-98x^2+297x-9=0\cdots\cdots①$$
$$x^2+y^2=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

②ヨリ　$y^2=10-x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$

③ヲ①ニ代入シテ整頓スルト

$$9x^4-27x^3+8x^2-27x+9=0\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

STOP　④ハ相反方程式ナル事ニ着眼シテ，相反方程式ノ特殊解ヲ用ヒル

GO　$x^2\neq0$ (∵ $x=0$ トスルト④ハ $9=0$ トナリ不合理) ナル故

④ノ兩邊ヲ x^2 デ割レバ　$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-27\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$ ……⑤

$x+\frac{1}{x}=X$ ト置ケバ　$x^2+\frac{1}{x^2}=X^2-2$　トナルカラ

⑤ヨリ　$9(X^2-2)-27X+8=0$

$\therefore\ 9X^2-27X-10=0$

即チ $(3X-10)(3X+1)=0$

$\therefore\ X=\frac{10}{3}$　又ハ $X=-\frac{1}{3}$

（イ）$X=\frac{10}{3}$ ナルトキ

$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

$\therefore\ 3x^2-10x+3=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $x=\frac{1}{3}$

③ヨリ　$y=\pm1$　$y=\pm\frac{\sqrt{89}}{3}$

コレラノ値ハ何レモ實數デアルカラ題意ニ適スル。

（ロ）$X=-\frac{1}{3}$ ノトキ

$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ 3x^2+x+3=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-36}}{6}$

コノ値ハ虚數デアルカラ題意ニ適シナイ。

答　$x=3,\ y=\pm1$；　$x=\frac{1}{3},\ y=\pm\frac{\sqrt{89}}{3}$

【試驗問題】次ノ聯立方程式ヲ滿足スル x、y ノ實數値ヲ求メヨ

$4x^3+3x^2y+y^3=8,\quad 2x^3-2x^2y+xy^2=1$　（大商高）

答　$x=y=1$；　$x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}},\ y=\frac{4}{\sqrt[3]{10}}$；　$x=\frac{-1}{\sqrt[3]{5}},\ y=\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

注　未知項ガ悉ク三次ナルコトニ着眼セヨ。

例 192. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$(x+y)^2+y^2=106,\quad x^4+4y^4=2756$

着眼　第二式ノ左邊ガ複二次式デアル事ニ着眼シテ因數分解ヲ試ミル

【解】

$$\begin{cases}(x+y)^2+y^2=106 \cdots\cdots ①\\ x^4+4y^2=2756 \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①ヨリ　$x^2+2xy+2y^2=106$ ……①′

②ノ左邊 $=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

∴ ②ハ　$(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)=2756$ ……②′

STOP　コノ左邊ノ第一因數ハ ①′ ノ左邊ト等シイ事ニ着眼シ，②′ ヲ ①′ デ割ルト之ガ約サレテ次數ガ下ル。

GO　①′ ヨリ　$x^2+2xy+2y^2\neq0$ ナル故

②′÷①′ ヨリ　$x^2-2xy+2y^2=26$ ……③

STOP　①′ ト ③ トハ共ニ二次方程式デ未知項ガ悉ク二次ナルコトニ着眼シ常數項ヲ消去スルト二次ノ同次方程式ヲ得ルト考ヘテ

GO　③×53－①′×13 ヨリ

$40x^2-132xy+80y^2=0$

$\therefore\ 10x^2-33xy+20y^2=0$

$\therefore\ (2x-5y)(5x-4y)=0$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}y$ ……④　又ハ $x=\frac{4}{5}y$ ……⑤

④ヲ③ニ代入シテ

$\frac{25}{4}y^2-5y^2+2y^2=26$

$\therefore\ 13y^2=26\times4$

$\therefore\ y^2=8$

$\therefore\ y=\pm2\sqrt{2}$

④ニ代入シテ　$x=\pm5\sqrt{2}$

⑤ヲ③ニ代入シテ

$\frac{16}{25}y^2-\frac{8}{5}y^2+2y^2=26$

$\therefore\ 26y^2=26\times25$

$y=\pm5$

⑤ニ代入　$x=\pm4$

答　$\begin{cases}x=\pm5\sqrt{2}\\ y=\pm2\sqrt{2}\end{cases}$　$\begin{cases}x=\pm4\\ y=\pm5\end{cases}$　（複號同順）

[illegible] 1. コノ樣ニ二ツノ方程式ノ一邊ニ零ナラザル共通因數ガアルトキハ邊々割ルト次數ガ低クナッテ解キ易クナル。

2. ①′ト③トヲ解クトキ，二次ノ同次方程式ヲ導ク解法ヲ示シタガ別法トシテハ ①′－③ ヨリ　$4xy=80$　$\therefore\ y=\frac{20}{x}$　ヲ導キ之ヲ③ニ代入シテモヨイ。

【試驗問題】$x^4+x^2y^2+y^4=21,\quad x^2+xy+y^2=7$　ヲ解ケ。

答 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

3. 對稱式又ハ交代式ニ着眼スル解法

ニツノ未知數（例ヘバ x ト y）ノ係數ガ符號モ絶對値モ相等シイトキハ x ト y トニ關スル對稱式デアルカラ $x+y$ ヤ xy ヲ束ニシテ取扱フ。x ト y トノ係數ガ絶對値相等シクテ符號ノミ相反スルトキハ x, y ニ關スル交代式デアルカラ $x-y$ ヤ xy ヲ束ニシテ取扱フ。

例 193. $(x+y)(x+y+1)=56$, $(x-y)(x-y-1)=12$ ヲ解ケ。

着眼 ①ハ x,y ニ關スル對稱式, ②ハ交代式ナル事ニ着眼スル。

【解】 $x+y=u$ ト置クト ①ハ　$u(u+1)=56$ ……①'

$x-y=v$ ト置クト ②ハ　$v(v-1)=12$ ……②'

①ヨリ　$u^2+u-56=0$　$\therefore (u-7)(u+8)=0$

$\therefore u=7$ 又ハ $u=-8$ ……③

②ヨリ　$v^2-v-12=0$　$\therefore (v+3)(v-4)=0$

$\therefore v=-3$ 又ハ $v=4$ ……④

③ト④トヲ組合セテ次ノ四組ノ聯立方程式ヲ得ル。

(イ)$\begin{cases}x+y=7 \cdots\cdots ⑤\\x-y=-3 \cdots ⑥\end{cases}$ (ロ)$\begin{cases}x+y=7\\x-y=4\end{cases}$ (ハ)$\begin{cases}x+y=-8\\x-y=-3\end{cases}$ (ニ)$\begin{cases}x+y=-8\\x-y=4\end{cases}$

(イ)ナルトキ ⑤+⑥ ヨリ $x=2$,　⑤−⑥ ヨリ $y=5$

同様ニシテ

(ロ)ヨリ $\begin{cases}x=\frac{11}{2},\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$　(ハ)ヨリ $\begin{cases}x=-\frac{11}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}$　(ニ)ヨリ $\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$

答 $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{11}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{11}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$

【試練問題】 $18+9(x+y)=2(x+y)^2$,　$6-(x-y)=(x-y)^2$ ヲ解ケ。

答 $\begin{cases}x=-\frac{9}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=-\frac{7}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{9}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

例 194. $\left.\begin{matrix}(x^2-x+1)(y^2-y+1)=3 \cdots\cdots ①\\(x+1)(y+1)=6 \cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{matrix}\right\}$ ヲ解ケ。

着眼 兩式共ニ x, y ニ關シテ對稱ナル事ニ着眼シテ $x+y$ ト xy トヲ束ニシテ解ク。

【解】 ①ノ左邊ヲ展開スルト

$x^2y^2-xy(x+y)+xy+(x^2+y^2)-(x+y)+1=3$

$\therefore\ x^2y^2-xy(x+y)+(x+y)^2-xy-(x+y)-2=0$ ……①'

②ヨリ　$xy+(x+y)-5=0$ ……②'

$x+y=u$, $xy=v$ ト置ケバ

①'ハ　$v^2-uv+u^2-v-u-2=0$ ……③

②'ハ　$v+u-5=0$ ……④

STOP ③ハ u,v ニ關シテ二次, ④ハ一次ナル事ニ着眼シテ

GO ④ヨリ　$v=5-u$ ……④'

④'ヲ③ニ代入シテ整頓スレバ

$3u^2-15u+18=0$　$\therefore\ u^2-5u+6=0$

$\therefore\ u=2$ 又ハ $u=3$

④'ニ代入シテ　$v=3$,　$v=2$

$\therefore$ I $\begin{cases}x+y=2\\xy=3\end{cases}$ 又ハ II $\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$

STOP 和ト積トガ得ラレタトキハ一元二次方程式ノ根ト係數トノ關係ノ定理「和ガ a, 積ガ b ナル二數ハ $t^2-at+b=0$ ノ二根デアル」ヲ應用スル。(勿論簡單ナ場合ハ觀察ニヨツテモヨイ)

GO I ナル場合ハ $x,\ y$ ハ一元二次方程式

$t^2-2t+3=0$ ノ二根ニ等シイ。

之ヲ解イテ $t=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm i\sqrt{2}$

$$\therefore \begin{cases} x=1+i\sqrt{2} \\ y=1-i\sqrt{2} \end{cases} \text{又ハ} \begin{cases} x=1-i\sqrt{2} \\ y=1+i\sqrt{2} \end{cases}$$

II ナル場合ハ $t^2-3t+2=0$ ヲ解キ $t=1$ 又ハ 2

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{又ハ} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

答 $\begin{cases} x=1+i\sqrt{2} \\ y=1-i\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=1-i\sqrt{2} \\ y=1+i\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

[illegible] ③,④ヨリ u,v ヲ求メルニ際シ，之ガ亦 u,v ニ關シテ對稱ナル事ニ着眼シ，③ハ $(u+v)^2-3uv-(u+v)-2=0$ ……③′

④ハ　$u+v=5$ ……④′

ト變形シテ④′ヲ③′ニ代入スルト $25-3uv-7=0$

$\therefore\ uv=6$ ……⑤

④′ト⑤ヨリ I $\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$ 又ハ II $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$

トヤッテモヨイ（以下ハ前解ト同樣ニナル）

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$(x^2+y)(y^2+x)=(x+y)^3,\ (x+2)(y+2)=1$ （三 農）

答 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{14}}{5} \\ y=\dfrac{-1\mp2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$ （複號同順）

例 195. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$5x^2-12xy+5y^2-2x+2y+3=0$

$11x^2-28xy+11y^2+3x-3y+7=0$

着眼 二式共ニ x^2 ノ係數ト y^2 ト係數トハ相等シク，且 x ノ係數ト y ノ係數トハ絶對値ノミ相等シクテ符號ガ相反スル事ニ着眼シテ $(x-y)$ ト xy トヲ束ニシテ取扱フ。

【解】 $\begin{cases} 5x^2-12xy+5y^2-2x+2y+3=0 & \cdots\cdots ① \\ 11x^2-28xy+11y^2+3x-3y+7=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①ハ　$5(x-y)^2-2xy-2(x-y)+3=0$ ……①′

②ハ　$11(x-y)^2-6xy+3(x-y)+7=0$ ……②′

STOP コヽデ $(x-y)=u,\ xy=v$ ト置キ前例ノ如ク $u,\ v$ ニ關シテ解イテモヨイガ，置換ヘタ心算デ $(x-y)$ ト xy トヲ束ニシテ取扱ヒ，①′ト②′トヲ比較シテ xy ガ消去シ易イ事ニ着眼シテ，

GO ①′×3−②′ヨリ　$4(x-y)^2-9(x-y)+2=0$

$\therefore\ \{4(x-y)-1\}\{(x-y)-2\}=0$

$\therefore\ x-y=\dfrac{1}{4}$ ……③　又ハ　$x-y=2$ ……④

①′ニ代入シテ $xy=\dfrac{45}{32}$ ……⑤　①′ニ代入シテ $xy=\dfrac{19}{2}$ ……⑥

STOP 差ト積トガ得ラレタ場合ハ差ヨリ x ヲ y 又ハ y ヲ x デ表ハシテ積ニ代入スルノガ常則デアル。

GO ②ヨリ　$x=y+\dfrac{1}{4}$ ……③′

⑤ニ代入シテ

$y^2+\dfrac{1}{4}y-\dfrac{45}{32}=0$

$\therefore\ 32y^2+8y-45=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+32\times45}}{32}$

$=\dfrac{-4\pm4\sqrt{1+90}}{32}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{91}}{8}$

③′ニ代入シテ

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{91}}{8}$

④ヨリ　$x=y+2$ ……④′

⑥ニ代入シテ

$y^2+2y-\dfrac{19}{2}=0$

$\therefore\ 2y^2+4y-19=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+38}}{2}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{42}}{2}$

④′ニ代入シテ

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{42}}{2}$

答 $\begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{91}}{8} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{91}}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{2\pm\sqrt{42}}{2} \\ y=\dfrac{-2\pm\sqrt{42}}{2} \end{cases}$ (複號同順)

【試鍊問題】 $\left.\begin{array}{l} 2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0, \\ x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。 (旅 工)

答 $\begin{cases} x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{-1\mp2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pm\sqrt{41} \\ y=2\mp\sqrt{41} \end{cases}$ (複號同順)

鍛 錬 問 題 十二

130. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$ax+by=1,\quad bx+ay=1$ (水 高)

131. (i) 次ノ聯立方程式

$(2k+1)x+(4k+3)y=3k+1$

$(k+2)x+(3k+4)y=1-k$

ハ k ノ如何ナル値ニ對シテ不定トナルカ，不能トナルカ。

(ii) m ガ實數ナルトキ

$(2m-3)x-my=3m-2$

$-5x+(2m+3)y=-5$

ヲ解キ其ノ根ノ符號及ビ値ヲ吟味セヨ。 (長 崎)

132. (i) a ガ常數ナルトキ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$ax+y+z=1,\ x+ay+z=1,\ x+y+az=1$ (臺 大)

(ii) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x+y+z+w=6 \qquad x-y+z-w=4$

$x+2y+3z+4w=1 \quad x+2y-3z-4w=23$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(133—136)

133. (i) $4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x,\ 7x-11y=17$

(ii) $x^2+y=x+y^2=\dfrac{13}{3}xy$ (宮 農)

134. (i) $10x-2xy-3y+5=0,\ xy-4x+y-4=0$ (京 醫)

(ii) $2x^2-3xy+5y-5=0,\ xy-x-2y+2=0$ (東農教)

135. (i) $x^2-3xy+2y^2=12,\ x^2+2xy-3y^2=32$ (橫 專)

(ii) $x^2-2y^2-xy+3x+2=0,\ 2x^2+y^2-3xy-x-1=0$ (福 工)

136. (i) $x+y=2,\qquad x^4+y^4=34$ (東 船)

(ii) $2xy+x+y+3=0,\ (x^2-2x+1)(y^2-2y+1)=4$

137. $x^3+y^3+x^3y^3=2.75,\ x^6+y^6=2.5$ ニ適スル $x^3,\ y^3$ ノ正値ヲ求ム。 (桐 工)

138. m ガ如何ナル値ヲ有スルトキニ次ノ聯立方程式ヲ滿足セシムル x 及ビ y ノ値ノ和ガ 2 ニ等シキカ。

$2x+3y=m,\ 3x+5y=m+2$

139. $a,\ b$ ガ實數ナルトキ，$x,\ y$ ヲ未知數トスル三ツノ方程式 $(a^2+2a-1)x-(b+1)y-2=0,\ (b+2)x+4y+3=0,\ x+y+1=0$ ガ同時ニ成立スルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ。又此ノ時ノ $x,\ y$ ノ値ヲ求メヨ。

140. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by-cz=10 \\ 5x+2y-3z=0 \end{cases}$ 及ビ $\begin{cases} ax-by+cz=2 \\ 2x-y+3z=9 \\ ax+by+cz=22 \end{cases}$

ナル二組ノ方程式ガ同ジ根ヲ有スルタメニハ，a, b, c ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。

141. x, y, z ガ何レモ 0 ナラズ且 a, b ガ何レモ 1 ニ等シカラザルトキ次ノ三等式ガ成立スルタメニハ a, b ノ間ニ如何ナル關係アリヤ。

$$ax+y+z=0 \quad x+by+z=0 \quad x+y+bz=0$$

又此ノ關係アルトキ上ノ等式ニ適スル x, y, z ノ値ヲ定ムルコトヲ得ルヤ。　　（成城高）

142. $ax+by=-16$, $cx+20y=-224$ ナル聯立方程式アリ。甲ハ之レヲ正シク解キテ $x=8$, $y=-10$ ナル解ヲ得タリ。然ルニ乙ハ c ヲ書キ誤リシタメニ $x=12$, $y=-13$ ナル解ヲ得タリ。然ラバ聯立方程式ハ如何ナルモノナリシカ。又乙ハ c ヲ何ト書キ誤リシカ。

答 **130.** $a^2-b^2 \neq 0$ ノトキ　$x=y=\frac{1}{a+b}$, $a=b \neq 0$ ナルトキ不定（解無數）$a=b=0$ ナルトキ不能（根ナシ）$a+b=0$ ナルトキ根ナシ。

131. (i)　$k=-1$ ナルトキ不定, $k=1$ナルトキ不能。

(ii)　$(4m-9)(m+1) \neq 0$ ナルトキ $x=\frac{6(m-1)}{4m-9}$, $y=\frac{5}{4m-9}$

$m=\frac{9}{4}$ ノトキ 不能, $m=-1$ ノトキ 不定

$m>\frac{9}{4}$ ノトキ　$x>0$, $y>0$, $1<m<\frac{9}{4}$ ノトキ $x<0$, $y<0$

$m=1$ ノトキ $x=0$, $y<0$,

$m<1$ (但$m \neq -1$) ノトキ $x>0$, $y<0$

132. (i)　$(a+2)(a-1) \neq 0$ ノトキ $x=y=z=\frac{1}{a+2}$, $a=-2$ ノトキ 不能, $a=1$ ノトキ 不定　(ii)　$x=6$, $y=3$, $z=-1$, $w=-2$

133. (i)　$(4, 1)\left(\frac{107}{13}, \frac{48}{13}\right)$

(ii) $(0, 0)\left(-\frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

但シ括弧内ノ數ハ x, y ノ順。以下同樣。

134. (i)　$\left(\frac{7}{2}, 4\right)(-1, -5)$　(ii) $(0, 1)\left(\frac{3}{2}, 1\right)(2, 3)$

135. (i)　$(5, 1)(-5, -1)$

(ii)　$(0, 1)$ $(0, -1)$ $(4, 3)\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

136. (i)　$(1\pm2\sqrt{2}\,i, 1\mp2\sqrt{2}\,i)$ $(1\pm\sqrt{2}, 1\mp\sqrt{2})$ 複號同順。

(ii)　$\left(\frac{1}{3}, -2\right)\left(-2, \frac{1}{3}\right)(2, -1)(-1, 2)$

137. $x^3=1.5$, $y^3=0.5$; $x^3=0.5$, $y^3=1.5$

138. $m=4$,　　**139.** $a=-1$, $b=1$;　$x=-1$, $y=0$

140. $a=\frac{18}{5}$, $b=-\frac{15}{4}$, $c=6$,　　**141.** $a(b+1)=2$, コノ關係アルトキ, x, y, z ノ値ハ幾組デモ定メ得ル（即チ不定）

142. 正シキ方程式ハ $3x+4y=-16$, $-3x+20y=-224$, 乙ハ c ヲ 3 ト誤ル。

第二十六章　多元聯立二次及ビ高次方程式

【解法】 未知數ガ三ツ以上ノ二次及ビ高次方程式ニハ一般ノ解法（何レニモ當嵌マル解法）ハナクテ, 特殊ナ場合ダケ夫々ニ應ジタ特殊ナ解法ニ依ツテ解キ得ルノデアルカラ問題ヲヨク觀察シテソノ特徴ヲ利用スル事ヲ考ヘネバナラヌ。

(1)　一次方程式ガ二ツアル例

例 **196.** 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2x+y-z=1,\ 3x-y+2z=7,\ 2x^2+3y^2-z^2=5$$

着眼　初メノ二式ガ共ニ一次方程式ナル事ニ着眼シ, コノ二ツカラ二ツノ未知數ヲ他ノ一ツノ未知數ヲ含ム式デ表ハシテ第三式ニ代入スル

【解】

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \cdots\cdots ① \\ 3x-y+2z=7 \cdots\cdots ② \\ 2x^2+3y^2-z^2=5 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②ヨリ　$5x+z=8$　$\therefore$　$z=8-5x \cdots\cdots ④$

STOP　z ヲ x デ表ハシタカラ, 次ニ y モ x デ表ハス方針デ z ヲ消去スル。

GO ①×2+②ヨリ　$7x+y=9$　∴　$y=9-7x$ ………⑤

④, ⑤ヲ③ニ代入　$2x^2+3(9-7x)^2-(8-5x)^2=5$

整頓スルト　$62x^2-149x+87=0$

$\therefore\ (x-1)(62x-87)=0$　∴ $x=1$ 又ハ $\frac{87}{62}$

㋑ $x=1$ ナルトキ ⑤ヨリ $y=2$,　④ヨリ $z=3$

㋺ $x=\frac{87}{62}$ ナルトキ ⑤ヨリ $y=-\frac{51}{62}$　④ヨリ $z=\frac{61}{62}$

答 $x=1,\ y=2,\ z=3\ ;\ x=\frac{87}{62},\ y=-\frac{51}{62},\ z=\frac{61}{62}$

【試驗問題】 $x+2y=2z,\ -6x+9z=7y,\ x^2+y^2+z^2=200$　ヲ解ケ。

答 $x=\pm8,\ y=\pm6,\ z=\pm10$ (複號同順)

註 二ツノ方程式ノ常數項ガ共ニ 0 ナル事ニ着眼スレバ簡單ニナル。

(2) 一ツガ一次デ他ノ二ツガ共ニ二次ナル場合

例 197. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+2y-3z=0,\ x^2+y^2-2z^2=36,\ x^2-2y^2+yz=64$$

一次式①カラ x ヲ y, z デ表ハシテ②ト③ニ代入スルト y, z ニ關スル聯立二次方程式ヲ得ル事ニ着眼スル。

【解】 ①ヨリ　$x=3z-2y$ ………①′

之ヲ②ニ代入シテ　$5y^2-12yz+7z^2=36$ ………②′

③ニ代入シテ　$2y^2-11yz+9z^2=64$ ………③′

STOP ②′, ③′ ノ未知項ハ悉ク二次ナル事ニ着眼シ，常數項ヲ消去シテ二次ノ同次方程式ヲ導ク。

GO ②′×16−③′×9 ヨリ　$62y^2-93yz+31z^2=0$

∴　$2y^2-3yz+z^2=0$

即チ　$(2y-z)(y-z)=0$　∴ $z=2y$ 又ハ $z=y$

㋑ $z=2y$ ナルトキ ②′ ニ代入シテ $9y^2=36$　∴ $y=\pm2$ ∴ $z=\pm4$

①′ ニ代入シテ　$x=\pm12-(\pm4)=\pm8$

㋺ $z=y$ ナルトキ ②′ ニ代入スルト $0=36$ トナル故 根ナシ

答 $x=\pm8,\ y=\pm2,\ z=\pm4$ (複號同順)

【試驗問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+2y-3z=0,\ x^2+y^2-2z^2=9,\ x^2-2y^2+yz=16$$

(陸經)

答 $x=\pm4,\ y=\pm1,\ z=\pm2$ (複號同順)

3. 二ツノ未知數ニ關シテ對稱ナル場合

例 198. ㋑ 三角形ノ三邊ヲ x, y, z トスルトキ，次ノ聯立方程式ヲ解ケ。$x+y+z=9,\ 2yz=3x,\ x^2+y^2+z^2=29$

㋺ 次ニコノ三角形ハ鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形ノ何レナリヤ考究セヨ。

次數ニ着眼スルト一ツハ一次，他ハ二次デ前例ト同ジ形デアルガ，一次方程式ノ常數項ガ 0 デハナイカラ，前例ノ解法デハ簡單ニ解ケヌ。ソコデ係數ヲ比較シテ，y ト z トニ關シテ對稱(第二式ニ於テ x ノミハ係數ガ違フ) ナルコトニ着眼シ，$y+z$ ト yz トヲ束ニシテ取扱フ。

【解】㋑ 第一式ヨリ　$y+z=9-x$ ………①

第二式ヨリ　$2yz=3x$ ………②

第三式ヨリ　$x^2+(y+z)^2-2yz=29$ ………③

①, ②ヲ③ニ代入シテ　$x^2+(9-x)^2-3x=29$

∴　$2x^2-21x+52=0$

∴　$(2x-13)(x-4)=0$　∴ $x=\frac{13}{2}$ 又ハ $x=4$

STOP 次ニ y, z ヲ求メルニハ①, ②ヨリ $y+z$ ト yz ヲ求ムレバヨイト考ヘ

GO i) $x=\frac{13}{2}$ ナルトキ ①ヨリ $y+z=\frac{5}{2}$　②ヨリ $yz=\frac{39}{4}$

依テ y, z ハ　$t^2-\frac{5}{2}t+\frac{39}{4}=0$

即チ $4t^2-10t+39=0$ ノ二根ニ等シイ。

シカルニコノ方程式ノ判別式 $5^2-4\times 39<0$ ナル故 コノ方程式ノ根ハ虚數トナリ，題意ニセズ（∵ y, z ハ三角形ノ邊ノ長サ）

ii) $x=4$ ナルトキハ ①ヨリ $y+z=5$，②ヨリ $yz=6$

$$\therefore \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases} \text{又ハ} \begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

依テ $x=4$，$y=2$，$z=3$ 又ハ $x=4$，$y=3$，$z=2$

STOP コヽデ「コレラノ値ハ正ナル故題意ニ適ス」ト簡單ニ片付ケタリ，甚ダシキハ何等反省スル事ナクコレヲ直チニ答トスル者ガアル。

三角形ノ三邊トナルニハ三邊ガ共ニ正ノミデハ不充分デ

二邊ノ和>他ノ一邊>二邊ノ差ガ成立スルコトガ必要デアルト考ヘテ

GO シカルニ $2+3>4>2\sim 3$ ナル故コレラノ値ハ三角形ノ三邊トナリ題意ニ適ス。 **答** $x=4$，$y=2$，$z=3$ 又ハ $x=4$，$y=3$，$z=2$

⑪ 次ニ最大邊 $4^2=16$，他ノ二邊 $3^2+2^2=13$

即チ（最大邊）^{2}>（他ノ二邊ノ平方ノ和）ナル故，コノ三角形ハ鈍角三角形デアル。

指導總括 4，2，3 ガ三角形ノ三邊トナルタメノ條件ヲ吟味スル場合ニ「4 ガ最大デ且 $4<2+3$ ナル故三角形ノ三邊トナリ得ル」ト斷定シテモヨイ。（∵ 最大邊>他ノ二邊ノ差，ハ明ラカ）

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+3y+z=7,\quad x^2+y^2+z^2=9+2y,\quad xy+yz-zx=3y-2y^2$$

答 x, y, z ノ順ニ $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{10}{3},\ -\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{5}{3},\ \frac{10}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

(3, 1, 1) (1, 1, 3)

(4) 各方程式ノ一邊ニ零ナラザル共通因數ガアル場合

例 199. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x(x+y+z)=12$，　$(2y+z)(x+y+z)=30$

$(y+2z)(x+y+z)=42$

方針 1. 共通因數 $(x+y+z)$ ヲ束ニシテ取扱ヒ，ソノ係數ヲ揃ヘル事ヲ工夫スル。

【解】

$$x(x+y+z)=12 \cdots\cdots ①$$
$$(2y+z)(x+y+z)=30 \cdots\cdots ②$$
$$(y+2z)(x+y+z)=42 \cdots\cdots ③$$

STOP ②+③ニ於ケル $(x+y+z)$ ノ係數ガ $3y+3z$ トナル事ニ着眼シ，①ヲ 3 倍シテ邊々加ヘル。

GO ①×3+②+③ヨリ $3(x+y+z)(x+y+z)=108$

$\therefore\ (x+y+z)^2=36$　　$\therefore\ x+y+z=\pm 6$

（イ） $x+y+z=6$ ナルトキ
①ヨリ $x=2$
②ヨリ $2y+z=5$
③ヨリ $y+2z=7$
コレヨリ $x=2$，$y=1$，$z=3$，

（ロ） $x+y+z=-6$ ナルトキ
①ヨリ $x=-2$
②ヨリ $2y+z=-5$
③ヨリ $y+2z=-7$
コレヨリ $x=-2$，$y=-1$，$z=-3$

答 $x=\pm 2$，$y=\pm 1$，$z=\pm 3$（複號同順）

方針 2. 零ナラザル共通因數ニ着眼シテ邊々割ルト次數ガ下ル事ニ着眼シテ解ク。

【解】 ①ヨリ $x(x+y+z)\neq 0$ ナル故

②÷①ヨリ $\dfrac{2y+z}{x}=\dfrac{5}{2}$　$\therefore\ 5x-4y-2z=0 \cdots\cdots ④$

③÷①ヨリ $\dfrac{y+2z}{x}=\dfrac{7}{2}$　$\therefore\ 7x-2y-4z=0 \cdots\cdots ⑤$

STOP ④，⑤ハ三元一次ノ同次方程式ナル事ニ着眼シテ $x:y:z$ ヲ求メル。

GO ④，⑤ヨリ $\dfrac{x}{16-4}=\dfrac{y}{-14+20}=\dfrac{z}{-10+28}$

$$\begin{array}{cccc} 5 & -4 & -2 & +5 \\ 7 & -2 & -4 & +7 \\ & z & x & y \end{array}$$

即チ $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{18}$

$\therefore\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}=k$ ト置ケバ

$x=2k$，$y=k$，$z=3k$ 之ヲ①ニ代入シテ $k=\pm 1$

$\therefore\ x=\pm 2$，$y=\pm 1$，$z=\pm 3$（複號同順）……**答**

[illegible] 共通因數ヲ無視シテ各式ノ括弧ヲ取去リ，混亂ニ陷ルモノガアル。

【試棟問題】 聯立方程式

$(x+1)(x+y+z)=16$, $(y+1)(x+y+z)=24$

$(z-2)(x+y+z)=24$, ヲ解ケ。 (東 外)

答 $x=1,\ y=2,\ z=5$; $x=-3,\ y=-4,\ z=-1$

(5) 各式ノ未知項ガ二ツ宛相等シキ二因數ノ積ナル場合

例 200. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$(x+y)(x+z)=15$, $(y+z)(y+x)=18$, $(z+x)(z+y)=30$

着眼 括弧ヲ活用シテコノマヽ三式ヲ邊々乘ズル。(未知項ガ三文字 x,y,z ニ關シテ對稱デアルカラ三式ヲ對等ニ取扱フ)

【解】 $(x+y)(x+z)=15$ ……① $(y+z)(y+x)=18$ ……②

$(z+x)(z+y)=30$ ……③

①×②×③ヨリ $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=15^2\times18\times2$

∴ $(x+y)(y+z)(z+x)=\pm90$ ……④

④÷①ヨリ $y+z=6$ ……⑤ 又ハ $y+z=-6$

④÷②ヨリ $z+x=5$ ……⑥ $z+x=-5$

④÷③ヨリ $x+y=3$ ……⑦ $x+y=-3$

$\dfrac{⑤+⑥+⑦}{2}$ ヨリ $x+y+z=7$ 同樣ニ $x+y+z=-7$

∴ $x=1,\ y=2,\ z=4$ ∴ $x=-1,\ y=-2,\ z=-4$

答 $x=\pm1,\ y=\pm2,\ z=\pm4$ (複號同順)

【別解】 ①×②÷③ヨリ $(x+y)^2=9$ ∴ $x+y=\pm3$ ……④

(イ) $x+y=3$ ナルトキ ①ヨリ $x+z=5$, ②ヨリ $y+z=6$

(ロ) $x+y=-3$ ナルトキ ①ヨリ $x+z=-5$, ②ヨリ $y+z=-6$

コレラヲ解ク事ハ前解ト同樣デアル。

[illegible] コンナ問題ニマデ各式ノ括弧ヲ取ツテ處置ニ窮シ不能ニ陷ル者ガアルノニハ驚カサレル(餘程括弧ヲ去ル事ガ好キラシイ)倘別法

ヲ用ヒル場合，④ヲ得タル後別解ノ如ク二組ノ聯立方程式ヲ作ルベキデアルノニ同樣ニシテ $y+z=\pm6$, $z+x=\pm5$ ヲ求メ，此等ヲ組合セテ八組モ答ヲ出ス者ガアル。

【試棟問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$(x+1)(y+1)=30$, $(y+1)(z+1)=42$, $(z+1)(x+1)=35$

答 $x=4,\ y=5,\ z=6$; $x=-6,\ y=-7,\ z=-8$

(6) 與式ヲ變形シテ前例ノ形ニ導キ得ル例

例 201. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(A)【標準型】 $\begin{cases} xy+x+y=1 \\ yz+y+z=5 \\ zx+z+x=2 \end{cases}$ (B)【應 用】 $\begin{cases} xy+2x-3y=12 \\ 2yz-y+4z=11 \\ 2zx-6z-x=3 \end{cases}$

着眼 各方程式共二ツノ未知數ニ關シテ積ト一次式ノミナル事ニ着眼シ，コノ形ノ式ヲ變形式スルト必ズ $(x+a)(y+b)=c$ ナル形ノ方程式ヲ導キ得ルコトヲ利用シテ解ク。

(A)【解】 $\begin{cases} xy+x+y=1 & \text{……①} \\ yz+y+z=5 & \text{……②} \\ zx+z+x=2 & \text{……③} \end{cases}$

①ヨリ $x(y+1)+y=1$ ……①′

STOP 括弧内ノ $y+1$ ニ着眼シテ第二項ノ y ニモ 1 ヲ補ツテ $y+1$ ナル共通因數ヲ導ク。

GO ①′ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘ $x(y+1)+(y+1)=2$

∴ $(y+1)(x+1)=2$ ……④

同樣ニ②ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘ $(y+1)(z+1)=6$ ……⑤

③ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘ $(z+1)(x+1)=3$ ……⑥

以下ハ前例ニ倣ツテ各自試ミヨ。

答 $x=0,\ y=1,\ z=2$; $x=-2,\ y=-3,\ z=-4$

[illegible] 與式ノ特徵ヲ見逃シ，從ツテ④,⑤,⑥ヲ導キ得ナイ者ハ殆ン

ド正シイ答ニ達スルコトハ出來ナイ。

(B)

$$\begin{cases} xy+2x-3y=12 & \cdots\cdots ① \\ 2yz-y+4z=11 & \cdots\cdots ② \\ 2zx-6z-x=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①ヨリ　$x(y+2)-3y=12$

STOP　前問ト同樣ニ括弧内ノ $y+2$ ニ着眼シテ

GO　$x(y+2)-3(y+2)=12-6$

$\therefore\ (y+2)(x-3)=6 \cdots\cdots ①'$

②ヨリ　$y(2z-1)+2(2z-1)=11-2$

$\therefore\ (2z-1)(y+2)=9 \cdots\cdots ②'$

③ヨリ　$2z(x-3)-(x-3)=3+3$

$\therefore\ (x-3)(2z-1)=6 \cdots\cdots ③'$

①′×②′×③′ヨリ　$(x-3)^2(y+2)^2(2z-1)^2=6^2\times 9$

$\therefore\ (x-3)(y+2)(2z-1)=\pm 18$

(イ) $(x-3)(y+2)(2z-1)=18$ ノトキ

②′ヲ代入シテ $x-3=2$　$\therefore\ x=5$

③′ヲ代入シテ $y+2=3$　$\therefore\ y=1$

①′ヲ代入シテ $2z-1=3$　$\therefore\ z=2$

(ロ) $(x-3)(y+2)(2z-1)=-18$ ノトキ同樣ニ $x-3=-2$ $\therefore\ x=1$

$y+2=-3$ $y=-5$

$2z-1=-3$ $z=-1$

答　$x=5,\ y=1,\ z=2;\ \ x=1,\ y=-5,\ z=-1$

指導總括　(イ),(ロ)ヲ同時ニ取扱ヒ $x-3=\pm 2$,　$y+2=\pm 3$,　$2z-1=\pm 3$ トシ，コレヨリ　$x=\pm 5$, $y=\pm 1$, $z=\pm 2$ ト誤ルモノガアル。

【試棟問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(i)　$yz=y+z+3,\ zx=z+x+8,\ xy=x+y+15$

(ii)　$yz-f^2=cy+bz,\ zx-g^2=az+cx,\ xy-h^2=bx+ay$

但シ a, b, c ハ正數トス。　(北大豫)

答 (i)　$\left(7,\ \frac{11}{3},\ \frac{5}{2}\right)\left(-5,\ -\frac{5}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$

(ii)　$x=a\pm\frac{\sqrt{K}}{f^2+bc},\ y=b\pm\frac{\sqrt{K}}{g^2+ca},\ z=c\pm\frac{\sqrt{K}}{h^2+ab}$

但シ　$K=(f^2+bc)(g^2+ca)(h^2+ab)$ トス。(複號同順)

(7) 各方程式ノ常數項ガ悉ク 0 ナル場合

例 202. $x+y=xy,\ 2x+2z=xz,\ 3y+3z=yz$　ヲ解ケ。

着眼　各方程式ノ常數項ガ悉ク 0 ナル事ニ着眼シ $x=y=z=0$ ナル根ガ存在スル事ヲ利用シテ解ク。

【解】 $x+y=xy \cdots\cdots ①$　$2x+2z=xz \cdots\cdots ②$　$3y+3z=yz \cdots\cdots ③$

(イ) ①,②,③ノ常數項ハ何レモ 0 ナル故 $x=0,\ y=0,\ z=0$ ナルトキ①,②,③ハ明ラカニ成立スル。依テ $x=y=z=0$ ハ所要ノ根デアル。

(ロ) 次ニ $x\neq 0$ トスルト

①ヨリ $y\neq 0$ ($\because$ $y=0$ トスルト $x=0$ トナルカラ)

②ヨリ $z\neq 0$ ($\because$ $z=0$ トスルト $x=0$ トナルカラ)

依テ①,②,③ノ兩邊ヲ順次 $xy,\ 2xz,\ 3yz(\neq 0)$ デ割レバ

$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1 \cdots ①'$　$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\ \cdots ③'$　$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \cdots ③$

STOP　未知項ガ $\frac{1}{x},\ \frac{1}{y},\ \frac{1}{z}$ ノミニナツタカラ，之等ヲ束ニシテ取扱ヒ

GO　$\frac{①'+②'+③'}{2}$ ヨリ　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12} \cdots\cdots ④$

④－③′ ヨリ　$\frac{1}{x}=\frac{7}{12}$　$\therefore\ x=\frac{12}{7}$

④－②′ ヨリ　$\frac{1}{y}=\frac{5}{12}$　$\therefore\ y=\frac{12}{5}$

④－①′ ヨリ　$\frac{1}{z}=-\frac{1}{12}$　$\therefore\ z=-12$

コレラノ値ハ何レモ $xyz\neq 0$ ナル假定ニ反シナイ。

答　$x=y=z=0,\ x=\frac{12}{7},\ y=\frac{12}{5},\ z=-12$

指導總括　$x=y=z=0$ ナル根ヲ求メタ後，$x\neq 0$ ナラバ同時ニ $y\neq 0$, $z\neq 0$ ナル事ヲ述ベズニ直チニ「$xyz\neq 0$ ノトキハ」トシテ(ロ)ノ解

ヲナス者ガアルガ，コレデハ不完全デアル（$\because$ $x \neq 0$ デ y ヤ z ガ 0 ナル如キ根，例ヘバ $x=3$, $y=0$, $z=-2$ ノ如キ根ガアルカモ知レヌカラ）

【試錬問題】 $yz=y-2z$, $zx=6z-x$, $xy=x-y$ ヲ解ケ。

答 $x=y=z=0$, $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$

(8) 三ツノ未知數ニ關シテ輪環式ナル場合

例 203. $x^2-yz=39$, $y^2-zx=11$, $z^2-xy=-31$ ヲ解ケ。

着眼 未知項ガ x, y, z ニ關シテ輪環式デアル事ニ着眼シテ解ク。コノ問題ノ樣ニ三文字輪環ノ場合ハ二式宛邊々減ジルコトニヨリ解決ノ手懸リヲ得ルコトガ多イ。

【解】
$$\begin{cases} x^2-yz=39 \cdots\cdots ① \\ y^2-zx=11 \cdots\cdots ② \\ z^2-xy=-31 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－②ヨリ $(x^2-y^2)+z(x-y)=28$

$\therefore$ $(x-y)(x+y+z)=28 \cdots\cdots ④$

②－③ヨリ $(y-z)(x+y+z)=42 \cdots\cdots ⑤$

STOP 共通因數 $(x+y+z)$ ガ得ラレタカラ之ガ零ナラザル事ヲ述ベテ邊々割ルト次數ガ下ル。

GO ⑤ヨリ $(y-z)(x+y+z) \neq 0$ ナル故

④÷⑤ヨリ $\frac{x-y}{y-z}=\frac{2}{3} \cdots\cdots ⑥$

分母ヲ拂ヒ $3x-3y=2y-2z$ $\therefore$ $z=\frac{5y-3x}{2} \cdots\cdots ⑦$

STOP 之ヲ代入シテ z ヲ消去シ x ト y トノ二元聯立方程式ヲ導ケバ x, y ガ得ラレルト考ヘテ

GO ⑦ヲ①ニ代入シテ $x^2-\frac{5y^2-3xy}{2}=39$

$\therefore$ $2x^2+3xy-5y^2=78 \cdots\cdots ⑧$

⑦ヲ②ニ代入シテ $3x^2-5xy+2y^2=22 \cdots\cdots ⑨$

⑨×39－⑧×11ヨリ〔常數項ヲ消去〕

$95x^2-228xy+133y^2=0$ ……（二次ノ同次方程式ヲ得タ）

19 デ割リ $5x^2-12xy+7y^2=0$

$\therefore$ $(5x-7y)(x-y)=0$

然ルニ④ヨリ $x-y \neq 0$ $\therefore$ $5x-7y=0$ $\therefore$ $y=\frac{5}{7}x \cdots\cdots ⑩$

⑩ヲ⑨ニ代入シテ $3x^2-\frac{25x^2}{7}+\frac{50}{49}x^2=22$

整頓スルト $x^2=49$ $\therefore$ $x=\pm 7$

⑩ニ代入シテ $y=\pm 5$

⑦ニ代入シテ $z=\pm 2$

答 $x=\pm 7$, $y=\pm 5$, $z=\pm 2$（複號同順）

[illegible] ①,②,③ノ未知項ガ同一型デアルカラ ①－② ヨリ得ル式ト②－③ヨリ得ル式トハ亦同一型トナルノデ，此點ヲ念頭ニ於テ取扱ヘバ方針モ定マリ，不注意ナ誤リモ防ゲル。

尙⑥ヨリ $\frac{x-y}{2}=\frac{y-z}{3}=k$ ト置ク特殊解モアルガ，地味ナ一般解法ヲ示シタ。

【試錬問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x^2+xy+y^2=37$, $y^2+yz+z^2=19$, $z^2+zx+x^2=28$

答 $x=\pm 4$, $y=\pm 3$, $z=\pm 2$; $x=\pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z=\mp\frac{8\sqrt{3}}{3}$

例 204. $\frac{x+y}{c}=\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=2xyz$ ヲ解ケ。

着眼 本例ノ樣ニ x, y, z ニ關スル等勢式（輪環式）ガ三ツ以上相等シイ場合ハソレラノ値ヲ k ト置クト解キ易イ。

【解】 $\frac{x+y}{c}=\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=2xyz=2k$ ト置ケバ

$$\begin{cases} x+y=2ck \cdots\cdots ① \\ y+z=2ak \cdots\cdots ② \\ z+x=2bk \cdots\cdots ③ \\ xyz=k \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

{①+②+③}÷2ヨリ

$$x+y+z=(a+b+c)k \cdots\cdots ⑤$$

$$\left.\begin{array}{ll} ⑤-②\text{ヨリ} & x=(b+c-a)k \\ ⑤-③\text{ヨリ} & y=(c+a-b)k \\ ⑤-①\text{ヨリ} & z=(a+b-c)k \end{array}\right\} \cdots ⑥$$

註

與式$=k$ ト置クト

$$x+y=ck$$
$$y+z=ak$$
$$z+x=bk$$

$x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)k$ トナリ $\frac{1}{2}$ ナル分數係數ノ式ニナルカラコノ點ヲ考慮シテ $2k$ ト置イタ。

STOP k サヘ決定スレバ x,y,z ガ得ラレルト考ヘテ

GO ⑥ヲ④ニ代入シテ $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)k^3=k$

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\neq 0$ ノトキハ

$$k=0 \text{ 又ハ } k=\pm\frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

コレラノ値ヲ⑥ニ代入シテ

答 $x=y=z=0$; $x=\pm\dfrac{b+c-a}{\sqrt{(\ )(\ )(\ )}}$, $y=\pm\dfrac{c+a-b}{\sqrt{(\ )(\ )(\ )}}$,

$$z=\pm\frac{a+b-c}{\sqrt{(\ )(\ )(\ )}} \quad (\text{複號同順})$$

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$ ノトキハ $x=y=z=0$ ノミ

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

但シ a, b, c ハ何レモ零ナラザル實數トス。 (松山高)

答 $x=y=z=0$, $x=(b+c-a)k$, $y=(c+a-b)k$, $z=(a+b-c)k$

但シ $k=\dfrac{2(a^2+b^2+c^2)}{3(a^2+b^2+c^2)-2(bc+ca+ab)}$ トス。

(9) 雜例

例 205. $x=(1-z)(1-x)$, $y=(1-x)(1-y)$, $z=(1-y)(1-z)$ ヲ解ケ。

方針 例 200 ニヨク似テ居ルノデ邊々乘ジテ $xyz=(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2$ トヤッテ見ルト左邊ノ xyz ニ困ル。ソコデ方針ヲ變ヘテ第一式ガ x ト z トノミデアルカラ x ヲ z 又ハ z ヲ x デ表ハシ得ルコトニ着眼シテ地味ナ代入法ヲ採用スル。

【解】

$$x=(1-z)(1-x) \cdots\cdots ①$$
$$y=(1-x)(1-y) \cdots\cdots ②$$
$$z=(1-y)(1-z) \cdots\cdots ③$$

①ヨリ $x=1-x-z(1-x)$ $\quad\therefore z(1-x)=1-2x$

$1-x\neq 0$ トシテ $\qquad z=\dfrac{1-2x}{1-x} \cdots\cdots ④$

STOP z ヲ x デ表ハシタカラ, y モ x デ表ハシ度イト考ヘテ

GO ②ヨリ $y=1-x-y(1-x)$ $\quad\therefore y(2-x)=1-x$

$2-x\neq 0$ トシテ $\qquad y=\dfrac{1-x}{2-x} \cdots\cdots ⑤$

④,⑤ヲ③ニ代入スルト $\dfrac{1-2x}{1-x}=\left(1-\dfrac{1-x}{2-x}\right)\left(1-\dfrac{1-2x}{1-x}\right)$

$$\therefore \frac{1-2x}{1-x}=\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x}{1-x}$$

$(1-x)(2-x)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$(1-2x)(2-x)=x$$

整頓スルト $\qquad x^2-3x+1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \cdots\cdots ⑥$$

コノ値ハ④,⑤ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ適スル。

⑥ヲ⑤ニ代入シテ

$$y=\frac{1-\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}{2-\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{1\mp\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(-1\mp\sqrt{5})(1\pm\sqrt{5})}{1-5}=\frac{-6\mp2\sqrt{5}}{-4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

同樣ニ

⑥ヲ④ニ代入シテ $z=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ヲ得ル。

答 $x=y=z=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[illegible]　⑥ヲ⑤ニ代入スルトキ，⑤ノ分子ガ分母ヨリ低次デナイコトニ着眼シ，⑤ヨリ

$y=\dfrac{x-1}{x-2}=1+\dfrac{1}{x-2}$ ト變形シテカラ⑥ヲ代入シテ

$$y=1+\frac{1}{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}-2}=1+\frac{2}{\pm\sqrt{5}-1}=1+\frac{2(\pm\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$=1+\frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ トシテモヨイ。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x(1+y)=2,\ y(1+z)=2,\ z(1+x)=2$　　（陸　士）

答　$x=y=z=1,\ x=y=z=-2$

例 206. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。
$(4-x)(17-y)=z,\ (6-x)(15-y)=2z,\ (7-x)(12-y)=3z$

着眼　逢々乘ジテモウマク出來ソウニナイ。ソコデ次數ニ着眼スルト z ニ就テ何レノ方程式モ一次デアルカラ z ヲ消去シテ x,y ノ聯立方程式ヲ導ク。

【解】　$(4-x)(17-y)=z$ ……………①

$(6-x)(15-y)=2z$ ……………②

$(7-x)(12-y)=3z$ ……………③

①×2−②ヨリ　$2(4-x)(17-y)-(6-x)(15-y)=0$

整頓スルト　$xy-19x-2y+46=0$ …………④

①×3−③ヨリ　$2xy-39x-5y+120=0$ …………⑤

④×2−⑤ヨリ　$x+y-28=0$　$\therefore\ y=28-x$ …………⑥

⑥ヲ④ニ代入シテ　$x^2-11x+10=0$

$\therefore\ x=1$　又ハ　$x=10$

(イ)　$x=1$ ナルトキ　⑥ヨリ $y=27$　①ヨリ $z=-30$

(ロ)　$x=10$ ナルトキ　$y=18$　$z=6$

答　$x=1,\ y=27,\ z=-30;\ x=10,\ y=18,\ z=6$

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x-2=(3-2y)z,\ 2x+1=(2+3y)z,\ 3x-2=(5+4y)z$

（一　高）

答　$x=-\dfrac{17}{6},\ y=\dfrac{2}{11},\ z=-\dfrac{11}{6}$

例 207. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$xt=yz$ ……………①

$x+y+z+t=23$ ……………②

$xy+xz+yt+zt=132$ ……………③

$xyz+xyt+xzt+yzt=644$ ……………④

但シ　$x<y<z<t$　トス。

着眼　一見スルト $x,\ y,\ z,\ t$ ガ對等ノ樣ニ見エルガ，①ニ着眼シテ x ト t; y ト z トヲ組合セ，$x+t$ ト xt，$y+z$ ト yz トヲ束ニシテ取扱フ。

【解】　$xt=yz$ ……………①

②ヨリ　$(x+t)+(y+z)=23$ ……………②′

③ヨリ　$y(x+t)+z(x+t)=132$　$\therefore\ (x+t)(y+z)=132$ ……③′

④ヨリ　$yz(x+t)+xt(y+z)=664$ ……………④′

STOP　②′ト③′トハ $(x+t)$ ト $(y+z)$ トニ關シテ和ト積ナル事ニ着眼シテ

GO　②′ト③′ヨリ $(x+t),\ (y+z)$ ハ

$X^2-23X+132=0$　即チ $(X-11)(X-12)=0$ ノ二根ニ等シイ。

依テ　$\left.\begin{array}{l}x+t=11\\ y+z=12\end{array}\right\}$……⑤　又ハ　$\left.\begin{array}{l}x+t=12\\ y+z=11\end{array}\right\}$……⑥

次ニ④′ニ①ヲ代入シテ　$yz\{(x+t)+(y+z)\}=644$

②′ヲ代入シテ　$23yz=644$　$\therefore\ yz=28$ ……⑦

⑦ヲ①ニ代入シテ　$xt=28$ ……⑧

⑤,⑥,⑦,⑧ヨリ次ノ二組ノ聯立方程式ガ成立スル。

㋑ $\begin{cases} x+t=11 \cdots\cdots ⑨ \\ xt=28 \cdots\cdots\cdots ⑩ \\ y+z=12 \cdots\cdots ⑪ \\ yz=28 \cdots\cdots\cdots ⑫ \end{cases}$　又ハ　㋺ $\begin{cases} x+t=12 \cdots\cdots ⑨' \\ xt=28 \cdots\cdots\cdots ⑩' \\ y+z=11 \cdots\cdots ⑪' \\ yz=28 \cdots\cdots\cdots ⑫' \end{cases}$

和ガ 11, 積ガ 28 ナル如キ二數ハ 4 ト 7,

和ガ 12, 積ガ 23 ナル如キ二數ハ $p^2-12p+28=0$ ノ二根

即チ $6+2\sqrt{2}$, ト $6-2\sqrt{2}$ トデアル。

㋑ ナル場合　⑨ト⑩ヨリ　$x=4,\ t=7$　$(\because\ x<t)$

⑪ト⑫ヨリ　$y=6-2\sqrt{2},\ z=6+2\sqrt{2}$　$(\because\ y<z)$

シカルニ　$6-2\sqrt{2}=6-2(1.414\cdots\cdots)<4$

$\therefore$ $y<x$ トナリ假定ニ反ス。

㋺ ナル場合ハ ⑨′ト⑩′ トヨリ　$x=6-2\sqrt{2},\ t=6+2\sqrt{2}$ $(\because x<t)$

⑪′ト⑫′ トヨリ　$y=4,\quad z=7$　$(\because\ y<z)$

而シテ　$6-2\sqrt{2}<4<7<6+2\sqrt{2}$　ナル故

$x<y<z<t$　トナリテ題意ニ適スル。

答　$x=6-2\sqrt{2},\ y=4,\ z=7,\ t=6+2\sqrt{2}$

指導綱括　折角正シク解キ乍ラ㋑ノ場合ニ於ケル最後ノ驗シヲ忘レテ二組ノ答ヲ書ク者ガアル。

【試練問題】　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$1-x^2=0,\ 1-y^2=w,\ xy=0,\ u+xz=2w,\ v+yz=0,$

$u^2+v^2-z^2=0$　(一　高)

答　x, y, z, u, v, w ノ順ニ $(1,0,1,1,0,1), (-1,0,-1,1,0,1)$

鍛錬問題十三

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(143—150)

143. $z^2+xy+6=0,\ x+3y+2z=3,\ x+2y+3z=2$　(海　機)

144. $x-y+z=3,\ xy+yz-zx=13,\ xyz=15$　(滿醫豫, 海事, 三高)

145. $(xy+y^2)(zx+z^2)=40,\ (yz+z^2)(xy+x^2)=-35,$

$(zx+x^2)(yz+y^2)=-56$　(東商豫)

146. $xy-2x-3y=-4,\ yz+y-2z=12,\ zx+x-3z=8$

147. $y^2+zx=3,\ z^2+xy=3,\ yz=1$

148. $y^2+z^2=x+1,\ z^2+x^2=y+1,\ x^2+y^2=z+1$

149. $\dfrac{yz}{6}=\dfrac{zx}{3}=\dfrac{xy}{2},\ x^2+y^2+z^2=x+y+z+20$

150. $x+(2z+3)y=19,\ (2z-3)x-5y=-7,\ 2x+2y-z=3$

(旅大豫)

答 143. $\begin{cases} x=10 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{15}{4} \\ y=\dfrac{7}{4} \\ z=\dfrac{3}{4} \end{cases}$　144. $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \begin{cases} -3 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 5 \\ 3 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} -3 \\ -5 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ -5 \\ -3 \end{cases}$

145. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{cases} \begin{cases} -1 \\ 2 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} i \\ -2i \\ -5i \end{cases} \begin{cases} -i \\ 2i \\ 5i \end{cases}$　146. $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=4 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-6 \end{cases}$

147. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \begin{cases} -2 \\ -1 \\ -1 \end{cases}$　148. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

149. $\begin{cases} x=\dfrac{10}{7} \\ y=\dfrac{20}{7} \\ z=\dfrac{30}{7} \end{cases} \begin{cases} -1 \\ -2 \\ -3 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -4 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 5 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -4 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} -5 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 4 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

150. $x=1,\ y=2,\ z=3\ ;\ x=\dfrac{3}{2},\ y=-\dfrac{5}{2},\ z=-5$

第二十七章　聯立分數，聯立無理，方程式ノ解法

1. 聯立分數方程式ノ解法

一般解法トシテハ，各方程式ノ分母ヲ拂フカ，置換法ニヨツテ整方程式ヲ導イテ解クノデアルガ，一般解法ニ依ツテ解ク問題ヨリモ特殊解法(邊々割ツタリ，對稱ニ着眼スル等)ニヨル場合ノ方ガ多イカラ，先ヅ特殊解法ヲ工夫シテ見ルガヨイ。

尙聯立分數方程式ヲ解イタ場合モ得タ根ガ原方程式ノ分母ヲ零ナラシムルヤ否ヤヲ吟味シ，零ナラシムルモノハ之ヲ捨テナケレバナラヌコトハ言フ迄モナイ事デハアルガ，之ヲ忘レル者ガ非常ニ多イカラ特ニ注意ヲシテ置ク。

2. 未知項ガ逆數ノミノ場合

例 208. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4y^2}=3,\quad \frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{4y^2}=9$$

着眼　未知項ガ x, y ニ關シテ逆數ノミデアルカラ，置換法ヲ用ヒル

【解】 $\frac{1}{x}=X$，$\frac{1}{2y}=Y$ ト置ケバ　$2XY=\frac{1}{xy}$ トナルカラ

原方程式ハ
$$\begin{cases} X^2-Y^2=3 & \cdots\cdots ① \\ X^2-2XY+Y^2=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①ヨリ　$(X+Y)(X-Y)=3 \cdots\cdots ①'$

②ヨリ　$(X-Y)^2=9 \quad \therefore\ X-Y=\pm 3 \cdots\cdots ②'$

①′ト②′ヨリ　$\begin{cases} X-Y=3 \\ X+Y=1 \end{cases}$　又ハ　$\begin{cases} X-Y=-3 \\ X+Y=-1 \end{cases}$

$\therefore\ X=2,\ Y=-1$　又ハ　$X=-2,\ Y=1$

即チ　$\frac{1}{x}=2,\ \frac{1}{2y}=-1$　又ハ　$\frac{1}{x}=-2,\ \frac{1}{2y}=1$

依テ　$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$　又ハ　$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

コレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ所要ノ根デアル。

答　$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$；　$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

[illegible]　置換法ヲ用ヒタ場合ニ得タル根ガ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイ事ヲ述ベヌ者ガ特ニ多イ。

【試練問題】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=91,\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$$

答　$x=-\frac{1}{5},\ y=-\frac{1}{6}$；$x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{5}$

(2)　二ツノ未知數ニ關シテ對稱ナ場合

例 209. 次ノ等式ヲ滿足スル a，b ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}=\frac{5}{3},\quad a^2+b^2=2$$

着眼　二文字 a, b ニ關シテ對稱ナル事ニ着眼シテ $(a+b)$ ト ab トヲ東ニシテ解ク。

【解】 $\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}=\frac{5}{3} \cdots\cdots ①$　　$a^2+b^2=2 \cdots\cdots ②$

①ノ兩邊ニ $3(a+1)(b+1)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$3\{(a^2+b^2)+(a+b)\}=5\{ab+(a+b)+1\}$$

②ヲ代入シテ整頓スルト　$5ab+2(a+b)=1 \cdots\cdots ①'$

②ヨリ　$(a+b)^2-2ab=2 \cdots\cdots ②'$

STOP　①′ト②′トヨリ ab ヲ消去スレバ $(a+b)$ ガ得ラレルト考ヘテ

GO　①′×2+②′×5　ヨリ

$$5(a+b)^2+4(a+b)-12=0$$

$$\therefore\ \{5(a+b)-6\}\{(a+b)+2\}=0$$

$$\therefore\ a+b=\frac{6}{5}\quad 又ハ\quad a+b=-2$$

（イ）$a+b=\frac{6}{5}$ ノトキ ①′ ヨリ $ab=-\frac{7}{25}$

依テ a, b ハ $t^2-\frac{6}{5}t-\frac{7}{25}=0$ ノ二根ニ等シイ

之ヲ解クト　$25t^2-30t-7=0$　$\therefore\ t=\frac{7}{5}$ 又ハ $t=-\frac{1}{5}$

$$\therefore\ a=\frac{7}{5},\ b=-\frac{1}{5}\quad 又ハ\quad a=-\frac{1}{5},\ b=\frac{7}{5}$$

コレラノ値ハ共ニ ① ノ分母ヲ零ナラシメナイカラ題意ニ適スル

（ロ）$a+b=-2$ ナルトキハ ①′ ヨリ $ab=1$

依テ a, b ハ $t^2+2t+1=0$ ノ二根 -1（等根）ニ等シイ。

$$\therefore\ a=b=-1$$

シカルニコノ値ハ ① ノ分母ヲ0ナラシメルカラ適シナイ。

答　$a=\frac{7}{5},\ b=-\frac{1}{5}$；$a=-\frac{1}{5},\ b=\frac{7}{5}$

[illegible]　$a=b=-1$ ガ①ノ分母ヲ零ナラシメル事ニ氣付カズ之ヲ答トスルモノ多數。

【試練問題】　$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$　ヲ解ケ。

（製　工）

答　$x=y=6,\ x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{-3\mp3\sqrt{5}}{2}$（複號同順）

例 210. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y}{x}-\frac{1}{xy}=1\frac{1}{2},\quad xy-\frac{x}{y}=1\frac{1}{2}$$

着眼　1. 未知項 $\frac{y}{x}$ ト $\frac{x}{y}$；$\frac{1}{xy}$ ト xy トガ互ニ逆數ナルコトニ着眼シテ置換法ヲ用ヒル。

【解】　$xy=X,\ \frac{x}{y}=Y$ ト置ケバ

① ハ　$\frac{1}{Y}-\frac{1}{X}=\frac{3}{2}$ ……①′，　② ハ　$X-Y=\frac{3}{2}$ …… ②′

STOP　①′ト②′トハ共ニ X, Y ニ關スル交代式ナルコトニ着眼シテ X－Y ト XY トヲ束ニシテ解ク。

GO　①′ヨリ　$\frac{X-Y}{XY}=\frac{3}{2}$ ……………… ③

②′÷③ヨリ　$XY=1$ ……………… ④

②′ヨリ　$X=Y+\frac{3}{2}$ ……………… ⑤

⑤ヲ④ニ代入シテ　$Y^2+\frac{3}{2}Y=1$　$\therefore\ 2Y^2+3Y-2=0$

$$\therefore\ (2Y-1)(Y+2)=0\quad \therefore\ Y=\frac{1}{2}\quad 又ハ\quad Y=-2$$

（イ）$Y=\frac{1}{2}$ ナルトキ⑤ヨリ $X=2$

$$\therefore\ \begin{cases} xy=2 & \cdots\cdots ⑥ \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

⑥×⑦ヨリ $x^2=1$　$\therefore\ x=\pm1$

⑥ニ代入シテ　$y=\pm2$

（ロ）$Y=-2$ ナルトキ

$X=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \begin{cases} xy=-\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ⑧ \\ \dfrac{x}{y}=-2 & \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

⑧×⑨ヨリ $x^2=1$　$\therefore\ x=\pm1$

⑧ニ代入シテ　$y=\mp\frac{1}{2}$

コレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。

答　$x=\pm1,\ y=\pm2$；$x=\pm1,\ y=\mp\frac{1}{2}$（複號同順）

着眼 2. ①ノ左邊カラ $\frac{1}{x}$ ヲ括リ出スト $\frac{1}{x}\left(y-\frac{1}{y}\right)$
②ノ左邊カラ x ヲ括リ出スト $x\left(y-\frac{1}{y}\right)$ トナリ

括弧内ガ揃フ事ニ着眼スルト次ノ如ク簡單ニ解キ得ル。

【別解】 ①ヨリ　$\frac{1}{x}\left(y-\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{2}$ …………①′

②ヨリ　$x\left(y-\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{2}$ …………②′

$y-\frac{1}{y}\neq 0$ 〔∵ $y-\frac{1}{y}=0$ トスルト $0=\frac{3}{2}$ トナルカラ〕

依テ ②′÷①′ヨリ　$x^2=1$　∴ $x=\pm 1$

(イ) $x=1$ ナルトキ

②′ヨリ　$y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$

$y\neq 0$　∴ $2y^2-3y-2=0$

∴ $(2y+1)(y-2)=0$

∴ $y=-\frac{1}{2}$ 又ハ 2

(ロ) $x=-1$ ナルトキ

②′ヨリ　$y-\frac{1}{y}=-\frac{3}{2}$

∴ $2y^2+3y-2=0$

∴ $(2y-1)(y+2)=0$

∴ $y=\frac{1}{2}$ 又ハ -2

コレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ適スル。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{20}{3},\quad xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$ (高農，横商專)

答 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm 3$; $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$ (複號同順)

(3) 二次ノ同次方程式ヲ得ル場合

例 211. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(A) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}$,　$x^2-y^2=3$

(B) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+y}=5$,　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x-y}=5$

(A) **着眼** 第一式ノ分母ヲ拂ヘバ直チニ二次ノ同次方程式ヲ得ルコトニ着眼シテ分母ヲ拂フ。

【解】 $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}$ ……①　$x^2-y^2=3$ ……②

①ノ分母ヲ拂ヘバ　$6(x^2+y^2)=10(x^2-y^2)$

∴ $4x^2=16y^2$　∴ $x=\pm 2y$ …………③

(イ) $x=2y$ ノトキ ②ヨリ　$y^2=1$　∴ $y=\pm 1$, $x=\pm 2$.(複號同順)

(ロ) $x=-2y$ ノトキ ②ヨリ $y^2=1$　∴ $y=\pm 1$, $x=\mp 2$(複號同順)

コレラノ値ハ何レモ ① ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。

答 $x=2, y=1$; $x=2, y=-1$; $x=-2, y=1$; $x=-2, y=-1$

指導總括 $x=\pm 2$, $y=\pm 1$ ノミヲ答トスルモノガ多イ。コレデハ根ガ幾組カ明ラカデナイ。

(B) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+y}=5$ …①　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x-y}=5$ …②

着眼 コノマヽ分母ヲ拂フト，共ニ三次方程式トナッテ解法ガ容易デナイ。ソコデ常數項ヲ消去シテカラ分母ヲ拂フト二次ノ同次方程式ガ得ラレル事ニ着眼シテ解ク。

【解】 ①−②ヨリ　$\frac{2}{y}+\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=0$

$y(x+y)(x-y)\neq 0$ トシテ分母ヲ拂ヘバ

$2x^2-2y^2+xy-y^2-xy-y^2=0$ ……〔二次ノ同次方程式ヲ得タ〕

∴ $x^2=2y^2$　∴ $x=\pm\sqrt{2}\,y$

(イ) $x=\sqrt{2}\,y$ ナルトキ

①ニ代入シテ　$\frac{1}{\sqrt{2}\,y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)y}=5$

分母ヲ有理化スルト　$\frac{\sqrt{2}}{2y}+\frac{1}{y}+\frac{\sqrt{2}-1}{y}=5$

∴ $\frac{3\sqrt{2}}{2y}=5$　∴ $y=\frac{3\sqrt{2}}{10}$　∴ $x=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(ロ) $x=-\sqrt{2}\,y$ ナルトキ 同樣ニシテ $y=-\frac{3\sqrt{2}}{10}$,　$x=\frac{3}{5}$

コレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメザル故所要ノ根デ

アル。　　答 $x=\dfrac{3}{5}$, $y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$xy-\frac{x}{y}=2,\qquad xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$$

答 $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $y=\pm\sqrt{5}$ （複號同順）

(4) 一般解法ニヨルモノ

例 212. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}=1,\quad \frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-1}=2$$

着眼 形ガイヽカラ置換法デ出來ソウデアルガ，分母ガ揃ツテキナイカラ，分母ヲ拂ツテ解ク。

【解】 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+2}=1$……① $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=2$……②

$(x+1)(y+2)$ ヲ乘ジテ①ノ分母ヲ拂ヘバ

$y+2+x+1=xy+2x+y+2$ $\therefore$ $xy+x=1$……①′

②ノ分母ヲ拂ツテ整頓スレバ　$2xy-3x-5y=-7$……②′

STOP ①′ト②′ニ於テ xy ノ項ヲ消去スレバ一次方程式ヲ得ルト考ヘテ

GO ①′×2−②′ヨリ　$5x+5y=9$ $\therefore$ $y=\dfrac{9-5x}{5}$……③

③ヲ①′ニ代入シテ整頓スルト　$5x^2-14x+5=0$

$$\therefore\ x=\frac{7\pm\sqrt{24}}{5}=\frac{7\pm2\sqrt{6}}{5}\ \cdots\cdots④$$

④ヲ③ニ代入シテ　$y=\dfrac{9}{5}-\dfrac{7\pm2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{2\mp2\sqrt{6}}{5}$

コレラノ値ハ①,②ノ分母ヲ 0 ナラシメザル故所要ノ根デアル。

答 $x=\dfrac{7\pm2\sqrt{6}}{5}$, $y=\dfrac{2\mp2\sqrt{6}}{5}$ （複號同順）

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x+y}{1-xy}=3,\quad \frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$$

答 $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$; $x=-1$, $y=-2$

例 213. 方程式 $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2$, $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=2$ ヲ解ケ

但シ $a^2\neq b^2$ トスル。

方針 第一式ノ分子ガ分母ヨリ低次デナイ事ニ着眼シ $1+\dfrac{a}{x-a}$ ナル形ニ變形シタ後，分母ヲ拂ツテ解ク。

【解】 $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2$……① $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=2$…………②

①ヨリ　$1+\dfrac{a}{x-a}+1+\dfrac{b}{y-b}=2$ $\therefore$ $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{y-b}=0$

$(x-a)(y-b)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト　$bx+ay=2ab$……③

②ノ兩邊ニ ab ヲ乘ジテ分母ヲ拂フト　$ax+by=2ab$……④

③−④ヨリ　$(b-a)x-(b-a)y=0$ $\therefore$ $(b-a)(x-y)=0$

シカルニ $a^2\neq b^2$ ナル故 $b-a\neq0$ $\therefore$ $x=y$ ………⑤

⑤ヲ④ニ代入シテ　$(a+b)y=2ab$

$a^2\neq b^2$ $\therefore$ $a+b\neq0$ $\therefore$ $y=\dfrac{2ab}{a+b}$, ⑤ヨリ $x=\dfrac{2ab}{a+b}$

STOP 文字係數デアルカラ分母ヲ 0 ナラシムルヤ否ヤノ驗シハ觀察ダケデハ不充分ト考ヘテ

GO【驗シ】 $x=y=\dfrac{2ab}{a+b}$ ナルトキ

①ノ分母ノ L.C.M. $(x-a)(x-b)=\left(\dfrac{ab-a^2}{a+b}\right)\left(\dfrac{ab-b^2}{a+b}\right)$

$$=\frac{-ab(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

シカルニ假定ニヨリ $a^2 \neq b^2$ ナル故 $(a+b)(a-b) \neq 0$

又 a, b ハ②ノ分母ノ既知數ナル故零ナラズ

$$依テ \quad \frac{-ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \neq 0$$

$\therefore \; x=y=\dfrac{2ab}{a+b}$ ハ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメザル故根ナリ。

$$答 \quad x=y=\frac{2ab}{a+b}$$

指導綱括 得タ根ガ與式ノ分母ヲ零ニシナイコトヲ確カメルコトヲ忘レルモノ多ク，コノ吟味ノ必要ナコトニ氣付イタ者ノ中デモ形式的ニ「コノ値ハ與式ノ分母ヲ零トセズ」ト述ベルダケノモノヤ，又ソノ理由ヲ説明セントシテ失敗スルモノ多ク，結局完全ナ解答ヲ得ル者ハ甚ダ少ナイ。尙與式ニ $\dfrac{y}{a}$ トアレバ「a ハ零デナイ」ト斷定シテヨイコトヲ知ラナイモノガ多イ。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+y=a+b, \quad \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1 \qquad (東　薬)$$

答 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$　$\begin{cases} x=2a-b \\ y=2b-a \end{cases}$ 但シ $ab(a+b) \neq 0$ トス。

注 一應ハコノ程度ニ答ヘ，尙餘裕ガアレバ更ニ詳シク吟味シテ

$$\begin{cases} a+b=0,\ ab \neq 0 \text{ ナルトキ } x=2a-b,\ y=2b-a \text{ ノミ} \\ a+b \neq 0,\ ab=0 \text{ ナルトキ } x=a,\quad y=b \text{ ノミ} \\ a+b=0,\ ab=0 \text{ 即チ } a=b=0 \text{ ナルトキ 根ナシ。} \end{cases}$$

(5)　三元聯立分數方程式

例 214. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=3x, \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=4y, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5z$$

方針 1. 分母ヲ拂フト未知項ガ x^2, y^2, z^2 ト xyz ノミニナルコトニ着眼シテ之等ヲ束ニシテ取扱フ。

【解】 各方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2&=3xyz \\ z^2+x^2&=4xyz \\ x^2+y^2&=5xyz \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

邊々加ヘテ 2 デ割レバ　$x^2+y^2+z^2=6xyz$ ……①

(A) ト①ヨリ

$$\begin{cases} x^2=3xyz \cdots\cdots ② \\ y^2=2xyz \cdots\cdots ③ \\ z^2=xyz \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

②,③,④ヲ邊々乘ズレバ　$(xyz)^2=6(xyz)^3$

シカルニ $xyz \neq 0$ (∵ 原方程式ノ分母)

$$\therefore \quad xyz=\frac{1}{6} \cdots\cdots ⑤$$

⑤ヲ②,③,④ノ右邊ニ代入スレバ　$x^2=\dfrac{1}{2}$, $y^2=\dfrac{1}{3}$, $z^2=\dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

STOP コレラノ複號ノ組合セハ合計八組出來ルガ，⑤ヨリ積ガ正ナルベキ事ヲ考慮シテ

GO 然ルニ⑤ヨリ $xyz>0$ ナルベキ故積ガ正トナル樣ニ符號ヲ考ヘテ

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z=\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z=\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

ノ四組ノ根ヲ得ル。而シテコレラノ値ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ零ナラシメナイ。依テ上記ノ四組ガ所要ノ根デアル。

指導綱括 積 xyz ガ正ナルコトヲ看過シ，五組以上ノ値ヲ根トシテ掲ゲルモノ少ナカラザルハ遺憾トスル所ナリ。

方針 2. 各方程式ヲ順次 x, y, z デ割ルト未知項ガ $\dfrac{x}{yz}$, $\dfrac{y}{zx}$, $\dfrac{z}{xy}$ ノミトナル事ニ着眼シテ置換法ニ依ル。

【解】 $x,\ y,\ z$ ハ原方程式ノ分母ナル故 0 ナル事ヲ得ズ。

依テ各式ノ兩邊ヲ順次 $x,\ y,\ z$ デ割ルト

$$\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=3,\quad \frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}=4,\quad \frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}=5$$

今 $\dfrac{x}{yz}=\mathrm{X},\ \dfrac{y}{zx}=\mathrm{Y},\ \dfrac{z}{xy}=\mathrm{Z}$ ト置ケバ

$$\mathrm{Y}+\mathrm{Z}=3,\qquad \mathrm{Z}+\mathrm{X}=4,\qquad \mathrm{X}+\mathrm{Y}=5\cdots\cdots Ⓐ$$

邊々加ヘテ 2 デ割レバ　$\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}=6\cdots\cdots Ⓑ$

Ⓐ, Ⓑヨリ　$\mathrm{X}=3,\quad \mathrm{Y}=2,\quad \mathrm{Z}=1$

$$\therefore\ \frac{x}{yz}=3\cdots ①\quad \frac{y}{zx}=2\cdots ②\quad \frac{z}{xy}=1\cdots ③$$

①×②×③ヨリ　$\dfrac{xyz}{x^2y^2z^2}=6$

シカル＝ $xyz\neq 0$　$\therefore\ xyz=\dfrac{1}{6}\cdots\cdots ④$

STOP コヽデ ①×④, ②×④, ③×④ヨリ $x^2=\dfrac{1}{2},\ y^2=\dfrac{1}{3},\ z^2=\dfrac{1}{6}$ ヲ導キ，複號ノ組合セヲ前頁ノ解ト同樣＝考ヘルト所要ノ根ヲ得ルガ別法ヲ示ス事＝スル。

GO ①×④ヨリ　$x^2=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

①×⑤ヨリ　$y^2=\dfrac{1}{3}$　$\therefore\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　（組合セ四組）

シカル＝③ヨリ　$z=xy$　ナル故

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ノトキ　$z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ノトキ　$z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ノトキ　$z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ノトキ　$z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

コレラノ四組ノ根ハ何レモ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメザル故所要ノ根デアル。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{7}{x},\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{8}{y},\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{9}{z}\qquad \text{(東 醫)}$$

答 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\ y=\sqrt{15}\\ z=2\sqrt{5}\end{cases}\quad \begin{cases}2\sqrt{3}\\ -\sqrt{15}\\ -2\sqrt{5}\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sqrt{3}\\ \sqrt{15}\\ -2\sqrt{5}\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sqrt{3}\\ -\sqrt{15}\\ 2\sqrt{5}\end{cases}$

例 215. $\dfrac{1}{29}\left(x+\dfrac{y}{z}\right)=\dfrac{1}{34}\left(y+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{1}{6},\qquad x+y+z=15$

ナル聯立方程式ヲ解ケ。

【解】 $\dfrac{1}{29}\left(x+\dfrac{y}{z}\right)=\dfrac{1}{6},\quad \dfrac{1}{34}\left(y+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{1}{6},\quad x+y+z=15$

$$\therefore\ \begin{cases}x+\dfrac{y}{z}=\dfrac{29}{6}\cdots\cdots ①\\[2mm] y+\dfrac{x}{z}=\dfrac{34}{6}\cdots\cdots ②\\[2mm] x+y+z=15\cdots\cdots ③\end{cases}$$

STOP コノ三式ヲ觀察シ，x ト y ト＝就テ對稱ナルコト＝着眼シテ解ク。

GO ①＋②ヨリ　$(x+y)+\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{63}{6}\cdots\cdots ④$

③ヨリ　$x+y=15-z\cdots\cdots ⑤$

⑤ヲ④＝代入シテ　$15-z+\dfrac{15-z}{z}=\dfrac{21}{2}$

分母ヲ拂ツテ整頓スルト　$2z^2-7z-30=0$

$\therefore\ (2z+5)(z-6)=0\qquad \therefore\ z=-\dfrac{5}{2}$ 又ハ 6

コノ z ノ値ハ共＝原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。

（イ） $z=-\dfrac{5}{2}$ ナルトキ $\begin{cases}⑤ヨリ\quad x+y=\dfrac{35}{2}\cdots\cdots ⑦\\[2mm] ①ヨリ\quad x-\dfrac{2y}{5}=\dfrac{29}{6}\cdots\cdots ⑧\end{cases}$

コレヲ解キテ　$x=\dfrac{355}{42},\quad y=\dfrac{190}{21}$

(ロ) $z=6$ ナルトキ $\begin{cases} ⑤ヨリ & x+y=9 \\ ①ヨリ & x+\dfrac{y}{6}=\dfrac{29}{6} \end{cases}$

コレヲ解キテ $x=4,\quad y=5$

答 $x=4,\ y=5,\ z=6$ 又ハ $x=\dfrac{355}{42},\ y=\dfrac{190}{21},\ z=-\dfrac{5}{2}$

指導總括 $(x+y)$ ヲ束ニシテ取扱フ事ニ氣付キタル者ハ大部分出來ル筈デ，コレニ氣付クコトガコノ問題ノ急所デアル。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x}{y+z+1}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z$$ (日大專醫)

答 $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{6},\ z=-\dfrac{1}{6}$

2. 聯立無理方程式ノ解法

兩邊ヲ平方スルカ**置換法**ニヨツテ**整方程式ニ導イテ解ケバヨイ**ノデアルガ，何レノ方法ニヨル場合ニモ**無緣根ニ對スル驗シヲ答案ニ書ク事ヤ**，無緣根ノ導入セラレナイ場合ニハ**驗シヲ要シナイ理由ヲ明ラカニ示ス事**ヲ忘レテハナラヌ。

注 聯立無理方程式モ聯立分數方程式ノ場合ト同樣ニ**特殊解法**（主トシテ**置換法**ニヨル）ニヨツテ解キ得ルコトガ多イカラ，先ヅ置換法ニ依レナイカト考ヘ，置換法ガウマク出來ヌトキニ一般解法（**兩邊ヲ平方シテ解ク法**）ヲ用ヒル樣ニスレバヨイ。

例 216. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。
$x+y+\sqrt{x+y}=12,$ ……① $x^3+y^3=189$……②

着眼 **根式一ツ**デアルカラ**置換法**ニヨル。尙 x,y ニ**關シテ對稱**ナル事ヲモ考慮シテ $x+y$ ト xy ヲ束ニシテ取扱フ。

【解】 $\sqrt{x+y}=X$ ト置ケバ ①ヨリ $X^2+X-12=0$

$\therefore\ (X-3)(X+4)=0$

シカルニ X 即チ $\sqrt{x+y}$ ハ負デハナイ $\therefore\ X+4\neq0$

$\therefore\ X=3$ 即チ $\sqrt{x+y}=3$……③

③ノ兩邊ヲ平方スルト $x+y=9$……④

（コノトキ無緣根ハ入リ來ラズ $\because\ \sqrt{x+y}\neq-3$）

②ヨリ $(x+y)(x^2-xy+y^2)=189$

④ヲ代入シテ $x^2-xy+y^2=21$……⑤

$④^2-⑤$ヨリ $3xy=60$

$\therefore\ xy=20$……⑥

④ト⑥ヨリ $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ 又ハ $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$

コノ解法ニ於テハ無緣根ハ導入セラレナイカラ，コレガ所要ノ根デアル。

答 $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$

[illegible] $X=-4$ ヨリ $\sqrt{x+y}=-4$ ヲ平方シテ解キ x,y ノ値ヲ出シテ然ル後①ニ代入シテ驗シヲ行フ者ヤ，驗シヲ忘レテ其儘答ニ採用スル者ガアル。**根式ガ負ヲ表ハサヌ事位ハ如何ナル場合ニモ忘レテハナラナイ。**

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$x-y+\sqrt{x-y}=2,\ x^3-y^3=61$ (東商專)

答 $x=5,\ y=4;\ x=-4,\ y=-5$

例 217. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。
$x+y=7+\sqrt{x}+\sqrt{y},\ (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=12$ ヲ解ケ。

着眼 **第二式ガ** $(x-\sqrt{x}),\ (y-\sqrt{y})$ ヲ束ニシテ解ケト暗示シテ居ル。

【解】第一式ヨリ $(x-\sqrt{x})+(y-\sqrt{y})=7$ ……………①
第二式ヨリ $(x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=12$ ……………②
$x-\sqrt{x}=X,\ y-\sqrt{y}=Y$ ト置ケバ

$$X+Y=7,\quad XY=12$$

依テ (イ) $\begin{cases} X=3 \\ Y=4 \end{cases}$ 又ハ (ロ) $\begin{cases} X=4 \\ Y=3 \end{cases}$

(イ)ナルトキハ $\begin{cases} x-\sqrt{x}=3 \cdots\cdots③ \\ y-\sqrt{y}=4 \cdots\cdots④ \end{cases}$

③ヨリ $x-3=\sqrt{x}$
兩邊ヲ平方スルト $x^2-6x+9=x$

$$\therefore\quad x^2-7x+9=0 \qquad \therefore\ x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

【驗シ】

$x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ ノトキ ③ノ左邊$=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}}$

$$=\frac{7+\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{14+2\sqrt{13}}}{2}=\frac{7+\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{13}+1}{2}=3=\text{右邊}$$

$x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ ノトキ ③ノ左邊$=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}}$

$$=\frac{7-\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{13}-1}{2}=4-\sqrt{13}\neq\text{右邊}$$

STOP 十人中八九人迄ハコノ方法ヲ行ヒ，然モ根ノ驗シヲ忘レテ無緣根ヲ答トシタリ，反對ニ驗シノ計算ヲ誤ツテ正シイ根ヲ捨テル樣ナモノガアル。③ガ根式一ツナル事ニ着眼シテ置換法ヲ採用スルト次ノ樣ニ簡單ニナル。

GO $\sqrt{x}=p$ ト置クト ③ハ $p^2-p-3=0$ $\therefore\ p=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

シカルニ p 即チ $\sqrt{x}$ ハ負デハナイ。$\therefore\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<0$ ハ適シナイ

$$\therefore\quad \sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

コノ兩邊ヲ平方シテモ無緣根ハ導入セラレナイ。

$$\therefore\quad x=\frac{1+2\sqrt{13}+13}{4}=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

同樣ニ④ヨリ $\sqrt{y}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$，$\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}<0\right.$ ナル故之ヲ捨テル$)$

兩邊ヲ平方シテ

$$y=\frac{18+2\sqrt{17}}{4}=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$$ （無緣根ハ導入セラレナイ）

(ロ)ノ場合ハ④ニ於ケル x ト y トガ交換サレルダケデアルカラ

$$x=\frac{9+\sqrt{17}}{2},\qquad y=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

コノ解法ニ於テハ無緣根ハ導入セラレナイカラコレラノ値ハ共ニ所要ノ根デアル。

答 $x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$，$y=\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$；$x=\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$，$y=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$

[illegible] 置換法ノ妙味ヲ充分ニ活用スベキ問題デアル。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+y=8+\sqrt{x}+\sqrt{y},\quad (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=12$$

答 $x=4,\ y=9$；$x=9,\ y=4$.

例 218. $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \cdots\cdots① \\ x^2-y^2=64 \cdots\cdots\cdots② \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

【解】 $\sqrt{x+y}=X,\quad \sqrt{x-y}=Y$ ト置クト
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=X^2.Y^2$

$\therefore\ \begin{cases} X-Y=2 \cdots\cdots①' \\ X^2Y^2=64 \cdots\cdots②' \end{cases}$

①′ヨリ $X=Y+2$ ……………③
②′ヨリ $XY=\pm8$ ……………④

STOP コヽデ XY 即 $\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}$ ハ負ナラザル故 -8 ヲ捨テル。トヤル者ガアルガ之ハイケナイ $(\because \sqrt{-3}\sqrt{-27}=(i\sqrt{3})(i\sqrt{27})=-9<0$ ノ如キ場合ガアルカラ）

（イ）　$XY=8$　ナルトキ

③ヲ代入スルト　$Y^2+2Y-8=0$　$\therefore (Y+4)(Y-2)=0$

シカルニ　Y 即チ $\sqrt{x-y}$ ハ負デハナイ　$\therefore Y+4\neq 0$

$\therefore\ Y=2$　従ッテ　③ヨリ　$X=4$

$\therefore\quad \sqrt{x-y}=2\qquad \sqrt{x+y}=4$

コレラノ兩邊ヲ平方シテモ無縁根ハ導入セラレナイ。

$\therefore\ x-y=4,\qquad x+y=16$

之ヲ解イテ　$x=10,\quad y=6$

（ロ）　$XY=-8$　ナルトキハ

③ヲ代入シテ　$Y^2+2Y+8=0$

$\therefore\ Y=-1\pm\sqrt{-7}\quad \therefore \sqrt{x-y}=-1\pm\sqrt{-7}$

之ハ根號ノ規約ニ反スルカラ捨テル。

（$\sqrt{A}$ ナル形ノ數ハ正數カ，零カ，純虚數ヲ表ハスカラ）

答　$x=10,\quad y=6$

【別法】　一般解法デ解イテ見ル

【解】　$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2$……①　$x^2-y^2=64$……②

①ヨリ　$\sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}+2$

兩邊ヲ平方スルト　$x+y=x-y+4\sqrt{x-y}+4$

$\therefore\ y-2=2\sqrt{x-y}$

再ビ兩邊ヲ平方スルト　$y^2-4y+4=4x-4y$

$\therefore\ y^2=4x-4$ ……………………③

之ヲ②ニ代入スルト　$x^2-(4x-4)=64$

$\therefore\ x^2-4x-60=0$　$\therefore x=10$ 又ハ -6

（イ）　$x=10$　ナルトキ

③ヨリ　$y^2=36$

$\therefore\ y=\pm 6$

（ロ）　$x=-6$　ナルトキ

③ヨリ　$y^2=-28$

$\therefore\ y=\pm 2\sqrt{7}\,i$

【驗シ】i）　$x=10$ $y=6$ ナルトキ

①ノ左邊 $=\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2=$ 右邊

依テ $x=10,\ y=6$ ハ原方程式ヲ滿足スル。

STOP　コノ値ヲ更ニ②ニ代入シテ左邊＝右邊ヲ示ス者ガアルガ，之ハ無理方程式ノ驗シヲ何ノ爲ニヤラネバナラヌノカガワカツテキナイ人

デアル。②ノ兩邊ヲ平方シタノデハナイカラ②ニ就テ驗ス必要ハナイ

GO　ii）　$x=10,\ y=-6$　ナルトキ

①ノ左邊 $=\sqrt{4}-\sqrt{16}=2-4=-2\neq$ 右邊

$\therefore\ x=10,\ y=-6$ ハ無縁根デアル。

iii）　$x=-6,\ y=\pm 2\sqrt{7}\,i$　ナルトキ

①ノ左邊 $=\sqrt{-6\pm 2\sqrt{7}\,i}-\sqrt{-6\mp 2\sqrt{7}\,i}$　トナリ

根號内ガ虚數ナル如キ數ハ我々ノ取扱フ數デナイカラ捨テル。

答　$x=10,\ y=6$

【試練問題】　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。但シ根ノ近似値ヲ四捨五入法ニヨリ小數第二位マデ算出セヨ。

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3,\ x+y=1-xy$$　（一　高）

答 $\begin{cases} x=4.83 & 弱 \\ y=-0.66 & 弱 \end{cases}\quad \begin{cases} x=-0.66 & 弱 \\ y=4.83 & 弱 \end{cases}$

註　第二式ノ未知項ガ積ト一次式ノミナル事ニ着眼セヨ。

*例 219.　次ノ無理方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{y-4}=\sqrt{x-6}+\sqrt{y+7}=10$$

方針　1.　$\sqrt{x+3}+\sqrt{y-4}=10$ ……………①

$\sqrt{x-6}+\sqrt{y+7}=10$ ……………②

ト置キ，各々ヲ平方シテ解ク。

【解】　①ヨリ　$\sqrt{x+3}=10-\sqrt{y-4}$

兩邊ヲ平方スルト　$x+3=100-20\sqrt{y-4}+y-4$

$\therefore\ 20\sqrt{y-4}=93-(x-y)$ ……………③

STOP　コノ兩邊ヲ平方シテ二元二次方程式ヲ導イテ解イテモ出來ルガ計算ガ複雜ニナルカラ，②ヨリ③ト同一型ノ式ヲ導イテ $(x-y)$ ヲ消去スル。

GO　②ヨリ　$\sqrt{x-6}=10-\sqrt{y+7}$

兩邊ヲ平方シテ整頓スルト

$$20\sqrt{y+7}=113-(x-y)\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

STOP ③,④ノ右邊ニ $-(x-y)$ ガ共通ナル事ニ着眼シテ邊々減ジルト $(x-y)$ ガ消去セラレテ y ノミヲ含ム方程式ガ得ラレルト考ヘ。

GO ④－③ヨリ　$20\sqrt{y+7}-20\sqrt{y-4}=20$

$\therefore\ \sqrt{y+7}=\sqrt{y-4}+1$

兩邊ヲ平方スルト　$y+7=y-4+2\sqrt{y-4}+1$

$\therefore\ \sqrt{y-4}=5$　　$\therefore\ y=29$

①ニ代入シテ　$\sqrt{x+3}+5=10$　　$\therefore\ x=22$

【驗シ】 $x=22,\ y=29$ ナルトキ

①ノ左邊 $=\sqrt{25}+\sqrt{25}=5+5=10=$ 右邊

②ノ左邊 $=\sqrt{16}+\sqrt{36}=4+6=10=$ 右邊

依テ　$x=22,\ y=29$ ハ ①,②ヲ同時ニ滿足スル。

答　$x=22,\ y=29$

方針 2. 置換法ニヨル解法ヲ試ミル。

【解】
$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{y-4}=10\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ \sqrt{x-6}+\sqrt{y+7}=10\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

$\sqrt{x+3}=X,\ \sqrt{y-4}=Y$ ト置クト $x=X^2-3,\ y=Y^2+4$ トナルカラ

①ハ　$X+Y=10\cdots\cdots\cdots\cdots ①'$

②ハ　$\sqrt{X^2-9}+\sqrt{Y^2+11}=10\cdots\cdots ②'$

STOP 置換法ニヨツテ根式ガ二ツニナツタ點ヲ味フベキデアル。尙①′ト②′トヲ解クニハ ①′ ガ一次式ナル事ニ着眼シテ未知數ノ一ツヲ消去スル。

GO ①′ヨリ　$X=10-Y\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

③ヲ②′ニ代入シテ　$\sqrt{(10-Y)^2-9}=10-\sqrt{Y^2+11}$

兩邊ヲ平方スルト　$100-20Y+Y^2-9=100-20\sqrt{Y^2+11}+Y^2+11$

整頓スルト　$\sqrt{Y^2+11}=Y+1$

兩邊ヲ平方スルト　$Y^2+11=Y^2+2Y+1$

$\therefore\ Y=5$　即チ　$\sqrt{y-4}=5$　　$\therefore\ y=29$

③ヨリ　$X=5$　即チ　$\sqrt{x+3}=5$　　$\therefore\ x=22$

驗シハ前ノ解法ト同樣ナル故省略ス。

例 220. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$y\sqrt{2-4x^2}-x\sqrt{2-4y^2}=1\ \cdots\cdots ①$$
$$\sqrt{1-2x^2}\sqrt{1-2y^2}-2xy=1\cdots\cdots ②$$

方針 ②ハ一度平方スレバ整方程式ニナルコトニ着眼シ②ヲ移項シテ平方シテ見ル。

【解】 ②ヨリ　$\sqrt{1-2x^2}\sqrt{1-2y^2}=2xy+1$

兩邊ヲ平方スルト　$1-2x^2-2y^2+4x^2y^2=4x^2y^2+4xy+1$

$\therefore\ -2(x^2+2xy+y^2)=0$

$\therefore\ (x+y)^2=0$　　$\therefore\ x=-y\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

③ヲ①ニ代入スルト　$y\sqrt{2-4y^2}+y\sqrt{2-4y^2}=1$

$\therefore\ 2y\sqrt{2-4y^2}=1$

兩邊ヲ平方スルト　$8y^2-16y^4=1$

$\therefore\ (4y^2-1)^2=0$　　$\therefore\ y=\pm\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots ④$

④ヲ③ニ代入シテ　$x=\mp\frac{1}{2}$

【驗シ】 i)　$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$　ナルトキ

①ノ左邊 $=-\frac{1}{2}\sqrt{2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2-1}=-1\neq$ 右邊

ii)　$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$　ナルトキ

①ノ左邊 $=\frac{1}{2}\sqrt{2-1}+\frac{1}{2}\sqrt{2-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=$ 右邊

②ノ左邊 $=\sqrt{1-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=$ 右邊

依テ　$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$　ガ所要ノ根デアル。

答　$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1,\quad y=2x-1$$ (早高一)

答 $x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5}$

根號內ガ分數式ナル場合

例 221. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2(x+y)-3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\frac{1}{x-y}=0,\quad x^2+y^2=7$$

着眼 $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ ノ分母ヲ有理化スルタメ＝ $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}$ ト變形スルト根號內ノ分母ガ完全平方式（贅戒式）＝ナルカラ，$x>y$ ト $x<y$ ト＝分ケテ取扱フ。

【解】
$$\begin{cases}2(x+y)-3\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\dfrac{1}{x-y}=0 \cdots\cdots ①\\ x^2+y^2=7 \cdots\cdots ②\end{cases}$$

シカル＝ $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}$ トナル故

（イ） $x>y$ ナルトキハ $\sqrt{(x-y)^2}=x-y$ $\therefore \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$

依テ ①ハ $2(x+y)-\frac{3\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}+\frac{1}{x-y}=0 \cdots\cdots ①'$

$x-y\neq0$ （$\because$ $x>y$ トシタカラ）ナル故分母ヲ拂フト

$$2(x^2-y^2)-3\sqrt{x^2-y^2}+1=0$$

STOP $\sqrt{x^2-y^2}$ ＝關スル二次方程式ト考ヘ

GO $(2\sqrt{x^2-y^2}-1)(\sqrt{x^2-y^2}-1)=0$

$\therefore$ $\sqrt{x^2-y^2}=\frac{1}{2}$ 又ハ $\sqrt{x^2-y^2}=1 \cdots\cdots ③$

兩邊ヲ平方シテ

$x^2-y^2=\frac{1}{4}$ 又ハ $x^2-y^2=1$ （無緣根ハ入リ來ラズ）

②ト聯立セシメルト

$\begin{cases}x^2+y^2=7\\ x^2-y^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ 又ハ $\begin{cases}x^2+y^2=7\\ x^2-y^2=1\end{cases}$

$\therefore$ $x^2=\frac{29}{8}$, $y^2=\frac{27}{8}$ ｜ $\therefore$ $x^2=4$, $y^2=3$

$\therefore$ $x=\pm\frac{\sqrt{58}}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{54}}{4}$ ｜ $\therefore$ $x=\pm2$, $y=\pm\sqrt{3}$

STOP 驗シガ必要カドウカト考ヘテ見ル。③ヲ兩邊ヲ平方シタガ無緣根ハ這入ラナイ。所ガ最初＝ $x>y$ ト假定シテ①ヲ變形シタカラ，コノ假定＝反スル根ハ捨テナケレバナラヌト考ヘテ

GO 吟味 $x=\frac{\sqrt{58}}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{54}}{4}$ 及ビ $x=2$, $y=\pm\sqrt{3}$ ハ共＝ $x>y$ ナル故適ス。

$x=-\frac{\sqrt{58}}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{54}}{4}$ 及ビ $x=-2$, $y=\pm\sqrt{3}$ ナルトキハ $x<y$ トナリ，$x>y$ ナル假定＝反スルカラ適シナイ。

（ロ） $x<y$ ナルトキハ $\sqrt{(x-y)^2}=-(x-y)$

$$\therefore \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}=-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$$

依テ ①ハ $2(x+y)+\frac{3\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}+1=0$

$x-y\neq0$ $\therefore$ $2(x^2-y^2)+3\sqrt{x^2-y^2}+1=0$

$\therefore$ $(2\sqrt{x^2-y^2}+1)(\sqrt{x^2-y^2}+1)=0$

$\therefore$ $\sqrt{x^2-y^2}=-\frac{1}{2}$ 又ハ $\sqrt{x^2-y^2}=-1$

コレラハ共＝根號ノ規約＝反スルカラ捨テル。即チ $x<y$ ナルトキハ根ナシ。

（ハ） $x=y$ ナルトキハ①ノ分母ガ 0 トナル故勿論根ハナイ。

答 $x=2$, $y=\pm\sqrt{3}$；$x=\frac{\sqrt{58}}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{54}}{4}$

[illegible] $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}$ ヲ何ノ斷リモナシ＝ $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$ トシタリ，折角

$x>y$ ト斷リ乍ラ，$x>y$ ニ對スル吟味ヲ忘レテ $x=-\dfrac{\sqrt{58}}{4}$ ヤ $x=-2$ ヲ答トスル者ガ多イ。

【試練問題】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x^2+y^2=9,\quad x-y+2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{3}{x+y}$$

但シ $x+y>0$ ナルモノトス。　(神　工)

答 $x=\sqrt{5}$，$y=\pm 2$

鍛錬問題十四

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(151—162)

151. $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=\dfrac{5}{9}$

152. $\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x^2}{y}-4=0$　$\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}+1=0$　(海兵，經)

153. $x+y+\dfrac{y^2}{x}=14$，$x^2+y^2+\dfrac{y^4}{x^2}=84$　(大同工專)

154. $xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{6}$，$1+y^2=\dfrac{15}{2}xy$

155. (i) $x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$，$y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{3}$，$z+\dfrac{1}{x}=4$

(ii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{z}{2}$，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{3}$，$\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{4}$

(大高，測技)

156. $\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{xy}{ax+by}=\dfrac{a}{b}$

157. $4x^2-6x=y^2+3y$，$2x+y+6\sqrt{2x+y+4}=23$

158. $x+y=13$，$\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}=1$　(陸　士)

159. $x^2+xy+y^2=84$，$x+\sqrt{xy}+y=14$　(姫高，醫齒)

160. $y-\sqrt{20-x^2}=\sqrt{y^2-x^2}$，$3\sqrt{20-x^2}=2\sqrt{y^2-x^2}$　(名　商)

161. $\begin{cases} 2\sqrt{x+y+z}=x+4, \\ 3\sqrt{x+y+z}=y+7, \\ 4\sqrt{x+y+z}=z+9 \end{cases}$　(東　齒)

162. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$，$x+y+z=2$

但シ $\sqrt{}$ ハ正ノ平方根ヲアラハスモノトス。

答 **151.** $x=-3a$，$y=-\dfrac{3}{2}b$；$x=\dfrac{3}{2}a$，$y=3b$〔但シ $ab\neq 0$ トス〕

152. $x=2$，$y=-2$；$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（複號同順）

153. $x=8$，$y=4$；$x=2$，$y=4$，

154. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \\ -2, \end{cases}$　**155.** (i) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{10}, \\ \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{2}{3}, \end{cases}$

155. (ii) $x=\pm\dfrac{2\sqrt{210}}{7}$，$y=\pm\dfrac{2\sqrt{210}}{5}$，$z=\pm\dfrac{2\sqrt{210}}{35}$

〔複號同順〕

156. $x=\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$，$y=-(a+b)$〔但シ $a^2-b^2\neq 0$ トス〕

157. $x=2$，$y=1$　**158.** $x=10$，$y=3$

159. $x=8$，$y=2$；$x=2$，$y=8$　**160.** $x=\pm 4$，$y=5$

161. $x=4$，$y=5$，$z=7$；$x=6$，$y=8$，$z=11$

162. $x=y=z=\dfrac{2}{3}$

第二十八章　不定方程式

1. 不定方程式ノ解法

方程式ノ數ガ**未知數ノ個數ヨリ少ナイトキハ，**コレヲ滿足スル根ガ幾組モ存在シ（解ノ組數ガ無限）**根ハ不定**デアル。所ガ其ノ根ニ**實數或ハ整數等ノ條件**ヲ附ケルト根ガ幾組カ**(有限組)定マル**コトガアル。

例ヘバ　$x+y=5$……① ヲ滿足スル x,y ノ値ハ

$$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\ \begin{cases}x=1.5\\y=3.5\end{cases}\ \begin{cases}x=0.1\\y=4.9\end{cases}\ \begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=5-\sqrt{3}\end{cases}\ \begin{cases}x=2+i\\y=3-i\end{cases}\ \cdots\cdots$$

ノ如ク幾組デモ無限ニ求メルコトガ出來ルガ，「x,y ガ共ニ正ノ整數」ナル條件附ケルト

$$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\ \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\ \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$$ ノ四組ダケニナル。

又　$(x-1)^2+(y-2)^2=0$……② ヲ解クト

$(y-2)^2=-(x-1)^2$　$\therefore\ y=2\pm\sqrt{-(x-1)^2}$ トナルカラ

②ヲ滿足スル根ハ

$$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=2\\y=2\pm i\end{cases}\ \begin{cases}x=3\\y=2\pm 2i\end{cases}\ \begin{cases}x=4\\y=2\pm 3i\end{cases}\ \cdots\cdots$$

ノ如ク無限ニ存在スル。然ルニ「x,y ハ實數」ナル條件ヲ附ケルト

$(x=1,\ y=2)$ ノ一組ダケニナル。

コノ様ニ**方程式ノ數ガ未知數ノ個數ヨリ少ナクテ一般ニハ**（條件ナシニハ）**根ガ不定トナル方程式**ヲ**或條件ノモトニ根ヲ決定スルコト**ヲ不定方程式ヲ解クトイフ。

2. 不定方程式ノ實數解

實數條件ノモトニ**不定方程式ヲ解ク**ニハ次ノ二ツノ方法ガアル

(1)　**實數ノ基本性質**ナル$(\text{實數})^2\geqq 0$ ヲ用ヒル方針デ

與式ヲ　$(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2=0$

又ハ $a(\quad)^2+b(\quad)^2+c(\quad)^2=0$　但シ $a>0, b>0, c>0$

ナル形ニ變形シテ括弧内ノ各式ガ同時ニ 0 トナラネバナラヌコトヲ用ヒル。

(2)　**二次方程式ノ實根條件**ナル**判別式** $\geqq 0$ ヲ用ヒル方針デ

與式ヲ　$ax^2+bx+c=0$（但 a,b,c ハ實數デ $a\neq 0$）

ナル形ヲニ變形シテ，**判別式** $\geqq 0$ ヲ用ヒル。

註　解法 (1) ハ 解法 (2) ニ比シテ**答案ハ簡明**ニナルカラ，先ヅ與式ヲ (1) ノ形ニ變形出來ナイカト考ヘテ見ヨ。ウマク出來ナケレバ**躊躇ナク方針 (2) ヲ用ヒル**。何レノ方法ニ依ル場合モ，**總テノ項ヲ左邊ニ移項シテ** $=0$ ナル形ニ直ス事ガ第一歩デアル。

例 222. 次ノ方程式ニ適合スル x,y ノ實數値ヲ求ム。

$$\left(x^2+\frac{1}{y^2}-10\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}-4\right)^2=0$$

着眼　**與式ガ完全平方式ノ和ノ形**デアルコトニ着眼シテ解法 (1) ヲ用ヒル。

【解】　$$\left(x^2+\frac{1}{y^2}-10\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}-4\right)^2=0\cdots\cdots\cdots\text{〔I〕}$$

x,y ノ實數値ニ對シテハ $x^2+\dfrac{1}{y^2}-10$ 及ビ $x+\dfrac{1}{y}-4$ ハ何レモ實數デアル。然ルニ**實數ノ平方ハ正又ハ零**デ決シテ負數トナルコトハナイ。 $\therefore\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}-10\right)^2\geqq 0,\ \left(x+\dfrac{1}{y}-4\right)^2\geqq 0$

從ツテコレラノ和ガ零トナルタメ即チ〔I〕ガ成立スルタメニハ

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}-10=0\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\[2mm] x+\dfrac{1}{y}-4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

ガ**同時ニ成立**スルコトガ必要デ且十分デアル。

STOP　次ニ①,②ヲ解イテ x,y ノ實數値ヲ求ムレバヨイト考ヘ，①ノ未知項ガ②ノ未知項ノ平方ニ等シイ事ニ着眼シテ

GO　①ヨリ　$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}\right)-10=0\cdots\text{①}'$

②ヨリ　$x+\dfrac{1}{y}=4\cdots\cdots\cdots\text{②}'$

②′ ヲ ①′ ＝代入シテ　　$2\left(\frac{x}{y}\right)=6$

$y\neq 0$ トシテ　　$x=3y$ ……………………③

③ヲ②′ ＝代入シテ　$3y+\frac{1}{y}=4$　∴　$3y^2-4y+1=0$

$$\therefore\ y=\frac{1}{3}\ 又ハ\ y=1$$

③ヨリ　$y=\frac{1}{3}$ ノトキ　$x=1$；　$y=1$ ノトキ　$y=3$

コレラノ値ハ何レモ實數デ且原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイカラ題意ニ適スル。

答　$x=1,\ y=\frac{1}{3}$；　$x=3,\ y=1$

[illegible]　本問題解法ノ骨子ハ 1.〔I〕ヨリ①,②ヲ導ク推論ノ説明ト 2. ①,②ノ聯立方程式ノ解法トノ二ケ所ニアル。然ルニ多クノ者ハ第一ノ推論ガ甚ダ不十分デ，單ニ「x,y ガ實數ナルタメニハ①，②ガ成立スルヲ要ス」トシタリ，中ニハ全ク實數條件ヲ述ベズニ單ニ①,②ヲ解イテ答ノミヲ求メル者ガアル。

尙實數ト整數トヲ誤解シテ $y=\frac{1}{3}$ ヲ棄テル者或ハ y ハ實數ナル故 $y^2\neq 0$ 等ト誤ル者ガアル。

【試練問題】 次ノ方程式ヲ滿足スル x 及ビ y ノ實數値ヲ求メヨ

$$(xy-6)^2+(2x-3y+5)^2=0$$　（橫　商）

答　$x=2,\ y=3$；$x=-\frac{9}{2},\ y=-\frac{4}{3}$

例 223. $(x^2+4)(y^2+1)=8xy$ ヲ滿足スル $x,\ y$ ノ實數値ヲ求メヨ。

方針　1. 完全平方式ノ和 $=0$ ノ形ヲ導ク。

【解】 移項シテ　$(x^2+4)(y^2+1)-8xy=0$

∴　$x^2y^2+x^2+4y^2+4-8xy=0$ …………〔I〕

STOP　初メノ四項ハ何レモ平方式デアルカラ第五項ノ $-8xy$ ヲ

$-4xy$ ト $-4xy$ トニ分ケテ

GO　$(x^2y^2-4xy+4)+(x^2-4xy+4y^2)=0$

∴　$(xy-2)^2+(x-2y)^2=0$ ……………………〔II〕

x,y ノ實數値ニ對シテハ $(xy-2)$，$(x-2y)$ ハ共ニ實數ナル故

$(xy-2)^2\geqq 0$,　$(x-2y)^2\geqq 0$

從ツテ其和ガ 0 トナルタメニハ

$xy-2=0$ ………①　　$x-2y=0$ ………②

ガ同時ニ成立スルコトガ必要デ且十分デアル。

②ヨリ　　$x=2y$ ……………②′

②′ ヲ①ニ代入シテ　$2y^2=2$　∴ $y=\pm1$

②′ ニ代入シテ　　$x=\pm2$

コレラノ値ハ何レモ實數ナル故題意ニ適スル。

答　$x=\pm2,\ y=\pm1$（複號同順）

方針　2. 判別式 $\geqq 0$ ヲ用ヒル。

【別解】　〔I〕ヲ y ニツイテ整頓スルト

$(x^2+4)y^2-8xy+(x^2+4)=0$ ……………〔I〕′

〔I〕′ ハ y ニ關スル二次方程式（∵ $x^2+4\neq 0$）デ且係數ハ何レモ實數ナル故，y ガ實數ナルタメニハ判別式 $\geqq 0$ ナルヲ要ス。

∴　$(4x)^2-(x^2+4)^2\geqq 0$

∴　$-x^4+8x^2-16\geqq 0$

兩邊ヲ -1 デ割レバ不等號ノ向ハ變ル故

$(x^2-4)^2\leqq 0$ ……………………①

STOP　コヽデ $(x^2-4)^2\leqq 0$ ノ意味ヲ知ラヌ爲カ，或ハ不注意ノ爲カ $(x^2-4)^2\leqq 0$　∴ $x^2-4\leqq 0$　∴ $x\leqq\pm2$ 等ト誤ル者ガ多イ。

$(x^2-4)^2\leqq 0$ ハ「$(x^2-4)^2<0$ 又ハ $(x^2-4)=0$」ヲ表ハス記號デアルカラ

GO　①ヨリ　$(x^2-4)^2<0$ 又ハ $(x^2-4)^2=0$

シカルニ x ノ實數値ニ對シテハ x^2-4 モ亦實數ナル故

$(x^2-4)^2<0$ ハ成立シナイ（∵ 實數ノ平方ハ正又ハ 0）

∴　$(x^2-4)^2=0$　∴ $x^2=4$　∴ $x=\pm2$

STOP　次ニ y ヲ求メナケレバナラヌガ，ソレニハ y ニ關スル二次方