統計公式及例解

附練習問題

王仲武著

商務印書館發行

统计公式及例解

附練習问题

王仲武著

商務印書館發行

中華民國二十三年八月初版

統計公式及例解一冊
每册定價大洋壹元捌角
外埠酌加運費匯費

著作者　王仲武
發行人　王雲五　上海河南路
印刷所　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

四二八三上

(建)

序　　言

本書編著之動機，實始於民國十九年．時著者以應中央大學法學院長謝冠生經濟系主任馬寅初兩先生之堅邀，勉任該校「實用統計」學程因選讀同學多係經濟系四年級生，在統計上已具相當之基礎．故除將各種統計調查方法，資料整理，編造報告及製表繪圖等實際應用問題，作爲講習之主要部份外，復於授課之始，對於統計計算方面．曾略作有系統的復習——因該班同學程度甚優，且富於研究精神，故對此項工作，教學兩方均感特殊之興趣——，以備研討應用上之便利．著者以繼續擔任本學程，業歷數載，爰先將講稿中計算復習部份，逐漸擴充——（書中例題事實，間有新舊之殊者，職是之故）率成茲篇．

本書原旨，既如上述，故所有內容編制，多以閱讀及自修者研習便利爲主．公式次序悉依一般統計書籍之慣例，俾易參閱．公式下附有例解，篇末更殿以各項實際練習問題．如此比較具體編述者：一方面冀供各大學統計補充教本之用；一方面亦可作從事統計者自修之參考．惟我國統計素稱幼稚，有系統之資料，極感缺乏，致令各項例解及練習題之事實，間有不能不採用他邦者，深引爲憾！此外因本書側重計算，工作繁多，以作者之譾陋及職務之冗忙．其中罣漏舛誤之處，自所難免．深盼海內明達，有以教之．

關於本書核閱初稿者有中大老同事劉迺敬教授，中央政治學校褚一飛教授，及內子鍾錦田女士．校對公式及例解者爲徐受清浦屏三焦柏城三君．繕正稿底及製圖者爲同學錢一羽君．特書誌謝！又著者原以茲篇除對公式略加例解與供給練習問題資料外，實無若何之價値，所以遲遲未敢問世．嗣迭經老友蔡正雅及商務印書館王雲五李伯嘉諸先生之慫恿督促，使本書竟付剞劂，尤所慚感！

中華民國二十三年四月王仲武序於首都．

凡　　例

(1) 本書注重統計公式之例解及練習問題,對於公式導來之理論從略.

(2) 本書舉例,均以本國事實爲準則.但於不得已時,間有採用他國資料者——再版時當另覓妥善者改換——.又例解事實,以簡明爲要;練習問題,重在應用,故取材多較繁.

(3) 本書引用名詞,悉依據著者之「漢譯統計名詞」一書.又於每名詞首見處旁註英文原名,俾便尋繹.

(4) 本書所用符號,除參考一般統計書籍及仲武所著之「統計原理及應用」外,并依據簡明之原則,酌加修正,借期劃一.

(5) 本書例解,係遍採經濟,教育,農,礦,工,商各方面之事實.練習問題則在供給各項實際資料,對於教學及應用上,便利甚多.故一般大學統計學程,均可取作補充教本之用.如各機關辦理統計人員,以此爲應用計算上之參考,尤多匡助.

(6) 本書之主要參考書籍爲:

1. Chaddock, R.E.: Principles and Methods of Statistics.
2. Chaddock and Croxton: Exercises in Statistical Methods.
3. Day, E.E.: Statistical Analysis.

4. Fisher, Irving: The Making of Index Numbers.

5. Holzinger, Karl J.: Statistical Methods for Students in Education.

6. Kelley, Truman L.: Statistical Method.

7. Mills, Frederick C.: Statical Methods Applied to Economics and Business.

8. Mills and Davenport: Manual of Problems and Tables in Statistics.

9. Pearson, Karl: Tables for Statisticians and Biometrians.

10. Reitz, H.L.: Handbook of Mathematical Statistics.

11. Whitaker, E.T. and Robinson, G.: The Calculus of Observations.

12. Yule, G. Udney: An Introduction to theTheory of Statistics.

目　次

均如 購於衡山福星堂
南岳嶽雲初中部第一次招生考試驗之前日

統計公式及例解

—附 練 習 題—

I. 次數分配 (Frequency Distribution)

A. 平均數量 (Averages)

1. 算術平均數 (Arithmetic mean).

$$M=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n}{N}$$

簡寫為

$$M=\frac{\Sigma X}{N}$$

…………〔公式 1〕

〔例 1〕 我國最近十年國際貿易輸出入總值如下表. 今求其每年平均數.

(表 1)

年份	輸出入總值(百萬海關兩)
民國十二年	1,677
民國十三年	1,791
民國十四年	1,725
民國十五年	1,989
民國十六年	1,932
民國十七年	2,188
民國十八年	2,281
民國十九年	2,204
民國二十年	2,342
民國廿一年	1,541

代入公式

$$M=\frac{1677+1791+1725+\cdots\cdots+2342+1541}{10}$$

$$=\frac{19670}{10}$$

$=1967$ 百萬兩

即每年國際貿易總值平均數爲1,967,(000,000)海關兩.

2. 算術平均數之簡捷法.

$$M=M'+\frac{\Sigma d'}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 2〕}$$

〔例 2〕 仍用前例,惟須將表1之數字,按其大小順次排列,以便計算.

(表　2)

貿易總值	與假定平均數(1989)之差 d'
1541	−448
1677	−312
1725	−264
1791	−198
1932	− 57
1989	0
2188	199
2204	215
2281	292
2342	353
	$\Sigma d' = -220$

代入公式

$$\therefore \quad M = 1989 + \left(\frac{-220}{10}\right) = 1967$$ 百萬兩. 答數與前同.

3. 加權算術平均數 (Weighted arithmetic mean)

$$M = \frac{\Sigma fm}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 3〕}$$

〔例 3〕 茲取玉米穗之長度爲例. (資料採自 BURGESS—The Mathematics of Statistics)

(表　3)

長度(吋)	中值 (m)	次數 (f)	(fm)
3− 4	3.5	1	3.5
4− 5	4.5	1	4.5
5− 6	5.5	3	16.5
6− 7	6.5	14	91.0
7− 8	7.5	25	187.5
8− 9	8.5	62	527.0
9−10	9.5	119	1,130.5
10−11	10.5	80	840.0
11−12	11.5	19	218.5
12−13	12.5	2	25.0
		326	3,044.0

代入公式

$$M=\frac{3044.0}{326}$$

$=9.34^{吋}$ 卽玉米穗之平均長度爲9.34吋

4. 加權算術平均數之簡捷法.

$$M=M'+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式4〕}$$

c 爲簡捷法之改正數,其求法如下:

$$c=\frac{\Sigma(fd')}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式5〕}$$

〔例 4〕 今將例3以簡捷法求之.

(表 4)

m	f	d'	fd'
3.5	1	−6	−6
4.5	1	−5	−5
5.5	3	−4	−12
6.5	14	−3	−42
7.5	25	−2	−50
8.5	62	−1	−62
9.5	119	0	0
10.5	80	1	80
11.5	19	2	38
12.5	2	3	6
	326		−53

由公式(5)

$$c=\frac{124-177}{326}=-\frac{53}{326}=-.16$$

代入公式(4)

$$\therefore \quad M=9.5-.16=9.34\text{吋} \quad \text{答數與前同.}$$

當事實現象成不等的組距時,其求算法應如下例:

〔例 5〕 茲取某校學生123名數學成績,計算其平均分數:

(表 5)

(組距不等)

組距(分數)	中點(m)	次數(f)	級差(d')	fd'
20－25	22.5	1	－10.5	－10.5
25－30	27.5	0	－9.5	0
30－35	32.5	1	－8.5	－8.5
35－40	37.5	1	－7.5	－7.5
40－45	42.5	2	－6.5	－13.0
45－50	47.5	2	－5.5	－11.0
50－55	52.5	3	－4.5	－13.5
55－60	57.5	9	－3.5	－31.5
60－70	65	17	－2	－34
70－80	75	50	0	0
80－90	85	34	2	68
90－100	95	3	4	12
		123		－49.5

由上表

$$M'=75$$

$$c=-\frac{49.5}{123}=-.40\text{乘以級差}5=-2.0$$

代入公式(4)

$$\therefore \quad M=75-2.0=73.0$$

〔附註〕 此例計算之方法及公式,均與上例相同,惟各組距之大小不等.如本例前八組分數之組距為5,後四組為10今以組距5為一級,除各中點值與假定平均數(75)之差而得d'欄各數.以求各級單位之一致.應用此法須注意者,即c值求得後,必以級之大小乘之,方為合法.如本例$c=-.40\times5=-2.0$.

5. 幾何平均數(Geometric mean)

$$G=\sqrt[N]{X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdots\cdots X_n}\cdots\cdots\text{〔公式6〕}$$

〔例 6〕 求最近十二年來浙江餘姚縣人口平均數(數目根據該縣報告).

(表 6)

年份	人口數(單位千人)
民國九年	615
民國十年	625
民國十一年	605
民國十二年	634
民國十三年	624
民國十四年	606
民國十五年	638
民國十六年	619
民國十七年	641
民國十八年	624
民國十九年	619
民國二十年	641

代入公式

$$G=\sqrt[12]{615\times625\times605\times\cdots\cdots\times619\times641}$$

$$=\sqrt[12]{3335590055860473162316123104000000}$$

$=624$ 故餘姚縣近十二年來每年人口平均數約為624000人.

此法有連乘及開方之煩,故通常多採下列對數法.

6. 幾何平均數之對數法.

$$\left.\begin{aligned}&\log G=\frac{\log X_1+\log X_2+\log X_3+\cdots\cdots+\log X_n}{N}\\&\text{簡寫爲}\\&\log G=\frac{\Sigma(\log X)}{N}\end{aligned}\right\}\cdots\text{〔公式7〕}$$

〔例 7〕 將例6之人口數查出對數,計算如下.

(表 7)

年份	人口數	對數
民國九年	615,000	5.78888
民國十年	625,000	5.79588
民國十一年	605,000	5.78176
民國十二年	634,000	5.80209
民國十三年	624,000	5.79518
民國十四年	606,000	5.78247
民國十五年	638,000	5.80482
民國十六年	619,000	5.79169
民國十七年	641,000	5.80686
民國十八年	624,000	5.79518
民國十九年	619,000	5.79169
民國二十年	641,000	5.80686
		69.54336

代入公式

$$\log G=\frac{69.54336}{12}=5.79528$$

$\therefore\ G=624,000$人 答數與前同.

7. 加權幾何平均數(Weighted geometric mean).

$$G_W=\sqrt[N]{X_1^{W_1}\cdot X_2^{W_2}\cdot X_3^{W_3}\cdots X_n^{W_n}}\cdots\cdots\cdots\text{〔公式8〕}$$

此公式計算太繁,普通不常應用,恆以下式代之.故此處例題從略,請參閱(例8).

8. 加權幾何平均數之對數法.

$$\log G_W=\frac{W_1\log X_1+W_2\log X_2+W_3\log X_3+\cdots+W_n\log X_n}{N}$$

簡寫爲

$$\log G_W=\frac{\Sigma W\log X}{N}$$

〔公式9〕

〔例 8 茲取紐約證劵交易所某日某種股票價格爲例,計算其幾何平均數(資料見 MILLS: Statistical Methods)

(表 8)

組距	m	f	$\log m$	$f\log m$
\$ 35－44.9	\$ 40	1	1.60206	1.60206
45－ 54.9	50	6	1.69897	10.19382
55－ 64.9	60	8	1.77815	14.22520
65－ 74.9	70	5	1.84510	9.22550
75－ 84.9	80	14	1.90309	26.64326
85－ 94.9	90	22	1.95424	42.99328
95－104.9	100	27	2.00000	54.00000
105－114.9	110	18	2.04139	36.74502
115－124.9	120	14	2.07918	29.10852
		115		224.73666

代入公式

$$\log G_w=\frac{224.73666}{115}=1.95423$$

$$\therefore\quad G_w=\$\ 90.00$$

9. 倒數平均數(Harmonic mean).

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}}{N}\\&\text{簡寫爲}\\&\frac{1}{H}=\frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{X}\\&\text{或}\\&H=\frac{N}{\Sigma\frac{1}{X}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式10〕}$$

〔例 9〕 茲以某學校六人一組之學生同受某種教育測驗,每分鐘各生作成之題數爲13, 11, 10, 8, 7, 及 5 今求其平均每分鐘作成之題數.

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(.077+.091+.100+.125+.143+.200)$$

$$=.1227$$

$\therefore\ H=\frac{1}{.1227}=8.15$ (每分鐘平均作成之題數爲 8.15, 易言之即每題平均須時 $\frac{60}{8.15}=7.4$ 秒)

10. 衆數(Mode)(近似值).

$$Mo = l.l. + \frac{f_2}{f_1+f_2}\cdot i \text{ ……………………………… 〔公式 11〕}$$

〔例 10〕 玆取某機器廠二十工人工資為例.其每月所得為,\$26.25, 26.70, 27.95, 28.70, 27.70, 24.30, 27.60, 26.15, 27.30, 26.75, 29.25, 29.55, 25.75, 27.60, 30.70, 27.90, 27.55, 28.10, 25.10, 28.15.今將次數分組表及計算衆數法,分述於下:

〔附註〕 算術平均數,M;幾何平均數,G;及倒數平均數H之關係.

若x, y為不同之兩個正數,則$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$必為正數,

即 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$ (I)

展開則 $x-2\sqrt{xy}+y>0$ (II)

移項 $x+y>2\sqrt{xy}$ (III)

兩邊皆以2除,則

$$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy},$$

即 $M>G$.

(III)式之二邊以$\sqrt{xy}$乘之並以$x+y$除之,則

$$\sqrt{xy}>\frac{2xy}{x+y},$$

即 $G>H$.

換言之,兩不同數量之算術平均數,恆大於其幾何平均數;而幾何平均數,則大於倒數平均數.

(表　9)

組距	次數 f
24－25	1
25－26	2
26－27	4
27－28	7
29－29	3
29－30	2
30－31	1

衆數下一組之次數　$f_1=4$,

衆數上一組之次數　$f_2=3$,

衆數所在組之低限值 $l.l.=27$,

組距 $i=1$,

代入公式

$$\therefore\quad M_O=27+\frac{3}{3+4}\times 1=27.43$$

故某廠二十工人每月工資之衆數爲27.43元.

11. 衆數(皮氏 Pearson 經驗公式).

$$\boldsymbol{Mo=M-3(M-Md)}\text{ ....〔公式12〕}$$

〔例11〕 仍取前例之事實,設已知二十工人每月工資之算術平均數爲27.45元,中位數爲27.43元.(見例13)故其衆數爲 $Mo=27.45-3\,(27.45-27.43)=27.39$ 元,其結果與前例微有出入.

〔附註〕 本公式又作 $M_o=M-3.03\,(M-Md)$ 確度較增.

12. 中位數(Median).

$$Md=\frac{N+1}{2}\text{項之值}\qquad\text{〔公式13〕}$$

〔例12〕 茲取民國二十年第一屆高等考試普通行政人員考試成績為例,求其中位數:

(表 10)

分數	人數
82	1
73	1
71	1
70	1
69	1
68	1
66	3
65	3
64	1
63	3
62	21
61	5
60	1
	43

代入公式

$$\frac{43+1}{2}=22$$

查第二十二位在62分內,即第一屆高考普通行政人員考試成績之中位數為62分.

若N為偶數,則$\frac{N+1}{2}$為一分數,此際應取其居中二項平均

之,即得中位數,譬如例1我國近十年國際貿易輸出入總值之資料,按其大小順序排列,如表所示,其$N=10$, $\frac{N+1}{2}=5.5$ 則中位數為第5.6二項之平均,得$\frac{1932+1989}{2}=1961$(百萬兩).

13. 中位數(在分組現象時).

$$\left.\begin{array}{l} Md=l.l.+\dfrac{\frac{N}{2}-F}{f}\cdot i \\ \text{或} \\ Md=u.l.-\dfrac{\frac{N}{2}-F}{f}\cdot i \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 14〕}$$

〔例13〕 同例10,求其工資之中位數.

(表　11)

組距	次數 f
\$ 24－25	1
25－26	2
26－27	4
27－28	7
28－29	3
29－30	2
30－31	1
	20

中位數所在組以下之次數為1, 2, 4,

$$\therefore\quad F=1+2+4=7$$

中位數所在組之次數$f=7$, $N=20$, $\frac{N}{2}=10$,

中位數所在組之低限值 $l.l.=27.00$, 組距 $i=1$

$$\therefore\quad Md=27.00+\frac{10-7}{7}\times 1=27.43.$$

今若引用從大向小數之公式,則

$u.\ l.=28$ (中組之高限值),

$F=1+2+3=6$ (中組以上之次數和),

餘同上.

代入公式

$$Md=28-\frac{10-6}{7}\times 1=27.43$$

故此二十工人每月工資之中位數為27.43元.

B. 百分位數(Percentiles)

14. 百分位數(Percentile)

$$\left.\begin{aligned}P_p&=l.l.+\frac{\frac{p}{100}N-F}{f}\cdot i\\ P_p&=u.l.-\frac{\left(1-\frac{p}{100}\right)N-F}{f}\cdot i\end{aligned}\right\}\quad\text{..........................〔公式 15〕}$$

〔例 14〕 仍用例5之資料,求其30百分位數及80百分位數:

(表 12)

分數	人數
20－ 25	1
25－ 30	0
30－ 35	1
35－ 40	1
40－ 45	2
45－ 50	2
50－ 55	3
55－ 60	9
60－ 65	7
65－ 70	10
70－ 75	19
75－ 80	31
80－ 85	21
85－ 90	13
90－ 95	2
95－100	1
	123

1. 求30百分位數:

由上表 $N=123$, $\frac{30}{100}N=36.9$ 卽30百分位爲第36.9人,該組之次數 $f=19$, 該組以下之次數和 $F=1+0+1+1+2+2+3+9+7+10=36$ 該組之低限值 $l.l.=70.00$, 組距 $i=5$.

$$\therefore \quad P_{30}=70+\frac{36.9-36}{19}\times 5=70.24$$

2. 求80百分位數:

因 $\frac{80}{100}N=98.4$ 卽80百分位爲第98.4人;該組之次數 $f=21$, 該組以下之次數和 $F=1+0+1+1+2+2+3+9+7+10+19+31=86$, 該組之低限值 $l.l.=80$, 組距 $i=5$.

$$\therefore \quad P_{80}=80+\frac{98.4-86}{21}\times 5=82.95.$$

故此123學生數學成績之30百分位數爲70.24, 80百分位數爲82.95.

〔附註〕 25百分位數與75百分位數適當次數分配之$\frac{N}{4}$與$\frac{3N}{4}$處,故又稱上下四分位數. 詳情於(17)節中敍明. 至50百分位數在$\frac{50N}{100}$或$\frac{N}{2}$地位,即前章之中位數.

15. 百分等級(Percentile ranks).

$$R_x=R_l+\frac{R_u-R_l}{i}(X-l.l.) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式16〕}$$

〔例15〕 用前例求82.5分所在之百分等級:

(表　13)

分數	次數 f	累積次數	累積次數之百分數 $=\frac{f}{N}\times 100$
25	1	1	0.81
30	0	1	0.81
35	1	2	1.63
40	1	3	2.44
45	2	5	4.07
50	2	7	5.69
55	3	10	8.13
60	9	19	15 45
65	7	26	21.14
70	10	36	29.27
75	19	55	44.72
80	31	86	69.92
85	21	107	86.99
90	13	120	97.56
95	2	122	99.19
100	1	123	100.00

欲求82.5分之百分等級,須第一步計算

$$R_u=\frac{107}{123}\times100=86.99,$$

$$R_l=\frac{86}{123}\times100=69.92,$$

$$X=82.5$$

$$l.l.=80$$

代入公式,得

$$R_{82\cdot5}=69.92+\frac{86.99-69.92}{5}(82.5-80)$$

$$=78.455$$

求百分等級之公式,尚有二種如下:

$$R_x=\frac{100[f_x(X-l.l.)+F\cdot i]}{N\cdot i}\qquad\text{〔公式17〕}$$

〔例16〕 用本公式仍求前例82.5分所在之百分等級.

已知 $X=82.5$, $l.l.=80$.

更由表13,得

$$F=86$$

$$f_x=21,$$

代入公式

$$R_{82\cdot5}=\frac{100[21(825-80)+86\times5]}{123\times5}$$

$=78.455$ 答數與前同.

$$\left.\begin{aligned} {}_cR_x &= \frac{50f_x}{N} + \frac{100F}{N} \\ &\text{或} \\ {}_cR_x &= \frac{50f_x}{N} - R_l \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 18〕$$

〔例 17〕 仍求前例 82.5 分所在之百分等級.

因本公式中各未知數,前例均已求出,故可直接代入公式

$${}_cR_{82.5} = \frac{50\times21}{123} + \frac{100\times86}{123}$$

$$= 78.455 \quad \text{答數與前同.}$$

16. 四分位數 (Quartile).

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= l.l. + \frac{\frac{N}{4} - F}{f}\cdot i \\ Q_3 &= l.l. + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f}\cdot i \end{aligned}\right\} \text{(用四分位數組之低限求之)} \cdots〔公式 19_a〕$$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= u.l. - \frac{\frac{3}{4}N - F}{f}\cdot i \\ Q_3 &= u.l. - \frac{\frac{N}{4} - F}{f}\cdot i \end{aligned}\right\} \text{(用四分位數組之高限求之)} \cdots〔公式 19_b〕$$

〔例 18〕 民國二十年第一屆高等考試五種考試及格人員共計一百名,其成績之分配如下表,今求其四分位數:

(表 14)

分數	人數
60–62	31
62–64	31
64–66	10
66–68	13
68–70	6
70–72	4
72–74	2
74–76	1
76–78	0
78–80	0
80–82	0
82–84	2

$$N=100,\ \frac{N}{4}=25,\quad \frac{3}{4}N=75$$

代入公式(19_a)

$$Q_1=60+\frac{25}{31}\times 2$$

$$=60+1.61=61.61$$

$$Q_3=66+\frac{75-72}{13}\times 2$$

$$=66+.46=66.46$$

C. 離中差量 (Dispersion)

17. 全距離 (Range)

$$Rg=X_L-X_S \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 20〕}$$

〔例 19〕 如取民國二十年份七年長期債劵市價爲例,其最高價爲85元,最低價爲73.40元.今求其價格之全距離.

(資料見統計月報二十一年九,十月號)

本例 X_L 爲85

X_S 爲73.40

代入

$$Rg=85-73.40=11.60$$

18. 四分位差(Quartile deviation)

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2} \quad \text{〔公式 21〕}$$

〔例 20〕 例同10,其四分差之計算如次:

(表 15)

組距	次數 f
24－25	1
25－26	2
26－27	4
27－28	7
28－29	3
29－30	2
30－31	1

$$N=20 \quad \frac{N}{4}=5 \quad \frac{3N}{4}=15$$

$$Q_1=26+\frac{2}{4}\times 1=26.50,$$

$$Q_3=28+\frac{1}{3}\times 1=28.33,$$

$$\therefore \quad Q.D.=\frac{28.33-26.50}{2}=.92$$

19. 平均差(Mean deviation).

$$M.D.=\frac{\Sigma|d|}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式22〕}$$

〔附註〕 平均差 $M.D.$ 普通亦用"δ"(Delta)表示之.

〔例21〕 仍用例10,二十工人之工資,求其平均差.由例13,已知$Md=27.43$,設以表11各組中值代表各工人之工資數,其計算如次:

(表 16)

(m)	$\|d\|$
24.5	2.93
25.5	1.93
25.5	1.93
26.5	.93
26.5	.93
26.5	.93
26.5	.93
27.5	.07
27.5	.07
27.5	.07
27.5	.07
27.5	.07
27.5	.07
27.5	.07
28.5	1.07
28.5	1.07
28.5	1.07
29.5	2.07
29.5	2.07
30.5	3.07
	21.42

代入

$$\therefore \quad M.D. = \frac{21.42}{20} = 1.07$$

20. 平均差(在分組現象時).

$$M.D. = \frac{\Sigma|fd'| + (N_s - N_l)c}{N} \quad \text{〔公式 23〕}$$

〔例 22〕 例同前,其平均差之計算法如次:

(表 17)

(組距中點) m	(f)	$\lvert d' \rvert$	$\lvert fd' \rvert$
24.5	1	3	3
25 5	2	2	4
26.5	4	1	4
27.5	7	0	0
28.5	3	1	3
29.5	2	2	4
30.5	1	3	33
	20		21

$Md' = 27.5$, $Md = 27.43$, $c = 27\ 43 - 27.5 = -.07$

小於 Md 之次數 $N_s = 1 + 2 + 4 = 7$,

大於 Md 之次數 $N_l = 7 + 3 + 2 + 1 = 13$,

代入公式

$$M.D. = \frac{21 + (7 - 13)(-.07)}{20} = 1.07.$$

故此二十工人每月工資之平均差爲1.07.

21. 平均差(由算術平均數求出者).

$$M.D.=\frac{2(FM-\Sigma m_s)}{N} \quad \text{〔公式 24〕}$$

〔例 23〕 由前例表 17 可得,

$$M=27.5-\frac{1}{20}=27.5-.05=27.45$$

於是 $\Sigma m_s=26.5\times4+25.5\times2+24.5$

$$=181.5$$

m_s 之次數 $F=7$

代入公式

$$M.D.=\frac{2(7\times27.45-181.5)}{20}$$

$$=\frac{21.3}{20}=1.07$$

〔附註〕 平均差可由中位數算術平均數及衆數求之,但以中位數爲最常用.

22. 標準差(Standard deviation).

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \quad \text{〔公式 25〕}$$

〔附註〕 標準差可以"σ" (Sigma) 或"*S. D.*"表示之.

〔例 24〕 譬如甲乙丙丁戊五人旅行某地,每日之行程:甲爲 40 里,乙爲 35 里,丙爲 25 里,丁爲 20 里,戊爲 15 里,則其行程速度標準差之計算爲,

(表 18)

行程里數	d	d^2
40	-13	169
35	-8	64
25	2	4
20	7	49
15	12	144
		430

$$M=27,\quad N=5,$$

代入公式

$$\sigma=\sqrt{\frac{430}{5}}=\sqrt{86}=9.27.$$

23. 標準差(在分組現象時).

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \quad\text{〔公式 26〕}$$

〔例 25〕 例同 10, 其標準差之計算如次:

(表 19)

組距	中點 m	次數 f	d	fd	fd^2
24—25	24.5	1	-2.95	-2.95	8.70
25—26	25.5	2	-1.95	-3.90	7.61
26—27	26.5	4	$-.95$	-3.80	3.61
27—28	27.5	7	.05	.35	.02
28—29	28.5	3	1.05	3.15	3.31
29—30	29.5	2	2.05	4.10	8.41
30—31	30.5	1	3.05	3.05	9.30
		20			40.96

$$M=27.45$$

代入公式

$$\sigma=\sqrt{\frac{40.96}{20}}=\sqrt{2.048}$$

$$=1.43.$$

24. 標準差之簡捷法.

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2&=\frac{\Sigma f(d')^2}{N}-c^2\\ &\text{或}\\ \sigma^2&=s^2-c^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 27〕}$$

〔例 26〕 例同 10, 其標準差之簡捷計算法如次:

(表 20)

組距	中點 m	次數 f	d'	fd'	fd'^2
24—25	24.5	1	−3	−3	9
25—26	25.5	2	−2	−4	8
26—27	26.5	4	−1	−4	4
27—28	27.5	7	0	0	0
28—29	28.5	3	1	3	3
29—30	29.5	2	2	4	8
30—31	30.5	1	3	3	9
		20		−1	41

$$M'=27.5$$

$$c=\frac{-1}{20}=-.05,\qquad c^2=.0025$$

代入公式

$$\sigma^2=\frac{41}{20}-.0025$$

$$=2.048.$$

$\therefore\quad \sigma=1.43,$ 答數與前同.

此式係用假定平均數及改正數,以求算標準差,可省去 d 項小數計算之煩.

25. 標準差(由各部標準差求全部標準差).

A. 設各部標準差計算時之組距及假定平均數皆相同,其計算公式如下:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f_1 d_1'^2+\Sigma f_2 d_2'^2+\cdots+f_n d_n'^2}{N_1+N_2+\cdots+N_n}-\left(\frac{\Sigma f_1 d'_1+\Sigma f_2 d'_2+\cdots+\Sigma f_n d'_n}{N_1+N_2+\cdots+N_n}\right)^2}\times i \quad \text{〔公式 28〕}$$

〔例 27〕 某麵粉廠有分廠二所,其工人工資分配情形及各部分之標準差如表(21)及(22).試就各部分之標準差,求全體工資之標準差.

(表 21) 第一廠

工資(元數)	人數 f_1	d_1'	$f_1'd_1'$	$f_1d_1'^2$
1—5	10	−3	−30	90
5—10	24	−2	−48	96
10—15	20	−1	−2	20
15—20	30	0	0	0
20—25	10	1	10	10
25—30	20	2	40	80
30—35	6	3	18	54
	120		−30	350

假定平均數 $=17.5$

$N_1=120$

$\Sigma f_1 d_1'=-30$

$\Sigma f_1 d_1'^2=350$

(表 22) 第二廠

工資(元數)	人數 f_2	d_2'	f_2d_2'	$f_2d_2'^2$
1—5	6	−3	−18	54
5—10	8	−2	−16	32
10—15	4	−1	−4	4
15—20	16	0	0	0
20—25	30	1	30	30
25—30	15	2	30	60
30—35	20	3	60	180
	99		82	360

假定平均數 =17.5

$N_2=99$

$\Sigma f_2d_2'=82$

$\Sigma f_2d_2'^2=360$

由上兩表,已知二廠中計算部份標準差時所用之假定平均數同爲17.5,故可直接代入公式(28),則得

$$\sigma=\sqrt{\frac{350+360}{120+99}-\left(\frac{-30+82}{120+99}\right)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{3.24-.06}\times 5$$

$$=1.78\times 5=8.9 \text{ 卽 } 8.9 \text{ 元.}$$

〔附註〕 按此公式,係由 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}\times i$ 演出,蓋以全體爲各部之和.故 $f=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n$,又因組距相等,及所用之假定平均數相同,故 $\Sigma fd'=\Sigma f_1d_1'+\Sigma f_2d_2'+\cdots\cdots+\Sigma f_nd_n'$, $\Sigma fd'^2=\Sigma f_1d_1'^2+\Sigma f_2d_2'^2+\cdots\cdots+\Sigma f_nd_n'^2$.

今若將表(21)及表(22)兩部之事實,合爲一表,逕用公式(26)計算其結果亦同.

B. 設各部標準差計算時之組距離同,而假定平均數有異,其計算公式應如下:

$$\Sigma f_1(d_1'+h)=\Sigma f_1d_1'+\Sigma f_1h \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 29〕}$$

$$\Sigma f_1(d_1'+h)^2=\Sigma f_1 d_1'^2+h(2\Sigma f_1 d_1'+\Sigma f_1 h)\cdots\cdots〔公式30〕$$

因各部標準差所用之假定平均數不同,故首先應以上兩公式化算一致後,方可代入公式(28)計算.

〔例28〕 設前例第一廠部分標準差所用之假定平均數仍爲17.5,第二廠爲22.5,今求其全體工資之標準差如下:

(表 23) 第二廠

工資(元數)	人數 f_2	d_2'	f_2d_2'	$f_2d_2'^2$
1—5	6	-4	-24	96
5—10	8	-3	-24	72
10—15	4	-2	-8	16
15—20	16	-1	-16	16
20—25	30	0	0	0
25—30	15	1	15	15
30—35	20	2	40	80
	90		-17	295

假定平均數 $=22.5$

$N_2=99$

$\Sigma f_2d_2'=-17$

$\Sigma f_2d_2'^2=295$

1. 化同兩廠之假定平均數.

第一廠與第二廠假定平均數之差(h)爲 -5 ($=-1$ 組距).

代入公式(29)及(30),

$$\Sigma f_1(d_1'+h)=-30-120=-150$$

$$\Sigma f_1(d_1'+h)^2=350+(-1)(-60-120)$$

$$=350+180$$

$$=530$$

2. 代入公式(28),求全體標準差.

$$\sigma=\sqrt{\frac{530+295}{120+99}-\left(\frac{-150-17}{120+99}\right)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{3.77-.58}\times 5$$

$$=1.79\times 5=8.95 \text{ 即 } 8.95 \text{ 元.}$$

26. 標準差(應用薛伯氏校正 Sheppard's correction 公式).

$$\sigma=\sqrt{\mu_2}\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 31〕$$

〔例 29〕 同例10之事實,由例25已求得 $\frac{\Sigma fd^2}{N}=2.048$, $\mu_2=\frac{\Sigma fd^2}{N}-\frac{1}{12}=2.048-.08=1.968.$ $\therefore\ \sigma=\sqrt{1.968}=1.40.$

〔附註〕 本公式之優點,在可剔除因分組而發生之差誤.故求出之σ,較更準確.

$$\mu_2=\frac{\Sigma fd^2}{N}-\frac{1}{12}\ (見公式 48)$$

27. 標準差之查理爾氏複驗法(Charlier check)

$$\Sigma f(d'+1)^2=\Sigma f(d')^2+2\Sigma fd'+N\cdots\cdots〔公式 32〕$$

〔例 30〕 依據例26標準差之計算,復接查理爾氏之驗算,列表如下:

(表 24)

組距中點 m	次數 f	d'	fd'	$f(d')^2$	$(d'+1)^2$	$f(d'+1)^2$
24.5	1	−3	−3	9	4	4
25.5	2	−2	−4	8	1	2
26.5	4	−1	−4	4	0	0
27.5	7	0	0	0	1	7
28.5	3	1	3	3	4	12
29.5	2	2	4	8	9	18
30.5	1	3	3	9	16	16
	20		−1	41		59

代入公式

$$59=41+2(-1)+20=59.$$

28. 差量係數(Co-efficient of variation).

$$V=\frac{\sigma}{M}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 33〕$$

〔例 31〕 依據例 26 已求得 $\sigma=1.43$, $M=27.45$, 則

$$V=\frac{1.43}{27.45}\times 100$$

$$=5.21$$

計算差量係數,除上式外,尚有他法如:

$$V_\delta=\frac{\delta}{\sqrt{Md}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 33_a〕$$

$$及\ V_Q=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 33_b〕$$

此兩式係以 δ 及 Q 爲根據而計算者, 然皆不如以 σ 爲根據之準確,故例解從略.

〔附註〕 標準差平均差及四分差之關係:

常常態分配(Normal Distribution)時,

$M.D.=0.7979\,\sigma$, $\left(即=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$ $Q.D.=0.6745\,\sigma$ 或 $\sigma=1.2533\,M.D.$

$\sigma=1.4826\,Q.D.$

爲便於記憶起見,恆取其近似值,而以簡單分數代之如下:

$$M.D.=\frac{4}{5}\sigma,$$

$$Q.D.=\frac{2}{3}\sigma.$$

29. 偏斜度(Measure of skewness).

$$Sk=\frac{M-Mo}{\sigma} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 34〕}$$

〔例32〕 仍取例10之事實,已知 $M=27.45$, $Mo=27.43$, $\sigma=1.43$,

$$\therefore \quad Sk=\frac{27.45-27.43}{1.43}=\frac{.02}{1.43}=.014$$

若由例11求得之 $Mo=27.39$ 代入計算,則結果與下例同:本公式有時因眞正衆數不易求得,遂由平均數中位數及衆數之關係,而推出下列公式.

$$Sk=\frac{3(M-Md)}{\sigma} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 35〕}$$

〔例33〕 例同前, $Md=27.43$,

$$\therefore \quad Sk=\frac{3(27.45-27.43)}{1.43}=\frac{.06}{1.43}=.04$$

30. 偏斜度(根據差數立方之數量求得).

$$Sk=\frac{1}{\sigma}\sqrt[3]{\frac{\Sigma fd^3}{N}} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 36〕}$$

$$Sk=\frac{1}{\sigma}\sqrt[3]{\frac{\Sigma f(d')^3}{N}-3c\sigma^2-c^3} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 37〕}$$

〔附註〕 公式(37)爲公式(36)之簡捷法.

〔例34〕 例同前,其 $\Sigma f(d')^3$ 之計算如下:

(表 25)

組距中點 m	次數 f	d'	$f(d')$	$f(d')^2$	$f(d')^3$
24.5	1	−3	−3	9	−27
25 5	2	−2	−4	8	−16
26.5	4	−1	−4	4	−4
27.5	7	0	0	0	0
28.2	3	1	3	3	3
29.5	2	2	4	8	16
30.5	1	3	3	9	27
	20		−1	41	−1

$N=20,\quad \Sigma fd'=-1,\quad \Sigma f(d')^2=41,\quad \Sigma f(d')^3=-1,$

$c=\dfrac{-1}{20}=-.05,\quad c^3=-.000125,$

$\sigma^2=\dfrac{41}{20}-c^2=2.05-.0025=2.048,\quad \sigma=1.43$

$3c\sigma^2=-.3072$

代入公式(37)

$$Sk=\frac{1}{1.43}\sqrt[3]{\frac{-1}{20}-(-.3072)-(-.000125)}$$

$$=\frac{1}{1.43}\sqrt[3]{-.05+.3072+.000125}\quad =\frac{1}{1.43}\sqrt[3]{.257325}$$

$$=\frac{.636}{1.43}=.445.$$

31. 偏斜度(根據四分位數求得).

$$\left.\begin{array}{l} Sk=\dfrac{q_2-q_1}{q_2+q_1} \\ \text{或} \\ Sk=\dfrac{Q_3+Q_1-2Md}{Q_3-Q_1} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式38〕$$

〔例35〕 同前例之事實 $q_2=Q_3-Md=28.33-27.43=.90$

$$q_1=Md-Q_1=27.43-26.50=.93$$

$$\therefore \quad Sk=\frac{.90-.93}{.90+.93}=\frac{-.03}{1.83}=-.016$$

32. 偏斜度(根據曲線判準$\beta_1\beta_2$求得).

$$X=\frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)} \quad \text{……〔公式39〕}$$

〔例36〕 設取大不列巓島成年男子體高爲例,(資料根據 YULE—Introduction to The Theory of Statistics P. 88 計算見例 43)

如已求得

$$\beta_1=.000155, \quad \beta_2=3.148789,$$

$$故\ X=\frac{\sqrt{.000155}(3.148789+3)}{2(5\times 3.148789-6\times .000155-9}=\frac{.012450(6.148789)}{2(15.743945-.000930-9)}$$

$$=\frac{.076552}{13.486030}=-.005676.$$

〔附註〕 算術平均數若大於中位數,則X爲正.反之爲負.本例 $M=67.521$ $Md=67.529$ (見表27) 故X應爲負數.

又此公式爲求偏斜度最精確之一法,但學者須於常態曲線具有相當了解後,方可應用.至關於β_1,β_2之値詳見(公式49)

D. 常態分配(Normal distribution)

33. 二項分配(Binomal distribution)

$$N(q+p)^n=N\left(q^n+nq^{n-1}p+\frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots\cdots〔公式40〕$$

〔例37〕 擲骰6枚,凡729次,求其各枚得么或陸次數之理論的分配.

擲骰得么之機率爲$\frac{1}{6}$,

擲骰得陸之機率爲$\frac{1}{6}$,

故擲骰得么或陸之機率,爲

$$p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\quad 而\ q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

其理論的分配,爲

$$729\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^6=729\left(\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}+\frac{12}{729}+\frac{1}{729}\right)$$

$$=62+192+240+160+60+12+1$$

今列表如下:

(表 26)

擲骰成功枚數 (么或陸)	次數 (機率)
0	64
1	192
2	240
3	160
4	60
5	12
6	1
總計	729

34. 成功之平均數(Mean number of successes 由已知機率及 n 變數時).

$$M=np \quad \text{......................〔公式 41〕}$$

〔例 38〕 茲舉一最簡單之例;譬如以銅元十二枚連擲多次,其正面向上成功之平均數為 $m=12\times\frac{1}{2}=6$, 即大概正面6枚向上者居多.

35. 成功之標準差(同上節之情形).

$$\sigma=\sqrt{npq} \quad \text{......................〔公式 42〕}$$

〔例 39〕 取上例同樣事實,其正面向上成功枚數之標準差,為

$$\sigma=\sqrt{12\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}}=\sqrt{3}=1.732.$$

36. 差誤常態曲線之方程式(Equation to normal curve of error)

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{......................〔公式 43〕}$$

〔附註〕 上式 y_0 爲常態曲線之極高縱坐標; e 爲一常數(納氏對數之底), 其值爲 2.7182818, 而 σ 爲標準差.

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \text{〔公式 44〕}$$

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{〔公式45〕}$$

〔例 40〕 今以大不列顛島成年男子體高爲例.

此處當先計算 M 及 σ 之值, 詳見下表:

(表 27)

(1) 體高 x (吋)	(2) 次數 f	(3) d'	(4) fd'	(5) fd'^2
57—	2	−10	−20	200
58—	4	−9	−36	324
59—	14	−8	−112	896
60—	41	−7	−287	2009
61—	83	−6	−498	2988
62—	169	−5	−845	4225
63—	394	−4	−1576	6304
64—	669	−3	−2007	6021
65—	990	−2	−1980	3960
66—	1223	−1	−1223	1223
67—	1329	0	−8584	
68—	1230	1	1230	1230
69—	1063	2	2126	4252
70—	646	3	1938	5814
71—	392	4	1568	6272
72—	202	5	1010	5050
73—	79	6	474	2844
74—	32	7	224	1568
75—	16	8	128	1024
76—	5	9	45	405
77—	2	10	20	200
總數	8585		+8763	56809

$$\Sigma(fd')=8763-8584=+179 \quad C=\frac{179}{8585}=.02$$

$$M=67.5+\frac{179}{8585}=67.52\ (\text{inches})$$

$$\sigma^2=\frac{56809}{8585}-(.02)^2=6.6172-.0004=6.6168$$

$$\sigma=\sqrt{6.6168}=2.572$$

代入公式

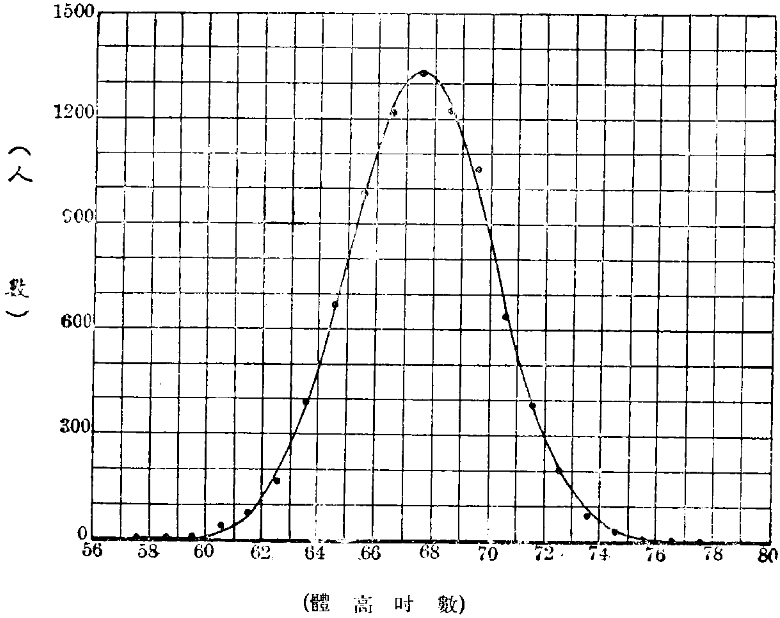
$$y_0=\frac{8585}{2.572\times 2.507}=1331.4$$

其他縱坐標則如下列圖表所示:

(表　28)

次數分配常態曲線縱坐標之計算

m 組距中點	x 與M之差數	$\frac{x}{\sigma}$	$\frac{y}{y_0}$	y_c 算出之次數(縱坐標)	y 實際的次數
57.5	−10.02	−3.90	.00050	1	2
58.5	−9.02	−3.51	.00217	3	4
59.5	−8.02	−3.12	.00769	10	14
60.5	−7.02	−2.73	.02408	32	41
61.5	−6.02	−2.34	.06471	86	83
62.5	−5.02	−1.95	.14939	199	169
63.5	−4.02	−1.56	.29618	392	394
64.5	−3.02	−1.17	.50437	671	669
65.5	−2.02	−.78	.73769	978	990
66.5	−1.02	−.40	.92312	1229	1223
67.5	−.02	−.01	.99995	1331	1329
68.5	.98	.38	.93024	1239	1230
69.5	1.98	.77	.74342	990	1063
70.5	2.98	1.16	.51027	681	646
71.5	3.98	1.55	.30082	401	392
72.5	4.98	1.94	.15232	203	202
73.5	5.98	2.32	.06780	90	79
74.5	6.98	2.71	.02542	34	32
75.5	7.98	3.10	.00819	11	16
76.5	8.98	3.49	.00221	3	5
77.5	9.98	3.88	.00054	1	2
總　數				8585	8585



(圖 1)

次數分配常態曲線

37. 次數分配之轉矩 (Moments of frequency distribution 由假定原點求出者).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{第一轉矩} & \nu_1=\dfrac{\Sigma f(x')}{N}\\[2ex] \text{第二轉矩} & \nu_2=\dfrac{\Sigma f(x')^2}{N}\\[2ex] \text{第三轉矩} & \nu_3=\dfrac{\Sigma f(x')^3}{N}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 46〕}$$

〔例41〕 仍以不列顛島男子高度爲例,其各次轉矩之計算如下:

(表 29)

(1) 組距	(2) 中點 m	(3) 次數 f	(4) 與隨意原點之差數 x'	(5) fx'	(6) $f(x')^2$	(7) $f(x')^3$	(8) $f(x')^4$
57—	57.5	2	—10	—20	200	—2000	20,000
58—	58.5	4	— 9	—36	324	—2916	26,244
59—	59.5	14	— 8	—112	896	—7168	57,344
60—	60.5	41	— 7	—287	2009	—14063	98,441
61—	61.5	83	— 6	—498	2988	—17928	107,568
62—	62.5	169	— 5	—845	4225	—21125	105,625
63—	63.5	394	— 4	—1576	6304	—25216	100,864
94—	64.5	669	— 3	—2007	6021	—18063	54,189
65—	65.5	990	— 2	—1980	3960	—7920	15,840
66—	66.5	1223	— 1	—1223	1223	—1223	1,223
67—	67.5	1329	0	—8584		—117622	
68—	68.5	1230	1	1230	1230	1230	1,230
69—	69.5	1063	2	2126	4252	8504	17,008
70—	70.5	646	3	1938	5814	17442	52,326
71—	71.5	392	4	1568	6272	25088	100,352
72—	72.5	202	5	1010	5050	25250	126,250
73—	73.5	79	6	474	2844	17064	102,384
74—	74.5	32	7	224	1568	10976	76,832
75—	75.5	16	8	128	1024	8192	65,536
76—	76.5	5	9	45	405	3645	32,805
77—	77.5	2	10	20	200	2000	20,000
合計		8585		+8763	56809	+119391	1,182,061

由上表第5行得……$\Sigma f(x') = -8584 + 8763 = +179.$

由上表第6行得……$\Sigma f(x')^2 = 56809.$

由上表第7行得……$\Sigma f(x')^3 = -117{,}622 + 119{,}391 = +1{,}769.$

由上表第8行得……$\Sigma f(x')^4=1,182,061.$

代入公式

故第一轉矩 $\nu_1=\dfrac{179}{8585}=.020850$

第二轉矩 $\nu_2=\dfrac{56809}{8585}=6.617239$

第三轉矩 $\nu_3=\dfrac{1769}{8585}=.206057$

第四轉矩 $\nu_4=\dfrac{1182061}{8585}=137.689109$

38. 次數分配之轉矩(由算術平均數求出者).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{第一轉矩} & \pi_1=0\\ \text{第二轉矩} & \pi_2=\nu_2-\nu_1^2\\ \text{第三轉矩} & \pi_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3\\ \text{第四轉矩} & \pi_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4\end{array}\right\}\cdots\cdots\text{〔公式 47〕}$$

演算見下節.

39. 改正之轉矩(同上之情形).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{第一轉矩} & \mu_1=0\\ \text{第二轉矩} & \mu_2=\pi_2-\dfrac{1}{12}\\ \text{第三轉矩} & \mu_3=\pi_3\\ \text{第四轉矩} & \mu_4=\pi_4-\dfrac{1}{2}\pi_2+\dfrac{7}{240}\end{array}\right\}\cdots\cdots\text{〔公式 48〕}$$

〔例 42〕 由上例諸 ν 之值 ($\nu_1=.020850$, $\nu_2=6.617239$, $\nu_3=.206057$, $\nu_4=137.689109$) 得

$$\pi_1=0$$

$$\pi_2=6.617239-(.020850)^2=6.617239-.000435$$
$$=6.616804$$

$$\pi_3=.206057-3(.020850)(6.617239)+2(.020850)^3$$
$$=.206057-.413908+.000018=-.207833$$

$$\pi_4=137.689109-4(.020850)(.206057)+6(.020850)^2$$
$$(6.617239)-3(.020850)^4=137.689109-.017185$$
$$+.017271-.000001=137.689194$$

又
$$\mu_1=0$$

$$\mu_2=6.616804-.083333=6.533471$$

$$\mu_3=-.207833$$

$$\mu_4=137.689194-3.308402+.029167=134.409959$$

40. 曲線型之判準 (Criteria of curve type).

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}\\ \beta_2&=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}\\ \kappa_2&=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式49〕}$$

〔例 43〕 由上例 $\mu_2 = 6.533471$, $\mu_3 = -.207833$,

$\mu_4 = 134.409959$, 故

$$\beta_1 = \frac{(-.207833)^2}{(6.533471)^3} = \frac{.043195}{278.889331} = .000155$$

$$\beta_2 = \frac{134.409959}{(6.533471)^2} = \frac{134.409959}{42.686243} = 3.148789$$

$$\kappa_2 = \frac{.000155(6.148789)^2}{4(12.695156 - .000465)(6.297578 - .000465 - 6)}$$

$$= \frac{(.000155)(37.807606)}{4(12.594691)(.297113)} = \frac{.005860}{14.968186} = .000391$$

〔附註〕 $\kappa_1 = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6$ 當次數分配適合常態曲線時, 應爲 $\kappa_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$ 否則,必形成他種之曲線.詳情參閱 KARL PEARSON—Tables for Statisticians and Biometricians 緒論第四十三頁.

41. 抽樣之標準誤 (Standard error of sampling)

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \quad \text{......................................} \quad 〔公式 50〕$$

〔例 44〕 同前之事實,先由下表求出理論的次數.

(表 30)

(由面積表算出之理論的次數
根據大不列顛島成年男子體高材料)*

(1) 組限	(2) 與M之差數 x	(3) $\frac{x}{\sigma}$	(4) 在$\frac{x}{\sigma}$之縱坐標與y_0間面積之比	(5) 在$\frac{x}{\sigma}$之縱坐標與y_0間之次數	(6) 分組之理論次數 (i)	(f)
57	—10.52	—4.09	.49998	4292.3		
58	— 9.52	—3.70	.49989	4291.6	—58	1
59	— 8.52	—3.31	.49953	4288.5	58—59	3
60	— 7.52	—2.92	.49825	4277.5	59—60	11
61	— 6.52	—2.53	.49430	4243.6	60—61	34
62	— 5.52	—2.15	.48422	4157.0	61—62	87
63	— 4.52	—1.76	.46080	3956.0	62—63	201
64	— 3.52	—1.37	.41466	3559.9	63—64	396
65	— 2.52	—.98	.33646	2888.5	64—65	671
66	— 1.52	—.59	.22240	1909.3	65—66	979
67	—.52	—.20	.07926	680.4	66—67	1229
68	.48	.19	.07535	646.9	67—68	1327
6	1.48	.58	.21904	1880.5	68—69	1234
70	2.48	.97	.33398	2845.7	69—70	987
71	3.48	1.35	.41149	3532.6	70—71	665
72	4.48	1.74	.45907	3941.6	71—72	409
73	5.48	2.13	.48441	4150.1	72—73	209
74	6.48	2.52	.49413	4242.1	73—74	92
75	7.48	2.91	.49819	4277.0	74—75	35
76	8.48	3.30	.49952	4288.4	75—76	11
77	9.48	3.69	.49989	3291.6	76—77	3
78	10.48	4.07	.49998	4292.3	77—	1
						8585

* 由 $\frac{x}{\sigma}$ 查面積，參閱附錄表II.

觀表可知理論次數與觀察次數相差最大者，為下表所列二點.(可參閱圖1)

(表 31)

組距中點 m	觀察次數 fo	理論次數 f	差數 $fo-f$
62.5	169	201	-32
69.5	1063	987	76

代入公式,則

中點爲62.5一組之標準誤爲

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{201(8585-201)}{8585}}=\sqrt{201-4.71}$$

$$=14.01$$

中點69.5一組之標準誤爲

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{987\times(8585-987)}{8585}}=\sqrt{987-113.59}$$

$$=29.56$$

查前組之差數 -32 $(=2.3\sigma_s)$ 後組之差數 $76\,(=2.6\sigma_s)$ 皆小於 $3\sigma_s$.

此等誤差或由於取樣之變動,其實際分配,仍可以常態視之.

42. X 之平方(Chi-square 配合適的測驗).

$$X^2=\Sigma\frac{(f_0-f)^2}{f} \quad \text{〔公式51〕}$$

〔例45〕 取前例之事實,作測驗配合適度 X^2 之計算如下:

(表 32)

(1) 組 限	(2) 觀察次數 f_0	(3) 理論次數 f	(4) f_0-f	(5) $\frac{(f_0-f)^2}{f}$
58 以下	2	1	1	1.00
58—59	4	3	1	.33
59—60	14	11	3	.82
60—61	41	34	7	1.44
61—62	83	87	−4	.18
62—93	169	201	−32	5.09
63—64	394	396	−2	.01
64—65	669	671	−2	.01
65—66	990	979	11	.12
66—67	1223	1229	−6	.03
67—68	1329	1327	2	.00
68—69	1230	1234	−4	.01
69—70	1063	987	76	5.85
70—71	646	665	−19	.54
71—72	392	409	−17	.71
72—73	202	209	−7	.23
73—74	79	92	−13	1.84
74—75	32	35	−3	.26
75—76	16	11	5	2.27
76—77	5	3	2	1.33
77 以上	2	1	1	1.00
21 類	8585	8585	0	$X^2=23.07$

由 KARL PEARSON—Tables for Statisticians & Biometricians pp. 26—28 Test of goodness of fit 表中查出 $X^2=23.09$, $n=21$, 其機率 $p=.285$ 由上表算出 X^2 之值與查表所得者極相近似, 可知此種次數分配對於常態曲線之配合適度甚高.

43. 峯度 (Measure of kurtosis).

$$\beta_2 - 3 \text{ ··························〔公式5}$$

〔例46〕 仍取上例，已知 $\beta_2 = 3.148789$，則 $\beta_2 > 3$（即 $\beta_2 - 3$ 正），故大不列巔島成年男子體高次數分配之常曲線，較一般者爲陡起（若 $\beta_2 < 3$ 則較爲平坦）.

44. 平均數與衆數之距離(Distance between mean and mod

$$D = X \cdot \sigma \text{ ··························〔公式5}$$

〔例47〕 仍取例10之事實計算如次.

（表 33）

	x'	f	fx'	$f(x')^2$	$f(x')^3$	$f(x')^4$
24—	−3	1	−3	9	−27	81
25—	−2	2	−4	8	−16	32
26—	−1	4	−4	4	−4	4
27—	0	7	0	0	0	0
28—	1	3	3	3	3	3
29—	2	2	4	8	16	32
30—	3	1	3	9	27	81
			−1	41	−1	233

代入公式(46)，得

$$\nu_1 = \frac{-1}{20} = -.05$$

$$\nu_2 = \frac{41}{20} = 2.05$$

$$\nu_3 = \frac{-1}{20} = -.05$$

$$\nu_4 = \frac{233}{20} = 11.65$$

由公式(47)計算得

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_2 = 2.05 - (.05)^2 = 2.0475$$

$$\pi_3 = -.05 - 3(-.05)(2.05) + 2(-.05)^3$$

$$= -.05 + .3075 - (.00025)$$

$$= .25725$$

$$\pi_4 = 11.65 - 4(-.05)(-.05) + 6(.05)^2(2.05) - 3(.05)^4$$

$$= 11.65 - .0100 + .03075 - .00001875$$

$$= 11.670731$$

由公式(48)計算得

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 2.0475 - \frac{1}{12} = 2.0475 - .083333 = 1.964167$$

$$\mu_3 = .257250$$

$$\mu_4 = 11.670731 - \frac{1}{2}(2.0475) + \frac{1}{240}$$

$$= 11.670731 - 1.02375 + .004167$$

$$= 10.651148$$

再由公式(49)計算得

$$\beta_1 = \frac{(.257250)^2}{(1.964167)^3} = \frac{.066178}{7.577662} = .008733$$

$$\sqrt{\beta_1} = .093450$$

$$\beta_2 = \frac{10.651148}{(1.964167)^2} = \frac{10.651148}{3.857952} = 2.760830$$

再由公式(39)計算得

$$\chi=\frac{.093450(5.760830)}{2(13.804150-.052398-9)}$$

$$=\frac{.538350}{9.503504}=.056648$$

再由公式(31)計算得

$$\sigma=\sqrt{1.964167}=1.4015$$

茲將χ及σ之值代入公式(53)

$$D=.056648\times 1.4015$$

$$=.079392$$

今由距離D推算M_0之值如下:

$$M_0=27.45-.079392$$

$$=27.3706$$

由此求出之M_0較他法更為準確

〔附註〕 偏斜度χ與測驗合度χ^2其性質并非相同,學者宜審察之.

II. 指數(Index Numbers)

A. 物價指數(Index numbers of prices)

45. 比價之算術平均法(Arithmetic mean of price relatives)

$$I_p=\frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 54〕}$$

〔例 48〕 假設某地八種物價如下表:

(表 34)

物　品	十五年(p_0)	十六年(p_1)	十七年(p_2)
I 米(擔)	16.78	17.50	12.60
II 麵粉(包)	3.08	3.30	2.99
III 豬肉(斤)	.29	.26	.36
IV 牛肉(磅)	.21	.23	.22
V 豆油(斤)	.21	.25	.25
VI 白糖(斤)	.10	.16	.12
VII 棉花(斤)	.50	.44	.43
VIII 煤(擔)	1.30	1.15	1.75

由上表以民國十五年爲基年,其比價之計算如次:

(表 35)

物品	十五年		十六年		十七年	
	物價 p_0	比價 $\frac{p_0}{p_0}$	物價 p_1	比價 $\frac{p_1}{p_0}$	物價 p_2	比價 $\frac{p_2}{p_0}$
I	16.78	100	17.50	104.3	12.60	75.1
II	3.08	100	3.30	107.1	2.99	97.1
III	.29	100	.26	89.7	.36	124.1
IV	.21	100	.23	109.5	.22	104.8
V	.21	100	.25	119.0	.25	119.0
VI	.10	100	.16	160.0	.12	120.0
VII	.50	100	.44	88.0	.43	86.0
VIII	1.30	100	1.15	88.5	1.75	134.6
		800		866.1		860.7

代入公式

$$I_p=\frac{800}{8}=100 \text{(十五年之指數)}$$

$$I_p=\frac{866.1}{8}=108.3 \text{(十六年之指數)}$$

$$I_p=\frac{860.7}{8}=107.6 \text{(十七年之指數)}$$

46. 比價之加權算術平均法(Weighted arithmetic mean of price relatives).

$$I_p=\frac{\Sigma p_0q_0\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_0q_0}\cdots\cdots\text{〔公式 }55_a\text{〕}$$

$$I_p=\frac{\Sigma p_0q_1\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_0q_1}\cdots\cdots\text{〔公式 }55_b\text{〕}$$

$$I_p=\frac{\Sigma p_1q_0\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1q_0}\cdots\cdots\text{〔公式 }55_c\text{〕}$$

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1 q_1} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 55_d〕$$

〔例 49〕 取上例之事實,假設十五,十六,十七三年各物之數量如次:

(表 36)

物品	十五年 (q_0)	十六年 (q_1)	十七年 (q_2)
I	257	288	285
II	728	749	768
III	1610	1827	1740
IV	397	520	980
V	818	831	856
VI	693	701	713
VII	588	579	638
VIII	139	198	261

上列各數皆以百萬爲單位.

今以基年物值 $p_0 q_0$ 爲權,計算加權算術平均指數如下:

(表 37)

物品	十五年			十六年		十七年	
	p_0	q_0	$p_0 q_0$	$\frac{p_1}{p_0}$	$p_0 q_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	$\frac{p_2}{p_0}$	$p_0 q_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)$
I	16.78	257	4312.46	104.3	4497.90	75.1	3238.66
II	3 08	728	2242.24	107.1	2401.44	97.1	2177.22
III	.29	1610	466.90	89.7	418 81	124.1	579.42
IV	.21	397	83.37	109.5	91.29	104 8	87.37
V	.21	818	171.78	119.0	204.42	119.0	204.42
VI	.10	693	69.30	160.0	110.88	120.0	83.16
VII	.50	588	294 00	88.0	258.72	86 0	252 84
VIII	1.30	139	180 70	88.5	159.92	134.6	243.22
總計			7820.75		8143.38		6866.31

代入公式(55_a)

$$I_p=\frac{8143.38}{7820.75}=104.1\text{（十六年指數）}.$$

$$I_p=\frac{6866.31}{7820.75}=\ 87.8\text{（十七年指數）}.$$

〔附註〕 權數之種類有四：

1. 以基年之物價及物量的乘積，即 p_0q_0.
2. 以基年之物價與計算年之物量相乘積，即 p_0q_1.
3. 以計算年之物價與基年之物量相乘積，即 p_1q_0.
4. 以計算年之物價及物量的乘積，即 p_1q_1.

以上四種權數在求算物價指數時均可適用之.

〔公式 55a〕與〔公式 55b〕尚可化簡如下：

$$1.\quad I_p=\frac{p_0'q_0'\dfrac{p_1'}{p_0'}+p_0''q_0''\dfrac{p_1''}{p_0''}+p_0'''q_0'''\dfrac{p_1'''}{p_0'''}+\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_0^{(n)}\dfrac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}}{p_0'q_0'+p_0''q_0''+p_0'''q_0'''+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_0^{(n)}}$$

$$=\frac{p_1'q_0'+p_1''q_0''+p_1'''q_0'''+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_1^{(n)}q_0^{(n)}}{p_0'q_0'+p_0''q_0''+p_0'''q_0'''+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_0^{(n)}}$$

$$=\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma(p_0q_0)}\text{（此式與加權綜合法以基年物量為權數者相同）}.$$

$$2.\quad I_p=\frac{p_0'q_1'\dfrac{p_1'}{q_0'}+p_0''q_1''\dfrac{p_1''}{p_0''}+p_0'''q_1'''\dfrac{p_1'''}{p_0'''}+\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_1^{(n)}\dfrac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}}{p_0'q_1'+p_0''q_1''+p_0'''q_1'''+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_1^{(n)}}$$

$$=\frac{p_1'q_1'+p_1''q_1''p_1'''q_1'''+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_1^{(n)}q_1^{(n)}}{p_0'q_1'+p_0''q_1''+p_0'''q_1'''+\cdots\cdots\cdots+p_0^{(n)}q_1^{(n)}}$$

$$=\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_1)}\text{（此式與加權綜合法以計算年物量為權數者相同）}.$$

47. 比價之倒數平均法 (Harmonic mean of price relatives).

$$I_p=\frac{N}{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}\text{..........}〔公式56〕$$

〔例50〕 由例48各物之比價,求其倒數如下:

(表　38)

物品	十五年		十六年		十七年	
	比價	倒數	比價 $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	倒數 $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$	比價 $\left(\frac{p_2}{p}\right)$	倒數 $\left(\frac{p_0}{p_2}\right)$
I	100	.01	104.3	.009588	75.1	.013316
II	100	.01	107.1	.009337	97.1	.010299
III	100	.01	89.7	011148	124.1	.008058
IV	100	.01	109.5	.009132	104.8	.009542
V	100	.01	119.0	.008403	119.0	.008403
VI	100	.01	160.0	.006250	120.0	.008333
VII	100	.01	88.0	.011364	86.0	.011628
VIII	100	.01	88.5	.011299	134.6	.007429
		.08		.076521		.077008

代入公式

$$I_p=\frac{8}{.08}=100\ (十五年倒數平均指數).$$

$$I_p=\frac{8}{.076521}=104.55\ (十六年倒數平均指數).$$

$$I_p=\frac{8}{.077008}=103.89\ (十七年倒數平均指數).$$

48. 比價之加權倒數平均法 (Weighted harmonic mean of price relatives).

$$I_p=\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_0q_0\frac{p_0}{p_1}}\text{..........}〔公式57_a〕$$

$$I_p = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_1 \cdot \frac{p_0}{p_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 }57_b\text{〕}$$

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_1 q_0 \frac{p_0}{p_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 }57_c\text{〕}$$

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_1 \cdot \frac{p_0}{p_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 }57_d\text{〕}$$

〔例 51〕 例同前,由表 37 及 38 得,

(表 39)

物品	權數	十五年		十六年		十七年	
	$p_0 q_0$	倒數	權數×倒數	倒數	權數×倒數	倒數	權數×倒數
I	4312.46	.01	43.12	.009588	41.35	.013316	57.42
II	2242.24	.01	22.42	.009337	20.94	.010299	23.09
III	466.90	.01	4.67	.011148	5.21	.008058	3.76
IV	83.37	.01	.83	.0091 2	.76	.009542	.80
V	171.78	.01	1.72	.008403	1.44	.008403	1.44
VI	69.30	.01	.69	.006250	.43	.008333	.58
VII	294.00	.01	2.94	.011364	3.34	.011628	3.42
VIII	180.70	.01	1.81	.011299	2.04	.007429	1.34
總數	7820.75		78.20		75.51		91.85

代入公式

$$\therefore \quad I_p = \frac{7820.75}{78.20} = 100 \text{(十五年)}.$$

$$I_p = \frac{7820.75}{75.51} = 103.57 \text{(十六年)}.$$

$$I_p=\frac{7820.75}{91.85}=85.15\text{（十七年）}.$$

49. 比價之幾何平均法(Geometric mean of price relatives).

$$I_p=\sqrt[N]{\frac{p_1'}{p_0'}\times\frac{p_1''}{p_0''}\times\frac{p_1'''}{p_0'''}\times\cdots\cdots}\qquad\cdots\cdots\text{〔公式58〕}$$

〔例52〕 由前例各物之比價,求其幾何平均數.

$$I_p=\sqrt[8]{104.3\times107.1\times89.7\times109.5\times119.0\times160.0\times88.0\times88.5}$$

$$=106.3\text{（十六年）}.$$

$$I_p=\sqrt[8]{75.1\times97.1\times124.1\times104.8\times119.0\times120.0\times860\times134.6}$$

$$=105.8\text{（十七年）}.$$

〔附註〕 本公式倡導最早而又最力者,首推英儒奇馮氏(Jevons)近世各國編製指數時,亦以本式不受物價劇烈變動,而生偏上或偏下之影響,且有合於轉換基期之便,故多樂採用.

50. 比價幾何平均之對數法(Logarithm of geometric mean of price relatives).

$$\log I_p=\frac{\log\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right)+\log\left(\frac{p_1''}{p_0''}\right)+\log\left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\right)+\cdots\cdots}{N}\cdots\text{〔公式59〕}$$

〔例53〕 由例48各物之比價求其對數:

(表 40)

物品	十五年 比價 $\left(\frac{p_0}{p_0}\right)$	十五年 log $\left(\frac{p_0}{p_0}\right)$	十六年 比價 $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	十六年 log $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	十七年 比價 $\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$	十七年 log $\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$
I	100	2.0000	104.3	2.01828	75.1	1.87564
II	100	2 0000	107.1	2.02979	97.1	1.98722
III	100	2.0000	89.7	1.95279	124.1	1.09377
IV	100	2.0000	109 5	2.03941	104.8	2.02036
V	100	2.0000	119 0	2.07555	119 0	2.07555
VI	100	2.0000	160.0	2 20412	120.0	2.07918
VII	100	2 0000	88.0	1.94448	86.0	1.93450
VIII	100	2 0000	88.5	1.94694	134.6	2.12905
		16.0000		16.21136		16.19527

代入公式

$$\log I_p = \frac{16.00}{8} = 2.0000 = \log 100 \quad \text{即} \quad I_p = 100\,(\text{十五年}).$$

$$\log I_p = \frac{16.21136}{8} = 2.02642 = \log 106.3$$

$$\therefore \quad I_p = 106.3\,(\text{十六年}).$$

$$\log I_p = \frac{16.19527}{8} = 2.02441 = \log 105.8$$

$$\therefore \quad I_p = 105.8\,(\text{十七年}).$$

此法在免去開方之煩.且當方根數爲 5,7 等質數不能開方時,則尤非以此法不能得其結果.

51. 比價加權幾何平均法 (Weighted geometric of price relatives).

$$I_p = \sqrt[\Sigma p_0 q_0]{\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right)^{p_0' q_0'} \times \left(\frac{p_1''}{p_0''}\right)^{p_0'' q_0''} \times \left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\right)^{p_0''' q_0'''} \times \cdots} \quad \text{〔公式60〕}$$

此式直接計算,甚爲複雜.倘化爲對數式,則甚簡易,兹舉對數式如下:

$$\log I_p=\frac{p_0'q_0'\log\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right)+p_0''q_0''\log\left(\frac{p_1''}{p_0''}\right)+p_0'''q_0'''\log\left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\right)+}{\Sigma p_0q_0}$$

………………………〔公式 61〕

〔例 54〕 由前例各物比價之對數及其相當權數,列如下表:

(表　41)

物品	權數	十五年		十六年		十七年	
	p_0q_0	$\log\left(\frac{p_0}{p_0}\right)$	$p_0q_0\log\left(\frac{p_0}{p_0}\right)$	$\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	$p_0q_0\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	$\log\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$	$p_0q_0\log\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$
I	4312.46	2.0000	8624.92	2.01828	8703.75	1.87564	8088.62
II	2242.24	2.0000	4484.48	2.02979	4551.28	1.98722	4455.82
III	446.90	2.0000	933.80	1.95279	911.76	2.09377	977.58
IV	83.37	2.0000	166.74	2.03941	170.03	2.02036	168.44
V	171.78	2.0000	343.56	2.07555	356.54	2.07555	356.54
VI	69.30	2.0000	138.60	2.20412	152.75	2.07918	144.09
VII	294.00	2.0000	588.00	1.94448	571.68	1.93450	568.74
VIII	180.70	2.0000	361.40	1.94694	351.81	2.12905	384.72
總數	7820.75		15,641.50		15,769.60		15,144.55

代入公式

$$\log I_p=\frac{15641.50}{7820.75}=2.00000=\log 100$$

$$\therefore\quad I_p=100\ (\text{十五年}).$$

$$\log I_p=\frac{15769.60}{7820.75}=2.01638=\log 103.84$$

$$\therefore\quad I_p=103.84\ (\text{十六年}).$$

$$\log I_p=\frac{15144.55}{7820.75}=1.93646=\log 86.39$$

$$\therefore\quad I_p=86.39\ (\text{十七年}).$$

52. 比價中位數法(Medien of price relatives).

〔例 55〕 1913—1915 年美國 36 種物品之物價及其比價如下

表：(資料根據 FISHER—The Making of Index Numbers P. 489)

(表 42)

號數	物品	1913		1914		1915	
		p_0	$\frac{p_0}{p_0}$	p_1	$\frac{p_1}{p_0}$	p^2	$\frac{p_2}{p_0}$
1	小牛	12.0396	100.00	11.9208	99.01	12.1354	100.80
2	豕	8.3654	100.00	8.3608	99.95	7.1313	85.25
3	醃豚肉	.1236	100.00	.1295	104.77	.1129	91.34
4	牛肉	.1295	100.00	.1364	105.33	.1289	99.54
5	羊肉	.1025	100.00	.1010	98.54	.1073	104.68
6	豬肉	.1486	100.00	.1543	103.84	.1429	96.16
7	牛酪油	.2969	100.00	.2731	91.98	.2743	92.39
8	熟豬油	.1101	100.00	.1037	94.19	.0940	85.38
9	大麥	.6263	100.00	.6204	99.06	.7103	113.41
10	小麥	.9131	100.00	1.0412	114.03	1.3443	147.22
11	雀麥	.3758	100.00	.4191	111.52	.4958	131.93
12	蛋	.2468	130.00	.2660	107.78	.2597	105.23
13	咖啡	.1113	100.00	.0816	73.32	.0745	66.94
14	棉	.1279	100.00	.1121	87.65	.1015	79.36
15	乾草	11.2500	100.00	12.3182	109.50	11.6250	103.33
16	木材	90.3974	100.00	90.9904	100.66	90.5000	100.11
17	樹膠	.8071	100.00	.6158	76.30	.5573	69.05
18	樹皮	2.5833	100.00	2.6250	101.61	2.7188	105.25
19	獸皮	.1727	100.00	.1842	106.66	.2076	120.21
20	羊毛	.5833	100.00	.5975	101.56	.7375	125.36
21	絲	3.9083	100.00	4.0573	103.81	3.6365	93.05
22	水泥	1.5800	100.00	1.5800	100.00	1.4525	91.93
23	煤	5.0336	100.00	5.0592	99.91	5.0464	99.66
24	块煤	1.2700	100.00	1.1700	92.13	1.0400	81.89
25	焦煤	3.0300	100.00	2.3200	76.57	2.4200	79.87
26	銀	.5980	100.00	.5481	91.66	.4969	83.09
27	銅	.1533	100.00	.1318	85.98	.1676	109.33
28	鐵條	1.5100	100.00	1.2000	79.47	1.3700	90.73
29	鐵块	14.9025	100.00	13.3900	89.85	13.5758	91.10
30	鋼條	28.0000	100.00	28.0000	100.00	28.0000	100.00
31	錫块	44.3200	100.00	35.7000	80.55	38.6600	87.45
32	錫片	3.5583	100.00	3.3688	94.67	3.2417	91.10
33	白鉛	.0676	100.00	.0675	99.85	.0698	103.25
34	鉛	.0437	100.00	.0386	88.33	.0467	106.86
35	石灰	1.2500	100.00	1.2500	100.00	1.2396	99.17
36	石油	.1233	100.00	.1200	97.32	.1208	97.97

由上表,以1913年為基年,求1914年之指數.須先將該年36種物品之比價,順序排列.次求其居中兩比價之平均數,即該年之物價指數.

茲將1914年各物比之價,由小至大排列如下:

比價最小者(咖啡)	73.32
次小者(樹膠)	76.30
…………………………	
…………………………	
第18項(大麥)	99.06
第19項(白鉛)	99.85
…………………………	
…………………………	
比價最大者(小麥)	114.03

故1914年之指數 $=\dfrac{99.06+99.85}{2}=\dfrac{198.91}{2}=99.45$

依同理,

1915年之指數 $=\dfrac{99.17+97.97}{2}=\dfrac{197.14}{2}=98.57$

53. 比價之加權中位數法(Weighted median of price relatives).

〔例56〕 仍取上例,以各物基年之值為權數,求1914年及1915年之物價指數.各物之權數及各年之比價,列如下表:

(表 43)

物品號數	基年物價 p_0	基年物量 q_0	權數 $p_0\,q_0$	比價 1913 $\left(\frac{p_0}{p_0}\right)$	1914 $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	1915 $\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$
1	12.0396	69.8	840.364	100.00	99.01	100.80
2	8.3654	68.4	572.193	100.00	99.95	85.25
3	.1236	1077.0	133.117	100.00	104.77	91.34
4	.1295	6589.0	853.276	100.00	105.33	99.54
5	.1025	732.0	75.030	100.00	98.54	104.68
6	.1486	9211.0	1368.755	100.00	103.84	96.16
7	.2969	1757.0	521.653	100.00	91.98	92.39
8	.1101	1100.0	121.110	100.00	94.19	85.38
9	.6263	178.2	111.607	100.00	99.06	113.41
10	.9131	555.0	506.771	100.00	114.03	147.22
11	.3758	1122.0	421.648	100.00	111.52	131.93
12	.2468	1722.0	424.990	100.00	107.78	105.23
13	.1113	863.0	96.052	100.00	73.32	66.94
14	.1279	2785.0	356.202	100.00	87.65	79.36
15	11.2500	79.2	891.000	100.00	109.50	103.33
16	90.3974	21.8	1970.663	100.00	100.66	100.11
17	.8071	115.8	93.462	100.00	76.30	69.05
18	2.5833	6.7	17.308	100.00	101.61	105.25
19	.1727	672.0	116.054	100.00	106.66	120.21
20	.5883	448.0	263.558	100.00	101.56	125.36
21	3.9083	19.1	74.649	100.00	103.81	93.05
22	1.5800	85.8	135.564	100.00	100.00	91.93
23	5.0636	6.9	34.939	100.00	99.91	99.66
24	1.2700	477.0	605.790	100.00	92.13	81.89
25	3.0300	46.3	140.289	100.00	76.57	79.87
26	.5980	146.1	87.368	100.00	91.66	83.09
27	.1533	812.3	124.526	100.00	85.98	109.33
28	1.5100	79.2	119.592	100.00	79.47	90.73
29	14.9025	31.0	461.978	100.00	89.85	91.10
30	28.0000	3.5	98.000	100.00	100.00	100.00
31	44.3200	1.04	46.093	100.00	80.55	87.45
32	3.5583	15.3	54.442	100.00	94.67	91.10
33	.0676	286.0	19.334	100.00	99.85	103.25
34	.0437	823.7	35.996	100.00	88.33	106.86
35	1.2500	23.3	29.125	100.00	100.00	99.17
36	.1233	10400.0	1282.320	100.00	97.32	97.97
			13104.818			

根據上表求各年之物價指數,須先將各年之比價分組順列,次求其權數中點所在處之比價卽得.玆以 1 爲組距,將比價列表於下:

(表　44)

1914 年		1915 年	
比價之分組	權　數	比價之分組	權　數
73—73.99	96.052	66—66.99	96.052
76—76.99	233.751	69—69.99	93.462
79—79.99	119.592	79—79.99	496.491
80—80.99	46.093	81—81.99	605.790
85—85.99	124.526	83—83.99	87.368
87—87.99	356.202	85—85.99	693.303
88—88.99	35.996	87—87.99	46.093
89—89.99	461.978	90—90.99	119.592
91—91.99	609.021	91—91.99	785.101
92—92.99	605.790	92—92.99	521.653
94—94.99	175.552	93—93.99	74.649
97—97.99	1282.320	96—96.99	1368.755
98—98.99	75.030	97—97.99	1282.320
99—99.99	1578.437	99—99.99	917.340
100—100.99	2233.552	100—100.99	2909.027
101—101.99	280.866	103—103.99	910.334
103—103.99	1443.404	104—104.99	75.030
104—104.99	133.117	105—105.99	442.298
105—105.99	853.276	106—106.99	35.996
106—106.99	116.054	109—109.99	124.526
107—107.99	424.990	113—113.99	111.607
109—109.99	891.000	120—120.99	116.054
111—111.99	421.648	125—125.99	263.558
114—114.99	506.771	131—131.89	421.648
	13104.818	147—147.99	506.771
			13104.818

由上表,已知 $N = 13104.818$

$$\frac{N}{2} = 6552.409$$

代入公式(14),故

$$1914\text{年之指數} = 100 + \frac{6552.409 - 5800.340}{2233.352} \times 1$$

$$= 100 + \frac{752.069}{2233.352} \times 1$$

$$= 100.34$$

同理,

$$1915\text{年之指數} = 99 + \frac{6552.409 - 6270.629}{917.340} \times 1$$

$$= 99 + \frac{281.780}{917.340} \times 1$$

$$= 99.31$$

54 比價衆數法(Mode of price relatives).

〔例57〕 仍取前例將1914年及1915年之比價,分組以求之.

(表　45)

比價之分組	組距中值	次數 1914年	次數 1915年
64—68	66	—	1
68—72	70	—	1
72—76	74	1	—
76—80	78	3	2
80—84	82	1	2
84—88	86	2	3
88—92	90	4	5
92—96	94	3	2
96—100	98	10	6
100—104	102	5	4
104—108	106	4	4
108—112	110	2	1
112—116	114	1	1
116—120	118	—	—
120—124	122	—	1
124—128	126	—	1
128—132	130	—	1
132—136	134	—	—
136—140	138	—	—
140—144	142	—	—
144—148	146	—	1

由上表可知1914年以96--100組中比價之次數10爲最多，在1915年中亦以96—100組中比價之次數6爲最多，而各年該組之中值均爲98.

$$\therefore \quad 1914\text{年之指數} = 98,$$

$$1915\text{年之指數} = 98.$$

55. 比價之加權衆數法(Weighted mode of price relatives).

〔例58〕 仍用前例求得指數如下：

(表 46)

1914 年		1915 年	
比價(組距中值)	權數	比價(組距中值)	權數
73	96.052	67	96.052
76	93.462	69	93.462
77	140.289	79	356.202
79	119.592	80	140.289
81	46.093	82	605.790
86	124.526	83	87.368
88	392.198	85	693.303
90	461.978	87	46.093
92	1214.811	91	769.129
94	121.110	92	657.217
95	54.442	93	71.649
97	1282.320	96	1368.755
99	1027.001	98	1282.320
100	889.155	99	29.125
101	1970.663	100	2956.878
102	280.886	101	840.364
104	1443.404	103	910.334
105	986.393	105	517.328
107	116.054	107	35.996
108	424.990	109	124.526
110	891.000	113	111.607
112	421.648	120	116.054
114	506.771	125	263.558
	13104.818	132	421.648
		147	506.771
			13104.818

上表以1爲組距,以各組之中值表比價.次查各年中權數最大之比價,即得所求之指數.

$\therefore$ 1914年之指數 $=101$

1915年之指數 $=100$

〔附註〕 由中位數及衆數求算之指數,應於物品項數較多時,方爲適用.故本章所舉八種物品例題,此處採用,實覺過少.爰改取費宣氏三十六種物品爲例.

56. 簡單總價法 (Simple aggregative index number of prices).

$$I_p=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}\text{..............................}〔公式62〕$$

〔例59〕 例同前,由表34計算如下:

(表　47)

物　品	十五年(p_0)	十六年(p_1)	十七年(p_2)
I	16.78	17.50	12.60
II	3.08	3.30	2.99
III	.29	.26	.36
IV	.21	.23	.22
V	.21	.25	.25
VI	.10	.16	.12
VII	.50	.44	.43
VIII	1.30	1.15	1.75
總　數	22.47	23.29	18.72

今以民國十五年爲基年,

代入公式

$$I_p=\frac{23.29}{22.47}=103.6\ \text{(民國十六年之物價指數).}$$

$$I_p=\frac{18.72}{22.47}=83.3\ \text{(民國十七年之物價指數).}$$

57. 加權總價法 (Weighted aggregative index number of prices).

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 63〕$$

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 64〕$$

此兩式與公式〔55_a〕及〔55_b〕之簡式完全相同. 又〔公式 63〕係拉氏(Laspagre)所倡導,以基期數量爲權數. 故亦稱拉氏總價法(Laspagre aggregative method).〔公式 64〕係派許氏(Paaschi)所倡導,以計算期數量爲權數,故亦稱派許氏總價法(Paaschi aggregative method).

〔例 60〕 同上例之事實,今分別以基年及計算年之物量權數求算指數如下:

(表 48)

物品	基年加權			計算年加權			
	十五年	十六年	十七年	十六年		十七年	
	$p_0\ q_0$	$p_1\ q_0$	$p_2\ q_0$	$p_0\ q_1$	$p_1\ q_1$	$p_0\ q_2$	$p_2\ q_2$
I	4312.46	4497.50	32[illegible]8.20	4832.64	5040.00	4782.30	3591.00
II	2242.24	2402.40	2176.72	2[illegible]06.92	2471.70	2365.44	2296.32
III	466.90	418.60	579.60	529.83	475.02	504.60	626.40
IV	83.37	91.31	87.34	109.20	119.60	205.80	215.60
V	171.78	204.50	204.50	174.51	207.75	179.76	214.00
VI	69.30	110.88	83.16	70.10	112.16	71.30	85.56
VII	294.00	258.72	252.84	289.50	254.76	319.00	274.34
VIII	180.70	159.85	243.25	257.40	227.70	339.30	456.75
總計	7820.75	8143.76	6865.61	8570.10	8908.69	8767.50	7759.97

由公式(63)得基年加權總價指數.

$$I_p=\frac{8143.76}{7820.75}=104.1\text{(十六年)}.$$

$$I_p=\frac{6865.61}{7820.75}=\ 87.8\text{(十七年)}.$$

由公式(64)得計算年加權總價指數.

$$I_p=\frac{8908.69}{8570.10}=104.0\text{(十六年)}.$$

$$I_p=\frac{7759.97}{8767.50}=\ 88.5\text{(十七年)}.$$

58. 加權總價算術平均法.

$$I_p=\frac{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}{2}\text{……〔公式 65〕}$$

〔例 61〕 由上例所得之指數,代入公式

$$I_p=\frac{104.1+104.0}{2}=104.05\text{(十六年)}.$$

$$I_p=\frac{87.8+88.5}{2}=\ 88.15\text{(十七年)}.$$

59. 理想公式(Ideal formula).

$$I_p=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\text{……〔公式 66〕}$$

〔例 62〕 由例 60 所得之指數,

代入公式

$$I_p=\sqrt{104.1\times104.0}=104.0\text{(十六年)}.$$

$$I_p=\sqrt{87.8\times88.5}=\ 88.1\text{(十七年)}.$$

〔附註〕 本公式係費宣氏所創,其求得指數之確度,比較最高.至用以消除偏勢,亦較其他交叉公式(Cross formula)爲著.

60. 愛馬兩氏總價法(Edgeworth and Marshall aggregative method).

$$I_p = \frac{\Sigma(q_0+q_1)p_1}{\Sigma(q_0+q_1)p_0} \cdots\cdots〔公式 67〕$$

〔例 63〕 由表 48 得,

$$I_p = \frac{17052.45}{16360.85} = 104.0 \text{ (十六年)}.$$

$$I_p = \frac{14625.58}{16588.25} = 88.2 \text{ (十七年)}.$$

〔附註一〕 公式 65 及 67 皆用以免去開方之煩,而代替理想公式者.惟公式 67 與理想公式所得之指數,幾於完全相等.閱者可以上述實例驗證之.(詳情參攷 FISHER, IRVING—The Making of Index Numbers PP. 174—177; 493—494).

本公式爲愛馬兩氏所倡用.原式爲 $I = \dfrac{\Sigma\left(\dfrac{q_0+q_1}{2}\right)p_1}{\Sigma\left(\dfrac{q_0+q_1}{2}\right)p_0}$

〔附註二〕 就指數之基期論,可分爲定基指數及連鎖指數(Chain base index)以上各例物價指數之計算,乃以固定一年爲基期,皆屬定基指數.至於連鎖指數,須先求各年物價或總價與上年物價或總價之比,謂之環比,更以各環比連續相乘,即得連鎖指數.

61. 環比法(Method of linking).

$$L.\ R_1 = p_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$L.\ R_2 = p_{12} = \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$$

$$L.\ R_3 = p_{23} = \frac{\Sigma p_3 q_2}{\Sigma p_2 q_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 68〕$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L.R_n = p_{(n-1)n} = \frac{\Sigma p_n q_{n-1}}{\Sigma p_{n-1} q_{n-1}}$$

〔例 64〕 民國十二年至十六年上海躉售米麥價及其數量如下,今求其各年環比:

(表　49)

物品	十二年		十三年		十四年		十五年		十六年	
	價 p_0	量 q_0	價 p_1	量 q_1	價 p_2	量 q_2	價 p_3	量 q_3	價 p_4	量 q_4
米	12.32	50	11.55	48	11.69	45	16.79	40	16.18	52
麥	6.34	28	5.60	32	6.93	31	6.25	35	6.14	29

本表物價根據上海貨價季刊,物量(單位百萬擔)係假設之數.

由上表,　$\Sigma p_0 q_0 = 616.00 + 177.52 = 793.52$

$\Sigma p_1 q_0 = 577.50 + 156.80 = 734.30$

$\Sigma p_1 q_1 = 554.40 + 179.20 = 733.60$

$\Sigma p_2 q_1 = 561.12 + 221.76 = 782.88$

$\Sigma p_2 q_2 = 467.60 + 242.55 = 710.15$

$$\Sigma p_3 q_2 = 671.60 + 218.75 = 890.35$$

$$\Sigma p_3 q_3 = 755.55 + 193.75 = 949.30$$

$$\Sigma p_4 q_3 = 728.10 + 190\ 34 = 918.44$$

代入公式

$$P_{01} = \frac{734.30}{793.51} = 92.54$$ (十三年之環比).

$$P_{12} = \frac{782.88}{733.60} = 106.72$$ (十四年之環比).

$$P_{23} = \frac{890.35}{710.15} = 125.37$$ (十五年之環比).

$$P_{34} = \frac{918.44}{949.30} = 96.75$$ (十六年之環比).

62　鎖比法 (Chain index).

$$\left.\begin{array}{l} C.R_1 = P_{01} = L.R_1 \\ C.R_2 = P_{01} \cdot P_{12} = C.R_1 \times L.R_2 \\ C.R_3 = P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} = C.R_2 \times L.R_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C.R_n = P_{01} \cdot P_{12}\ P_{23} \cdots\cdots P_{(n-1)n} = C.R_{n-1} \times L.R_n \end{array}\right\} \cdots\cdots \text{〔公式 69〕}$$

〔例 65〕 仍取米麥價之例,以十二年爲基年,則

$P_{01} = 92.54$ (十三年之鎖比).

$P_{01} \cdot P_{12} = 92.54 \times 106.72 = 98.76$ (十四年之鎖比).

$P_{01} \cdot P_{13} \cdot P_{23} = 98.76 \times 125.37 = 123.82$ (十五年之鎖比).

$P \cdot P \cdot P \cdot P = 123.82 \times 96.75 = 119.80$ [illegible]

C. 物值指數 (Value index numbers).

64. 物值指數.

$$I_V=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$ ……〔公式 71〕

〔例 67〕 根據表 48 之計算得,

$$I_v=\frac{8908.69}{7820.75}=113.9$$ (十六年物值指數).

$$I_v=\frac{7759.97}{7820.75}=99.2$$ (十七年物值指數).

〔附註〕 查物價與物量二指數之積如下:

十六年: $1.040\times1.095=1.139$

十七年: $.882\times1.125=.992$

觀其結果,值與物值指數相同,此名因子互換測驗(Factor reversal test).由是更可證明理想公式求得之指數爲最精確.

III. 時間數列 (Time Series)

A. 長期趨勢 (Secular trend)

65. 配合直線 ($y=a+bx$) 之標準方程式——最小平方法 (Normal equations for fitting straight line by least squares).

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y) &= Na + b\Sigma(x) \\ \Sigma(xy) &= a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 72〕}$$

〔例 68〕 玆取民國元年至十六年我國輸出之物價指數爲例. (數見工商部編印之中國輸出貿指數表), 求其配合直線趨勢之各點 (卽 y 之算出值).

(表 50)

年份	x	指數 y	xy	x^2	y_c $(a+bx)$
民國元年	1	69.0	69.0	1	66.154
二年	2	70.5	141.0	4	68.558
三年	3	70.6	211.8	9	70.962
四年	4	72.1	288.4	16	73.366
五年	5	76.3	381.5	25	75.770
六年	6	75.7	454.2	36	78.174
七年	7	80.8	565.6	49	80.578
八年	8	80.8	646.4	64	82.982
九年	9	82.1	738.9	81	85.386
十年	10	85.5	855.0	100	87.790
十一年	11	90.7	997.7	121	90.194
十二年	12	96.7	1160.4	144	92.598
十三年	13	95.4	1240.2	169	95.002
十四年	14	97.7	1367.8	196	97.406
十五年	15	100.0	1500.0	225	99.810
十六年	16	103.0	1648.0	256	102.214
	136	1346.9	12265.9	1496	1346.944

由上表得 $N=16$, $\Sigma(x)=136$, $\Sigma(y)=1346.9$,

$$\Sigma(xy)=12265.9,\ \Sigma(x^2)=1496$$

代入公式

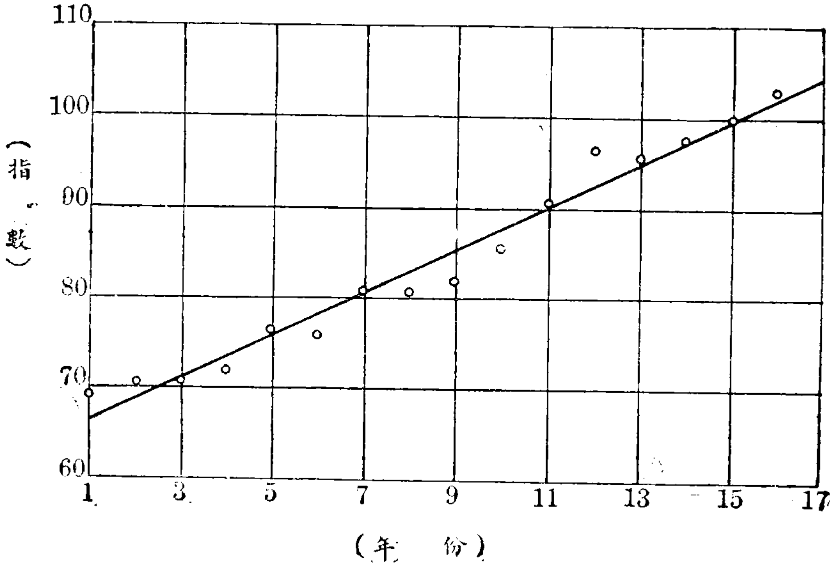
$$1346.9=16a+136b \cdots\cdots \quad (1)$$

$$12265.9=136a+1496b \cdots\cdots \quad (2)$$

解(1),(2)得 $\begin{cases} a=63.750 \\ b=\ \ 2.404 \end{cases}$

而 $y=63.750+2.404x$, 即所求直線之方程式.

(見下圖)



(圖 2)

中國歷年輸出物價指數及其配合之直線

(民國十五年 =100)

66. 配合直線標準方程式之簡捷法(以居中年份為原點).

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma y = Na \\ \Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 73〕}$$

〔例 69〕 仍取上例事實但以居中年份爲原點(卽民國八年之中點)其算法如下表:

(表 51)

年份	x	指數 y	$2xy$	$4x^2$	y_c
民國元年	−15/2	69.0	−1035.0	225	66.151
二年	−13/3	70.5	− 916.5	169	68.555
三年	−11/2	70.6	− 776.6	121	70.959
四年	− 9/2	72.1	− 648.9	81	73.363
五年	− 7/2	76.3	− 534.1	49	75.767
六年	− 5/2	75.7	− 378.5	25	78.171
七年	− 3/2	80.8	− 242.4	9	80.575
八年	− 1/2	80.8	− 80.8	1	82.979
九年	1/2	82.1	82.1	1	85.383
十年	3/2	85.5	256.5	9	87.787
十一年	5/2	90.7	453.5	25	90.191
十二年	7/2	96.7	676.9	49	92.595
十三年	9/2	95.4	858.6	81	94.999
十四年	11/2	97.7	1074.7	121	97.493
十五年	13/2	100.0	1300.0	169	99.807
十六年	15/2	103.0	1545.0	225	102.211
		1346.9	2 | 1634.5	4 | 1360	1346.896
			817.25	340	

由上表得 $N=16, \Sigma(y)=1346.9, \Sigma(xy)=817.25$

$$\Sigma(x^2)=340$$

代入公式

$$1346.9 = 16a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$817.25 = 340b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解(1),(2)得

$$a = 84.181$$

$$b = \ 2.404$$

則民國$8\frac{1}{2}$年$x=0$時之方程式爲$y=84.181+2.404x$

若民國8年改爲$x=0$,則當由$8\frac{1}{2}$年減去$\frac{1}{2}$年,即得

$$y=84.181+2.404(x-\tfrac{1}{2})$$

而得一新方程式$y=82.979+2.404x$. 其算出之値y_c(見表51較表50尤爲適合. 而解算之手續,則簡便甚多.

〔附註〕 若上例年數改爲奇數時,此法更爲簡便. 其算法如下:

(表 52)

年份	x	指數 y	xy	x^2	y_c
元年	−7	69.0	−483.0	49	66.260
二年	−6	70.5	−423.0	36	68.641
三年	−5	70.6	−353.0	25	71.022
四年	−4	72.1	−288.4	16	73.403
五年	−3	76.3	−228.9	9	75.784
六年	−2	75.7	−151.4	4	78.165
七年	−1	80.8	− 80.8	1	80.546
八年	0	80.8	−2008.5	0	82.927
九年	1	82.1	82.1	1	85.308
十年	2	85.5	171.0	4	87.689
十一年	3	90.7	272.1	9	90.070
十二年	4	96.7	386.8	16	92.451
十三年	5	95.4	477.0	25	94.832
十四年	6	97.7	586.2	36	97.213
十五年	7	100.0	700.0	49	99.594
		1243.9	2675.2 −2008.5 666.7	280	1243.905

由上表得 $N=15$, $\Sigma(y)=1243.9$, $\Sigma(xy)=666.7$, $\Sigma(x^2)=280$.

代入公式

$$1243.9 = 15a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$666.7 = 280b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解(1),(2)得 $a=82.927$

$b= 2.381$

則 $y=82.927+2.381x$ (民國8年, $x=0$)

67. 配合二次拋物線($y=a+bx+cx^2$)之標準方程式最小平方法(Normal equations for fitting second degree parabola by east squares).

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y)&=Na+b\Sigma(x)+c\Sigma(x^2)\\ \Sigma(xy)&=a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^3)\\ \Sigma(x^2y)&=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x^3)+c\Sigma(x^4)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots〔公式74〕$$

〔例70〕 今舉民國元年至十八年中國進口物量指數為例,求其配合二次拋物線之趨勢.計算詳見下表:

(表 53)*

年份	x	y	xy	x^2y	y_c $(a+bx+cx^2)$
民國元年	1	82.8	82.8	82.8	82.8
二年	2	100.0	200.0	400.0	86.3
三年	3	91.6	274.8	824.4	90.3
四年	4	92.1	368.4	1473.6	94.6
五年	5	96.6	483.0	2415.0	99.4
六年	6	103.0	618.0	3708.0	104.6
七年	7	92.7	648.9	4542.3	110.3
八年	8	105.8	846.4	6771.2	116.3
九年	9	106.5	958.5	8626.5	122.8
十年	10	132.9	1329.0	13290.0	129.7
十一年	11	158.5	1743.5	19178.5	136.9
十二年	12	154.4	1852.8	22233.6	144.7
十三年	13	170.1	2211.3	28746.9	152.8
十四年	14	156.3	2188.2	30634.8	161.4
十五年	15	185.9	2788.5	41827.5	170.3
十六年	16	156.5	2504.0	40064.0	179.7
十七年	17	187.5	3187.5	54187.5	189.5
十八年	18	199.5	3591.0	64638.0	199.7
$N=18$	171	2372.7	25876.6	343644.6	2372.1

由上表 $N=18$

$\Sigma(y)=2372.7$

$\Sigma(xy)=25876.6$

$\Sigma(x^2y)=343644.6$

又查附錄表IV, $\Sigma(x)=171$

$\Sigma(x^2)=2109$

$\Sigma(x^3)=29241$

$\Sigma(x^4)=432345$

將以上諸值代入公式(74),得

$$2372.7=18a+171b+2109c \cdots\cdots(1)$$

*此表指數資料採自南開大學經濟統計季刊第一卷第一期,何廉君著中國進口貿易物量指數物價指數與物物交易率指數編製之說明.

$$25876.6 = 171a + 2109b + 29241c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$343644.6 = 2109a + 29241b + 432345c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1)÷18, $\quad 131.817 = a + 9.5b + 117.167c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(2)÷171, $\quad 151.325 = a + 12.333b + 171c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(3)÷2109, $\quad 162.942 = a + 13.865b + 205c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

(5)—(4), $\quad 19.508 = 2.833b + 53.833c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

(7)÷2.833, $\quad 6.886 = b + 19.002c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

(6)—(5), $\quad 11.617 = 1.532b + 34c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

(9)÷1.532, $\quad 7.583 = b + 22.193c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$

(10)—(8), $\quad .697 = 3.191c$

$$\therefore \quad c = .218$$

將 c 值代入 (8), 得

$$b = 2.743$$

將 b, c 兩值代入 (4), 則

$$a = 80.216$$

故所求配合曲線之方程式爲

$$y = 80.216 + 2.743x + .218x^2$$

68. 配合二次拋物線標準方程式之簡捷法

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y) &= Na + c\Sigma(x^2)\\ \Sigma(xy) &= b\Sigma(x^2)\\ \Sigma(x^2y) &= a\Sigma(x^2) + c\Sigma(x^4)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 75〕}$$

〔例 71〕 倘取上例增加一年之事實,則 N 爲奇數,其 y_c 之求算又應如下:

(表 54)

年份	x	y	xy	x^2y	x^2	x^4	y_c $(a+bx+cx^2)$
民國元年	-9	82.8	-745.2	6706.8	81	6561	80.7
二年	-8	100.0	-800.0	6400.0	64	4096	85.3
三年	-7	91.6	-641.2	4488.4	49	2401	90.1
四年	-6	92.1	-552.6	3315.6	36	1296	95.2
五年	-5	96.6	-483.0	2415.0	25	625	100.5
六年	-4	103.0	-412.0	1648.0	16	256	106.1
七年	-3	92.7	-278.1	834.3	9	81	111.9
八年	-2	105.8	-211.6	423.2	4	16	118.0
九年	-1	106.5	-106.5	106.5	1	1	124.3
十年	0	132.9	-4230.2				130.9
十一年	1	158.5	158.5	158.5	1	1	137.7
十二年	2	154.4	380.8	617.6	4	16	144.8
十三年	3	170.1	510.3	1530.9	9	81	152.2
十四年	4	156.3	625.2	2500.8	16	256	159.8
十五年	5	185.9	929.5	4647.5	25	625	167.7
十六年	6	156.5	939.0	5634.0	36	1296	175.8
十七年	7	187.5	1312.5	9187.5	49	2401	184.2
十八年	8	199.5	1596.0	12768.0	64	4096	192.8
十九年	9	186.8	1681.2	15130.8	81	6561	201.7
$N=19$		2559.5	8061.0	78513.4	570	30666	2559.7

由上表得　$N=19$　$\Sigma(y)=2559.5$

$\Sigma(x)=0$　$\Sigma(xy)=8061.0-4230.2=3830.8$

$\Sigma(x^2)=570$　$\Sigma(x^2y)=78513.4$

$\Sigma(x^3)=0$

$\Sigma(x^4)=30666$

將上列諸值代入公式(75),得

$$2559.5=19a+570c \cdots\cdots(1)$$

$$3830.8=570b \cdots\cdots(2)$$

$$78513.4=570a+30666c \cdots\cdots(3)$$

由(2)得　$b=6.72$

(1)×30,　$76785=570a+17100c \cdots\cdots(4)$

(3)—(4),　$1728.4=13566c$

$\therefore\ c=.127$

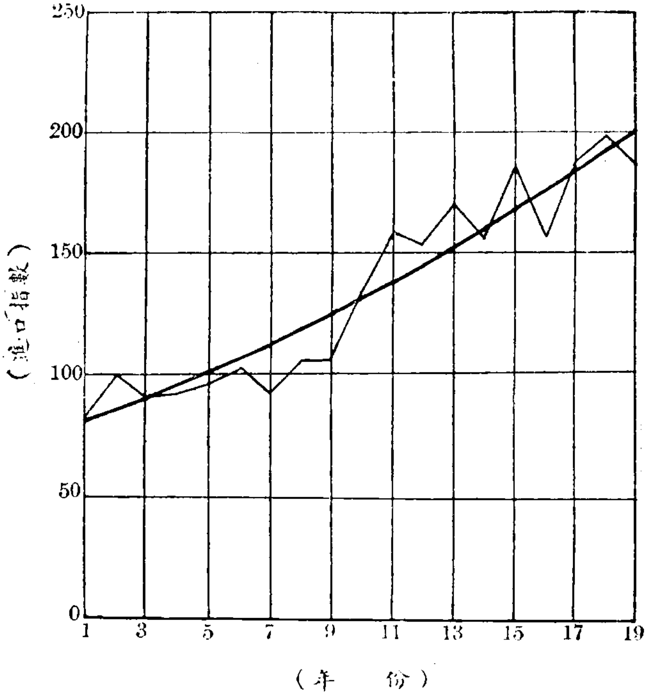
將 c 值代入(1),　$2487.11=19a$

$\therefore\ a=130.9$

故所求配合二次拋物線之方程式為,

$$y=130.9+6.72x+.127x^2$$

茲圖示如下:



(圖 3)

中國進口物量指數及其配合之二次曲線

69. 配合三次拋物線($y=a+bx+cx^2+dx^3$)之標準方程式最小平方法(Normal equations for fitting third degree porabola by least squares).

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y)&=Na+b\Sigma(x)+c\Sigma(x^2)+d\Sigma(x^3)\\ \Sigma(xy)&=a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^3)+d\Sigma(x^4)\\ \Sigma(x^2y)&=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x^3)+c\Sigma(x^4)+d\Sigma(x^5)\\ \Sigma(x^3y)&=a\Sigma(x^3)+b\Sigma(x^4)+c\Sigma(x^5)+d\Sigma(x^6)\end{aligned}\right\}\cdots\text{〔公式76〕}$$

〔例72〕 今舉中國歷年紅綠磚茶出口量數為例,以求其配合三次拋物線之趨勢.

(表 55)

年 份	x	紅綠磚茶 (10000 擔) y	xy	x^2y	x^3y
光緒三十年	1	44.8	44.8	44.8	44.8
三十一年	2	51.8	103.6	207.2	414.4
三十二年	3	58.7	176.1	528.3	1584.9
三十三年	4	60.4	241.6	966.4	3865.6
三十四年	5	59.1	295.5	1477.5	7387.5
宣統元年	6	58.5	351.0	2106.0	12636.0
二年	7	61.7	431.9	3023.3	21163.1
三年	8	41.7	333.6	1668.8	21350.4
民國元年	9	50.6	455.4	4098.6	36887.4
二年	10	60.6	606.0	6060.0	60600.0
三年	11	58.4	642.4	7066.4	77730.4
四年	12	64.1	769.2	9230.4	110764.8
五年	13	56.0	728.0	9464.0	123032.0
六年	14	44.4	621.6	8702.4	121833.6
七年	15	7.5	112.5	1687.5	25312.5
八年	16	14.3	228.8	3660.8	58572.8
九年	17	1.2	20.4	346.8	5895.6
十年	18	2.4	43.2	777.6	13996.8
十一年	19	2.3	43.7	830.3	15775.7
十二年	20	.9	81.0	360.0	7200.0
十三年	21	1.9	39.9	837.9	17595.9
十四年	22	14.2	312.4	6872.8	151201.6
十五年	23	14.2	326.6	7511.8	172771.4
十六年	24	17.3	415.2	9964.8	239155.2
十七年	25	25.7	642.5	16067.5	401562.5
十八年	26	24.3	631.8	16426.8	427096.8
十九年	27	18.2	491.4	13267.8	358230.6
$N=27$	378	915.2	9127.1	134251.5	2493662.3

由上表得

$$N=27 \qquad \Sigma(x)=378$$

$$\Sigma(y) \quad =915.2$$

$$\Sigma(xy) \ =9127.1$$

$$\Sigma(x^2y)=134251.5$$

$$\Sigma(x^3y)=2493662.3$$

又查附表IV

$$\Sigma(x^2) \quad =6930$$

$$\Sigma(x^3) \quad =142884$$

$$\Sigma(x^4) \quad =3142062$$

$$\Sigma(x^5) \quad =71965908$$

$$\Sigma(x^6) \quad =1695217590$$

將以上諸值代入公式,則得

$$915.2=27a+378b+6930c+142884d \cdots\cdots(1)$$

$$9127.1=378a+6930b+142884c+3142062d \cdots\cdots(2)$$

$$134251.5=6930a+142884b+3142062c+71965908d \cdots(3)$$

$$2493662.3=142884a+3142062b+71965908c$$
$$+1695217590d \cdots\cdots(4)$$

上列四式各以其a之係數除之,結果如下:

$$33.896=a+14b+256.667c+5292d \cdots\cdots(5)$$

$$24.146=a+18.333b+378c+8312.333d \cdots\cdots(6)$$

$$19.373=a+20.618b+453.4c+10384.691d \cdots\cdots(7)$$

$$17.452=a+21.990b+503.667c+11864.293d \cdots\cdots(8)$$

$(6)-(5),\quad -9.750=4.333b+121.333c+3020.333d \cdots\cdots(9)$

$(7)-(6),\quad -4.773=2.285b+75.400c+2072.358d \cdots\cdots(10)$

$(8)-(7),\quad -1.921=1.372b+50.267c+1479.602d \cdots\cdots(11)$

將(9),(10),(11)三式,各以其 b 之係數除之

$$-2.250=b+28.002c+697.054d \cdots\cdots(12)$$

$$-2.089=b+32.998c+906.940d \cdots\cdots(13)$$

$$-1.400=b+36.638c+1078.427d \cdots\cdots(14)$$

$(13)-(12),\quad .161=4.996c+209.886d \cdots\cdots(15)$

$(14)-(13),\quad .689=3.640c+171.487d \cdots\cdots(16)$

將(15),(16)二式,各以其 c 之係數除之

$$.032=c+42.011d \cdots\cdots(17)$$

$$.189=c+47.112d \cdots\cdots(18)$$

$(18)-(17),\quad .157=5.101d$

$$\therefore\quad d=.031$$

代入(17), $c=-1.270$

代入(12), $b=11.703$

代入(5), $a=31.969$

故所求三次拋物線之方程式,爲

$$y=31.969+11.703x-1.270x^2+.031x^3$$

70. 配合三次拋物線標準方程式之簡捷法

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y)&=Na+c\Sigma(x^2)\\ \Sigma(xy)&=b\Sigma(x^2)+d\Sigma(x^4)\\ \Sigma(x^2y)&=a\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^4)\\ \Sigma(x^3y)&=b\Sigma(x^4)+d\Sigma(x^6)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{〔公式 77〕}$$

〔例73〕 仍取上例,用簡捷法之公式,解算如下:

(表 56)

年份	x	y	xy	x^2y	x^3y	x^2	x^4	x^6	y_c
光緒三十年	−13	44.8	−582.4	7571.2	−98425.6	169	28561	4826809	42.433
三十一年	−12	51.8	−621.6	7459.2	−89510.4	144	20736	2985984	50.543
三十二年	−11	58.7	−645.7	7102.7	−78129.7	121	14641	1771561	56.485
三十三年	−10	60.4	−604.0	6040.0	−60400.0	100	10000	1000000	60.445
三十四年	−9	59.1	−531.9	4787.1	−43083.9	81	6561	531441	62.605
宣統元年	−8	58.5	−468.0	3744.0	−29952.0	64	4096	262144	63.173
二年	−7	61.7	−431.9	3023.3	−21163.1	49	2401	117649	62.293
三年	−6	41.7	−250.2	1501.2	−9007.2	36	1296	46656	60.185
民國元年	−5	50.6	−253.0	1265.0	−6325.0	25	625	15625	57.025
二年	−4	60.6	−242.4	969.6	−3878.4	16	256	4096	52.999
三年	−3	58.4	−175.2	525.6	−1576.8	9	81	729	48.293
四年	−2	64.1	−128.2	256.4	−512.8	4	16	64	43.093
五年	−1	56.0	−56.0	56.0	−56.0	1	1	1	37.585
六年	0	44.4	0	0	0	0	0	0	31.955
七年	1	7.5	7.5	7.5	7.5	1	1	1	26.389
八年	2	14.3	28.6	57.2	114.4	4	16	64	21.073
九年	3	1.2	3.6	10.8	32.4	9	81	729	16.193
十年	4	2.4	9.6	38.4	153.6	16	256	4096	11.935
十一年	5	2.3	11.5	57.5	287.5	25	625	15625	8.485
十二年	6	.9	5.4	32.4	194.4	36	1296	46656	6.029
十三年	7	1.9	13.3	93.1	651.7	49	2401	117649	4.753
十四年	8	14.2	113.6	908.8	7270.4	64	4096	262144	4.843
十五年	9	14.2	127.8	1150.2	10351.8	81	6561	531441	6.485
十六年	10	17.3	173.0	1730.0	17300.0	100	10000	1000000	9.865
十七年	11	25.7	282.7	3109.7	34206.7	121	14641	1771561	15.169
十八年	12	24.3	291.6	3499.2	41990.4	144	20736	2985984	22.583
十九年	13	18.2	236.6	3075.8	39985.4	169	28561	4826809	32.293
$N=27$		915.2	−3685.7	58071.9	−28974.7	1638	178542	23125518	

由上表得

$$N=27$$

$$\Sigma(y)=915.2 \qquad \Sigma(x^2)=1638$$

$$\Sigma(xy)=-3685.7 \qquad \Sigma(x^4)=178542$$

$$\Sigma(x^2y)=58071.9 \qquad \Sigma(x^6)=23125518$$

$$\Sigma(x^3y)=-289474.7$$

將上列各值代入公式中,則得

$$915.2=27a+1638c \cdots\cdots(1)$$

$$-3685.7=1638b+178542d \cdots\cdots(2)$$

$$58071.9=1638a+178542c \cdots\cdots(3)$$

$$-289474.7=178542b+23125518d \cdots\cdots(4)$$

(3)×3, $174215.7=4914a+535626c \cdots\cdots(5)$

(1)×182, $166566.4=4914a+298116c \cdots\cdots(6)$

(5)−(6), $237510c=7649.3$

$$\therefore \quad c=.032$$

將 c 值代入(1),

$$27a=862.784$$

$$\therefore \quad a=31.955$$

(2)×109, $-401741.3=178542b+19461078d \cdots\cdots(7)$

(4)−(7), $3664440d=112266.6$

$$\therefore \quad d=.031$$

再將 d 值代入(2),則得

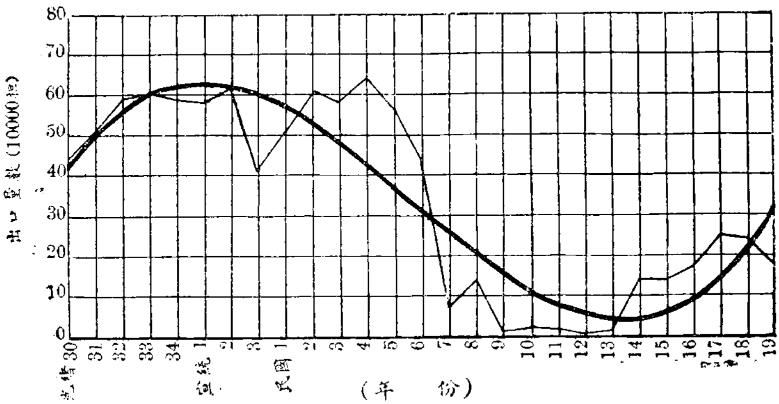
$$1638b = -9220.5$$

$$\therefore \quad b = -5.629$$

故所求三次拋物線之方程式,爲

$$y = 31.955 - 5.629x + .032x^2 + .031x^3$$

根據本方程式作圖如下:



(圖 4)

中國歷年紅綠磚茶出口量數及其配合之三次曲線

71. 配合指數曲線($y=ab^x$)之標準方程式 (Normal equations for fitting the simple exponential curve).

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(\log y) &= N\log a + \log b\Sigma(x)\\ \Sigma(x\log y) &= \log a\Sigma(x) + \log b\Sigma(x^2)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots [\text{公式}78]$$

〔例 74〕 茲取民國十一年至二十年由日本輸入我國紙之淨值爲例,求其配合之指數曲線.計算如下表:

(表 57)

單位: 百萬海關兩

年份	x	y	$\log y$	$x \log y$	x^2	y_0
民國十一年	1	5.2	0.71600	0.71600	1	4.5
十二年	2	5.2	0.71600	1.43200	4	5.4
十三年	3	5.4	0.73239	2.19717	9	6.3
十四年	4	7.7	0.88649	3.54596	16	7.4
十五年	5	9.0	0.95424	4.77120	25	8.7
十六年	6	9.5	0.97772	5.86632	36	10.2
十七年	7	12.2	1.08636	7.60452	49	12.0
十八年	8	13.1	1.11727	8.93816	64	14.2
十九年	9	18.3	1.26245	11.39205	81	16.6
二十年	10	19.9	1.29885	12.98850	100	19.6
	55		9.74777	59.42188	385	

上表資料根據海關報告册.

由上表

$$N=10 \qquad \Sigma(x)=55$$

$$\Sigma(\log y)=9.74777 \qquad \Sigma(x^2)=385$$

$$\Sigma(x\log y)=59.42188$$

將上列諸值,代入公式,

$$9.74777=10\log a+55\log b \cdots\cdots(1)$$

$$59.42188=55\log a+385\log b \cdots\cdots(2)$$

(1)×5.5 $53.61274=55\log a+302.5\log b \cdots\cdots(3)$

(2)−(3), $5.80914=82.5\log b$

$$\therefore \log b=.07041 \text{ 即 } b=1.176$$

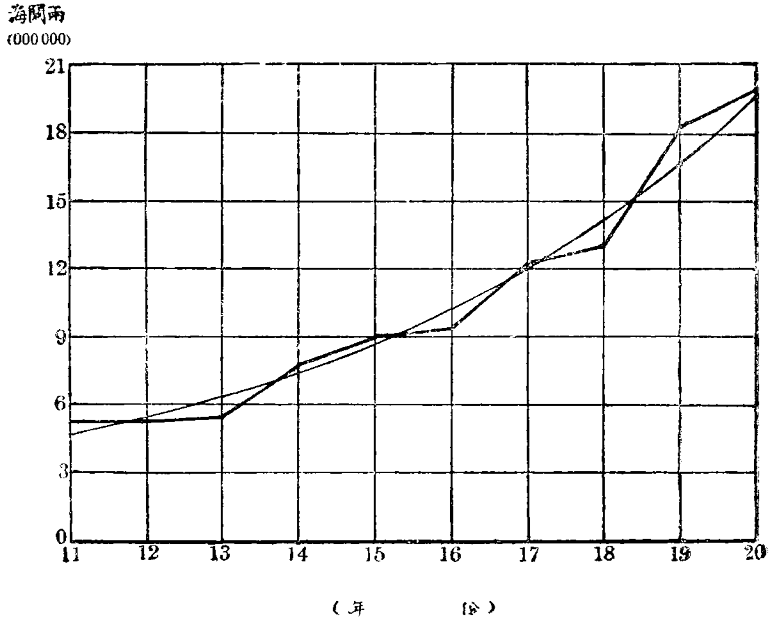
代入(1),

$\therefore \quad \log a = .58752$ 即 $a = 3.868$

故所求配合指數曲線之方程式爲

$$y = 3.868 \times (1.176)^x$$

用上列求出之方程式繪圖如下,以示曲線之趨勢.至各年之 y 值,詳列表(57) y_c 欄中.



(圖 5)

日本輸入我國紙之淨值及其配合之指數曲線

72. 配合指數曲線標準方程式簡捷法.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(\log y) &= N \log a \\ \Sigma(x \log y) &= \log b\,\Sigma(x^2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 79〕}$$

〔例 75〕 仍取前例事實,用簡捷法計算之.

(表 58)

年份	x	y	$\log y$	$x\log y$	x^2
民國十一年	−9	5.2	0.71600	−6.44400	81
十二年	−7	5.2	0.71600	−5.01200	49
十三年	−5	5.4	0.73239	−3.66195	25
十四年	−3	7.7	0.88649	−2.65947	9
十五年	−1	9.0	0.95424	−0.95424	1
十六年	1	9.5	0.97772	0.97772	1
十七年	3	12.2	1.08636	3.25908	9
十八年	5	13.1	1.11727	5.58635	25
十九年	7	18.3	1.26245	8.83715	49
二十年	9	19.9	1.29885	11.68965	81
$N=10$			9.74777	11.61829	330

由上表已知

$$N=10$$

$$\Sigma(\log y)=9.74777$$

$$\Sigma(x\log y)=11.61829$$

$$\Sigma(x^2)=330$$

代入公式

$$9.74777=10\log a \quad\cdots\cdots(1)$$

$$11.61829=330\log b \quad\cdots\cdots(2)$$

由 (1), $\log a=0.974777$

$$\therefore\quad a=9.436$$

由 (2), $\log b=0.035207$

$$\therefore\quad b=1.084$$

故所求配合指數曲線之方程式爲,

$$y=9.436\times(1.084)^x$$

B. 月差指數(Indices of seasonal variation)

73. 月差指數——算術平均數法

〔例 76〕 茲取民國十二年至二十一年上海躉售米價之資料爲例,求月差指數.

(表 59)

年份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	每年平均數
	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$
民國十二年	12.20	12.48	11.75	11.83	12.66	12.29	12.88	13.58	13.03	11.94	11.53	11.64	12.32
十三年	11.30	11.13	10.92	10.35	11.07	10.95	11.58	13.68	14.79	12.14	10.25	10.43	11.55
十四年	9.64	10.10	9.98	10.64	11.27	11.18	12.71	12.77	12.73	13.23	12.50	13.47	11.69
十五年	13.84	14.80	16.35	15.80	16.80	17.40	17.04	17.70	18.91	18.97	16.89	16.98	16.79
十六年	16.43	16.89	17.20	16.50	16.98	17.65	18.04	17.74	17.74	15.07	12.21	11.72	16.18
十七年	11.84	12.25	12.13	12.21	12.07	11.61	11.75	11.61	11.04	11.63	12.19	13.07	11.95
十八年	12.94	13.00	12.87	12.30	13.27	13.50	13.90	15.89	16.59	18.34	16.44	15.94	14.58
十九年	17.59	18.16	18.70	19.74	19.94	20.48	21.71	20.80	20.78	16.73	14.46	13.60	18.56
二十年	13.17	12.62	12.99	11.68	13.02	13.80	13.62	17.44	17.00	15.60	14.05	13.96	14.08
二十一年	14.08	—	15.08	14.78	15.22	16.03	15.00	14.99	14.02	11.12	10.31	9.94	13.69
每月之平均	133.03	121.43	137.97	135.83	142.30	144.89	148.23	156.20	156.63	144.77	130.83	130.75	141.39
數 (*A*)	13.303	13.492	13.797	13.583	14.230	14.489	14.823	15.620	15.663	14.477	13.083	13.075	14.139
月差指數 (*B*)	94.09	95.24	97.58	96.07	100.64	102.48	104.84	110.47	110.78	102.39	92.53	92.47	99.98
月差指數之改正數(*C*)	94.11	95.44	97.60	96.09	100.66	102.50	104.86	110.49	110.80	102.41	92.55	92.49	100.00

上表資料,根據國定稅則委員會編印之上海貨價季刊.

由上表將各年同月份中之米價,用公式(1)求得其算術平均數為,

$$一月份=\frac{12.22+11.30+9.64+\cdots\cdots+13.17+14.08}{10}=13.303,$$

$$二月份=\frac{12.48+11.13+10.10+\cdots\cdots+12.62}{9}=13.492,$$

$$三月份=\frac{11.75+10.92+9.98+\cdots\cdots+12.99+15.08}{10}=13.797,$$

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

$$十一月份=\frac{11.53+10.25+12.50+\cdots\cdots+14.05+10.31}{10}=13.083,$$

$$十二月份=\frac{11.64+10.43+13.47+\cdots\cdots+13.96+9.94}{10}=13.075,$$

復將所得各月平均數順序記入上表(A)列中,以各年平均數14.139除之,即得月差指數,如上表(B)列所示.今求得月差指數之平均數$=\frac{94.09+95.42+97.58+\cdots\cdots+92.47}{12}=99.98$, 而不等於100,故須以99.98除各月差指數以為更正,至於改正後之月差指數,則詳見上表(C)列中.

74. 月差指數——移動平均法.

〔例77〕 仍取前例事實,用移動平均法計算月差指數.

(表 60)

月份	民國十二年	十三年	十四年	十五年	十六年	十七年	十八年	十九年	二十年	二十一年
一月		11.69 **11.64**	11.31 **11.36**	14.37 **14.55**	17.35 **17.39**	13.72 **13.46**	12.43 **12.52**	17.64 **17.96**	15.45 **15.11**	15.17 **15.23**
二月		11.59 **11.59**	11.40 **11.36**	14.73 **14.94**	17.43 **17.43**	13.20 **12.94**	12.61 **12.79**	18.29 **18.50**	14.77 **14.63**	15.29 **15.18**
三月		11.59 **11.67**	11.33 **11.24**	15.14 **15.39**	17.43 **17.38**	12.68 **12.40**	12.97 **13.20**	18.70 **18.87**	14.49 **14.34**	15.07 **14.94**
四月		11.74 **11.75**	11.15 **11.20**	15.65 **15.89**	17.33 **17.17**	12.13 **11.99**	13.43 **13.71**	19.05 **18.99**	14.18 **14.13**	14.80 **14.59**
五月		11.76 **11.70**	11.24 **11.33**	16.13 **16.32**	17.01 **16.82**	11.84 **11.84**	13.99 **14.17**	18.92 **18.83**	14.08 **14.06**	14.39 **14.22**
六月		11.65 **11.60**	11.47 **11.56**	16.50 **16.64**	16.62 **16.40**	11.84 **11.89**	14.34 **14.46**	18.75 **18.66**	14.05 **14.07**	14.05 **13.87**
七月	12.32 **12.28**	11.55 **11.48**	11.69 **11.87**	16.79 **16.90**	16.18 **15.99**	11.95 **12.00**	14.58 **14.77**	18.56 **18.37**	14.08 **14.12**	13.69
八月	12.24 **12.18**	11.41 **11.37**	12.04 **12.23**	17.01 **17.10**	15.80 **15.60**	12.04 **12.07**	14.97 **15.19**	18.19 **17.96**	14.16 **14.22**	
九月	12.13 **12.10**	11.33 **11.29**	12.43 **12.70**	17.18 **17.21**	15.11 **15.20**	12.10 **12.13**	15.40 **15.64**	17.73 **17.49**	14.29 **14.39**	
十月	12.06 **12.00**	11.25 **11.26**	12.96 **13.17**	17.25 **17.28**	14.99 **14.81**	12.17 **12.17**	15.88 **16.19**	17.25 **16.92**	14.48 **14.62**	
十一月	11.94 **11.87**	11.27 **11.28**	13.39 **13.62**	17.31 **17.32**	14.63 **14.43**	12.17 **12.22**	16.51 **16.79**	16.58 **16.29**	14.77 **14.87**	
十二月	11.81 **11.75**	11.29 **11.30**	13.85 **14.11**	17.32 **17.33**	14.22 **13.97**	12.27 **12.35**	17.06 **17.35**	16.00 **15.72**	14.97 **15.07**	

本表中每月第一列之數字,係表58中連續十二個月米價之移動平均數,如民國十二年

$$七月=\frac{12.20+12.48+11.75+\cdots\cdots+11.53+11.64}{12}=12.32,$$

$$八月=\frac{12.48+11.75+11.83+\cdots\cdots+11.64+11.30}{12}=12.24,$$

$$九月=\frac{11.75+11.83+12.66+\cdots\cdots+11.30+11.13}{12}=12.13,$$

……………………………………………………

……………………………………………………

等是也.餘類推. 但第二列之數字,係將本表中每聯續兩月之移動平均數加以平均而得,如十二年.

$$七月=\frac{12.32+12.24}{2}=12.28,$$

$$八月=\frac{12.24+12.13}{2}=12.18,$$

$$九月=\frac{12.13+12.06}{2}=12.10,$$

……………………………

……………………………

等是也.餘亦類推.

本表中應行注意者,即各數均採小數兩位爲止.倘遇移動平均數之和爲奇數時,則其商數之第三位小數必爲5.處理之法,即捨去前一個,而收入後一個,務使小數劃一兩位後而其總數之和仍相等.如十二年八月應捨去.005變爲12.18,九月則收入.005而爲12.10,餘均仿此.

又表中各月第二列之平均數,須除各年相當月份之米價而得百分數.茲依其大小順序列如下表:

(表 61)

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	84.86	—	88.79	82.66	92.60	93.36	94.11	96.19	91.01	95.56	84.62	83.89	
	87.16	86.26	90.59	88.09	93.65	94.40	96.46	103.51	100.24	98.88	88.77	86.51	
	87.96	88.91	93.57	89.72	94.62	96.71	97.92	104.42	106.07	99.50	90.87	91.87	
	92.45	94.67	97.50	95.00	99.47	97.65	100.83	104.61	107.69	100.46	91.78	62.30	
	94.48	96.03	97.82	96.10	100.95	98.08	100.87	111.49	109.88	101.76	94.49	92.63	
	95.12	96.90	98.96	99.43	101.94	104.57	104.89	113.72	116.71	106.70	97.14	95.46	
	97.08	98.16	99.10	101.30	102.94	107.62	107.08	115.81	118.14	107.81	97.52	97.98	
	97.94	99.06	100.94	101.83	105.89	109.75	112.82	120.32	118.81	109.78	97.92	99.06	
	103.35	101.64	106.21	103.95	107.07	115.57	118.18	122.64	131.00	113.28	99.75	105.83	
中位數 (A)	93.47	95.35	97.66	95.55	100.21	97.87	100.85	108.05	108.79	101.11	93.14	92.47	平均 98.71
月差指數 (B)	94.69	96.60	98.94	96.80	101.52	99.15	102.17	109.46	110.21	102.43	94.36	63.68	平均 100.00
與100之差數 (C)	−5.31	−3.4	−1.06	−3.20	+1.52	−.85	+2.17	+9.46	+10.21	+2.43	−5.64	−6.32	

按公式(13)求得上表中各月之中位數,記入(A)列.因所取資料之年份爲偶數,故

$$一月之中位數=\frac{92.35+94.48}{2}=93.47,$$

$$二月之中位數=\frac{94.67+96.03}{2}=95.35,$$

....

更以各中位數之平均數.

$$\frac{93.47+95.35+97.66+\cdots\cdots+93.14+92.47}{12}=98.71.$$

除(A)列各中位數卽得月差指數,如(B)列.至(C)列之差數,乃表示(B)列月差指數與100之相差程度,但正負兩種差數之和應相等.否則,指數卽有錯誤.

75. 月差指數——環比法.

〔例78〕 仍取前例求之.

用此法求月差指數必先根據表(59)逐月之米價,按公式(68)計算其逐月之環比如下表:

(表 62)

年份	一月 / 十二月	二月 / 一月	三月 / 二月	四月 / 三月	五月 / 四月	六月 / 五月	七月 / 六月	八月 / 七月	九月 / 八月	十月 / 九月	十一月 / 十月	十二月 / 十一月
民國十二年	—	102.30	94.15	100.68	107.03	97.08	104.80	105.43	95.95	91.63	96.57	100.95
十三年	97.68	98.50	98.11	94.78	106.96	98.92	105.75	118.13	108.11	82.08	84.43	101.76
十四年	92.43	104.77	98.81	106.61	105.92	99.20	113.69	100.47	99.69	103.93	94.48	107.76
十五年	102.75	103.94	110.47	96.64	106.33	103.57	97.93	103.87	106.84	100.32	89.04	100.53
十六年	96.76	102.80	101.84	95.93	102.91	103.95	102.21	98.34	100.00	84.95	81.02	95.99
十七年	101.02	103.46	99.02	100.66	98.85	96.19	101.21	98.81	95.09	105.34	101.82	107.22
十八年	99.01	100.46	99.00	95.57	107.89	101.73	102.96	114.32	104.41	110.55	89.64	96.96
十九年	110.35	103.24	102.97	105.56	101.01	102.71	106.01	95.81	99.90	80.51	86.43	94.05
二十年	96.84	95.82	102.93	89.92	111.47	105.99	98.70	118.05	97.48	91.76	90.06	99.36
二十一年	100.86	—	—	98.01	102.98	105.32	93.57	99.93	93.53	97.32	92.72	93.41

各月環比之計算與上篇所述之各年環比相同.如上表之結果,即以表(59)中逐月之米價,各以其前一月之米價除之而得者.

例如: 十二年二月之環比 $=\frac{12.48}{12.20}=102.30$

三月之環比 $=\frac{11.78}{12.48}=94.15$

四月之環比 $=\frac{11.83}{11.78}=100.68$

……………………………………

……………………………………

十三年一月之環比 $=\frac{11.30}{11.64}=97.08$

二月之環比 $=\frac{11.13}{11.30}=98.50$

……………………………………

……………………………………

復將表(62)各月之環比,依其大小順序,列爲下表:

(表 63)

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	
	—	—	—	89.92	98.85	96.19	93.57	95.81	93.53	80.51	81.02	94.05	
	92.43	95.82	94.15	94.78	101.01	97.08	97.93	98.34	95.09	82.08	84.43	95.99	
	96.76	98.50	98.11	95.59	102.91	98.92	98.70	98.81	95.95	84.95	86.43	96.41	
	96.84	100.46	98.81	95.93	102.98	99.20	101.21	99.93	97.48	91.93	89.04	96.96	
中數	97.08	102.30	99.00	96.64	105.92	101.73	102.21	100.47	99.69	91.76	89.64	99.36	
	99.01	102.80	99 02	98.01	106.33	102.71	102.96	103.87	99.90	97.32	90.06	100.53	
	100.86	103.24	101.84	100.66	106.96	103.57	104.80	105.43	100.00	100.32	92.72	100.95	
	101.02	103.46	102.93	100.68	107.02	103.95	105.75	114.32	104.41	103.93	94.48	101.76	
	102.75	104.77	102.97	105.56	107.89	105.32	106.01	118.13	106.84	105.34	96.57	107.22	
	11.035	106.94	110.47	106.61	111.47	105.99	113.69	128.05	108.11	110.55	104.82	107.76	一月
環比中數 (*A*)	98.05	102.55	99.01	97.33	106.13	102.22	102.59	102.17	99.80	94.54	89.85	99.95	98.05 (*A*)
鎖比 (*B*)	100.00	102.55	101.53	98.82	104.88	107.21	109.99	112.38	112.16	106.04	95.28	95.23	93.37 (*B*)
鎖比更正數 (*C*)	100.00	103.10	102.64	100.48	107.09	109 97	113.30	116.25	116.58	111.01	100.81	101.31	100.00 (*C*)
月差指數 (*D*)	93.56	96.46	96.03	94.01	100.20	102.89	106.01	108.77	109.08	103.86	94.32	94.79	(*D*)

根據上表求月差指數,其步驟如下:

(1)環比中數:

環比中數,即各月環比之中位數,如表中(A)列所示.此項環比中數求算之法,極爲簡易,乃將已得之環比,依照大小,順次排列,其居中之數即是.

如上表中一月之環比中數$=\dfrac{97.08+99.01}{2}=98.05$

二月之環比中數$=\dfrac{102.30+102.80}{2}=102.55$

....

....

(2)鎖比:

鎖比之公式及計算,已於前篇詳述.此處鎖比之計算,係以(A)列之環比中數,代入公式(69)求得者.

故　一月之鎖比$=100$

二月之鎖比$=100\times102.55=102.55$

三月之鎖比$=102.55\times99.01=101.53$

....

....

至逐月之鎖比皆詳舉於(B)列中.

(3)鎖比更正:

以十二月之鎖比,乘一月之環比中數,則次年一月之鎖比爲93.37(95.23×98.05)而非100.00之結果.此蓋由於十二次環比中數乘連續鎖比所生之累積誤差(Cumulative error).欲消

除此項誤差,可按算術級數原理逐月更正之,頗爲簡易,法示於下:

本例之累積誤差爲 6.63, 應將此一年累積之誤差分配於各月鎖比中.今得每月誤差之增進率爲(6.63/12=).5525,故二月之鎖比更正數應爲 102.55+.5525=103.10, 三月應爲 101.53+.5525×2=102.64,餘可類推.詳情如(C)列所示.

鎖比之更正尚有一法,係依幾何級數原理,以消去此項累積誤差者公式如下:

$$r=N\sqrt{\frac{p_n}{p_0}}-1 \quad \text{〔公式 80〕}$$

上式之確度亦甚高,惜手續較繁,茲不贅述,留待閱者自行演習之.

(4) 月差指數:

用(C)列各更正數之平均數 106.88 除該列各鎖比更正數卽得各月月差指數,詳見表中(D)列.

76. 月差指數——恆差比率平均法.

〔例 79〕 仍取前例求之.

用此法求月差指數計分三大步驟:

I. 求逐月米價對於趨勢値(Trend value)之百分數.

II. 中心項之決定.

III. 計算月差指數.

第一步: 將逐月米價,趨勢値,及所求出之百分數列表於下:

(表　64)

月份		十二年	十三年	十四年	十五年	十六年	十七年	十八年	十九年	二十年	二十一年
一月	米價	12.20	11.30	9.64	13.84	16.43	11.84	12.94	17.59	13.17	14.08
	趨勢值	13.306	13.474	13.642	13.810	13.978	14.146	14.314	14.482	14.650	14 818
	百分數	91.69	83.87	70.66	100.22	117.54	83.70	90.40	121.46	89.90	95.02
二月	米價	12.48	11.13	10.10	14.80	16.89	12.25	13.00	18.16	12.62	—
	趨勢值	13.320	13.488	13.656	13.824	13.992	14.160	13.328	14.496	14.664	14.832
	百分數	93.69	82.52	73.96	107.06	120.71	86.51	90.73	125.28	86.06	—
三月	米價	11.75	10.92	9.98	16.35	17.20	12.13	12.87	18.70	12.99	15.08
	趨勢值	13.334	13.502	13.670	13.838	14.006	14.174	14.342	14.510	14.678	14.846
	百分數	88.12	80.88	73.01	118.15	122.80	85.58	89.74	128.88	88.50	101.58
四月	米價	11.83	10.35	10.64	15.80	16.50	12.21	12.30	19.74	11.68	14.78
	趨勢值	13.348	13.516	13.684	13.852	14.020	14.188	14.356	14.524	14.692	14.860
	百分數	88.63	76.58	77.76	114.06	117.69	86.06	85.68	135.91	79.50	99.46
五月	米價	12.66	11.07	11.27	16.87	16.98	12.07	13.27	19.94	13.02	15.22
	趨勢值	13.362	13.530	13.698	13.866	14.034	14.202	14.370	14.538	14.706	14.874
	百分數	94.75	81.82	82.27	121.66	120.99	84.99	92.35	137.16	88.54	102.33
六月	米價	12.29	10.95	11.18	17.40	17.65	11.61	13.50	20.48	13.80	16.03
	趨勢值	13.376	13.544	13.712	13.880	14.048	14.216	14.384	14.552	14.720	14.888
	百分數	91.88	80.85	81.53	125.36	125.64	81.67	93.85	140.74	93.75	107.67
七月	米價	12.88	11.58	12.71	17.04	18.04	11.75	13.90	21.71	13.62	15.00
	趨勢值	13.390	13.558	13.726	13.894	14.062	14.230	14.398	14.566	14.734	14.902
	百分數	96.19	85.41	92.60	122.64	128.29	82.57	96.54	149.05	92.44	100.66
八月	米價	13.58	13.68	12.77	17.70	17.74	11.61	15.89	20.80	17.44	14.99
	趨勢值	13.404	13.572	13.740	13.908	14.076	14.244	14.412	14.580	14.748	14.916
	百分數	101.31	100.79	92.94	127.26	126.03	81 51	110.26	142.66	118.25	100.50
九月	米價	13.03	14.79	12.73	18.91	17.74	11.04	16.59	20.78	17.00	14.02
	趨勢值	13.418	13.586	13.754	13.922	14.090	14.258	14.426	14.594	14.762	14.930
	百分數	97.11	108.86	92 55	135.83	125.90	77.43	115.00	142.39	115.16	93.90
十月	米價	11.94	12.14	13.23	18.97	15.07	11.63	18.34	16.73	15.60	11.12
	趨勢值	13.432	13.600	13.768	13.936	14.104	14.272	14.440	14.608	14.776	14.944
	百分數	88.89	89.26	96.09	136.12	106.85	81.49	127.01	114.53	105.58	74.41
十一月	米價	11.58	10.25	12.50	16.89	12.21	12.19	16.44	14.46	14.05	10.31
	趨勢值	13.446	13.614	13.782	13.950	14.118	14.286	14.454	14.622	14.790	14.958
	百分數	85.75	75.29	90.70	121.08	86.49	85.33	113.74	98.89	95.00	68.93
十二月	米價	11.64	10.43	13.47	16.98	11.72	13.07	15.94	13.60	13 96	9.94
	趨勢值	13.460	13.628	13.796	13.964	14.132	14.300	14.468	14.636	14.804	14.972
	百分數	86.48	76.53	97.64	121.60	82.93	91.40	110.17	92.92	94.30	66.39

上表中各月趨勢值係由 $y=14.139+.014\,x$ (十六年一月 $x=0$) 推算而得,至此式乃從以年爲單位之方程式 $y=14.139+.162x$ 演出.

第二步: 將表(64)之百分數,順其大小,排列如下表:

(表 65)

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	
	70.66	–	73.01	76.58	81.82	81.53	82.57	81.51	77.43	74.41	68.93	66.39	
	83.70	73.96	80.88	77.76	82.27	81.67	85.41	92.94	92.55	81.49	75.29	76.53	
	83.87	82.52	85.58	79.50	84.99	80.85	92.44	100.50	93.90	88.89	85.33	82.93	
	89.90	86.06	88.12	85.68	88.54	91.88	92.60	100.79	97.11	89.26	85.75	86.48	
	90.40	86.51	88.50	86.06	92.35	93.75	96.19	101.31	108.86	96.09	86.49	91.40	
	91.69	90.73	89.74	88.63	94.75	93.85	96.54	110.26	115.00	105.58	90.70	92.92	
	95.02	93.69	101.58	99.46	102.33	107.67	100.66	118.25	115.16	106.85	95.00	94.30	
	100.22	107.06	118.15	114.06	120.99	125.36	122.64	126.03	115.90	114.53	98.89	97.64	
	117.54	120.71	122.80	117.69	121.66	125.64	128.29	127.26	135.83	127.01	113.74	110.17	
	121.46	125.28	128.88	135.91	137.16	140.74	149.05	142.66	142.39	136.12	121.08	121.60	
四中心項之平均值 (A)	91.75	89.25	91.99	89.96	94.49	96.79	96.50	107.65	109.03	99.45	89.49	91.28	平均 95.64
月差指數 (B)	95.93	93.32	96.18	94.06	98.80	101.20	100.90	112.56	114.00	103.98	93.57	95.44	100.00
差數 (C)	−4.07	−6.68	−3.82	−5.94	−1.20	+1.20	+.90	+12.56	+14.00	+3.98	−6.43	−4.56	

復按百分數之情況,決定取四個中心項求其平均值,如表中(*A*)列所示,即

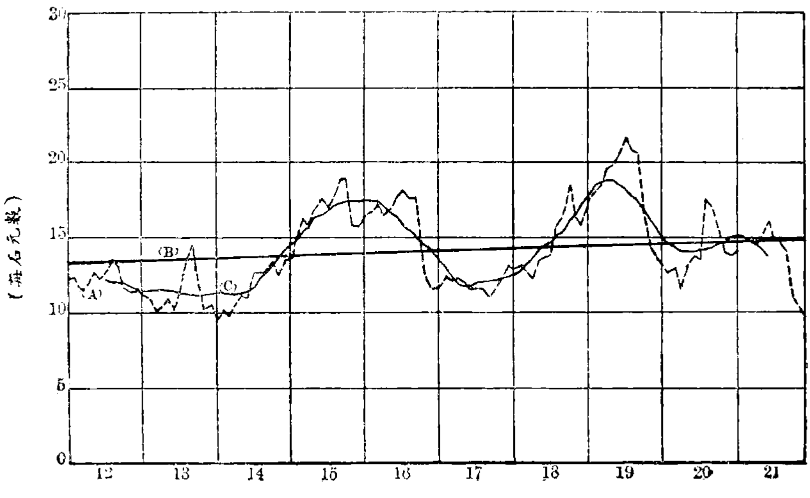
$$一月=\frac{89.90+90.40+91.69+95.02}{4}=91.75$$

$$二月=\frac{86.06+86.51+90.73+93.69}{4}=89.25$$

....

第三步: 求出(*A*)列各中心項平均值之平均數爲95.91,更以之除各個中心項之平均值,其所得之商即月差指數,如表中(*B*)列所示.

玆將最近十年上海躉售米價之長期趨勢作圖如下:



(圖 6)

最近十年上海躉售米價之長期趨勢

(A) 表示各月米價實在消長趨勢.

(B) 表示逐月長期趨勢.

(C) 表示移動平均後之米價趨勢.

〔附註〕 自73至76四節皆為求算月差指數之各種方法,其計算無專用之公式.所引用者,皆係以前各篇中之公式,至時計算時何法應採用何種公式,在例題中已詳細註出,以資參證.

IV. 相關 (Correlation)

A. 直線相關 (Linear correlation)

77.* 相關係數—乘積率法 (Coefficient of correlation by the product-moment method).

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}\text{.................................}〔公式 81_a〕$$

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma y^2}}\text{...........................}〔公式 81_b〕$$

〔例 80〕 茲取近十五年來中國進出口之淨值如下表(以關銀一千萬兩爲單位)求其相關係數:

(表 66)

年份	進口 X	出口 Y	x $X-\bar{X}$	y $Y-\bar{Y}$	x^2	y^2	xy
民國三年	56	35	−24.27	−29.33	589.03	860.25	711.84
四年	45	41	−35.27	−23.33	1,243.97	544.29	822.85
五年	51	48	−29.27	−16.33	856.73	266.67	477.98
六年	54	46	−26.27	−18.33	690.11	335.99	481.53
七年	55	48	−25.27	−16.33	638.57	266.67	412.66
八年	64	63	−16.27	− 1.33	264.71	1.77	21.64
九年	76	54	− 4.27	−10.33	18.23	106.71	44.11
十年	90	60	9.73	− 4.33	94.67	18.75	−42.13
十一年	94	65	13.73	.67	188.51	.45	9.20
十二年	92	75	11.73	10.67	137.59	113.85	125.16
十三年	101	77	20.73	12.67	429.73	160.53	262.65
十四年	94	77	13.73	12.67	188.51	160.53	173.96
十五年	112	86	31.73	21.67	1,006.79	469.59	687.59
十六年	101	91	20.73	26.67	429.73	711.29	552.87
十七年	119	99	38.73	34.67	1,500.01	1,202.01	1,342.77
	1,204	965			8,276.89	5,219.35	6,084.68

* 自 77 至 85 係用乘積率法解算.

由上表 $N=15,\quad \overline{X}=\frac{1,204}{15}=80.27,\quad \overline{Y}=\frac{965}{15}=64.33$

$$\sigma_x{}^2=\frac{8276.89}{15}=551.79,\quad \sigma_x=23.49$$

$$\sigma_y{}^2=\frac{5,219.35}{15}=347.96,\quad \sigma_y=18.65$$

代入公式，

$$r=\frac{6,084.68}{15\times 23.49\times 18.65}$$

$$=\frac{6084.68}{6571.35}=.926$$

〔附註〕 公式 81_a 中之 σ_x 及 σ_y 與公式(25)同.

78. 相關係數之簡捷法.

$$r=\frac{\frac{\Sigma(XY)}{N}-c_x c_y}{\sigma_x\sigma_y} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 82_a〕$$

$$r=\frac{N\Sigma(XY)-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}} \quad\cdots\cdots〔公式 82_b〕$$

〔例81〕 仍以上例事實,求其相關係數:

(表 67)

年次	進口 X	出口 Y	X^2	Y^2	XY
民國三年	56	35	3,136	1,225	1,960
四年	45	41	2,025	1,681	1,845
五年	51	48	2,601	2,304	2,448
六年	54	46	2,916	2,116	2,484
七年	55	48	3,025	2,304	2,640
八年	64	63	4,096	3,969	4,032
九年	76	54	5,776	2,916	4,104
十年	90	60	8,100	3,600	5,400
十一年	94	65	8,836	4,225	6,110
十二年	92	75	8,464	5,625	6,900
十三年	101	77	10,201	5,929	7,777
十四年	94	77	8,836	5,929	7,238
十五年	112	86	12,544	7,396	9,632
十六年	101	91	10,201	8,281	9,191
十七年	119	99	14,161	9,801	11,781
	1,204	965	104,918	67,301	83,542

由上表　$N=15$　　$\Sigma(X^2)=104{,}918$

$\Sigma(X)=1{,}204$　　$\Sigma(Y^2)=67{,}301$

$\Sigma(Y)=965$　　$\Sigma(XY)=83{,}542$

$$\therefore\quad c_x=\frac{1{,}204}{15}=80.267$$

$$c_y=\frac{965}{15}=64.333$$

$$\sigma_x^2=\frac{104{,}918}{15}-(80.267)^2=6{,}994.53-6{,}442.79=551.74$$

$$\sigma_y^2=\frac{67{,}301}{15}-(64.333)^2=4{,}486.73-4{,}138.73=348.00$$

$$\sigma_x=23.49$$

$$\sigma_y=18.65$$

代入公式

$$r=\frac{\frac{83{,}542}{15}-(80.267\times64.333)}{23.49\times18.65}$$

$$=\frac{405.65}{23.49\times18.65}$$

$$=.926$$

查此處由簡捷公式求得之結果,適與前同.但為手續簡便,故多樂採用.

〔附註〕 公式 82a 中之 $\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-c_x^2}$,　　$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N}-c_y^2}$.

79. 相關係數之簡捷法(在分組現象時).

$$r=\frac{\dfrac{\Sigma fx'y'}{N}-c_xc_y}{\sigma_x\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 83_a〕$$

$$r=\frac{\Sigma fx'y'-Nc_xc_y}{\sqrt{\Sigma f(x')^2-Nc_x^2}\sqrt{\Sigma f(y')^2-Nc_y^2}}\cdots\cdots〔公式 83_b〕$$

〔例 82〕 將上例組成相關表*如下:

(表 68)

Y—出口	X—進口							
	40—	50—	60—	70—	80—	90—	100—	110—120
90—100							1	1
80—								1
70—						2	1	
60—			1			2		
50—				1				
40—	1	3						
30—		1						

假定 X 之平均數爲95., Y 爲65,其相關係數之計算如下:

* 當事實項數過少時,宜以公式(82)求之,無須組成相關表,此處不過舉例耳.

(表　69)

Y—出口	X—進口									y'	fy'	$f(y')^2$	$fx'y'$
	40—	50—	60—	70—	80—	90—	100—	110—120	f_y				
90—100							1_{3}^{3}	1_{6}^{6}	2	3	6	18	9
80—								1_{4}^{4}	1	2	2	4	4
70—						2	1_{1}^{1}		3	1	3	3	1
60—			1			2			3	0	0	0	0
50—				1_{2}^{2}					1	−1	−1	1	2
40—	1_{10}^{10}	3_{24}^{8}							4	−2	−8	16	34
30—		1_{12}^{12}							1	−3	−3	9	12
f_x	1	4	1	1	0	4	2	2	15		−1	51	62
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2					
fx'	−5	−16	−3	−2	0	0	2	4	—20				
$f(x')^2$	25	64	9	4	0	0	2	8	112				
$fx'y'$	10	36	0	2	0	0	4	10	62				

由上表

1. $c_x=\frac{-20}{15}=-1.33$ (組距).

$c_y=\frac{-1}{15}=-0.067$ (組距).

2. $\sigma_x=\sqrt{\frac{112}{15}-(-1.33)^2}=2.38$ (組距).

$\sigma_y=\sqrt{\frac{51}{15}-(-.067)^2}=1.84$ (組距).

3. $\frac{\Sigma(fx'y')}{N}-c_x c_y=\frac{62}{15}-(-1.33)(-.067)$

$=4.133-.089=4.044$ (組距).

$\therefore\quad r=\frac{4.044}{2.38\times1.84}=.92$

〔例 83〕 下表爲1901年英國5,317,520對夫婦之年齡玆求其年齡之相關係數(表中略去千以下之三位).

(表

婦之年齡 Y						夫之年齡			
	15—	20—	25—	30—	35—	40—	45—	50—	55—
85—									
80—									
75—									
70—									1^{18}_{18}
65—							1^{5}_{5}	2^{10}_{20}	6^{15}_{90}
60—						1	2^{4}_{8}	10^{8}_{80}	35^{12}_{420}
55—					1^{-3}_{-3}	2	10^{3}_{30}	44^{6}_{264}	141^{9}_{1269}
50—				1^{-4}_{-4}	2^{-2}_{-4}	12	59^{2}_{118}	195^{4}_{780}	110^{6}_{660}
45—			1^{-3}_{-3}	2^{-2}_{-4}	12^{-1}_{-12}	66	252^{1}_{252}	146^{2}_{292}	46^{3}_{138}
40—			2	12	80	309	178	57	18
35—		1^{4}_{4}	10^{3}_{30}	84^{2}_{168}	369^{1}_{369}	219	66^{-1}_{-66}	19^{-2}_{-38}	8^{-3}_{-24}
30—		4^{8}_{32}	84^{6}_{504}	411^{4}_{1644}	251^{2}_{502}	71	20^{-2}_{-40}	8^{-4}_{-32}	3^{-6}_{-18}
25—		46^{12}_{552}	402^{9}_{3618}	265^{6}_{1590}	69^{3}_{207}	17	6^{-3}_{-18}	2^{-6}_{-12}	1^{-9}_{-9}
20—	2^{20}_{40}	173^{16}_{2768}	185^{12}_{2220}	41^{8}_{328}	9^{4}_{36}	3	1^{-4}_{-4}		
15—	2^{25}_{50}	16^{20}_{230}	4^{15}_{60}	1^{10}_{10}					
fx	4	240	688	817	793	700	595	483	369
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
fx'	−20	−960	−2,064	−1,634	−793	−5,471	595	966	1,107
$f(x')^2$	100	3,840	6,192	3,268	793		595	1,932	3,321
$fx'y'$	90	3,676	6,429	3,732	1,095		285	1,354	2,544

70)

(X) 60—	65—	70—	75—	80—	85—	f_y	y'	fy'	$f(y')^2$	$fx'y'$
				1^{72}_{72}		1	9	9	81	72
	1^{40}_{40}	1^{48}_{48}	2^{56}_{112}	3^{64}_{192}	1^{72}_{72}	8	8	65	512	464
1^{28}_{28}	2^{35}_{70}	6^{42}_{252}	12^{49}_{588}	5^{56}_{280}	1^{63}_{63}	27	7	189	1,323	1,281
4^{24}_{96}	13^{30}_{390}	31^{36}_{1116}	14^{42}_{588}	4^{48}_{192}	1^{54}_{54}	68	6	408	2,448	2,454
23^{20}_{460}	58^{25}_{1450}	31^{30}_{930}	10^{35}_{350}	2^{40}_{80}	1^{45}_{45}	134	5	670	3,350	3,430
101^{16}_{1616}	53^{20}_{1060}	18^{24}_{432}	5^{28}_{140}	1^{32}_{32}		226	4	904	3,616	3,788
81^{12}_{972}	26^{15}_{390}	8^{18}_{144}	3^{21}_{63}	1^{24}_{24}		317	3	951	2,853	3,153
39^{8}_{312}	11^{10}_{110}	5^{12}_{60}	2^{14}_{28}	1^{16}_{16}		437	2	874	1,748	2,076
16^{4}_{64}	6^{5}_{30}	2^{6}_{12}	1^{7}_{7}			550	1	550	550	776
8	3	1	1			669	0	4,619		
3^{-4}_{-12}	1^{-5}_{-5}	1^{-6}_{-6}				781	−1	−781	781	420
1^{-8}_{-8}	1^{-10}_{-10}					854	−2	−1,708	3,416	2,574
						808	−3	−2,424	7,272	5,928
						414	−4	−1,656	6,624	5,388
						23	−5	−115	575	440
277	175	104	50	18	4	5,317		−6,684 / −2,065	35,149	32,244
4	5	6	7	8	9	+5,805 / 334	(Av.)	−.3884	6.6107	6.0643
1,108	875	624	350	144	36		.0628			
4,432	4,375	3,744	2,450	1,152	324	36,518	6.8682			
3,528	3,525	2,988	1,876	888	234	32,244				

由上表 1. $c_x=\frac{334}{5,317}=.0628$ (組距) $=.314$

$$c_y=\frac{-2,065}{5,317}=-.3884\text{ (組距) }=-1.942$$

2. $\sigma_x{}^2=\frac{36,518}{5,317}-(.0628)^2=6.8643,\quad \sigma_x=2.62$ (組距).

$$\sigma_y{}^2=\frac{35.149}{5.317}-(-.3884)^2=6.4598,\sigma_y=2.54\text{ (組距).}$$

3. $\frac{\Sigma(fx'y')}{N}-c_x c_y=\frac{32,244}{5,317}-(.0628)(-.3884)$

$$=6.0643+.0244=6.0887\text{ (組距).}$$

$$\therefore\quad r=\frac{6.0887}{6.6548}=.9149.$$

上列兩例相關係數計算表,有時以其標記數目過繁,可改製如下二式,似更簡明;

(表　71)

Y— 出口	X— 進口 40—	50—	60—	70—	80—	90—	100—	110—	f_y	y'	fy'	$f(y')^2$	S'_s	$S_s'\,y'$ $\Sigma(fx'y')$
90—							1	1	2	3	6	18	3	9
80—								1	1	2	2	4	2	4
70—						2	1		3	1	3	3	1	1
60—			1			2			3	0	0	0	−3	0
50—				1					1	−1	−1	1	−2	2
40—	1	3							4	−2	−8	16	−17	34
30—		1							1	−3	−3	9	−4	12
									15		−1	51		62
f_x	1	4	1	1	0	4	2	2						
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2						
fx'	−5	−16	−3	−2	0	0	2	4	−20					
$f(x'^2)$	25	64	9	4	0	0	2	8	112					
S_s	−2	−9	0	−1	0	2	4	5						
$S_s'x'$ $(\Sigma fx'y')$	10	36	0	2	0	0	4	10	62					

1. $c_x=\frac{-20}{15}=-1.33$ (組距)

$c_y=\frac{-1}{15}=-.067$ (組距)

2. $\sigma_x=\sqrt{\frac{112}{15}-(-1.33)^2}=2.38$(組距)

$\sigma_y=\sqrt{\frac{51}{15}-(-.067)^2}=1.84$(組距)

3. $\frac{\Sigma\,(fx'y')}{N}=\frac{62}{15}=4.133$

$\frac{\Sigma\,(fx'y')}{N}-c_x\,c_y=4.133-.089$

$=4.044$

$\therefore\quad r=\frac{4.044}{2.38\times1.84}=9.2$

(表 72)

婦之年齡 ( )	夫之年齡 (X) 15—	20—	25—	30—	35—	40—	45—	50—	55—	60—	65—	70—	75—	80—	85—	fy	y'	fy'	$f(y')^2$	S_s'	$S_s'y'$ ($\Sigma fx'y'$)
85—														1		1	9	9	81	8	72
80—											1	1	2	3	1	8	8	64	512	58	464
75—										1	2	6	12	5	1	27	7	189	1,323	183	1,281
70—									1	4	13	31	14	4	1	68	6	408	2,448	409	2,454
65—							1	2	6	23	58	31	10	2	1	134	5	670	3,350	686	3,430
60—						1	2	10	35	101	53	18	5	1		226	4	904	3,616	947	3,788
55—					1	2	10	44	141	81	26	8	3	1		317	3	951	2,853	1,051	3,153
50—				1	2	12	59	195	110	39	11	5	2	1		437	2	874	1,748	1,038	2,076
45—			1	2	12	66	252	146	46	16	6	2	1			550	1	550	550	776	776
40—			2	12	80	309	178	57	18	8	3	1				669	0			296	
35—		1	10	84	369	219	66	19	8	3	1	1				781	−1	−781	781	−420	420
30—		4	84	411	251	71	20	8	3	1	1					854	−2	−1,708	3,416	−1,287	2,574
25—		46	402	265	69	17	6	2	1							808	−3	−2,424	7,272	−1,976	5,928
20—	2	173	185	41	9	3	1									414	−4	−1,656	6,624	−1,347	5,388
15—	2	16	4	1												23	−5	−115	575	−88	440
																5,317		−2,065	35,149		32,244

f_x	4	240	688	817	793	700	595	483	369	277	175	104	50	18	4	
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
fx'	−20	−960	−2,064	−1,634	−793		595	966	1,107	1,108	875	624	350	144	36	334
$f(x')^2$	100	3,840	6,192	3,268	793		595	1,932	3,321	4,432	4,375	3,744	2,450	1,152	324	36,518
S_s	−18	−919	−2,143	−1,863	−1,095	−325	285	677	848	882	705	498	268	111	26	
$S'_s x'$ $(\Sigma fx'y')$	90	3,676	6,429	3,732	1,095		285	1,254	2,544	3,528	3,525	2,988	1,876	888	234	32,244

1. $c_x = \frac{334}{5,317} = .0628$ (組 距)

   $c_y = \frac{-2,065}{5,317} = -.388$ (組 距)

2. $\sigma_x^2 = \frac{36,518}{5,317} - (.0628)^2 = 6.864$

   $\sigma_x = 2.62$ (組 距)

   $\sigma_y^2 = \frac{35,149}{5317} - (-.388)^2 = 6.460$

   $\sigma_y = 2.54$ (組 距)

3. $\frac{\Sigma (fx'y')}{N} = \frac{32,244}{5317} = 6.0643$

   $\frac{\Sigma fx'y'}{N} - c_x c_y = 6.0643 + .0244$

   $= 6.0887$ (組 距)

   $\therefore r = \frac{6.0887}{6.6548} = .9149.$

[附註]　公式 83_a 中之 σ_x 及 σ_y 與公式 27 同.

80 相關係數——中斜線法 (The diagonal method).

$$r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_z^2}{2\sigma_x\sigma_y}\text{……………………〔公式 }84_a\text{〕}$$

$$r=\frac{\Sigma x^2+\Sigma y^2-\Sigma z^2}{2\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}\text{……………………〔公式 }84_b\text{〕}$$

〔例 84〕 取表(68)之資料用中斜線法計算相關係數.

(表 73)

fy'^2	fy'	f	y'										z'	f'	fz'	fz'^2
										2	4	5				
18	6	2	3							1	1	4				
4	2	1	2								1					
3	3	3	1						2	1			1	2	2	2
		3	0			1			2				0	4		
1	−1	1	−1				1						−1	5	−5	5
16	−8	4	−2	1	3								−2	4	−8	16
9	−3	1	−3		1											
51	−1	15	x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2			15	−11	23
$C_y=-.067$			f	1	4	1	1		4	2	2	15	$C_x=-1.33$	$\sigma_x=2.38$	$C_z=-.733$	
$\sigma_y=1.84$			fx'	−5	−16	−3	−2			2	4	−20			$\sigma_z=998$	
$r=.92$			fx'^2	25	64	9	4			2	8	112				

由上表 $c_x=-1.33$ (組距).

$c_y=-.067$ (組距).

$c_z=\frac{-11}{15}=-.733$ (組距).

而 $\sigma_x=2.38$ (組距).

$\sigma_y=1.84$ (組距).

$$\sigma_z=\sqrt{\frac{23}{15}-(.733)^2}=.998 \text{ (組距)}.$$

代入公式(84_a),

$$r=\frac{(2.38)^2+(1.84)^2-(.998)^2}{2\times2.38\times1.84}$$

$=.92.$

〔例 85〕 更就表(70)之資料用中斜線法求其相關係數.

(表　74)

fY'^2	fY'	f	Y'																	z'	f'	fz'	fz'^2
															83	545			2459				
81	9	1	9													1		1555					
512	64	8	8											1	1	2	3	1	452				
1323	189	27	7										1	2	6	12	5	1	127				
2448	408	68	6									1	4	13	31	14	4	1	49	3	5	15	45
3350	670	134	5							1	2	6	23	58	31	10	2	1	17	2	16	32	64
3616	904	226	4						1	2	10	35	101	53	18	5	1		6	1	83	83	83
2853	951	317	3					1	2	10	44	141	81	26	8	3	1		3	0	545		
1748	874	437	2				1	2	12	59	195	110	39	11	5	2	1			-1	2459	-2459	2459
550	550	550	1			1	2	12	66	252	146	46	16	6	2	1				-2	1555	-3110	6220
		669	0			2	12	80	309	178	57	18	8	3	1	1				-3	452	-1356	4068
781	-781	781	-1		1	10	84	369	219	66	19	8	3	1	1					-4	127	-508	2032
3416	-1708	854	-2		4	84	411	251	71	20	8	3	1	1						-5	49	-245	1225
7272	-2424	808	-3		46	402	265	69	17	6	2	1								-6	17	-102	612
6624	-1656	414	-4	2	173	185	41	9	3	1										-7	6	-42	294
575	-115	23	-5	2	16	4	1													-8	3	-24	192
35143	2065	5317	x'	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			5317	-7690	17194
$C_y=-.3884$			f	4	240	688	817	793	700	595	483	369	277	175	104	50	18	4	5317	$C_x=.0628$		$C_z=-1.4474$	
$\sigma_y=2.54$			fx'	-20	-960	-2064	-1634	-793		595	966	1107	1108	875	624	350	144	36	334	$\sigma_x=2.62$		$\sigma_z=1.07$	
$r=.9145$			fx'^2	100	3840	6192	3268	793		595	1932	3321	4432	4375	3744	2450	1152	324	36516				

由上表已知

$$c_x = .0628 \text{ (組距)}.$$

$$c_y = -.3884 \text{ (組距)}.$$

$$c_z = -\frac{7696}{5317} = -1.4474 \text{ (組距)}.$$

$$\sigma_x = 2.62.$$

$$\sigma_y = 2.54.$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{17194}{5317} - (-1.4474)^2}$$

$$= 1.07.$$

代入公式(84_a),

$$r = \frac{(2.62)^2 + (2.54)^2 - (1.07)^2}{2 \times 2.62 \times 2.54}$$

$$= .9145.$$

〔附註〕 以上兩例之結果各與例82及83所得者相同.故知本公式亦甚準確無疑. 在應用公式時,須先於計算表中引諸中斜線(各線由 $y-x$ 或由 $x-y$ 呈 $45°$ 之傾斜),次將各中斜線列中次數相加記入 (f') 欄,然後計算 $f'z$, $f'z^2$ 即得 σ_z. 可逕代入公式求算 r.

又公式(84)亦可化為

$$r = \frac{(\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 - \Sigma Z^2) - 2(\Sigma X)(\Sigma Y)/N}{2\sqrt{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/N}\sqrt{\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/N}} \cdots\cdots \text{〔公式 85〕}$$

81. 迴歸係數(Coefficients of regression).

$$\left.\begin{aligned} b_{yx} &= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ b_{xy} &= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式86〕}$$

〔例86〕 仍取前例十五年來中國進出口淨值之事實,求其迴歸係數.

由例80,已知

$$\sigma_x = 23.49$$

$$\sigma_y = 18.65$$

$$r = .926$$

$$\therefore \quad b_{xy} = .926 \times \frac{23.49}{18.65} = 1.166$$

$$b_{yx} = .926 \times \frac{18.65}{23.49} = .735$$

〔例87〕 根據例83英國5317520對夫婦年齡之資料,求其迴歸係數.

已知

$$\sigma_x = 2.62\,(\text{組距}) = 13.1$$

$$\sigma_y = 2.54\,(\text{組距}) = 12.7$$

$$r = .91.$$

代入公式,

$$b_{xy} = .91 \times \frac{13.1}{12.7} = .94$$

$$b_{yx} = .91 \times \frac{12.7}{13.1} = .88$$

82. 迴歸方程式——以X,Y,之平均數爲原點——(Equation to the line of regression).

$$\left.\begin{aligned} y &= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x \quad (y\text{ 爲因變數}) \\ x &= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y \quad (x\text{ 爲因變數}) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔\text{公式 }87〕$$

〔例 88〕 由上例 86, 已知

$$b_{yx}=.735$$

$$b_{xy}=1.166$$

故以平均數爲原點,可得下列二迴歸線:

$$y=.735\,x$$

$$x=1.166\,y$$

83. 迴歸方程式——以X,Y之原有尺度表出.

$$\left.\begin{aligned} Y-\overline{Y} &= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X}) \\ X-\overline{X} &= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y}) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔\text{公式 }88〕$$

〔例 89〕 由例 80 已得

$$\overline{X}=80.27$$

$$\overline{Y}=64.33$$

又從例 86, 得

$$b_{yx}=.735$$

$$b_{xy}=1.166$$

代入公式

$$Y-64.33=.735(X-80.27)$$

$$X-80.27=1.166(Y-64.33)$$

化簡之,得二迴歸線

$$Y=5.33+.735X$$

$$X=5.26+1.166Y$$

[附註] 上列方程式之應用,在可由已知之 X 值推測 Y 值;反之亦可從 Y 推測 X. 今將推測之值與眞值,列爲一表,以資比較.

1. 方程式 $Y=5.33+.735X$, 可由 X 值推測 Y 值如下:

(表 75)

年次	X 進口	Y_c $5.33+.735X$	Y (出口)
民國三年	56	46.5	35
四年	45	38.4	41
五年	51	42.8	48
六年	54	45.0	46
七年	55	45.8	48
八年	64	52.4	63
九年	76	61.2	54
十年	90	71.5	60
十一年	94	74.4	65
十二年	92	72.9	75
十三年	101	79.6	77
十四年	94	74.4	77
十五年	112	87.7	86
十六年	101	79.6	91
十七年	119	92.8	99

2. 方程式 $X=5.26+1.166Y$ 可從 Y 值推測 X 值如下:

(表 76)

年次	Y (出口)	X_c $5.26+11.66\,Y$	X 進口
民國三年	35	46.1	56
四年	41	53.1	45
五年	48	61.2	51
六年	46	58.9	54
七年	48	61.2	55
八年	63	78.7	64
九年	54	68.2	76
十年	60	75.2	90
十一年	65	81.1	91
十二年	75	92.7	92
十三年	77	95.0	101
十四年	77	95.0	94
十五年	86	105.5	112
十六年	91	111.4	101
十七年	99	120.7	119

〔例90〕 今更取前例英格蘭夫婦年齡之事實,求其 Y 對 X 之迴歸方程式.

由表(70)已知,

$$\overline{X}=42.5+.314=42.8$$

$$\overline{Y}=42.5-1.942=40.6$$

$$\sigma_x=2.62\ (\text{組距})\ =13.1$$

$$\sigma_y=2.54\ (\text{組距})\ =12.7$$

$$r\ =.91$$

$$\therefore\quad Y-40.6=.91\left(\frac{12.7}{13.1}\right)(X-42.8)$$

或　　$Y = .88X - 37.7 + 40.6$

$$Y = .88X + 2.9$$

84. 估計之標準誤——由已知估計y值求S_y(Standard error of estimate).

$$S_y^2 = \frac{\Sigma(d^2)}{N} \qquad \text{〔公式 89〕}$$

〔例 91〕 由例89已得估計方程式(由X估計Y之方程式).

$$Y = 5.33 + .735X$$

今將其S_y之計算列表如次:

(表　77)

年　份	X 進　口	Y_c $5.33+.735X$	Y 出　口	d $Y-Y_c$	d^2
民國三年	56	46.5	35	−11.5	132.25
四年	45	38.4	41	2.6	6.76
五年	51	42.8	48	5.2	27.04
六年	54	45.0	46	1.0	1.00
七年	55	45.8	48	2.2	4.84
八年	64	52.4	63	10.6	112.36
九年	76	61.2	54	−7.2	51.84
十年	90	71.5	60	−11.5	132.25
十一年	94	74.4	65	−9.4	88.36
十二年	92	72.9	75	2.1	4.41
十三年	101	79.6	77	−2.6	6.76
十四年	94	74.4	77	+2.6	6.76
十五年	112	87.7	86	−1.7	2.89
十六年	101	79.6	91	11.4	129.96
十七年	119	92.8	99	+6.2	38.44
					745.92

由上表已知各值,代入公式

$$S_y{}^2=\frac{745.92}{15}=49.728$$

$$\therefore\quad S_y=7.05$$

85. 估計之標準誤(由已知 r 求 S_y, S_x 之法).

$$\left.\begin{aligned}S_y&=\sigma_y\sqrt{1-r^2}\\ S_x&=\sigma_x\sqrt{1-r^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 90〕}$$

〔例 92〕 由例 80 已知

$$\sigma_y=18.65\quad \sigma_x=23.49$$

$$r=.926$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_y&=18.65\sqrt{1-(.926)^2}\\&=18.65\times.378\\&=7.05\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又}\qquad S_x&=23.49\sqrt{1-(.926)^2}\\&=8.88\end{aligned}$$

〔例 93〕 今更以英格蘭夫婦年齡之資料爲例,求其標準誤

由例 83 已知

$$\sigma_y=2.54\,(\text{組距})=12.7\text{ 歲}$$

$$r=.91$$

代入公式,

$$\therefore \quad S_y = 12.7\sqrt{1-(.91)^2}$$

$$= 12.7 \times .41$$

$$= 5.2 \text{ 歲.}$$

86.* 估計之標準誤.(直線——應用最小平方法求出).

$$S_y^2 = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{N} \quad \text{……………〔公式 91〕}$$

〔例 94〕 今取例 80 我國十五年來進出口之淨值,用最小平方法先求得迴歸方程式 $Y=a+bX$ 之常數 a, b; 由表 (6) 已知

$$N = 15 \qquad \Sigma(X^2) = 104{,}918$$

$$\Sigma(X) = 1{,}204 \qquad \Sigma(Y^2) = 67{,}301$$

$$\Sigma(Y) = 965 \qquad \Sigma(XY) = 83{,}542$$

代入標準方程式(見公式 72).

$$965 = 15\,a + 1{,}204\,b$$

$$83{,}542 = 1{,}204\,a + 104{,}918\,b$$

解之,

$$a = 5.3265$$

$$b = .735135$$

即迴歸方程式為

$$Y = 5.33 + .735X$$

$$\therefore \quad S_y^2 = \frac{67{,}301 - 5.3265 \times 965 - .735135 \times 83{,}542}{15}$$

* 自 86 至 90 係以最小平方法解算,其步驟適與乘積率法相反.

$$=\frac{746.28}{15}$$

$$=49.75$$

$$S_y=7.05$$

87. 相關係數(由已知S_y求r之法).

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式92〕}$$

〔例95〕 根據十五年來中國進出口淨值之資料,上例已由最小平方法求得其估計標準誤爲

$$S_y=7.05$$

又因 $\sigma_y=18.65$

代入公式, $r^2=1-\frac{(7.05)^2}{(18.65)^2}$

$$=.8571$$

$$\therefore\quad r=.926$$

88. 相關係數(最小平方法之普通公式).

$$r^2=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)-Nc_y^2}{\Sigma(Y^2)-Nc_y^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式93〕}$$

〔例96〕 按前例係由S_y求得r之法,此處再引用本公式接求得之.從例94已得,

$$a=5.3265$$

$$b=.735135$$

又　$N=15$　　$\Sigma(XY)=83{,}542$

$\Sigma(Y)=965$　　$\Sigma(Y^2)=67{,}301$

$c_y=64.3333$　　$c_y{}^2=4{,}138.77$

代入公式,

$$r^2=\frac{5{,}326\times 965+.735135\times 83{,}542-15\times 4{,}138.77}{67{,}301-15\times 4{,}138.77}$$

$$=\frac{4{,}473}{5{,}219}$$

$$=.857$$

$$\therefore\quad r=.926$$

89. 相關係數(由迴歸係數求得).

$$r=\sqrt{b_{yx}\cdot b_{xy}}\quad\cdots\cdots〔公式 94〕$$

〔例 97〕 由前例根據最小平方求得 Y 對 X 之迴歸係數爲 $b_{yx}=.735135$ 同樣可由標準方程式(見公式 72).

$$1{,}204=15\,a+965\,b$$

$$83{,}542=965\,a+67{,}301\,b$$

求得　$b_{xy}=1.165799$

$$\therefore\quad r=\sqrt{.735\times 1.166}$$

$$=.926$$

90. 相關係數之特殊算法.

$$r^2=\frac{b\Sigma(xY)}{\Sigma(Y^2)-Nc_y{}^2}\text{ (以 }x\text{ 之平均數爲原點)}\quad\cdots\cdots〔公式 95〕$$

$$r^2=\frac{b\Sigma(Xy)}{\Sigma(y^2)}$$ (以 y 之平均數爲原點)……………………〔公式96〕

〔例98〕 今仍取十五年來中國進出口淨值之資料,已知之平均數爲80.267, $\Sigma(xY)$ 之計算如下:

(表 78)

年次	進口 X	出口 Y	x $X-80.267$	xY
民國三年	56	35	−24.267	−849.3
四年	45	41	−35.267	−1,445.9
五年	51	48	−29.267	−1,404.8
六年	54	46	−26.267	−1,208.3
七年	55	48	−25.267	−1,212.8
八年	64	63	−16.267	−1,024.8
九年	76	54	−4.267	−230.4
十年	90	60	9.733	584.0
十一年	94	65	13.733	892.6
十二年	92	75	11.733	880.0
十三年	101	77	20.733	1,596.4
十四年	94	77	13.733	1,057.4
十五年	112	86	31.733	2,729.0
十六年	101	91	20.733	1,886.7
十七年	119	99	38.733	3,834.6
				6,084.4

今 $b=.735135$

$\Sigma(Y^2)=67,301$

$N=15$

$c_y{}^2=4,138.77$

代入公式(95)　$r^2=\dfrac{.735135\times6{,}084.4}{67{,}301-15\times4{,}138.77}$

$$=\frac{4{,}472.86}{5{,}219.45}=.857$$

$$\therefore\quad r=.926$$

〔例99〕 資料同前例已知Y之平均數爲64.333, $\Sigma(y^2)$及$\Sigma(Xy)$之計算如下:

(表　79)

年　次	X 進口	Y 出口	y $Y-64.333$	y^2	Xy
民國三年	56	35	−29.333	860.42	−1,642.6
四年	45	41	−23.333	544.43	−1,050.0
五年	51	48	−16.333	266.77	−833.0
六年	54	46	−18.333	336.10	−990.0
七年	55	48	−16.333	266.77	−898.3
八年	64	63	−1.333	1.78	−85.3
九年	76	54	−10.333	106.77	−785.2
十年	90	60	−4.333	18.77	−390.0
十一年	94	65	.667	.44	62.7
十二年	92	75	10.667	113.78	981.4
十三年	101	77	12.667	160.45	1,279.4
十四年	94	77	12.667	160.45	1,190.7
十五年	112	86	21.667	469.46	2,426.7
十六年	101	91	26.667	711.13	2,693.4
十七年	119	99	34.667	1,201.80	4,125.4
				5,219.32	6,085.2

今　$b=.735135$

代入公式(96)　$r^2=\dfrac{.735135\times6{,}085.2}{5{,}219.32}$

$$=\frac{4,473.44}{5,219.82}$$

$$=8571$$

$$\therefore \quad r=.926$$

91. 相關係數(由等級差異法求出——The method of rank-differences).

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)\cdots\cdots\text{〔公式 }97_a\text{〕}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho&=1-\frac{\Sigma d^2}{\dfrac{N(N^2-1)}{6}}\\ \text{或}\quad \rho&=1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{〔公式 }97_b\text{〕}$$

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1\cdots\cdots\text{〔公式 }98_a\text{〕}$$

$$R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}\cdots\cdots\text{〔公式 }98_b\text{〕}$$

〔例 100〕 玆舉女子年齡與測驗分數爲例,求其相關係數

(表　　80)

女子(號數)	年齡	測驗分數	年齡之等級	測驗之等級	等級之差 d +	等級之差 d −	差數平方 d^2
1	13.5	91	3	1.5	1.5		2.25
2	14.4	77	6.5	9		−2.5	6.25
3	14.5	81	8	5	3		9
4	15.9	48	23	26		−3	9
5	15.6	64	22	20	2		4
6	14.8	78	16	8	8		64
7	12.7	80	2	6.5		−4.5	20.25
8	14.9	67.5	18.5	16	2.5		6.25
9	14.9	80	18.5	6.5	12		144
10	14.8	57	16	24		−8	64
11	12.6	91	1	1.5		− .5	.25
12	15.0	59	20	22.5		−2.5	6.25
13	14.7	67	10.5	17.5		−7	49
14	16.5	74	24	10.5	13.5		182.25
15	14.7	72	10.5	12.5		−2	4
16	14.75	71	13	14		−1	1
17	14.75	60	13	21		−8	6.4
18	13.9	68.5	4	15		−11	121
19	14.6	66	9	19		−10	100
20	15.3	74	21	10.5	10.5		110.25
21	14.4	88	6.5	3	3.5		12.25
22	14.8	72	16	12.5	3.5		12.25
23	14.0	82	5	4	1		1
24	14.75	67	13	17.5		−4.5	20.25
25	16.7	59	25.5	22.5	3		9
26	16.7	48.5	25.5	25	.5		.25
					64.5	−64.5	1022

資料見 R. W. BURGESS—Introduction to the Mathematics of Statistics.

(1) 代入公式 (97_b) 得

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 1022}{26(26^2 - 1)}$$

$$=1-\frac{6\times 1022}{26\times 25\times 27}$$

$$=.65$$

$$\therefore \quad r=2\sin\left(\frac{180}{6}\times .65\right)$$

$$=2\sin 19.50^\circ$$

$$=2\times .3338 \text{ (查表)}$$

$$=.6676$$

或查附表 V, 由 ρ 之值求 r 得,

$$\rho=.65$$

$$\therefore \quad r=.6676$$

(2) 代入公式 (98) 得,

$$R=1-\frac{6\times 64.5}{26^2-1}$$

$$=1-\frac{387}{675}$$

$$=1-.573$$

$$=.427$$

$$\therefore \quad r=2\cos\left[\frac{180}{3}\times(1-.427)\right]-1$$

$$=2\cos 34.38^\circ-1$$

$$=2\times .8253-1$$

$$=.65$$

或查附表 VI 由 R 之值求 r 得,

$R=.427$

$\therefore \quad r=.65$

92. 相關係數(由異號對數法求出——The method of unlike signed pairs).

$$\left.\begin{aligned} r &= \cos\pi\ U \\ U &= \frac{u+\left(\dfrac{\dfrac{u}{u+l}+\dfrac{1}{2}}{2}\right)d}{N} \end{aligned}\right\} \quad \text{〔公式 99〕}$$

〔例 101〕* 茲舉十一個學生甲乙二種測驗分數,列表如下.用異號對數法求其相關係數.

(表　81)

學生	X	Y	x $(\overline{X}=12)$	y $(\overline{Y}=17)$
A	3	15	−	−
B	5	14	−	−
C	5	13	−	−
D	7	17	−	0
E	10	18	−	+
F	12	18	0	+
G	13	17	+	0
H	14	19	+	+
I	18	20	+	+
J	24	16	+	−
K	21	22	+	+

* 按本例資料採自 E. L. THORNDIKE—Mental and Social Measurements.

由上表: 每對差數符號之相同 如(+,+),(− −)者; $l=6$

每對差數符號之相異 如(+,−),(−,+)者 $u=2$

每對差數之有0者 如(0,0),(+,0),(0,+),(−,0),(0,−)

得以 d 記之,本例 $d=3$

代入公式

$$U=\frac{2+\left(\frac{\frac{2}{2+6}+\frac{1}{2}}{2}\right)3}{11}$$

$$=\frac{2+(.375\times 3)}{11}=.284$$

$$r=\cos.284\,\pi=\cos 51.12°=.628$$ (或查附表 VII)

93, 相關係數 (由變量相應法求出 —— The method of concurrent deviations).

$$R_{Ct}=\pm\sqrt{\pm\frac{2\,Ct-N}{N}}$$ ……………………………〔公式 100〕

〔例 102〕 1880—1908 年某物供給及價格之指數如下表.* 茲求其變量相應係數.

* 資料係採自 W. I. KING—Elements of Statistical Method.

(表　82)

年 次	供給 指數	供給 與上年差數 x	物價 指數	物價 與上年差數 y	xy
1880	80		146		
1	82	+	140	−	−
2	86	+	130	−	−
3	91	+	117	−	−
4	83	−	133	+	−
5	85	+	127	−	−
6	89	+	115	−	−
7	96	+	95	−	−
8	93	−	100	+	−
9	90	−	106	+	−
1890	91	+	103	−	−
1	94	+	94	−	−
2	100	+	75	−	−
3	105	+	66	−	−
4	102	−	75	+	−
5	96	−	91	+	−
6	98	+	87	−	−
7	106	+	81	−	−
8	114	+	76	−	−
9	112	−	82	+	−
1900	109	−	91	+	−
1	106	−	100	+	−
2	112	+	89	−	−
3	120	+	76	−	−
4	118	−	82	+	−
5	112	−	100	+	−
6	110	−	106	+	−
7	107	−	114	+	−
8	113	+	103	−	−

由上表可知比較項數為 $N=28$

而差數同號(Concurrent deviations)之項數為

$Ct=0$ (表中末行 xy 之號皆為 $(-)$, 故 $Ct=0$)

代入公式

$$R_{Ct}=-\sqrt{-\frac{-28}{28}}$$

$$=-\sqrt{1}$$

$$=-1$$

〔附註〕 上式(±)號之使用,係根據分數 $\frac{2Ct-N}{N}$ 而定. 如 $\frac{2Ct-N}{N}$ 為正數,則分數前用(+)號,根號外亦用(+)號(其意即正相關). 如 $\frac{2Ct-N}{N}$ 為負數,則分數前用(−)號,根號外亦用(−)號(即負相關之意).

94. 二列相關係數(Biserial r).

$$r_{bis}=\frac{\overline{Y}_2-\overline{Y}_1}{\sigma_y}\left(\frac{pq}{Z}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 101〕$$

〔例 103〕 茲以房租多寡與週歲嬰兒健康列表如下,求其二列相關係數.

(表　83)

房　租	健康 不良 Y_1	健康 良 Y_2	合計 Y
\$ 8.5	1	1	2
8.0			
7.5		4	4
7.0		4	4
6.5	1	13	14
6.0	1	18	19
5.5	4	45	49
5.0	16	82	98
4.5	53	252	305
4.0	101	303	404
3.5	132	182	314
3.0	55	64	119
2.5	26	18	44
2.0	7	7	14
	$297=n_1$	$993=n_2$	$1,390=N$

(資料見 HOLZINGER—Statistical Methods for Students in Education).

由上表　$q=.2856$

$p=.7144$

由附表 III　$p-.5=.2144$ 行之 z 爲 .3399

$\therefore\quad z=.3399$

更由上表　$\overline{Y}_1=3.7065$　　$\overline{Y}_2=4.1798$

$\sigma_y=.8021$

$$\therefore\quad r_{bis}=\frac{(.4733)(.2040)}{(.8021)(.3399)}$$

$$=\frac{.0\ 655}{.2726}=.3542$$

95. 均方相聯 (Mean square contingency).

$$\phi^2=\frac{1}{N}\Sigma\left\{\frac{\left(f_{xy}-\frac{f_xf_y}{N}\right)^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right\}=\Sigma\left\{\frac{f_{xy}{}^2}{f_xf_y}\right\}-1=S-1\cdots\cdots\text{〔公式 102〕}$$

96. 相聯係數 (Contingency coefficient).

$$C.\,C.=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}=\sqrt{\frac{S-1}{S}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 103〕}$$

〔例 104〕 茲以 1690 對兄弟之體育成績列表如下，求其相聯係數.

(表 84)

弟	兄			合計
	上	中	下	
上	906	20	140	1,066
中	20	76	9	105
下	140	9	370	519
合計	1,066	105	519	1,690

(資料見 YULE—An Introduction to the Theory of Statistics p. 74 練習題).

由上表 $$\phi^2=\frac{(906)^2}{(1{,}066)^2}+\frac{(20)^2}{(105)(1{,}066)}+\frac{(140)^2}{(519)(1{,}066)}+\frac{(20)^2}{(1066)(105)}$$

$$+\frac{(76)^2}{(105)^2}+\frac{(9)^2}{(519)(105)}+\frac{(140)^2}{(1{,}066)(519)}+\frac{(9)^2}{(105)(519)}$$

$$+\frac{(370)^2}{(519)^2}-1$$

$$=.8354$$

$$C.C.=\sqrt{\frac{(.8354)^2}{1+(.8354)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{.6979}{1.6976}}$$

$$=.64$$

B. 非直線相關(Non-linear correlation)

97. 估計之標準誤(Standard error of estimate)

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)-c\Sigma(X^2Y)-d\Sigma(X^3Y)}{N}$$

....〔公式 104〕

〔例 105〕 茲取美國某四州 216 農戶每嗬麥產額與每嗬生產費之資料,求其標準誤.

(表 85)

	X——每畝所產之嗬數									
	組	0—4.99	5—9.99	10—14.99	15—19.99	20—24.99	25—29.99	30—34.99	總計	列之平均數
Y——每嗬之生產費	$8—$8.99	1	1						2	5.000
	7—7.99								0	
	6—6.99	1	2						3	5.833
	5—5.99		1						1	7.500
	4—4.99	2	2	2					6	7.500
	3—3.99		12	6					18	9.167
	2—2.99		4	42	26				72	14.028
	1—1.99		1	22	49	30	9	2	113	18.827
	0—0.99							1	1	32.500
	總計	4	23	72	75	30	9	3	216	
	行之平均數	6.000	3.891	2.333	1.847	1.500	1.500	1.167		

資料見 MILLS & DAVENPORT—Manual of Problems and Tables in Statistics, p. 96.

設以二次拋物線

$$Y=a+bX+cX^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots @$$

配合之,則S_y之公式,可化為

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)-c\Sigma(X^2Y)}{N}$$

故欲求上表事實之標準誤,祇須求得@式中各常數a,b,c之值.(此可由最小平方法求得之)今由XY之次數分配,計算$\Sigma(X)$, $\Sigma(X^2)$, $\Sigma(X^3)$, $\Sigma(X^4)$之值如次:

(表 86)

X	f	fX	fX^2	fX^3	fX^4
2.5	4	10.0	25.00	62.500	156.2500
7.5	23	172.5	1,293.75	9,703.125	72,773.4375
12.5	72	900.0	11,250.00	140,625.000	1,757,812.5000
17.5	75	1,312.5	22,968.75	401,953.125	7,034,179.6875
22.5	30	675.0	15,187.50	341,718.750	7,688,671.8750
27.5	9	247.5	6,806.25	187,171.875	5,147,226.5625
32.5	3	97.5	3,168.75	102,984.375	3,346,992.1875
	216	3,415.0	60,700.00	1,184,218.750	25,047,812.5000

計算$\Sigma(Y)$, $\Sigma(Y^2)$之值如次:

(表 87)

Y	f	fY	fY^2
8.5	2	17.0	144.50
6.5	3	19.5	126.75
5.5	1	5.5	30.25
4.5	6	27.0	121.50
3.5	18	63.0	220.50
2.5	72	180.0	450.00
1.5	113	169.5	254.25
.5	1	.5	.25
	216	482.0	1,348.00

計算$\Sigma(XY)$, $\Sigma(X^2Y)$如次:

(表　88)

X	Y	f	fY	fXY	fX^2Y
2.5	8.5	1	8.5	21.25	53.125
2.5	6.5	1	6.5	16.25	40.625
2.5	4.5	2	9.0	22.50	56 250
7.5	8.5	1	8.5	63 75	478 125
7.5	6.5	2	13.0	97.50	731.250
7.5	5.5	1	5.5	41.25	309.375
7.5	4.5	2	9.0	67.50	506 250
7.5	3 5	12	42.0	315.00	2,362.500
7.5	2.5	4	10.0	75.00	562.500
7.5	1.5	1	1.5	11.25	84.375
12.5	4.5	2	9 0	112.50	1,406.250
12.5	3.5	6	21 0	262 50	3,281.250
12.5	2.5	42	105.0	1,312.50	16,406.250
12.5	1.5	22	33.0	412.50	5,156.250
17.5	2.5	26	65 0	1,137 50	19,906.250
17.5	1.5	49	73 5	1,286.25	22,509.375
22.5	1.5	30	45.0	1,012.50	22,781.250
27.5	1.5	9	13.5	371.25	10,209.375
32.5	1.5	2	3.0	97.50	3,168.750
32.5	.5	1	.5	16.25	528.125
		216	482.0	6.752 50	110,537.500

由上三表,得 $N=216$　　$\Sigma(X)=3,415$

$\Sigma(Y)=482$　　$\Sigma(X^2)=60,700$

$\Sigma(Y^2)=1,348$　　$\Sigma(X^3)=1,184,218.75$

$\Sigma(XY)=6,752.5$　　$\Sigma(X^4)=25,047,812.5$

$\Sigma(X^2Y)=110,537.5$

將以上諸值代入標準方程式(見公式74)

$$482=216a+3,415b+60,700c$$

$$6,752.5=3,415a+60,700b+1,184,218.75c$$

$$110,537.5=60,700a+1,184,218.75b+25,047,812.5c$$

用杜立突法(Doolitle method)解此三式如下:

(表 89)*

線 line	(1) 倒數 reciprocals	(2) a	(3) b	(4) c	(5)	(6) s
I		216	3,415	60,700	−482	63,849
II			60,700	1,184,218.75	−6,752.5	1,241,581.25
III				25,047,812.5	−110,537.5	26,182,193.75
1		216.000000	3,415.000000	60,700.000000	−482.000000	63,849.000000
2	−.0046296296	−1.000.000	−15.810185	−281.018517	2.231481	−295.597220(驗)
3			60,700.000000	1,184,218 750000	−6,752.500000	1,241,581.250000
4			−53,991.781775	−959,678.229500	7,620.509170	−1,009,464.502065
5			6,708.218225	224,540.520500	868.009170	232,116.747935(驗)
6	−.0001490709		−1.000000	−33.472458	−.129395	−34.601853(驗)
7				25,047,812.500000	−110,537.500000	26,182,193.750000
8				−17,057,823.981900	135,450.925194	−17,942,751.291933
9				−7,515,923.141734	−29,054.400486	−7,769,518.095179
10				474,065.376366	−4,140.975292	469,924.362883(驗)
11	−.000002109413			−1.000000	.008735	−.991265(驗)

*標準方程式Doolitle氏解法之說明:

將原式移項並縮書之，

$$216a+3,415b+60,700c-482=0$$
$$+60,700b+1,184,218.75c-6,752.5=0$$
$$+25,047,812.5c-110,537.5=0$$

上式列爲一表其未知數 (a, b, c) 之係數，列於指定之各行，已知項列於(5)行．S行爲驗算而設．I, II, III 列 S 之值，各等於其標準方程式中已知量之代數和，求其和時，須將對角線左方已略去之係數加入計算．

解標準方程式之手續，可綜述如下：

1. 標準方程式I書於(1)列
2. (2)列(1)行填入(1)列(2)行 a 值係數之倒數．並改其號，卽以該倒數遍乘(1)列各項．而填其積於(2)列相當各行之內［(2)列(2)(3)(4)(5)行各項之代數和．須等於(6)行之值］．此法消去未知數 a．而以 b, c, 表之．［(2)列(2)行之 -1，僅爲驗算之用．(6)列及(11)列亦然．］(2)列之下．劃一橫線．
3. 標準方程式II．書於(3)列．
4. (1)列(3)(4)(5)(6)行諸項．各以(2)列 b 之係數 (-15.810185) 乘之其積填入(4)列相當各行之內
5. (3)(4)二列相加其和填於(5)列．［(5)列(3)(4)(5)行諸項之代數和．須等於(6)行之值］
6. (6)列(1)行填入(5)列(3)行 b 值係數之倒數並改其號，卽以該倒數遍乘(5)列各項，而填其積於(6)列相當各行，［(6)列(3)(4)(5)行諸項之和須等於(6)行之值］此法已消去未知數 b，而以 c 表之，(6)列之下．劃一橫線
7. 標準方程式III書於(7)列
8. (1)列(4)(5)(6)行諸項各以(2)列 c 之係數 (-281.018517) 乘之其積填入(8)列相當各行之內．
9. (5)列(4)(5)(6)行諸項各以(6)列 c 之係數 (-33.472458) 乘之其積填入(9)列相當各行．
10. (7)(8)(9)三列相加其和填於(10)列［(10)列(4)(5)行二項之代數和須等於(6)行之值］
11. (11)列(1)行填入(10)列(4)行 c 值係數之倒數並改其號卽以該倒數遍乘(10)列各項其積填於(11)列［(11)列(4)(5)行二項之和須等於(6)行之值］此法求出 c 之值卽(11)列(5)行之數．

逐步算法之驗算，皆詳示表中，觀其試驗之結果，可使錯誤極小．

由表(89), $c=.008735$

$$b=-33.472458c-.129395=-.4218$$

$$a=-15.810185b-281.018517c+2.231481=6.445$$

故定冪級數之曲線(Curve of potential series)方程式爲

$$Y=6.445-.4218\,X+.008735\,X^2$$

將上列諸値代入公式,則

$$S_y^2=\frac{1,348-(6.445\times482)-(-.4218\times6,752.5)-(.008735\times110,537.5)}{216}$$

$$=\frac{1,348-3,106.490+2,848.2045-965.5451}{216}$$

$$=\frac{124.1694}{216}$$

$$=.5749$$

$\therefore\ S_y=.758$

98. 相關指數之普通公式(Index of correlation)

$$\left.\begin{aligned}\rho_{yx}^2&=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\quad(y\text{ 爲因變數})\\ \rho_{xy}^2&=1-\frac{S_x^2}{\sigma_x^2}\quad(x\text{ 爲因變數})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 105〕}$$

〔例 106〕 由上例已知

$$S_y^2=.5749$$

又

$$\Sigma(Y)=482$$

$$\Sigma(Y^2)=1,348$$

$$c_y=\frac{482}{216}=2.2315 \qquad c_y{}^2=4.9796$$

$$\begin{aligned}\sigma_y{}^2&=\frac{1,348}{216}-4.9796\\&=6.2407-4.9796\\&=1.2611\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{yx}{}^2&=1-\frac{.5749}{1.2611}\\&=1-.4559\\&=.5441\end{aligned}$$

$$\rho_{yx}=.738$$

99. 相關指數曲線——Curve of potential series)

$$\rho_{yx}{}^2=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)+c\Sigma(X^2Y)+d\Sigma(X^3Y)+\cdots-Nc_y{}^2}{\Sigma(Y^2)-Nc_y{}^2}$$

....〔公式 106〕

〔例 107〕 由例 105 及例 106 已知，

$$N=216 \qquad \Sigma(Y)=482$$

$$a=6.445 \qquad \Sigma(Y^2)=1,348$$

$$b=-\ 4218 \qquad \Sigma(XY)=6,752.5$$

$$c=.008735 \qquad \Sigma(X^2Y)=110,537.5$$

$$c_y{}^2=4.9796$$

$$\rho_{yx}^2=\frac{(6.445\times482)+(-.4218\times6,752.5)+(.008735\times110,537.5)-(216\times4.9796)}{1348-(216\times4.9796)}$$

$$=\frac{3,106.490-2,848.2045+965.5451-1,075.5936}{1,348-1,075.5936}$$

$$=\frac{148.2370}{272.4064}$$

$$=.5442$$

$$\rho_{yx}=.738$$

100. 相關比率 (Correlation ratio)

$$\left.\begin{array}{ll}\eta_{yx}=\sqrt{1-\dfrac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}} & (y\text{ 為因變數})\\ \eta_{xy}=\sqrt{1-\dfrac{\sigma_{ax}^2}{\sigma_x^2}} & (x\text{ 因為變數})\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 107〕}$$

〔例 108〕 取表(85)之資料求其相關比率,其法當先求σ_{ay}.即連各行平均數的線之標準差 (The root-mean-square deviation about the line joining the means of the various columns) 計算之法如下:

(表　90)

行數	組距		中點 (m)	次數 (f)	行之平均數 (my)	差數 d (m-my)	d^2	fd^2	總計
1	8	8.99	8.5	1	6.00	2.50	6.2500	6.2500	
	6	6.99	6.5	1	6.00	50	.2500	.2500	
	4	4.99	4.5	2	6.00	−1.50	2.2500	4.5000	11.0000
2	8	8.99	8.5	1	3.89	4.61	21.2521	21.2521	
	6	6.99	6.5	2	3.89	2.61	6.8121	13.6242	
	5	5.99	5.5	1	3.89	1.61	2.5921	2.5921	
	4	4.99	4.5	2	3.89	.61	.3721	.7442	
	3	3.99	3.5	12	3.89	−.39	.1521	1.8252	
	2	2.99	2.5	4	3.89	−1.39	1.9321	7.7284	
	1	1.99	1.5	1	3.89	−2.39	5.7121	5.7121	53.4783
3	4	4.99	4.5	2	2.33	2.17	4.7089	9.4178	
	3	3.99	3.5	6	2.33	1.17	1.3689	8.2134	
	2	2.99	2.5	42	2.33	0.17	.0289	1.2138	
	1	1.99	1.5	22	2.33	−.83	.6889	15.1558	34.0008
4	2	2.99	2.5	26	1.85	.65	.4225	10.9850	
	1	1.99	1.5	49	1.85	−.35	.1225	6.0025	16.9875
5	1	1.99	1.5	30	1.50	0	0	0	0
6	1	1.99	1.5	9	1.50	0	0	0	0
7	1	1.99	1.5	2	1.17	.33	.1089	.2178	
	0	0.99	0.5	1	1.17	− 67	.4489	.4489	.6667

$$\therefore \quad \sigma_{ay}^2 = \sqrt{\frac{116.1333}{216}} = .5377$$

$$\sigma_{ay} = .7333$$

$$\because \quad \sigma_y^2 = 1.2611$$

$$\therefore \quad \sigma_y = 1.123$$

代入公式
$$\eta_{yx}^2=1-\frac{(.7333)^2}{(1.123)^2}$$
$$=1-.4264$$
$$=.5736$$
$$\therefore\quad \eta_{yx}=.757$$

當 x 爲因變數時，則公式見上，算法同，從略.

101. 相關比率 (根據 σ_{my}, σ_{mx} 計算)

$$\left.\begin{aligned}\eta_{yx}&=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}\quad(y\text{ 爲因變數})\\ \eta_{xy}&=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}\quad(x\text{ 爲因變數})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 108〕$$

〔例 109〕 仍取前例事實求其相關比率，惟須先求 σ_{my} 即各行平均數從諸 Y 平均數之標準差(the standard deviation of the means of the various columns about the arithmetic mean of all the Y's) 計算法如下:

(表 91)

列之型數 Type of Array	各行 Y 項之平均值 (m_y)	與 Y 平均數 2.2315 之離差 (d)	離差之方 (d^2)	f	fd^2
2.5	6.000	3.7685	14.2016	4	56.8064
7.5	3.891	1.6595	2.7539	23	63.3397
12.5	2.333	.1015	.0103	72	.7416
17.5	1.847	−.3845	.1478	75	11.0850
22.5	1.500	−.7315	.5351	30	16.0530
27.5	1.500	−.7315	.5351	9	4.8159
32.5	1.167	−1.0645	1.1332	3	3.3996
				216	156.2412

$$\sigma_{my}^2 = \frac{156.2412}{216} = .723339$$

$$\sigma_{my} = .8505$$

$$\eta_{yx} = \frac{.8505}{1.123} = .757$$

由此可證以上兩法所求得之相關比率,結果相同.

102. 相關比率(簡捷法)

$$\eta_{yx}^2 = \frac{1}{\sigma_y^2}\left\{\frac{\Sigma\frac{(S_s')^2}{f_x}}{N} - c_y^2\right\} \text{……………………〔公式 } 109_a\text{〕}$$

$$\eta_{xy}^2 = \frac{1}{\sigma_x^2}\left\{\frac{\Sigma\frac{(S_s')^2}{f_y}}{N} - c_x^2\right\} \text{……………………〔公式 } 109_b\text{〕}$$

〔例 110〕 仍取前例事實,用簡捷法求其相關係數及相關比率.

(表 92)

Y—每蒴之生產費	X—每畝所產之蒴數 0—4.99	5—9.99	10—14 99	15—19.99	20—24.99	25—29.99	30—34.99	f_y	y'	fy'	$f(y')^2$	S'_s	S'_sy' $(\Sigma xy')$	$(S'_s)^2$	$\frac{(S'_s)^2}{f_y}$
8—8.99	1	1						2	6	12	72	−5	−30	25	12.50
7—7.99								0	5	0	0	0	0	0	0
6—6.99	1	2						3	4	12	48	−7	−28	49	16.33
5—5 99		1						1	3	3	9	−2	−6	4	4.00
4—4.99	2	2	2					6	2	12	24	−12	−24	144	24.00
3—3.99		12	6					18	1	18	18	−30	−30	900	50.00
2—2.99		4	42	26				72	0			−50		2500	34.72
1—1.99		1	22	49	30	9	2	113	−1	−113	113	30	−30	900	7.96
\$0—\$0.99							1	1	−2	−2	4	3	−6	9	9.00
								216		−58	288		−154		158.51

f_x	x'	fx'	$f(x')^2$	S'_s	$S'_s \cdot x'$ $(\Sigma x'y')$	$(S'_s)^2$	$\frac{(S'_s)^2}{f_x}$
4	−3	−12	36	14	−42	196	49.00
23	−2	−46	92	32	−64	1024	44.52
72	−1	−72	72	−12	12	144	2.00
75	0			−49		2401	32.01
30	1	30	30	−30	−30	900	30.00
9	2	18	36	−9	−18	81	9.00
3	3	9	27	−4	−12	16	5.33
216		−73	293		−154		171.86

1. $c_x = \frac{-73}{216} = -.3380$(組距)

$c_y = \frac{-58}{216} = -.2685$(組距)

2. $\sigma_x^2 = \frac{293}{216} - c_x^2$

$= 1.3565 - .1142$

$= 1.2423$

$\sigma_x = 1.115$

$\sigma_y^2 = \frac{288}{216} - c_y^2$

$= 1.3333 - .0721$

$= 1.2612$

$\sigma_y = 1.123$

3. $\frac{\Sigma(x'y')}{N} = \frac{-154}{216} = -.7130$

$\frac{\Sigma(x'y')}{N} - c_x c_y$

$= -.7130 - .0908$

$= -.8083$

$\therefore\ r = \frac{-.8038}{1.115 \times 1.123} = -.642$

$\frac{\Sigma \frac{(S'_s)^2}{f_x}}{N} = \frac{171.86}{216}$

$= .7956$

$\eta_{yx}^2 = \frac{.7956 - .0721}{1.2612}$

$= .5737$

$\therefore\ \eta_{yx} = .757$

$\frac{\Sigma \frac{(S'_s)^2}{f_y}}{N} = \frac{158.51}{216}$

$= .7338$

$\eta_{xy}^2 = \frac{.7338 - .1142}{1.2423}$

$= .4988$

$\therefore\ \eta_{xy} = .706$

103. 改正相關比率之平方(Square of corrected correlation ratio

$$c.\,\eta^2=\frac{\eta^2-\frac{(\kappa-3)}{N}}{1-\frac{(\kappa-3)}{N}} \quad \text{〔公式 110〕}$$

〔例 111〕 由上例知 $\eta_{yx}=.757$

$\kappa=7$

$N=216$

代入公式

$$c.\,\eta_{yx}{}^2=\frac{(.757)^2-\frac{(7-3)}{216}}{1-\frac{(7-3)}{216}}$$

$$=\frac{.573-.019}{1-.019}=\frac{.554}{.981}$$

$$=.565$$

即 $c.\,\eta_{yx}=.752$

〔附註〕 本公式中 κ 代表行數.

104. 直線性之試驗(Test of linearity)

$$\zeta=\eta^2-r^2 \quad \text{〔公式 111〕}$$

〔例 112〕 由上例得

$\eta=.752$

又 $r=-.642$ (見附註)

$$\therefore \quad \zeta=(.752)^2-(-.642)^2$$

$$=.565-.412$$

$$=.153$$

按此結果足以證明其迴歸線非一直線.

〔附註〕r 乃由公式 83_a) 求出.

按

$$n=216 \qquad \therefore \quad c_x=15.810$$

$$\Sigma(X)=3,415 \qquad c_y=2.2315$$

$$\Sigma(Y)=482$$

$$\Sigma(XY)=6,752.5$$

$$\Sigma(X^2)=60,700$$

$$\Sigma(Y^2)=1,348$$

$$\therefore \quad r=\frac{\frac{6,752.5}{216}-15.81\times 2.2315}{\sqrt{\frac{60,700}{216}-(15.810)^2}\sqrt{\frac{1,348}{216}-(2.2315)^2}}$$

$$=\frac{31.262-35.280}{\sqrt{281.02-249.96}\sqrt{6.2407-4.9796}}$$

$$=\frac{-4.018}{5.5731\times 1.1230}=\frac{-4.018}{6.2586}$$

$$=-.642$$

C. 純相關及複相關

(Partial and Multiple Correlation)

105. *純相關係數 (Coefficient of partial correlation).

* 自 105 至 107 係以乘積法解算.

$$r_{12\cdot345\cdots n}=\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}\cdot r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{(1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)})^{\frac{1}{2}}}$$ 〔公式 112〕

〔例 113〕 某地山芋產量與前後兩期雨量之關係,如下表所示.求各級純相關係數:

(表 93)

年別	雨量 Rainfall 前期(五月起至七月底) X_2	後期(八月起至九月底) X_3	趨勢 Trend X_4	產額 Yeilds X_1	由回歸方程式δ估計之產額 X_1	餘差 Residual d_1
1913	13.17	3.66	1	220	224.5	−4.5
1914	11.33	4.08	2	260	248.3	−11.7
1915	15.96	4.12	3	179	184.7	−5.7
1916	15.46	3.77	4	204	199.2	+4.8
1917	17.77	5.53	5	125	146.6	−21.6
1918	18.09	3.87	6	200	166.3	+33.7
1919	12.25	5.41	7	230	232.7	−2.7
1920	13.29	7.62	8	177	192.5	−15.5
1921	7.82	6.11	9	298	292.8	+5.2
1922	16.40	5.12	10	187	186.1	+.9
1923	10.61	3.51	11	258	292.3	−34.3
1924	9.10	6.13	12	315	283.1	+31.9
1925	11.35	5.38	13	250	263.6	−13.6
1926	9.60	5.60	14	290	288.6	+1.4
1927	13.98	6.02	15	232	223.7	+8.3

δ 直線回歸方程式

$$X_1=456.315604-14.260734X_2-12.831177X_3+2.935122X_4$$

資料係根據 1929 六月 Journal of the American Statistical Association, Vol. XXIV. No. 166.

上列公式爲任何級純相關係數之普通公式故

1. 一級係數 (Coefficient of lst order) 爲

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r^2_{13})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23})^{\frac{1}{2}}},$$

$$r_{13\cdot2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{32}}{(1-r^2_{12})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{32})^{\frac{1}{2}}},$$

餘類推.

2. 二級係數 (Coefficient of 2nd order) 爲

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}r_{24\cdot3}}{(1-r^2_{14\cdot3})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{24\cdot3})^{\frac{1}{2}}},$$

或 $$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot4}-r_{13\cdot4}r_{23\cdot4}}{(1-r^2_{13\cdot4})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23\cdot4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-r_{14\cdot2}r_{34\cdot2}}{(1-r^2_{14\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{34\cdot2})^{\frac{1}{2}}},$$

或 $$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot4}-r_{12\cdot4}r_{32\cdot4}}{(1-r^2_{12\cdot4})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{32\cdot4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-r_{13\cdot2}r_{43\cdot2}}{(1-r^2_{13\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{43\cdot2})^{\frac{1}{2}}},$$

或 $$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot3}-r_{12\cdot3}r_{42\cdot3}}{(1-r^2_{12\cdot3})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{42\cdot3})^{\frac{1}{2}}}$$

惟計算各級係數之先, 須求得零次係數 (Coefficient of zero order) 如 r_{12}, r_{13} 之類. 今由 X_1, X_2, X_3, X_4 之數列,計算 ΣX_1, ΣX_2,······· 及 ΣX_1^2, ΣX_2^2,······· 如次:

(表 94)

X_1	X_2	X_3	X_4	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2
220	13.17	3.66	1	48,400	173.4489	13.3956	1
260	11.33	4.08	2	67 600	128.3689	16.6464	4
179	15 96	4.12	3	32,041	254.7216	16.9744	9
204	15.46	3.77	4	41,616	239.0116	14 2129	16
125	17.77	5.53	5	15,625	315.7729	30.5809	25
200	18.09	3.87	6	40,000	327.2481	14.9769	36
230	12.25	5 41	7	52,900	150.0625	29.2681	49
177	13.29	7.62	8	31,329	176.6241	58.0644	64
298	7.82	6.11	9	88,804	61.1524	37.3321	81
187	16.40	5.12	10	34,969	268 9600	26.2144	100
258	10.61	3.51	11	66,564	112.5721	12.3201	121
315	9.10	6.13	12	99,225	82.8100	37.5769	144
250	11.35	5.38	13	62,500	128.8225	28.9444	169
290	9.60	5.60	14	84,100	92.1600	31.3600	196
232	13 98	6.02	15	53,824	195.4404	36.2404	225
3,425	196.18	75.93	120	819,497	2,707.1760	404.1079	1,240

計算 ΣX_1X_2, ΣX_1X_3,……如次:

(表 95)

X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4
2,897.40	805.20	220	48.2022	13.17	3.66
2,945.80	1,060.80	520	46.2264	22.66	8.16
2,856.84	737.48	537	65.7552	47.88	12.36
3,153.84	769.08	816	58.2842	61.84	15.08
2,221.25	691.25	625	98.2681	88.85	27.65
3,618.00	774.00	1,200	70.0083	108.54	23 22
2,817.50	1,244.30	1,610	66.2725	85.75	37.87
2,352.33	1,348.74	1,416	101.2698	106.32	60 96
2,330.36	1,820 78	2,682	47.7802	70.38	54.99
3,066 80	957.44	1,870	83.9680	164.00	51.20
2,737.38	905.58	2,838	37.2411	116 71	38.61
2,866.50	1,930.95	3,780	55.7830	109.20	73.56
2,837.50	1,345.00	3,250	61.0630	147.55	69.94
2,784.00	1,624.00	4,060	53.7600	134.40	78.40
3,243.36	1,396.64	3,480	84.1596	209.70	90.36
42,728.86	17,411.24	28,904	978.0416	1,486.95	645.96

由上列二表計算

$\Sigma(X_1)=3,425$ $\qquad$ $\Sigma(X_1^2)=819,497$

$\Sigma(X_2)=196.18$ $\qquad$ $\Sigma(X_2^2)=2,707.1760$

$\Sigma(X_3)=75.93$ $\qquad$ $\Sigma(X_3^2)=404.1079$

$\Sigma(X_4)=120$ $\qquad$ $\Sigma(X_4^2)=1,240$

$\Sigma(X_1X_2)=42,728.86$

$\Sigma(X_1X_3)=17,411.24$

$\Sigma(X_1X_4)=28,904$

$\Sigma(X_2X_3)=978.0416$

$\Sigma(X_2X_4)=1,486.95$

$\Sigma(X_3X_4)=645.96$

$\therefore\quad c_1=228.3333$ $\qquad$ $c_1^2=52,136.0959$

$c_2=13.0787$ $\qquad$ $c_2^2=171.0524$

$c_3=5.0620$ $\qquad$ $c_3^2=25.6238$

$c_4=8.0000$ $\qquad$ $c_4^2=64.0000$

$$\sigma_1^2=\frac{819,497}{15}-52,136.0959=2,497\ 0374,\qquad \sigma_1=49.970$$

$$\sigma_2^2=\frac{2,707.1760}{15}-171.0524=9.4260,\qquad \sigma_2=3.0702$$

$$\sigma_3{}^2=\frac{404.1079}{15}-25.6238=1.3167, \qquad \sigma_3=1.1475$$

$$\sigma_4{}^2=\frac{1,240}{15}-64.0000=18.6667, \qquad \sigma_4=4.3205$$

$$p_{12}=\frac{42,728.86}{15}-(228.3333\times 13.0787)=-137.7120$$

$$p_{13}=\frac{17,411.24}{15}-(228.3333\times 5.0620)=4.9261$$

$$p_{14}=\frac{28,904}{15}-(228.3333\times 8.0000)=100.2669$$

$$p_{23}=\frac{978.0416}{15}-(13.0787\times 5.0620)=-1.0016$$

$$p_{24}=\frac{1,486.95}{15}-(13.0787\times 8.0000)=-5.4996$$

$$p_{34}=\frac{645.96}{15}-(5.0620\times 8.0000)=2.5680$$

故零級係數爲

$$r_{12}=\frac{-137.7120}{49.970\times 3.0702}=\frac{-137.7120}{153.418}=-.8976$$

$$r_{13}=\frac{4.9261}{49.970\times 1.1475}=.0859$$

$$r_{14}=\frac{100.2669}{49.970\times 4.3205}=.4644$$

$$r_{23}=\frac{-1.0016}{3.0702\times 1.1475}=-.2843$$

$$r_{24}=\frac{-5.4996}{3.0702\times 4.3205}=-.4146$$

$$r_{34}=\frac{2.5680}{1.1475\times 4.3205}=.5180$$

其一級係數爲

$$r_{12\cdot 3}=\frac{-.8976-(-.0244)}{.9963\times .9587}$$

$$=\frac{-.8732}{.9552}=-.9141$$

$$r_{14\cdot 3}=\frac{.4644-.0445}{.9963\times .8554}$$

$$=\frac{.4199}{.8522}=.4927$$

餘可類推.茲將所有一級係數之詳細算法,列表如次:

(表 96)

零級之 r(r o order) 下標 Subscript	係數 Coefficient	$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	分子之相乘項 Product term of numerator	分子全部 Whole numerator	分母 Denominator	一級之 r(r 1st order) 下標 Subscript	係數 Coefficient
12	−.8976		−.0244	−.8732	.9552	12.3	−.9141
13	.0859	.9963					
23	−.2843	.9587					
14	.4644		.0445	.4199	.8522	14.3	.4927
13	.0859	.9963					
43	.5180	.8554					
24	−.4146		−.1473	−.2673	.8201	24.3	−.3259
23	−.2843	.9587					
43	.5180	.8554					
13	.0859		.2552	−.1693	.4226	13.2	−.4006
12	−.8976	.4408					
32	−.2843	.9587					
14	.4644		.3721	.0923	.4011	14.2	.2301
12	−.8976	.4408					
42	−.4146	.9100					
34	.5180		.1179	.4001	.8724	34.2	.4586
32	−.2843	.9587					
42	−.4146	.9100					
12	−.8976		−.1925	−.7051	.8059	12.4	−.8749
14	.4644	.8856					
24	−.4146	.9100					
13	.0859		.2406	−.1547	.7575	13.4	−.2042
14	.4644	.8856					
34	.5180	.8554					
23	−.2843		−.2148	−.0695	.7784	23.4	−.0893
24	−.4146	.9100					
34	.5180	.8554					

至二級係數,各有兩法,下表對於 $r_{12\cdot34}$, $r_{13\cdot24}$ 及 $r_{14\cdot23}$ 之計算,二法並列,俾閱者對於驗算上,不無參攷之處.

(表 97)

一級之 r (r 1st order) 下標 (Subscript)	係數 (Coefficient)	$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	分子之相乘項 (Product term of numerator)	分子全部 (Whole numerator)	分母 Denominator	二級之 r (r 2nd order) 下標 (Subscript)	係數 (Coefficient)
12.3	−.9141		−.1606	−.7535	.8227	12.34	−.9159
14.3	.4927	.8702					
24.3	−.3250	.9454					
13.2	−.4006		.1055	−.5061	.8648	13.24	−.5852
14.2	.2301	.9732					
34.2	.4586	.8886					
14.2	.2301		−.1837	.4138	.8141	14.23	.5083
13.2	−.4006	.9162					
43.2	.4586	.8886					
12.4	−.8749		.0182	−.8931	.9750	12.34	−.9160
13.4	−.2042	.9789					
23.4	−.0893	.9960					
13.4	−.2042		.0781	−.2823	.4824	13.24	−.5852
12.4	−.8749	.4843					
32.4	−.0893	.9960					
14.3	.4927		.2979	.1948	.3834	14.23	.5081
12.3	−.9141	.4055					
42.3	−.3259	.9454					

由上表結果

$$r_{12\cdot34} = -.9159$$

$$r_{13\cdot 24} = -.5852$$

$$r_{14\cdot 23} = .5082$$

106. n 級之標準差——估計之標準誤 (Standard deviation of order n—Standard error of estimate)

$$\sigma^2_{1\cdot 23\cdots n} = \sigma^2_1(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot 2})(1-r^2_{14\cdot 23})\cdots\cdots (1-r^2_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}) \quad \text{〔公式 113〕}$$

〔例 114〕 例同前，

已知

$$\sigma_1{}^2 = 2{,}497.0374$$

$$r_{12} = -.8976$$

$$r_{13\cdot 2} = -.4006$$

$$r_{14\cdot 23} = +.5082$$

代入公式

$$\sigma^2_{1\cdot 234} = 2{,}497.0374〔1-(-.8976)^2〕〔1-(-.4006)^2〕〔1-(.5082)^2〕$$

$$= 302.0973$$

$$\therefore \quad \sigma_{1\cdot 234} = 17.38$$

107. 複相關係數——由純相關係數求得 (Coefficient of multiple correlation)

$$\left.\begin{aligned} &1-R^2_{1\cdot 234\cdots n} = (1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot 2})(1-r^2_{14\cdot 23})\cdots(1-r^2_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}) \\ &\text{或} \\ &R^2_{1\cdot 234\cdots n} = 1-(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot 2})(1-r^2_{14\cdot 23})\cdots(1-r^2_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}) \end{aligned}\right\}$$

……………………………………〔公式 114〕

〔例 115〕 例仍前,本例 $n=4$ 故,

$$1-R^2_{1\cdot 234}=(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot 2})(1-r^2_{14\cdot 23})$$

由例 114 已知 r_{12}, $r_{13\cdot 2}$ 及 $r_{14\cdot 23}$ 諸值.代入上式,

$$1-R^2_{1\cdot 234}=[1-(-.8976)^2][1-(-.4006)^2][1-(.5082)^2]$$

$$=.1210$$

$$R^2_{1\cdot 234}=.8790$$

$$\therefore\quad R_{1\cdot 234}=.9375$$

108. *估計之標準誤——在幾個自變數時 (Standard error of estimate—Several independent variables)

$$S^2_{1\cdot 34\cdots n}=\frac{\Sigma(X_1^2)-a\Sigma(X_1)-b_{12\cdot 34\cdots n}\Sigma(X_1X_2)-b_{13\cdot 24\cdots n}\Sigma(X_1X_3)-b_{14\cdot 23\cdots n}\Sigma(X_1X_4)-\cdots}{N}\cdots\text{〔公式 115〕}$$

〔例 116〕 例同前,其變數有四,故公式化爲

$$S^2_{1\cdot 234}=\frac{\Sigma(X_1^2)-a\Sigma(X_1)-b_{12\cdot 34}\Sigma(X_1X_2)-b_{13\cdot 24}\Sigma(X_1X_3)-b_{14\cdot 23}\Sigma(X_1X_4)}{N}$$

先求其迴歸方程式爲

$$X_1=a+b_{12\cdot 34}X_2+b_{13\cdot 24}X_3+b_{14\cdot 23}X_4$$

按通常手續其標準方程式爲

$$\text{I.}\qquad \Sigma(X_1)=Na+b_{12\cdot 34}\Sigma(X_2)+b_{13\cdot 24}\Sigma(X_3)+b_{14\cdot 23}\Sigma(X_4)$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(X_1X_2)=a\Sigma(X_2)+b_{12\cdot 34}\Sigma(X_2^2)+b_{13\cdot 24}\Sigma(X_2X_3)$$

* 自 108 至 113 係以最小平方法解算.

$$+b_{14\cdot23}\Sigma(X_2X_4)$$

$$\text{III.}\quad \Sigma(X_1X_3)=a\Sigma(X_3)+b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_3)+b_{13\cdot24}\Sigma(X_3^2)$$
$$+b_{14\cdot23}\Sigma(X_3X_4)$$

$$\text{IV.}\quad \Sigma(X_1X_4)=a\Sigma(X_4)+b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_4)+b_{13\cdot24}\Sigma(X_3X_4)$$
$$+b_{14\cdot23}\Sigma(X_4^2)$$

由上例已知 $\Sigma(X_1)$, $\Sigma(X_2)$,........; $\Sigma(X_1^2)$, $\Sigma(X_2^2)$,........; $\Sigma(X_1X_2)$, $\Sigma(X_1X_3)$,........ 各值

代入式中

$$3{,}425=15a+196.18b_{12\cdot34}+75.93b_{13\cdot24}+120b_{14\cdot23}$$

$$42{,}728.86=196.18a+2{,}707.1760b_{12\cdot34}+978.0416b_{13\cdot24}+1{,}486.95b_{14\cdot23}$$

$$17{,}411.24=75.93a+978.0416b_{12\cdot34}+404.1079b_{13\cdot24}+645.93b_{14\cdot23}$$

$$28{,}904=120a+1{,}486.95b_{12\cdot34}+645.96b_{13\cdot24}+1{,}240b_{14\cdot23}$$

解此四式則四常數可直接求出如下:

各以 a 之係數除之

$$(1)\quad a+13.078667b_{12\cdot34}+5.062000b_{13\cdot24}+8.000000b_{14\cdot23}-228.333333=0$$

$$(2)\quad a+13.799449b_{12\cdot34}+4.985430b_{13\cdot24}+7.579519b_{14\cdot23}-217.804363=0$$

$$(3)\quad a+12.880832b_{12\cdot34}+5.322111b_{13\cdot24}+8.507309b_{14\cdot23}-229.306466=0$$

$$(4)\quad a+12.391250b_{12\cdot34}+5.383000b_{13\cdot24}+10.333333b_{14\cdot23}-240.866667=0$$

$$(2)-(1)\quad .720782b_{12\cdot34}-.076570b_{13\cdot24}-.420481b_{14\cdot23}+10.528970=0$$

$$(1)-(3)\quad .197835b_{12\cdot34}-.260111b_{13\cdot24}-.507309b_{14\cdot23}+.973133=0$$

$$(1)-(4)\quad .687417b_{12\cdot34}-.321000b_{13\cdot24}-2.333333b_{14\cdot23}+12.533333=0$$

各以 $b_{12\cdot34}$ 之係數除之

$$(5)\quad b_{12\cdot34} - .106232b_{13\cdot24} - .583368b_{14\cdot23} + 14.607704 = 0$$

$$(6)\quad b_{12\cdot34} - 1.314788b_{13\cdot24} - 2.564304b_{14\cdot23} + 4.918912 = 0$$

$$(7)\quad b_{12\cdot34} - .466965b_{13\cdot24} - 3.394349b_{14\cdot23} + 18.232504 = 0$$

$$(5)-(7)\qquad 360733b_{13\cdot24} + 2.810981b_{14\cdot23} - 3.624800 = 0$$

$$(7)-(6)\qquad .847823b_{13\cdot24} - .830045b_{14\cdot23} + 13.313592 = 0$$

各以 $b_{13\cdot24}$ 之係數除之

$$(8)\quad b_{13\cdot24} + 7.792414b_{14\cdot23} - 10.048429 = 0$$

$$(9)\quad b_{13\cdot24} - .979031b_{14\cdot23} + 15.703268 = 0$$

$$(8)-(9)\qquad 8.771445b_{14\cdot23} - 25.751697 = 0$$

以 8.771445 除之　　$b_{14\cdot23} - 2.935856 = 0$

$$\therefore\quad b_{14\cdot23} = 2.985856$$

由 9)　$b_{13\cdot24} = .979031b_{14\cdot23} - 15.703268 = -12.828974$

由(5)　$b_{12\cdot34} = .106232b_{13\cdot24} + .583368b_{14\cdot23} - 14.607704 = -14.257868$

由(1)　$a = -13.078667b_{12\cdot34} - 5.062b_{13\cdot24} - 8b_{14\cdot23} + 228.333333$

$= 456.260659$

即
$$a = 456.26$$
$$b_{12\cdot34} = -14.258$$
$$b_{13\cdot24} = -12.829$$
$$b_{14\cdot23} = 2.936$$

但標準方程式之數,可減少其一,以謀計算之方便.其法即利用由平均數離差 (deviations from arithemetic mean) (x), 代替絕對值 (X), 而取消原方程式中之 a.

若 A_1, A_2, A_3, A_4 代表各變數之算術平均數,而 x_1, x_2, x_3, x_4, 代表由平均數之差數,吾人可以絕對值 X_1, X_2, X_3, X_4 之相當值 x_1+A_1, x_2+A_2, x_3+A_3, x_4+A_4 代替之. 如此,則首一方程式,可以消去,而其餘三式化爲

$$\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N}=\frac{\Sigma(x_2^2)}{N}b_{12\cdot34}+\frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}b_{13\cdot24}+\frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}b_{14\cdot23}$$

$$\frac{\Sigma(x_1x_3)}{N}=\frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}b_{12\cdot34}+\frac{\Sigma(x_3^2)}{N}b_{13\cdot24}+\frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}b_{14\cdot23}$$

$$\frac{\Sigma(x_1x_4)}{N}=\frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}b_{12\cdot34}+\frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}b_{13\cdot24}+\frac{\Sigma(x_4^2)}{N}b_{14\cdot23}$$

上式諸平均積,以 p_{12}, p_{13} 等表之.并插入標準差之符號,則得標準方程式爲

$$p_{12}=\sigma_2^2b_{12\cdot34}+p_{23}b_{13\cdot24}+p_{24}b_{14\cdot23}$$

$$p_{13}=p_{23}b_{12\cdot34}+\sigma_3^2b_{13\cdot24}+p_{34}b_{14\cdot23}$$

$$p_{14}=p_{24}b_{12\cdot34}+p_{34}b_{13\cdot24}+\sigma_4^2b_{14\cdot23}$$

此爲解標準方程式最便利之形式.

由例113,已知 $\sigma_1^2=2{,}497.0374$

$\sigma_2^2=9.4260$

$\sigma_3^2=1.3167$

$\sigma_4^2=18.6667$

$p_{12}=-137.7120$

$p_{13}=4.9261$

$p_{14}=100.2669$

$$p_{23} = -1.0016$$

$$p_{24} = -5.4996$$

$$p_{34} = 2.5680$$

代入上式，

$$-137.7120 = 9.4260b_{12\cdot34} - 1.0016b_{13\cdot24} - 5.4996b_{14\cdot23}$$

$$4.9261 = -1.0016b_{12\cdot34} + 1.3167b_{13\cdot24} + 2.5680b_{14\cdot23}$$

$$100.2669 = -5.4996b_{12\cdot34} + 2.5680b_{13\cdot24} + 18.6667b_{14\cdot23}$$

今用 Doolitle method 解此三式如下：

(表　98)

$$9.4260b_{12\cdot34} - 1.0016b_{13\cdot24} - 5.4996b_{14\cdot23} + 137.7120 = 0$$
$$+1.3167b_{13\cdot24} + 2.5680b_{14\cdot23} - 4.9261 = 0$$
$$+18.6667b_{14\cdot23} - 100.2669 = 0$$

	(1) 倒數 Reciprocals	(2) $b_{12\cdot34}$	(3) $b_{13\cdot24}$	(4) $b_{14\cdot23}$	(5)	(6) s
I		9.4260	−1.0016	−5.4996	137.7120	140.6368
II			1.3167	2.5680	−4.9261	−2.0430
III				18.6667	−100.2669	−84.5318
1		9.4260	−1.0016	−5.4996	137.7120	140.6368
2	−.10608954	−1.000000	.106259	.583450	−14.609803	−14.920094
3			1.3167	2.5680	−4.9261	−2.0430
4			−.106429	−.584384	14.633179	14.943966
5			1.210271	1.983616	9.707079	12.900966
6	−.82626123		−1.000000	−1.638985	−8.020583	−10.659568
7				18.6667	−100.2669	−84.5318
8				−3.208742	80.348073	82.054549
9				−3.251117	−15.909757	−21.144490
10				12.206841	−35.828584	−23.621741
11	−.08192128			−1.000000	2.935123	1.935123

$$b_{14\cdot 23}=2.935123$$

$$b_{13\cdot 24}=-1.638985b_{14\cdot 23}-8.020583$$
$$=-12.831206$$

$$b_{12\cdot 34}=.106259b_{13\cdot 24}+.583450b_{14\cdot 23}-14.609803$$
$$=-14.260736$$

至 a 之值,可由方程式

$$A_1=a+A_2b_{12\cdot 34}+A_3b_{13\cdot 24}+A_4b_{14\cdot 23}$$

求得,代入各值,

$$228.3333=a+13.0787(-14.260736)+5.0620(-12.831206)$$
$$+8.0000(2.935123)$$
$$a=456.316$$

故原值之迴歸方程式爲,

$$X_1=456.316-14.261X_2-12.831X_3+2.935X_4$$

再將上列各值代入公式116,

$$S^2_{1\cdot 234}=\frac{819,497-(456.316\times 3,425)-(-14.261\times 42,728.86)-(-12.831\times 17,411.24)-(2.935\times 28,904)}{15}$$

$$=\frac{4,541.3529}{15}=302.7569$$

$$\therefore\quad S_{1\cdot 234}=17.40$$

査 $\sigma_1=\sqrt{2,497.0374}=49,97$ 大於 $S_{1\cdot 234}$ 幾及三倍,故吾人可明瞭由純迴歸係數估計之 X_1 值,較諸單獨根據 X_1 之平均數者,更爲可靠.

109. 估計之標準誤 (當幾個自變數時,以各變數之平均數爲原點.)

$$S^2_{1.234\cdots n} = \sigma_1^2 - b_{12\cdot 34\cdots n}p_{12} - b_{13\cdot 24\cdots n}p_{13} - b_{14.23\cdots n}p_{14} - \cdots - b_{1n.23\cdots n-1}p_{1n} \cdots\cdots〔公式 116〕$$

〔例 117〕 例同前,已求得各值如下:

$\sigma_1^2 = 2,497.0374$

$p_{12} = -137.7120$ $\qquad b_{12\cdot 34} = -14.261$

$p_{13} = 4.9261$ $\qquad b_{13\cdot 24} = -12.831$

$p_{14} = 100.2669$ $\qquad b_{14\cdot 23} = 2.935$

代入公式

$$S^2_{1\cdot 234} = 2,497.0374 - (-14.261 \times -137.7120) - (-12.831 \times 4.9261) - (2.935 \times 100.2669)$$

$$= 2,497.0374 - 1,963.9108 + 63.2068 - 294.2834$$

$$= 302.0500$$

$\therefore \quad S_{1\cdot 234} = 17.38$

110. 複相關係數——普通公式(Coefficient of multiple correlation)

$$R^2_{1\cdot 234\cdots n} = 1 - \frac{S^2_{1\cdot 234\cdots\cdots n}}{\sigma_1^2} \cdots\cdots〔公式 117〕$$

〔例 118〕 例同前,由上例已知

$$S^2_{1\cdot 234} = 302.757$$

代入公式

$$R^2_{1\cdot234}=1-\frac{302.747}{2,497.04}$$

$$=.8788$$

$$\therefore\quad R_{1\cdot234}=.9374$$

111. 複相關係數(當數個自變數時).

$$R^2_{1\cdot234\cdots n}=\frac{a\Sigma(X_1)+b_{12\cdot34\cdots n}\Sigma(X_1X_2)+b_{13\cdot24\cdots n}\Sigma(X_1X_3)+b_{14\cdot23\cdots n}\Sigma(X_1X_4)+\cdots-Nc_1^2}{\Sigma(X_1^2)-Nc_1^2}$$

……………………………………………〔公式118〕

〔例119〕 例仍前,已知

$\Sigma(X_1^2)=819.497$ $\qquad c_1^2=52,136.0959$

$\Sigma(X_1)=3.425$ $\qquad a=456.316$

$\Sigma(X_1X_2)=42,728.86$ $\qquad b_{12\cdot34}=-14.261$

$\Sigma(X_1X_3)=17,411.24$ $\qquad b_{13\cdot24}=-12.831$

$\Sigma(X_1X_4)=28,904$ $\qquad b_{14\cdot23}=2.935$

代入公式

$$R^2_{1\cdot234}$$

$$=\frac{(456.316\times3,425)+(-14.261\times42,728.86)+(-12.831\times17,411.24)+(2.935\times28,904)-(15\times52,136.0959)}{819,497-15\times52,136.0959}$$

$$=\frac{1,562,882.3-609,356.2725-223,403.6204+84,833.24-782,041.4385}{810,497-782,041.4385}$$

$$=\frac{32,914.2086}{37,455.5615}=.8788$$

$$\therefore\quad R_{1\cdot234}=.9374$$

112. **複相關係數**(當幾個自變數時以各變數之平均數爲原點).

$$R^2_{1.234\cdots n} = \frac{b_{12.34\cdots n}p_{12} + b_{13.24\cdots n}p_{13} + b_{14.23\cdots n}p_{14} + \cdots + b_{1n.23\cdots n-1}p_{1n}}{\sigma_1^2}$$

……………………〔公式 119〕

〔例 120〕 例仍前,已知

$\sigma_1^2 = 2,497.0374$　　$b_{12.34} = -14.261$

$p_{12} = -137.7120$　　$b_{13.24} = -12.831$

$p_{13} = 4.9261$　　$b_{14.23} = 2.935$

代入公式

$$R^2_{1.234} = \frac{(-14.261\times-137.7120)+(-12.831\times4.9261)+(2.935\times100.2669)}{2,497.0374}$$

$$= \frac{2,194.9874}{2,497.0374}$$

$$= .8790$$

$\therefore \quad R_{1.234} = .9375$

113. **純相關係數——由純迴歸係數求得** (Coefficient of partial correlation).

$$r_{12\cdot3456\cdots n} = \sqrt{b_{12\cdot3456\cdots n}\cdot b_{21\cdot3456\cdots n}}$$ ……………〔公式 120〕

〔例 121〕 例同前,已知 $b_{14.23}$ 之值爲 2.935,今更求 $b_{41.23}$,則 $r_{14.23}$ 之值,可由上列公式算出.

$b_{41.23}$ 之求法與求 $b_{14.23}$ 同(法見例 117),即先求迴歸方程式

$$X_4 = a + b_{41.23}X_1 + b_{42.13}X_2 + b_{43.12}X_3$$

仍仿例117手續,得標準方程式

$$p_{14} = \sigma_1^2 b_{41.23} + p_{12} b_{43.13} + p_{13} b_{43.12}$$

$$p_{24} = p_{12} b_{41.23} + \sigma_2^2 b_{42.13} + p_{23} b_{43.12}$$

$$p_{34} = p_{13} b_{41.23} + p_{23} b_{42.12} + \sigma_3^2 b_{43.12}$$

將各已知值代入式中,得

$$100.2669 = 2{,}497.0374\, b_{41.23} - 137.7120\, b_{42.13} + 4.9261\, b_{43.12}$$

$$-5.4996 = -137.7120\, b_{41.23} + 9.4260\, b_{42.13} - 1.0016\, b_{43.12}$$

$$2.5680 = 4.9261\, b_{41.23} - 1.0016\, b_{42.13} + 1.3167\, b_{43.12}$$

解此四式

$$b_{41.23} = .087980$$

$$b_{42.13} = .951059$$

$$b_{43.12} = 2.344636$$

但 $\quad b_{14.23} = 2.935$

代入公式

$$r_{14.23} = \sqrt{2.935 \times .08798}$$

$$= +.5082$$

114. 零級係數之行列式 (Determinant of zero-order coefficient).

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & \cdots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & \cdots & r_{n2} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & \cdots & r_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 } 121_a\text{〕}$$

$$\triangle = r_{11}\triangle_{11} - r_{12}\triangle_{12} + r_{13}\triangle_{13} - \cdots + (-1)^{k-1} r_{1k}\triangle_{1k} \cdots \text{〔公式 } 121_b\text{〕}$$

$$\triangle = r_{11}A_{11} + r_{12}A_{12} + r_{13}A_{13} + \cdots\cdots + r_{1k}A_{1k} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 } 121_c\text{〕}$$

〔例 122〕 仍以某地山芋產量與前後兩期兩量之關係爲例,已得結果如下:

$r_{12} = -.8976$　　　$r_{23} = -.2843$

$r_{13} = .0859$　　　$r_{24} = -.4146$

$r_{14} = .4644$　　　$r_{34} = .5180$

代入公式(121_a)

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -.90 & .086 & .46 \\ -.90 & 1 & -.28 & -.41 \\ +.086 & -.28 & 1 & .52 \\ .46 & -.41 & .52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= .07165$$

115. 純相關係數(行列式解法).

$$\left.\begin{array}{l} r_{12.34\cdots n} = \dfrac{-A_{12}}{\sqrt{\triangle_{11}\triangle_{22}}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{1k.234\cdots n} = \dfrac{-A_{1k}}{\sqrt{\triangle_{11}\triangle_{kk}}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔公式 } 122\text{〕}$$

〔例 123〕 由上例行列式△,得

$$\triangle_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -.28 & -.41 \\ -.28 & 1 & .52 \\ -.41 & .52 & 1 \end{vmatrix}=.6025$$

$$\triangle_{12}=\begin{vmatrix} -.90 & .086 & .46 \\ -.28 & 1 & .52 \\ -.41 & .52 & 1 \end{vmatrix}=-.5293$$

同樣求得 $\triangle_{22}=.5518$, $\triangle_{3}=.1498$, $\triangle_{44}=.1476$, $\triangle_{13}=.1750$ 及 $\triangle_{14}=.1511$.

故 $A_{12}=.5293$, $A_{13}=.1750$, $A_{14}=-.1511$

代入公式

$$r_{12.34}=\frac{-.5293}{\sqrt{.6025\times.5518}}=-.9180$$

$$r_{13.24}=\frac{-.1750}{\sqrt{.6025\times.1498}}=-.5824$$

$$r_{14.23}=\frac{.1511}{\sqrt{.6025\times.1476}}=.5067$$

116. 複相關係數.

$$R_{1.234}=\sqrt{1-\frac{\triangle}{\triangle_{11}}}\quad\text{〔公式 123〕}$$

〔例 124〕 例同前, 已知 $\triangle=.07165$

$$\triangle_{11}=.6025$$

代入公式 $R_{1.234}=\sqrt{1-\dfrac{.07165}{.6025}}$

$$= \sqrt{1-.1189}$$

$$= .9387$$

117. 估計之標準差.

$$\sigma_{1.234} = \sigma_1\sqrt{1-R^2_{1.234}} = \sigma_1\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{11}}} \quad \text{〔公式 124〕}$$

〔例 125〕 例仍前,已知 $\sigma_1 = 49.97$

代入公式 $\sigma_{1.234} = 49.97\sqrt{\frac{.07165}{.6025}}$

$$= 49.97 \times .3445$$

$$= 16.905$$

118. 純迴歸係數 (Coefficient of partial correlation).

$$\left.\begin{aligned} b_{12\cdot 23\cdots n} &= \frac{-A_{12}}{\Delta_{11}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_{1k.23\cdots n} &= \frac{-A_{1k}}{\Delta_{11}} \frac{\sigma_1}{\sigma_k} \end{aligned}\right\} \quad \text{〔公式 125〕}$$

〔例 126〕 例同前已知 $\sigma_1 = 49.97$, $\sigma_2 = 3.070$, $\sigma_3 = 1.1475$, $\sigma_4 = 4.3205$,

$$b_{12.34} = \frac{-.5293}{.6025} \frac{49.97}{3.070} = -14.30$$

$$b_{13.24} = \frac{-1.750}{.6025} \frac{49.97}{1.1475} = -12.65$$

$$b_{14.23}=\frac{.1511}{.6025}\ \frac{49.97}{4.3205}=2.902$$

故迴歸係數爲

$$x_1=-14.3\,x_2-12.7\,x_3+2.9\,x_4$$

V. 可靠數量 (Measure of Reliability)

119. 算術平均數之可靠數量.

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 } 126_a\text{〕}$$

$$P.E_M = .6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots \text{〔公式 } 126_b\text{〕}$$

〔例 127〕 假設欲求某廠(見例10)全部工人每月平均工資額,今抽出代表20人,求得平均工資為27.45元.然此值是否可靠;又另取他組結果與此值相差之程度為何如,此為吾人最當注意者.設已求出標準差為$1.43,(見例25)則

$$P.E_M = .6745\frac{1.43}{\sqrt{20}}$$

$$= .216$$

故本問題之結果,每月平均工資當為$27.45±.216.意即苟另取同樣大小之一組工人,以機遇言,其結果與$27.45相差,大致不逾$.216.

〔附註〕 吾人欲求 σ 化算 $P. E.$ 之值，可由常態曲線之面積表，(參閱附錄表 II) 查閱四分位差 (.25000) 之地位，於 .67 與 .68 之間推算 (Interpolate) 之．得其近似之值為

$$\left\{.67+.01\times\frac{1.43}{3.18}\right\}\sigma=.6745\,\sigma$$

更準確之推算，可得 $0.6744897 5\sigma$．但此值僅限於常態曲線，且僅可由推算法得之．

120. 中位數之可靠數量(在常態分配時)．

$$\sigma_{Md}=1.25331\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad\text{〔公式 } 127_a\text{〕}$$

$$P.\ E_{Md}=.84535\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad\text{〔公式 } 127_b\text{〕}$$

〔例 128〕 如前例 20 工人每月工資之中位數為 27.43 元 (見例 13) 標準差為 1.43 元，則

$$P.\ E_{Md}=.84535\frac{1.43}{\sqrt{20}}$$

$$=.270$$

故全體工人每月工資之中位數為 \$27.43±.270

121. 四分位數之可靠數量(常態分配)

$$\sigma_Q=1.36263\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad\text{〔公式 } 128_a\text{〕}$$

$$P.\ E_Q=.91908\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad\text{〔公式 } 128_b\text{〕}$$

〔例 129〕 如前述20工人工資之事實,其四分位數為$Q_1=26.50$

$Q_3=28.33$ 則

$$P.E_Q=.9190.8\times\frac{1.43}{\sqrt{20}}$$

$$=.294$$

同樣 $P.E_{Q_3}=.294$

故全體工人每月工資之四分位數.

$$Q_1=26.50\pm.294$$

$$Q_3=28.33\pm.294$$

122. 常態分配之標準差的標準誤.

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \quad \text{〔公式 129〕}$$

〔例 130〕 前例20工人每月工資之標準差為$1.43, 則

$$\sigma_\sigma=\frac{1.43}{\sqrt{20}}$$

$$=.226$$

123. 任何分配之標準差的標準誤.

$$\sigma_\sigma=\sqrt{\frac{\mu_4-\mu_2^2}{4\mu_2N}} \quad \text{〔公式 130〕}$$

〔例 131〕 設大不列巓羣島成年男子8585人身長之分配已詳見例42,其$\sigma=\sqrt{\mu_2}=2.556$, $\mu_2=6.533471$, $\mu_4=134.4100$

故

$$\sigma_\sigma=\sqrt{\frac{134.4100-(6.533471)^2}{4\times 6.5333471\times 8585}}$$

$$=\sqrt{\frac{91.7238}{224359.4}}$$

$$=\sqrt{.000409}$$

$$=020$$

而 $$P.E_\sigma=.6745\times .020$$

$$=.0135$$

$$\therefore\quad \sigma=2.556\pm 0135$$

124. 變量係數之機誤(常態分配)

$$P.E_V=.4769\frac{V}{\sqrt{N}}\left[1+2\left(\frac{V}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdots\cdots\text{〔公式 131〕}$$

〔例 132〕 例如前述 20 工人每月工資之變量係數爲 $V=5.21$, 則

$$P.E_V=.4769\frac{5.21}{\sqrt{20}}\sqrt{1+2\left(\frac{5.21}{100}\right)^2}=4769\times 1.165\times 1.003$$

$$=.557$$

125. 四分位差之機誤(常態分配)

$$P\,E_{Q.D.}=5306\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\text{〔公式 132〕}$$

〔例 133〕 如前例20工人每月工資之四分位差爲$.92,標準差爲$1.43, 則

$$P.E_{Q.D.}=.5306\frac{1.43}{\sqrt{20}}$$

$$=.170$$

126. 從平均數各轉矩之機誤(常態分配)

$$P.E_{\mu_2}=.6745\sigma^2\sqrt{\frac{2}{N}} \cdots\cdots\text{〔公式 }133_a\text{〕}$$

$$P.E_{\mu_3}=6745\sigma^3\sqrt{\frac{6}{N}} \cdots\cdots\text{〔公式 }133_b\text{〕}$$

$$P.E_{\mu_4}=6745\sigma^4\sqrt{\frac{96}{N}} \cdots\cdots\text{〔公式 }133_c\text{〕}$$

〔例 134〕 由例 42 大不列巔島成年男子高度之次數分配，已知

$$\sigma^2=\mu_2=6.533471$$

$$\mu_3=-207833$$

$$\mu_4=134.409959$$

則

$$P.E_{\mu_2}=6745\times6.533\times\sqrt{\frac{2}{8585}}$$

$$=.067$$

$$P.E_{\mu_3}=.6745\times16.6996\times\sqrt{\frac{6}{8585}}$$

$$=.297$$

$$P.E_{\mu_4} = .6745 \times 42.6862 \times \sqrt{\frac{96}{8585}}$$

$$= 3.043$$

故

$$\mu_2 = 6.533 \pm .067$$

$$\mu_3 = -.208 \pm .297$$

$$\mu_4 = 134.410 \pm 3.043$$

127. 判準 β_1, β_2 之標準誤 (Standard error of criteria β_1, β_2)

$$\sigma_{\sqrt{\beta_1}} = \sqrt{\frac{6}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 134_a〕$$

$$\sigma_{\beta_2} = \sqrt{\frac{24}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式 134_b〕$$

〔例 135〕 譬如取大不列顛島成年男子高度分配之實例，設已知 $\sqrt{\beta_1} = \sqrt{.000155} = .012450$, $\beta_2 = 3.148789$, 而常態曲線之判準爲 $\sqrt{\beta_1} = \alpha_3 = 0$, $\beta_2 = \alpha_4 = 3$ (見 Rietz's ch. VII).

其差爲 .012450 及 .148789 其標準誤爲

$$\sigma_{\sqrt{\beta_1}} = \sqrt{\frac{6}{8585}} = .026437$$

$$\sigma_{\beta_2} = \sqrt{\frac{24}{N}} = .052873$$

今 $.012450 = .47\,\sigma_{\sqrt{\beta_1}}$, $.148789 = 2.82\,\sigma_{\beta_2}$ 即其差皆不足 3σ;

故此種次數分配，可以常態曲線表之.

〔附註〕 至求$\sqrt{\beta_1}$及β_2之$P. E.$可以.6745乘$\sigma_{\sqrt{\beta_1}}$及σ_{β_2}卽得,欲求一精確之值可參閱 Pearson's Tables 37,38 及 $pp.$66, 67之說明.欲査κ_2之$P. E.$則參閱表39及$pp.$ 67,68之說明.

128. 偏斜度之標準誤

$$\sigma_\chi=\sqrt{\frac{3}{2N}} \quad \text{〔公式135〕}$$

〔例136〕 仍取前例(不列顚島男子身高問題),則

$$\sigma_\chi=\sqrt{\frac{3}{2\times 8585}}=.013218$$

而 $\chi=-.005803$僅爲σ_χ之.44倍故χ之値,僅爲取樣之變動

129. 平均數與衆數距離之標準誤

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{3}{2N}}\sigma \quad \text{〔公式136〕}$$

〔例137〕 例同前,已知$\sigma=\sqrt{\mu_2}=2.55066$則

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{3}{2\times 8585}}\times 2.55066$$

$$=.033717$$

而$D=-.014833$僅爲σ_D之.44倍,故吾人可斷言此種平均數與衆數之差,僅爲取樣之變動,若D超過其標準誤之三倍,則非僅因機誤之故.

130. 相關係數之可靠數量

$$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \quad \text{〔公式 } 137_a\text{〕}$$

$$P.E_r=.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \quad \text{〔公式 } 137_b\text{〕}$$

〔例 138〕 由例 83, $N=5,317$, $r=.915$, 則

$$\sigma_r=\frac{1-(.915)^2}{\sqrt{5,317}}=\frac{.163}{72.9}=.00224$$

$$P.E_r=.6745\times.00224=.0015$$

$$\therefore \quad r=.915\pm.002$$

〔例 139〕* 玆更取例 80, 中國進出口淨值相關問題, 已知

$$N=15$$

$$r=.926$$

代入公式 (137_a)

$$\sigma_r=\frac{1-(.926)^2}{\sqrt{15}}=\frac{1-.857}{\sqrt{15}}=\frac{.143}{3.87}=.037$$

*當 N 之值小而 r 之值大時 (如 $N=20$, $r=.5$, $N=50$, $r=.8$ 或 $N=100$, $r=.9$ 之類) 公式 (137) 不適於應用, Kelley 氏謂以

$$\left[1+\frac{(1+5.5r^2}{2N}\right]$$

乘上式, 所得之標準誤, 可得較優之結果云. (詳情參閱 KELLEY'S Statistical Method p.177) 似此則本例 σ_r 值原爲 .037, 若以 $\left[1+\frac{(1+5.5r)^2}{2N}\right]$ 或 1.19 乘之則得 .044.

131. 迴歸係數之標準誤

$$\sigma_{b_{12}}=\frac{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}{\sigma_2\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式138〕$$

〔例 140〕 由例87, 已得 $b_{12}=.94$, $b_{21}=.88$, 今

$$N=5,317$$

$$\sigma_1=13.1$$

$$\sigma_2=12.7$$

$$r=.91$$

代入公式,

$$\sigma_{b_{12}}=\frac{13.10\sqrt{1-(.91)^2}}{12.70\sqrt{5,317}}=.0059$$

$$\sigma_{b_{21}}=\frac{12.70\sqrt{1-(.91)^2}}{13.10\sqrt{5,317}}=.0055$$

132. 相關比率之可靠數量

$$\sigma_\eta=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式139_a〕$$

$$P.E_\eta=.6745\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots〔公式139_b〕$$

〔例 141〕 同例 105, 麥產額與生產費之資料, 由例111 已知

$\eta_{yx}=.752$, $N=216$

代入公式(139_a)

$$\sigma_\eta=\frac{1-(.752)^2}{\sqrt{216}}$$

$$=\frac{.434}{14.7}$$

$$=.0295$$

又 $$P.E_\eta=.6745\times(.0295)=.0199$$

$$\therefore\quad \eta=.752\pm.020$$

133. 直線性之測驗

$$\sigma\ =2\sqrt{\frac{\zeta}{N}}\sqrt{(1-\eta^2)^2-(1-r^2)^2+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式 140〕}$$

〔例 142〕 由前例已知 $\eta=.752$, $r=-.642$, $\zeta=.153$, $N=216$

代入公式

$$\sigma_\zeta=2\sqrt{\frac{.153}{216}}\sqrt{[1-(.752)^2]^2-[1-(-.642)^2]^2+1}$$

$$=2\sqrt{.000708}\times\sqrt{.188-.346+1}$$

$$=2\times.0266\times.918$$

$$=.0488$$

故 $$\zeta=3.14\sigma_\zeta$$

由此知本例顯然爲非直線相關.

甲 練習問題

次數分配

1. 試就下表資料,求其算術平均數.

民國二十二年中國出口綠茶之價格及數量

月份	價格 (每擔)	出口量 (擔)
	元	
一月	68.51	17,860
二月	69.11	8,949
三月	81.37	15,137
四月	45.73	9,617
五月	65.33	8,965
六月	80.45	32,296
七月	71.42	38,018
八月	69.90	43,048
九月	68.86	39,475
十月	67.78	29,007
十一月	73.53	28,022
十二月	64.44	18,102
總計	826.43	288,496

資料根據二十二年海關進出口貿易統計月報

(*a*) 計算民國二十二年各月份出口綠茶未加權之平均價.

(*b*) 計算其加權之平均價(以各月出口量爲權).

(*c*) 比較未加權與加權二法之差.

2. 依據下表分組之資料,求其算術平均數.

某百貨公司職員年俸之分組

年俸	人數
$ 600—800	22
800—1000	88
1000—1200	121
1200—1400	390
1400—1600	215
1600—1800	99
1800—2000	86
2000—2200	18
2200—2400	1
總計	1040

(*a*) 以通常法,計算某公司職員之平均年俸.

(*b*) 以簡捷法,計算其平均年俸

(*c*) 比較通常法與簡捷法之結果.

3. 設有下表組距不同之資料,求其算術平均數.

某礦山工人每月工資之分組

工資組距	人數
(元)	
5 以下	115
5 及 10 以下	104
10 及 15 以下	116
15 及 20 以下	113
20 及 25 以下	159
25 及 30 以下	219
30 及 35 以下	174
35 及 40 以下	298
40 及 45 以下	358
45 及 50 以下	322
50 及 55 以下	250
55 及 60 以下	163
60 及 65 以下	116
65 及 70 以下	88
70 及 75 以下	85
75 及 80 以下	42
80 及 90 以下	87
90 及 100 以下	38
100 及 110 以下	7
110 及 120 以下	5
120 及 140 以下	0
140 及 160 以下	1
169 及 180 以下	1
總計	2,861

(*a*) 用通常法,計算某礦山工人每月平均工資.

(*b*) 用簡捷法,計算其平均工資.

4. 試就下表未分組與分組之資料,求其算術平均數.

二百一十人之工資

$ 26.25	$ 28.70	$ 24.15	$ 29.75	$ 29.20	$ 30.60	$ 23.40	$ 24.75
26.70	24.35	25.75	27.20	28.30	25.25	27.75	27.60
28.20	27.30	27.80	26.35	27.40	28.30	26.60	25.75
27.70	28.60	25.30	27.80	26.40	27.30	28.35	27.00
24.30	27.80	27.60	26.30	27.40	23.50	29.60	27.80
27.60	25.35	27.55	29.00	24.10	37.00	24.50	27.25
26.15	29.30	23.10	27.10	28.50	27.45	26.15	28.35
27.95	25.55	27.55	26.60	24.25	30.00	28.55	28.00
27.30	27.90	25.25	24.10	27.45	24.55	26.55	27.55
26.75	31.00	24.00	25.35	26.50	28.30	27.95	25.55
30.25	28.55	26.75	24.60	25.75	26.55	27.80	28.90
29.55	30.00	24.60	25.75	26.30	27.00	28.25	25.25
25.75	26.25	26.30	26.75	27.90	28.30	25.70	26.30
26.60	27.00	30.75	28.60	28.10	23.50	24.75	25.15
26.30	27.25	28.15	29.10	30.10	29.90	28.55	27.30
26.55	27.55	23.00	24.50	22.55	26.55	27.55	28.10
30.70	28.60	27.90	26.80	24.10	25.25	26.30	27.90
26.90	25.30	25.80	28.85	27.55	27.30	25.00	26.00
26.55	27.80	28.60	30.55	29.50	24.10	25.15	27.15
28.10	26.30	27.10	24.60	27.80	26.30	27.90	29.80
24.10	25.15	27.50	24.25	25.70	26.80	30.15	29.30
28.15	28.65	24.55	25.85	26.10	27.00	26.80	27.55
29.00	23.00	28.60	29.30	28.55	28.80	27.55	23.60
26.10	27.15	25.75	26.80	27.15	26.30	28.55	25.80
24.55	25.80	26.75	27.30	27.55	28.25	25.60	26.30
26.85	27.30	28.10	32.00	28.15	26.30	27.75	26.25
28.60	26.00						

二百十一人工資之分組

工資	工人數
\$ 22—\$ 23	1
23— 24	7
24— 25	21
25— 26	27
26— 27	42
27— 28	54
28— 29	34
29— 30	13
30— 31	9
31— 32	1
32— 33	1
總計	210

(*a*) 以未分組資料,計算其平均工資.

(*b*) 以分組資料,計算其平均工資.

(*c*) 比較(*a*)與(*b*)二結果之差.

5. 試就習題2資料,求其算術平均數,中位數及衆數.

(*a*) 計算某公司職員之平均年薪.

(*b*) 計算其中位數.

(c) 試以皮爾生經驗公式或他法,求其衆數.

(*d*) 圖示工資之分配,並指出平均數,中位數及衆數之位置.

6. 幾何平均數——應用於定期調查戶籍後各年人口之估計.

(a) 應用幾何平均原則,求1910—20紐約省每年人口增加之平均比率(1910年4月15日之人口為9,113,614,1920年1月1日為10,385,227).

(b) 假定1920—25之增加比率相同,試估計1925年6月1日紐約省之人口數.

(c) 試取此估計值,與1925年6月1日該省戶口調查所載之數11,161,151相比較.

7. 倒數平均數——某水果商每日平均售出每元十二枚之蘋果120枚;又每元二十枚之蘋果120枚.一日,該商人為節省手續起見,以每元十六枚之平均價售出同上之蘋果,忽覺該日收入,較諸往日損失一元.

(a) 試解釋此種損失之原因.

(b) 須以若何平均價售出,方與往日收入相同.

8. 試就下表資料,求其百分位數與百分等級.

民國二十二年中央大學錄取新生國文成績

分數	人數
15及25以下	12
25及35以下	19
35及45以下	46
45及55以下	42
55及65以下	57
65及75以下	35
75及85以下	13
85及95	6

(*a*) 計算二十二年中央大學錄取新生國文成績 P_{10} (第10百分位數), P_{20}, P_{40}, P_{60}, 及 P_{80}.

(*b*) 計算其 P_{25} (即下四分位數), P_{50} (即中位數), 及 P_{75} (即上四分位數).

(*c*) 試以各法計算成績60分所列之百分等級.

9. 試就習題2資料,求其四分位差.

(*a*) 計算某公司職員年薪之四分位差.

(*b*) 在中位數 $\pm Q$ 之內者,佔全體分配次數百分之幾?

(*c*) 當分配完全對稱時,在中位數 $\pm Q$ 之內者,應佔全體次數百分之幾?

10. 試就習題2資料,求其平均差.

(*a*) 計算某公司職員年薪之平均差.

(*b*) 在中位數 $\pm A.D.$ 內者,佔全體分配百分之幾?

(*c*) 當分配完全對稱時,在中位數 $\pm A.D.$ 內者,應佔全體分配百分之幾?

11. 試就習題2資料,求其標準差.

(*a*) 計算某公司職員年薪之標準差.

(*b*) 在平均數 $\pm\sigma$ 之內者,佔全體次數百分之幾?

(*c*) 當分配完全對稱時,在平均數 $\pm\sigma$ 之內者,應佔全體次數百分之幾?

(*d*) 比較 Q 值, $A.D.$ 值, 及 σ 值之大小.

(e) 當分配完全對稱時,Q, $A.D.$ 及 σ 之關係若何?

12. 試就習題3組距不同之資料,求其標準差.

(a) 計算某礦山工人每月工資之標準差.

(b) 當計算時,何種誤點易於發生?

(c) 在 $\pm\sigma$ 之內者,佔全體次數百分之幾?

13. 試就習題2及習題3資料,求其比較差異.

(a) 在同軸上,圖示某公司職員年薪及某礦山工人每月工資之分配情形.

(b) 求某公司職員年薪之平均數及標準差.

(c) 求某礦山工人每月工資之平均數及標準差.

(d) 試就(b),(c)之結果,計算其差量係數并比較之.

14. 試就下列二表資料,求其比較差異.

某地小孩之身長(年齡12-13月)

身長之寸數(中值)	人數
23	1
24	1
25	5
26	26
27	86
28	281
29	473
30	420
31	186
32	68
33	16
34	7
35	3
36	1
37	1
總計	1,575

某地小孩之體重(年齡12—13月)

體重之磅數(中值)	人數	體重之磅數(中值)	人數
11	1	22	122
11 ½		22 ½	94
12		23	94
12 ½		23 ½	49
13	2	24	83
13 ½		24 ½	42
14	1	25	46
14 ½	1	25 ½	31
15	2	26	21
15 ½	5	26 ½	17
16	13	27	11
16 ½	18	27 ½	6
17	32	28	8
17 ½	45	28 ½	5
18	75	29	1
18 ½	67	29 ½	1
19	114	30	1
19 ½	88	30 ½	
20	148	31	
20 ½	105	31 ½	
21	138	32	1
21 ½	87	總計	1,575

(*a*) 圖示某地小孩身長與體重之分配情形.

(*b*) 計算身長之平均數及標準差.

(*c*) 計算體重之標準差.

(*d*) 試就(*b*),(*c*)之結果,求其差量係數並比較之.

15. 試就習題2資料,求其偏斜度.

(a) 圖示某公司職員年薪之分配.

(b) 求皮爾生氏偏斜係數之值.

16. 依據下表資料,求各次轉矩及曲型判準.

1923－1932年紐約銅之每月平均價

組距	次數(卽月數)
4.0－5.5	6
5.5－7.0	9
7.0－8.5	4
8.5－10.0	6
10.0－11.5	5
11.5－13.0	21
13.0－14.5	39
14.5－16.0	12
16.0－17.5	3
17.5－19.0	13
19.0－20.5	1
20.5－22.0	1
	120

資料採自實業部實業統計第二卷第一號

(a) 試用假定原點,計算上表之四個轉矩(v_1, v_2, v_3, v_4).

(b) 試以平均數爲原點,計算其四個轉矩$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$.

(c) 試求薛伯氏校正之轉矩$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$.

(d) 試計算曲線型之判準$\sqrt{\beta_1}$及β_2-3.

17 依據下表資料,求其機率之平均數及標準差.

擲銅元之次數分配

(20枚擲800次)

字面向上之枚數	次數
3	1
4	2
5	8
6	23
7	66
8	91
9	130
10	158
11	125
12	87
13	66
14	31
15	10
16	2
	800

(a) 令 $N=800,\ n=20,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$ 代入公式 $N(p+q)^n$,計算其理論的分配次數.

(b) 試由公式 $M=np$ 計算字面向上之理論的平均值,更就上列實際分配計算,幷比較之.

(c) 試由公式 $\sigma=\sqrt{npq}$ 計算標準差,幷與實際分配所得者比較之.

18. 依據習題14之資料,作常態曲線之配合.

(a) 試作某地小孩身長之次數分配圖.

(b) 計算其平均數及標準差(應用Sheppard's改正).

(c) 應用常態曲線縱線表(Ordinates)作常態曲線之配合,并將求得之縱線y_e圖示之.

(d) 應用常態曲線面積表,計算理論的分配次數.

(e) 指出實際次數與理論次數相差過大之各組,求其取樣之標準誤,并解釋之.

(f) 求常態曲線之配合測驗X^2(Testing Goodness of Fit),并解釋之.

物價指數

19. 試就下表資料,求算物價指數.

1913—1927年某地檸檬及橘子之躉售物價

(附1919年之銷售概數)

年份	檸檬價格(每箱)	橘子價格(每箱)
1913	$ 5.773	$ 4.420
14	4.151	2.772
15	3.033	3.502
16	4.305	3.484
17	4.952	3.315
18	6.771	7.225
19	5.464	4.805
20	4.320	6.272
21	5.226	5.219
22	6.760	7.849
23	6.510	5.168
24	5.323	5.798
25	7.435	7.662
26	5.571	5.957
27	7.826	7.094
1919年之銷售額	4,536.000 箱	22,075.000 箱

(a) 以1913年爲基年應用下列各法計算之.

(1) 簡單總價法.

(2) 比價之簡單算術平均法.

(3) 加權總價法(以1919年之銷售額爲權數).

(4) 比價之加權算術平均法(權數同前).

(5) 比價之簡單幾何平均法.

(b) 上列各法所得之指數,其結果不同,試比較幷解釋之.究以何者爲最佳?

(c) 試作一不加權或加權之連鎖指數.此種指數有何利弊?

20 試就下列表資料,求算物價指數.

1913—1927年某地皮貨躉售價格

年份	甲種皮 (每方呎)	乙種皮 (每方呎)	丙種皮 (每磅)	丁種皮 (每方呎)	戊種皮 (每磅)	己種皮 (每磅)
1913	$ .270	$ .250	$ .401	$ .256	$ .449	$ .401
14	.280	.260	.410	.268	.471	.422
15	.285	.270	.443	.279	.504	.448
16	.450	.497	.488	.325	.640	.629
17	.579	.688	.675	.439	.831	.790
18	.598	.663	.680	.412	.796	.709
19	.970	1.015	.746	.640	.913	.841
20	.985	1.073	.706	.617	.856	.836
21	.521	.694	.430	.312	.548	.503
22	.443	.704	.437	.258	.519	.491
23	.443	.688	.457	.260	.503	.492
24	.455	.673	.414	.264	.449	.406
25	.472	.683	.440	.274	.482	.470
26	.453	.675	.437	.253	.4[illegible]8	.429
27	.489	.677	.468	.320	.493	.438
1919年之銷售額 (000)	平方呎 191,068	平方呎 161,860	磅 44,145	平方呎 220,565	磅 156,220	磅 113,287

(a) 以1913年爲基年,應用下列各法計算之:

(1) 簡單總價法

(2) 比價之算術平均法

(3) 加權總價法(以1919年之銷售額為權數).

(4) 比價之加權算術平均法

(5) 比價之簡單幾何平均法

(b) 上列各法所得之指數,其結果不同,試比較幷解釋之.究以何者為佳?

(c) 試作一不加權或加權之連鎖指數,此種指數有何利弊?

21. 就下表資料,求算各種指數.

1913—1926年某地穀類價格及產額

(產額以百萬擔為單位)

年次	玉米		棉		小麥		番薯		燕麥	
	數量 q^i	價目 p^i	數量 q^{ii}	價目 p^{ii}	數量 q^{iii}	價目 p^{iii}	數量 q^{iv}	價目 p^{iv}	數量 q^v	價目 p^v
1913	2,447	$ .625	7,078	$ .127	763	$ .913	332	$ .614	1.122	$ .376
14	2,673	.695	8,068	.113	891	1.041	410	.693	1.141	.419
15	2,995	.730	5,596	.096	1,026	1.344	360	.455	1.549	.496
16	2,567	.825	5,725	.141	636	1.417	287	1.111	1.252	.455
17	3,065	1.637	5,651	.226	637	2.321	442	1.922	1.593	.637
18	2,503	1.605	6,021	.311	921	2.235	412	.972	1.538	.775
19	2,811	1.597	5,711	.319	968	2.563	323	1.427	1.184	.700
20	3,209	1.414	6,720	.330	833	2 601	403	2.606	1.496	.796
21	3,069	.580	3,977	.141	815	1.466	362	1.074	1.078	.387
22	2,906	.623	4,878	.204	868	1.282	453	1.016	1.216	.396
23	3,651	.821	5,070	.287	797	1.155	416	.874	1.306	.439
24	2,309	.972	6,814	.279	864	1.322	422	.823	1.503	.514
25	2,917	1.033	8,052	.230	676	1.666	323	1.263	1.488	.467
26	2,692	.759	8,989	.168	831	1.552	354	1.808	1.247	.430

1913—1926 年某地穀類價格及產額——續

煙葉		大麥		米		棉子		元麥		亞麻子	
數量 q^{vi}	價目 p^{vi}	數量 q^{vii}	價目 p^{vii}	數量 q^{viii}	價目 p^{viii}	數量 q^{ix}	價目 p^{ix}	數量 q^{x}	價目 p^{x}	數量 q^{xi}	價目 p^{xi}
954	$ .089	178	$ .625	26	$2.295	6	$21.790	41	$ .636	18	$1.349
1,035	.075	195	.615	24	2.295	7	20.405	43	.768	14	1.525
1,062	.069	229	.704	29	2.160	5	24.568	54	1.092	14	1.794
1,153	.103	182	.867	41	2.025	5	41.147	49	1.113	14	2.228
1,249	.168	212	1.315	35	2.925	5	58.305	63	1.871	9	3.093
1,439	.230	256	1.305	39	4.005	5	66.185	91	1.940	13	3.940
1,465	.221	148	1.217	42	4.770	5	65.563	75	1.534	7	4.533
1,582	.146	189	1.263	52	4.815	6	51.728	60	1.873	11	3.792
1,070	.118	155	.635	38	1.980	4	22.183	62	1.213	8	1.849
1,247	.145	182	.633	41	2.655	4	35.039	103	.883	10	2.477
1,515	.151	198	.660	34	2.475	5	43.690	63	.752	17	2.737
1,251	.147	182	.817	32	2.655	6	38.345	65	.916	32	2.501
1,377	.139	217	.844	33	3.150	7	35.969	46	1.128	22	2.721
1,298	.085	185	.694	42	3.285	8	27.197	41	.954	19	2.328

(*a*) 以1913年爲基年,求各種不加權之指數,並比較其結果.

(1) 簡單總價法,

(2) 比價簡單算術平均法,

(3) 比價簡單幾何平均法,

(4) 比價簡單倒數平均法.

(*b*) 以1913年爲基年,求各種加權之指數,並比較其結果.

(1) 基年加權總價法,

(2) 比價加權算術平均法(基年加權),

(3) 計算年加權總價法,

(4) 比價加權倒數平均法(計算年加權),

(5) 愛馬二氏總價法,

(6) 應用費宣氏理想公式之指數,

(7) 其他各種加權之指數.

(c) 以理想公式計算各年環比,更取1913年為基年計算各年之連鎖指數.

(d) 以1913年為基年,求各種物量指數及物值指數並討論其與物價指數之關係.

時間數列

22. 依據下表資料,求其長期趨勢.

1868—1932年中國輸入米量*

年　　份	入口米量 (100,000擔)	年　　份	入口米量 (100,000擔)
同治七年 (1868)	3.49	二十七年 (1901)	44.12
八年 (1869)	3.47	二十八年 (1902)	97.31
九年 (1870)	1.41	二十九年 (1903)	28.02
十年 (1871)	2.48	三十年 (1904)	33.57
十一年 (1872)	6.59	三十一年 (1905)	22.28
十二年 (1873)	11.56	三十二年 (1906)	46.86
十三年 (1874)	.06	三十三年 (1907)	127.65
光緒元年 (1875)	.85	三十四年 (1908)	67.37
二年 (1876)	5.76	宣統元年 (1909)	37.98
三年 (1877)	10.51	二年 (1910)	94.10
四年 (1878)	2.98	三年 (1911)	53.03
五年 (1879)	2.49	民國元年 (1912)	27.00
六年 (1880)	.30	二年 (1913)	54.15
七年 (1881)	1.98	三年 (1914)	67.74
八年 (1882)	2.33	四年 (1915)	84.76
九年 (1883)	2.53	五年 (1916)	112.84
十年 (1884)	1.52	六年 (1917)	98.37
十一年 (1885)	3.17	七年 (1918)	69.84
十二年 (1886)	5.18	八年 (1919)	18.10
十三年 (1887)	19.44	九年 (1920)	11.52
十四年 (1888)	71.32	十年 (1921)	106.29
十五年 (1889)	42.71	十一年 (1922)	191.56
十六年 (1890)	75.74	十二年 (1923)	224.35
十七年 (1891)	46.85	十三年 (1924)	131.98
十八年 (1892)	39.48	十四年 (1925)	126.35
十九年 (1893)	94.75	十五年 (1926)	187.01
二十年 (1894)	64.41	十六年 (1927)	210.92
二十一年 (1895)	100.96	十七年 (1928)	126.56
二十二年 (1896)	64.14	十八年 (1929)	108.23
二十三年 (1897)	21.04	十九年 (1930)	198.91
二十四年 (1898)	46.45	二十年 (1931)	107.41
二十五年 (1899)	73.65	二十一年 (1932)	224.87
二十六年 (1900)	62.07		

*本表資料根據近六十五年來中國國際貿易統計(中央研究院編印),及海關報告冊.

(*a*) 試計算三年之移動平均數.

(*b*) 試計算五年之移動平均數.

(*c*) 試計算九年之移動平均數.

(*d*) 將歷年輸入米量實數及各種移動平均數試繪一圖.

(*e*) 求每年輸入米量之實數與各移動平均數之差.

23 根據前題之資料,求其直線長期趨勢.

(*a*) 用最小平方法求1887—1921,及1922—1932之趨勢直線方程式.

(*b*) 試將求得之兩組趨勢線繪於前題圖中.

(*c*) 求每年輸入米量實數與直線長期趨勢數值之差

(*d*) 將此所得之差數與前題由移動平均數所得者比較之.

(*e*) 問前題圖中表示趨勢之各線,何者爲最佳?試言其故.

24. 試就下表之資料,求其長期趨勢:

世界中央銀行及政府存金總額*

(1914-1933)

年份	存金總額 G $ 1,000,000
1914	5,342
1915	6,238
1916	6,626
1917	7,140
1918	6,809
1919	6,794
1920	7,239
1921	8,030
1922	8,402
1923	8,636
1924	8,956
4925	8,974
1926	9,210
1927	9,568
1928	10,027
1929	10,305
1930	10,916
1931	11,266
1932	11,897
1933	11,945

*資料根據 Federal Reserve Bulletin of U. S. A., (*a*) 以逐年存金總額,繪一曲線圖,1914—1933.

(*b*) 在(*a*)圖上繪一適合之直線表示其趨勢.

(*c*) 在(*a*)圖上繪一適合之二次曲線表示其趨勢.

(*d*) 求出各年世界存金總額之百分數(以相當年份直線長期趨勢之值=100),并須將其結果,繪圖以明之.

(*e*) 求出各年世界存金總額之百分數(以相當年份曲線長期趨勢之值=100),並須將其結果,繪於(*d*)圖以資比較.

(*f*) 問此二種趨勢線對於原有資料,孰較適合?

25. 依據下表資料,以三次曲線表示其長期趨勢.

1897—1921某地商店倒閉數

年份	商店倒閉數
1897	13,083
1898	11,615
1899	9,642
1900	9,912
1901	10,648
1902	9,973
1903	9,775
1904	10,417
1905	9,967
1906	9,385
1907	10,274
1908	14,066
1909	11,872
1910	11,588
1911	12,679
1912	13,832
1913	14,553
1914	16,780
1915	19,035
1916	16,498
1917	13,073
1918	9,331
1919	5,515
1920	8,463
1921	19,982

(*a*) 試以上表資料繪一曲線圖.

(*b*) 求適合(*a*)圖之三次曲線方程式.

(*c*) 將三次曲線繪於(*a*)圖上.

(*d*) 討論該趨勢線之適合程度.

26. 試以下表資料,用半數平均法求趨勢線.

中國近二十年來國內匯兌數 1912—1933 *

年份	國內匯兌數 ($ 1,000,000)
民國元年 (1912)	5.96
二年 (1913)	10.16
三年 (1914)	11.99
四年 (1915)	13.55
五年 (1916)	15.97
六年 (1917)	21.52
七年 (1918)	35.34
八年 (1919)	43.82
九年 (1920)	58.92
十年 (1921)	68.44
十一年 (1922)	76.52
十二年 (1923)	95.99
十三年 (1924)	98.84
十四年 (1925)	103.74
十五年 (1926)	107.02
十六年 (1927)	86.70
十七年 (1928)	101.26
十八年 (1929)	131.78
十九年 (1930)	140.56
二十年 (1931)	177.37
二十一年 (1932)	175.15
二十二年 (1933)	177.68

* 資料根據著者主編之交通部郵政統計專刊,統計年報,及自著之中國郵政統計英文本.但此項國內匯兌數字係專指郵局所經辦者.

(*a*) 求趨勢線之方程式.

(*b*) 就原有資料試繪一圖.

(*c*) 將求得之趨勢線繪於(*b*)圖上.

27. 試就下表資料,以後列各法,求月差指數.

上海黃豆躉售價格

年 月	豆價	年 月	豆價	年 月	豆價	年 月	豆價
十二年一月	5.38	七月	6.61	十七年一月	6.00	七月	8.07
二月	5.41	八月	6.61	二月	6.11	八月	7.78
三月	6.20	九月	6.49	三月	6.29	九月	7.56
四月	6.20	十月	6.41	四月	6.26	十月	7.02
五月	5.48	十一月	5.92	五月	6.59	十一月	6.10
六月	5.38	十二月	5.47	六月	6.40	十二月	6.41
七月	5.27	十五年一月	5.71	七月	6.58	二十年一月	6.26
八月	5.24	二月	5.98	八月	6.26	二月	6.67
九月	5.27	三月	6.20	九月	6.11	三月	6.70
十月	5.34	四月	6.41	十月	6.39	四月	6.47
十一月	5.10	五月	6.09	十一月	6.36	五月	6.57
十二月	5.07	六月	6.16	十二月	6.43	六月	7.03
十三年一月	5.19	七月	6.08	十八年一月	6.27	七月	6.39
二月	5.19	八月	5.67	二月	6.47	八月	6.51
三月	5.08	九月	5.78	三月	6.61	九月	6.57
四月	5.14	十月	5.96	四月	6.49	十月	6.11
五月	5.16	十一月	5.96	五月	6.69	十一月	6.13
六月	5.16	十二月	5.54	六月	6.90	十二月	6.09
七月	5.83	十六年一月	6.23	七月	7.14	二十一年一月	5.70
八月	5.41	二月	5.99	八月	7.35	二月	——
九月	5.30	三月	6.14	九月	7.47	三月	5.67
十月	5.20	四月	6.15	十月	7.67	四月	5.80
十一月	5.20	五月	6.35	十一月	6.92	五月	5.86
十二月	5.38	六月	6.23	十二月	6.77	六月	5.92
十四年一月	5.30	七月	6.44	十九年一月	7.10	七月	5.78
二月	5.23	八月	6.15	二月	7.38	八月	5.96
三月	5.36	九月	6.28	三月	7.38	九月	5.71
四月	5.17	十月	5.58	四月	7.35	十月	5.14
五月	6.41	十一月	6.44	五月	7.36	十一月	5.14
六月	6.44	十二月	5.91	六月	7.66	十二月	5.32

(a) 簡易算術平均法.

(b) 移動平均法.

(c) 環比法.

(d) 恆差比率平均法.

相關數量

28. 依據下表資料,用乘積率法求其相關數量.

南京市立鼓樓小學四年級生國文算術成績

(民國二十二年度)

學生註册號數	國文分數	算術分數	學生註册號數	國文分數	算術分數
1	57	60	21	51	60
2	86	89	22	75	93
3	48	27	23	86	78
4	89	92	24	81	75
5	96	96	25	73	71
6	60	77	26	66	45
7	75	76	27	60	35
8	76	60	28	76	83
9	80	87	29	87	75
10	60	57	30	82	94
11	71	60	31	88	91
12	86	79	32	54	60
13	72	81	33	87	90
14	86	93	34	68	86
15	62	86	35	43	65
16	86	96	36	70	76
17	83	96	37	77	73
18	90	88	38	89	91
19	81	72	39	68	67
20	45	60			

(a) 試作算術成績(Y)與國文成績(X)之散播圖.

(b) 求r及$P.E._r$之值.

(c) 求 x, y 間及 X, Y 間之迴歸方程式.

(d) 求 S_y 及 S_x 之值.

(e) 假定 X 之値,估計 Y 之相當値,並求其估計之可靠數量.

(f) 解釋所求得相關係數之意義.

29. 試就下表之資料,用乘積率法求相關數量.

各城銀行清算數及債款

(根據經選擇後三十城之報告)

城之號碼	清算數(百萬元)	債款(百萬元)
1	104	102
2	27	27
3	51	87
4	16	37
5	47	50
6	12	18
7	15	19
8	13	33
9	20	34
10	28	38
11	26	31
12	39	65
13	80	80
14	21	18
15	56	67
16	9	19
17	17	28
18	22	17
19	38	46
20	41	44
21	14	33
22	53	34
23	14	42
24	8	30
25	17	40
26	17	15
27	40	88
28	7	18
29	14	14
30	8	10
總數	874	1,184

(*a*) 試作各城銀行之債款(Y)及淸算數(X)之散播圖.

(*b*) 求 r 及 $P.E._r$ 之值.

(*c*) 作出 x, y 間及 X, Y 間之迴歸方程式.

(*d*) 求 S_y 及 S_x 之值.

(*e*) 假定 X 之値,估計 Y 之相當值,並指出其估計之可靠數量.

(*f*) 解釋所求得相關係數之意義.

30 依據下表資料,用乘積率法求相關數量.

每畝麥產量及每斛成本

(十一農戶之記載)

農戶號碼	每畝產量 X	每斛成本 Y
1	9.13 斛	$ 1.84
2	11.37	1.36
3	8.00	2.00
4	9.80	1.56
5	10.81	1.68
6	18.12	.98
7	18.00	.53
8	20.22	.67
9	15.59	.72
10	8.72	2.04
11	14.00	.93

(*a*) 試就十一農戶之記載,作每斛麥價(Y)及每畝麥產量(X)之散播圖.

(*b*)——(*f*) 同前.

31. 以習題29之資料,組成相關表,用乘積率法求其相關數量.

(a) 試以銀行清算數(X)及債款(Y)組成相關表.

(b) 以組距為單位,計算標準差.

(c) 求其r之值.

(d) 化標準差為原有單位,作出x,y間及X,Y間之迴歸方程式.

(e) 求S_y及S_x之值.

(f) 試討論所求之結果.

32. 以習題28之資料,用最小平方法,求其相關數量.

(a) 試作一散播圖,以國文成績為自變數(X),算術成績為因變數(Y).

(b) 以最小平方法,求國文成績及算術成績之關係方程式.

(c) 由下列公式計算S_y:

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)}{N}.$$

(d) 由下列公式計算r:

$$r=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)-Nc_y^2}{\Sigma(Y)^2-Nc_y^2}.$$

(e) 試以本題結果,與習題28所得者互相比較.

33 以習題29之資料,用最小平方法,求其相關數量.

(*a*) 試作一散播圖以銀行清算數爲自變數(X)債款爲因變數(Y).

(*b*) 以最小平方法求銀行清算數及債款之關係方程式.

(*c*) 計算各城區銀行清算數之理論值,並求其與實際值之差.

(*d*) 計算估計之標準誤差S_x.

(*e*) 由下列公式計算相關係數.

$$r^2=1-\frac{S_x{}^2}{\sigma_x{}^2}$$

(*f*) 以最小平方法直接計算S_x及r,並取其結果與(*d*)(*e*)相比較.

34. 以習題30之資料,用最小平方法,求其相關數量.

(*a*) 試作一散播圖,以每畝麥產量爲自變數(X),每斛麥價爲因變數(Y).

(*b*) 以最小平方法求每畝麥產量及每斛麥價之關係方程式.

(*c*) 計算各農夫每斛成本之理想值,並求其與實際值之差.

(*d*) 計算估計之標準誤差S_y.

(*e*) 計算相關係數、

(*f*) 以最小平方法,直接計算 S_y 及 r, 並取其結果與 (*d*),(*e*) 相比較.

35. 以習題 29 之資料,組成相關表,用最小平方法求其相關數量.

(*a*) 試作一相關表以銀行清算數爲變數 (X) 債款爲變數 (Y).

(*b*) 應用最小平方法求銀行清算數及債款之關係方程式,以組距爲單位,並選擇一適宜原點 (Origin).

(*c*) 由下列公式計算 S_y:

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y')^2-a\Sigma(Y')-b\Sigma(X'Y')}{N}$$

(*d*) 由下列公式計算 r:

$$r=\frac{a\Sigma(Y')+b\Sigma(X'Y')-Nc_y^2}{\Sigma(Y')^2-Nc_y^2}$$

(*e*) 改正 S_y 及估計方程式爲原有單位及原點.

(*f*) 討論所求之結果.

36. 以習題29之資料,用等級差異法求其相關數量.

(*a*) 試作各城銀行之債款(Y)及清算數(X)之散播圖

(*b*) 求 r 之值.

(*c*) 求 ρ 之值,與 r 相比較.

(*d*) 應用皮爾生改正法(附錄表 V),化 ρ 爲 r 與(*b*)所得之 r 相比較,並求其差

(e) 以司佩蒙氏 Foot-rule 公式,求 R 之值,與 r 相比較.

(f) 應用皮爾生氏改正法(附錄表VI),化 R 爲 r, 與(b)所得之 r 相比較,並求其差.

37. 試就下列相關表,求其相關比率.

每農夫耕田畝數與每畝地價相關表

Y—每畝平均地價		X—每農夫平均耕田畝數														fy
		100–200	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900	900–1000	1000–1100	1100–1200	1200–1300	1300–1400	1,400–1500	
		150	250	350	450	550	650	750	850	950	1,050	1,150	1,250	1,350	1,450	
125–135	130	7														7
115–125	120	7														7
105–115	110	8	1													9
95–105	100	2	1													3
85–95	90	5	2													7
75–85	80	4	3													7
65–75	70		2													2
55–65	60		6	1												7
45–55	50		6	1												7
35–45	40		1	1												2
25–35	30			1	2	4										7
15–25	20				1	2	3	3	1	1						11
5–15	10					1		3	1			2		3	4	14
fx		33	22	4	3	7	3	6	2	1		2		3	4	

(a) 求作一散播圖,以每農夫耕田之畝數爲(X),每畝地價爲(Y).

(b) 求 r 之值.

(c) 求 η_{yx} 及 η_{xy} 之值.

(*d*) 比較 η_{yx} 及 r 求 ζ, 曲線度之測驗.

38. 以前題之資料,求其相關指數.

(*a*) 試作一散播圖.

(*b*) 求 r 及 η_{yx} 之值.

(*c*) 試以最小平方法求其二次曲線配合.

(*d*) 求 S_y 及 ρ_{yx} 之值.

(*e*) 比較 r, η_{yx} 及 ρ_{yx}

39. 試就下表資料,用乘積率法求其純相關及複相關.

各城人口數銀行清算數及債款

城之號碼	人口數 (千人)	清算數 (百萬元)	債款 (百萬元)
1	734	104	102
2	179	27	27
3	507	51	87
4	237	16	37
5	159	47	50
6	126	12	18
7	106	15	19
8	41	13	33
9	314	20	34
10	235	28	38
11	162	26	31
12	457	39	65
13	381	80	80
14	118	21	18
15	387	56	67
16	116	9	19
17	216	17	28
18	91	22	17
19	192	38	46
20	258	41	44
21	238	14	33
22	172	53	34
23	296	14	42
24	78	8	30
25	235	17	40
26	118	17	15
27	315	40	88
98	71	7	18
29	104	14	14
30	72	8	10
總數	6,718	874	1,184

(a) 求人口(X_1)銀行清算數(X_2)及債款(X_3)之M, σ及其間之相關係數(r_{12}, r_{13}, r_{23}).

(b) 求各純相關係數$r_{12\cdot3}, r_{13\cdot2}$及$r_{23\cdot1}$.

(c) 求二級標準差($\sigma_{1\cdot23}, \sigma_{2\cdot13}, \sigma_{3\cdot12}$).

(d) 求純迴歸係數($b_{12\cdot3}, b_{13\cdot2}$).

(e) 求複相關係數$R_{1\cdot23}$.

40. 以前題之資料,用最小平方法求其複相關及純相關.

(a) 試以最小平方法求人口數(X_1)與銀行清算數(X_2),債款(X_3)間之平均關係(即求$X_1=a+b_{12.3}X_2+b_{13.2}X_3$中之常數).

(b) 計算估計之標準誤差$S_{1\cdot23}$

(c) 計算複相關係數$R_{1\cdot23}$

(d) 試以X_2或X_3為因變數,各求其迴歸方程式.

(e) 試由純迴歸係數求各純相關係數.

乙. 本書所用縮寫符號

〔以引用之先後爲序〕

M	算術平均數
$X, X_1, X_2, \cdots$	各項數量
$N, N_1, N_2, \cdots$	各個分配之項數
Σ	各項之總和
M'	假定平均數
d	差數
d'	由假定平均數量之差數
$f, f_1, f_2, \cdots$	各個分配之次數
m	組中値
$c,$	改正數
G	幾何平均數
G_W	加權幾何平均數
W	權數
H	倒數平均數
Mo	衆數
$l.\ l.$	下限
f_1	衆數上一組之次數
f_2	衆數下一組之次數
i	組距
Md	中位數

F	中位數,四分位數或百分位數以下或以上各組之次數之和
$u.l.$	上限
P_p	第 p 百分位數
R_x, $_cR_s$	百分等級
R_l	下限百分等級
R_u	上限百分等級
f_x	x 值所在組之次數
Q_1	下四分位數
Q_3	上四分位數
R_g	全距離
X_L	最大數量
X_s	最小數量
$Q.D.$	四分位差
$M.D.$	平均差
N_s	小於中位數之次數
N_l	大於中位數之次數
m_s	小於平均數之各組中值
σ	標準差
s	由假定平均數所得之標準差
h	兩分配之假定平均數的差數
V	差量係數

sk	偏斜度
q_2, q_1	上四分位數與中位數之差及中位數與下四分位數之差
χ	偏斜度
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$	薛伯氏改正後之轉矩
$\beta_1, \beta_2, \kappa_2$	曲線型之判準
p	成功機率
q	失敗機率
n	個數
xy	兩種變量
y_0	常態曲線最高縱坐標
x'	由假定平均數之離中差
$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$	由假定平均數之轉矩
$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$	由平均數之轉矩
σ_s	抽樣的標準誤
f_0, f	觀察的次數;理論的次數
χ^2	配合適度之測驗
D	平均數與衆數之距離
I_p	物價指數
p_0	基年物價
$p_1, p_2, p_3, \cdots$	各年物價
$p', p'', p''',$	各種物價

q_0	基年物量
$q_1, q_2, q_3,$	各年物量
$q', q'', q''',$	各種物量
$L.R_1, L.R_2,$	環比指數
$P_{01}, P_{12},$	各年環比
$C.R_1, C.R_2$	鎖比指數
I_Q	物量指數
I_V	物值指數
$a, b, c, d, \cdots$	配合曲線之常數
r	相關係數
X, Y	兩種數量
x, y	X或Y數量與其平均數之離中差
σ_x, σ_y	X或Y數量之標準差
c_x, c_y	X或Y數量平均數之改正
x', y'	X或Y數量與假定平均數之離中差
Z	$y-x$之數量
z'	Z數量與假定平均數之離中差
σ_z	Z數量之標準差
b_{yx}	y因x之迴歸係數
b_{xy}	x因y之迴歸係數
$\overline{X}, \overline{Y}$	X或Y數量之平均數
S_y, S_x	Y或X數量估計之標準誤

ρ, R	等級差異法之相關數量
U	異號對數法之相關數量
u	異號差數之項數
l	同號差數之項數
R_{ct}	變量相應法之相關數量
ct	同號項數
r_{bis}	二列相關係數
z	單位常態曲線縱坐標
p	單位常態曲線在縱坐標 z 右方之部分
q	單位常態曲線在縱坐標左方之部分
ϕ^2, $S-1$	均方相聯
f_x, f_y	x 或 y 分配之次數
f_{xy}	xy 分配之次數
$C. C.$	相聯係數
ρ_{yx}	y 爲因變數之相關指數
ρ_{xy}	x 爲因變數之相關指數
η_{yx}	y 爲因變數之相關比率
η_{xy}	x 爲因變數之相關比率
σ_{ay}	y 數量與各行平均數 my 之標準差
σ_{ax}	x 數量與各行平均數 mx 之標準差

σ_{my}	各行平均數與Y平均數之標準差
σ_{mx}	各行平均數與X平均數之標準差
S_s	各行f_x'之和或各行f_y'之和
$c.\ \eta$	改正的相關比率
κ	行列之數
ζ	直線性之測驗
r_{12},	X_1與X_2兩數量之相關係數
$r_{12\cdot3}$, $r_{13\cdot2}$	一級純相關係數
$r_{12\cdot34}$, $r_{13\cdot24}$	二級純相關係數
$r_{12\cdot34\cdots\cdots(n-1)}$,	$n-1$級純相關係數
$r_{12\cdot34\cdots\cdots n}$	n級純相關係數
$\sigma_{1\cdot23\cdots\cdots n}$	n級之標準差
$S_{1\cdot23\cdots\cdots n}$	估計之標準誤
$b_{12\cdot34}$	純迴歸係數
p_{12}	$x_1\ x_2$二數量之平均積
$R_{1\cdot23\cdots\cdots n}$	n級之複相關係數
$\triangle$	純相關係數之行列式
$\triangle_{ij}$	$\triangle$行列式除去第i行第j列之子行列式(Minors)
$\triangle_{12}$	$\triangle$行列式r_{12}之餘係數(Cofactor)
σ_M, σ_σ, σ_r,……	平均數,標準差,相關係數……之標準誤
$P.E_M$, $P.E_{\mu_2}$, $P.E_r$,……	平均數,第二轉矩,相關係數……之機誤

丙. 計算表

表 I 常態曲線之縱坐標(由 x 求 y)

x 以 σ 爲單位,y 以最高縱坐標(y_o 或 $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$)爲單位,譬如

$x=.7\sigma$ (卽 $\frac{x}{\sigma}=.7$) 則 $y=78270y_o$

$x=2.15\sigma$ (卽 $\frac{x}{\sigma}=2.15\sigma$) 則 $y=.09914y_o$ 等

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	99565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94355	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91939	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80109	79896	79359	77817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	72193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54697	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48665	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34443	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30032	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26049	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04391	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	04343	02280	02218	62157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	06174	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

此表係根據 RUGG—Statistical Methods Applied to Education

表 II　常態曲線之面積(由 x 求 A)

x 以 σ 爲單位,並設全面積爲1,譬如

$x = \cdot 8\sigma$ 卽 $(\frac{x}{\sigma} = \cdot 8)$ 包括全面積 ·2881 部分或 28·81%

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	6239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0635	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1626	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1409	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1730	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2763	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	2554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	2997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4134	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4294	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4832	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.500	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3.1	4990.300	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

此表係根據 RUGG—Statistical Methods Applied to Education

表 III 由常態曲線面積求差值(x)及縱坐標(y)

由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y
.000	0.0000	.3989	.045	0.1130	.3964	.090	0.2275	.3887	.135	0.3451	.3759
.001	0.0025	.3989	.046	0.1156	.3963	.091	0.2301	.3885	.136	0.3478	.3755
.002	0.0050	.3989	.047	0.1181	.3962	.092	0.2327	.3883	.137	0.3505	.3752
.003	0.0075	.3989	.048	0.1206	.3961	.093	0.2353	.3881	.138	0.3531	.3748
.004	0.0100	.3989	.049	0.1231	.3959	.094	0.2378	.3878	.139	0.3558	.3745
.005	0.0125	.3989	.050	0.1257	.3958	.095	0.2404	.3876	.140	0.3585	.3741
.006	0.0150	.3989	.051	0.1282	.3957	.096	0.2430	.3873	.141	0.3611	.3738
.007	0.0175	.3989	.052	0.1307	.3955	.097	0.2456	.3871	.142	0.3638	.3734
.008	0.0201	.3989	.053	0.1332	.3954	.098	0.2482	.3868	.143	0.3665	.3730
.009	0.0226	.3988	.054	0.1358	.3953	.099	0.2508	.3866	.144	0.3692	.3727
.010	0.0251	.3988	.055	0.1383	.3951	.100	0.2533	.3863	.145	0.3719	.3723
.011	0.0276	.3988	.056	0.1408	.3950	.101	0.2559	.3861	.146	0.3745	.3719
.012	0.0301	.3988	.057	0.1434	.3949	.102	0.2585	.3858	.147	0.3772	.3715
.013	0.0326	.3987	.058	0.1459	.3947	.103	0.2611	.3856	.148	0.3799	.3712
.014	0.0351	.3987	.059	0.1481	.3946	.104	0.2637	.3853	.149	0.3826	.3708
.015	0.0376	.3987	.060	0.1510	.3944	.105	0.2663	.3850	.150	0.3853	.3704
.016	0.0401	.3986	.061	0.1535	.3943	.106	0.2689	.3848	.151	0.3880	.3700
.017	0.0426	.3986	.062	0.1560	.3941	.107	0.2715	.3845	.152	0.3907	.3696
.018	0.0451	.3985	.063	0.1586	.3940	.108	0.2741	.3842	.153	0.3934	.3692
.019	0.0476	.3985	.064	0.1611	.3938	.109	0.2767	.3840	.154	0.3961	.3688
.020	0.0502	.3984	.065	0.1637	.3936	.110	0.2793	.3837	.155	0.3989	.3684
.021	0.0527	.3984	.066	0.1662	.3935	.111	0.2819	.3834	.156	0.4016	.3680
.022	0.0552	.3983	.067	0.1687	.3933	.112	0.2845	.3831	.157	0.4043	.3676
.023	0.0577	.3983	.068	0.1713	.3931	.113	0.2871	.3828	.158	0.4070	.3672
.024	0.0602	.3982	.069	0.1738	.3930	.114	0.2898	.3825	.159	0.4097	.3668
.025	0.0627	.3982	.070	0.1764	.3928	.115	0.2924	.3823	.160	0.4125	.3664
.026	0.0652	.3981	.071	0.1789	.3926	.116	0.2950	.3820	.161	0.4152	.3660
.027	0.0677	.3980	.072	0.1815	.3924	.117	0.2976	.3817	.162	0.4179	.3656
.028	0.0702	.3980	.073	0.1840	.3922	.118	0.3002	.3814	.163	0.4207	.3652
.029	0.0728	.3979	.074	0.1866	.3921	.119	0.3029	.3811	.164	0.4234	.3647
.030	0.0753	.3978	.075	0.1891	.3919	.120	0.3055	.3808	.165	0.4261	.3643
.031	0.0778	.3977	.076	0.1917	.3917	.121	0.3081	.3804	.166	0.4289	.3639
.032	0.0803	.3977	.077	0.1942	.3915	.122	0.3107	.3801	.167	0.4316	.3635
.033	0.0828	.3976	.078	0.1968	.3913	.123	0.3134	.3798	.168	0.4344	.3630
.034	0.0853	.3975	.079	0.1993	.3911	.124	0.3160	.3795	.169	0.4372	.3626
.035	0.0878	.3974	.080	0.2019	.3909	.125	0.3186	.3792	.170	0.4399	.3621
.036	0.0904	.3973	.081	0.2045	.3907	.126	0.3213	.3789	.171	0.4427	.3617
.037	0.0929	.3972	.082	0.2070	.3905	.127	0.3239	.3786	.172	0.4454	.3613
.038	0.0954	.3971	.083	0.2096	.3903	.128	0.3266	.3782	.173	0.4482	.3608
.039	0.0979	.3970	.084	0.2121	.3901	.129	0.3292	.3779	.174	0.4510	.3604
.040	0.1004	.3969	.085	0.2147	.3899	.130	0.3319	.3776	.175	0.4538	.3599
.041	0.1030	.3968	.086	0.2173	.3896	.131	0.3345	.3772	.176	0.4565	.3595
.042	0.1055	.3967	.087	0.2198	.3894	.132	0.3372	.3769	.177	0.4593	.3590
.043	0.1080	.3966	.088	0.2224	.3892	.133	0.3398	.3766	.178	0.4621	.3585
.044	0.1105	.3965	.089	0.2250	.3890	.134	0.3425	.3762	.179	0.4649	.3581

由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y
.180	0.4677	.3576	.230	0.6128	.3306	.280	0.7722	.2961	.330	0.9542	.2531
.181	0.4705	.3571	.231	0.6158	.3300	.281	0.7756	.2953	.331	0.9581	.2521
.182	0.4733	.3567	.232	0.6189	.3294	.282	0.7790	.2945	.332	0.9621	.2511
.183	0.4761	.3562	.233	0.6219	.3288	.283	0.7824	.2938	.333	0.9661	.2502
.184	0.4789	.3557	.234	0.6250	.3282	.284	0.7858	.2930	.334	0.9701	.2492
.185	0.4817	.3552	.235	0.6280	.3275	.285	0.7892	.2922	.335	0.9741	.2482
.186	0.4845	.3548	.236	0.6311	.3269	.286	0.7926	.2914	.336	0.9782	.2473
.187	0.4874	.3543	.237	0.6341	.3263	.287	0.7961	.2906	.337	0.9822	.2463
.188	0.4902	.3538	.238	0.6372	.3256	.288	0.7995	.2898	.338	0.9863	.2453
.189	0.4930	.3533	.239	0.6403	.3250	.289	0.8030	.2890	.339	0.9904	.2443
.190	0.4959	.3528	.240	0.6433	.3244	.290	0.8064	.2882	.340	0.9945	.2433
.191	0.4987	.3523	.241	0.6464	.3237	.291	0.8099	.2874	.341	0.9986	.2423
.192	0.5015	.3518	.242	0.6495	.3231	.292	0.8134	.2866	.342	1.0027	.2413
.193	0.5044	.3513	.243	0.6526	.3224	.293	0.8169	.2858	.343	1.0069	.2403
.194	0.5072	.3508	.244	0.6557	.3218	.294	0.8204	.2849	.344	1.0110	.2393
.195	0.5101	.3503	.245	0.6588	.3211	.295	0.8239	.2841	.345	1.0152	.2383
.196	0.5129	.3498	.246	0.6620	.3204	.296	0.8274	.2833	.346	1.0194	.2373
.197	0.5158	.3493	.247	0.6651	.3198	.297	0.8310	.2825	.347	1.0237	.2362
.198	0.5187	.3487	.248	0.6682	.3191	.298	0.8345	.2816	.348	1.0279	.2352
.199	0.5215	.3482	.249	0.6713	.3184	.299	0.8381	.2808	.349	1.0322	.2342
.200	0.5244	.3477	.250	0.6745	.3178	.300	0.8416	.2800	.350	1.0364	.2332
.201	0.5273	.3472	.251	0.6776	.3171	.301	0.8452	.2791	.351	1.0407	.2321
.202	0.5302	.3466	.252	0.6808	.3164	.302	0.8488	.2783	.352	1.0450	.2311
.203	0.5330	.3461	.253	0.6840	.3157	.303	0.8524	.2774	.353	1.0494	.2300
.204	0.5359	.3456	.254	0.6871	.3151	.304	0.8560	.2766	.354	1.0537	.2290
.205	0.5388	.3450	.255	0.6903	.3144	.305	0.8596	.2757	.355	1.0581	.2279
.206	0.5417	.3445	.256	0.6935	.3137	.306	0.8633	.2748	.356	1.0625	.2269
.207	0.5446	.3440	.257	0.6967	.3130	.307	0.8669	.2740	.357	1.0669	.2258
.208	0.5476	.3434	.258	0.6999	.3123	.308	0.8705	.2731	.358	1.0714	.2247
.209	0.5505	.3429	.259	0.7031	.3116	.309	0.8742	.2722	.359	1.0758	.2237
.210	0.5534	.3423	.260	0.7063	.3109	.310	0.8779	.2714	.360	1.0803	.2226
.211	0.5563	.3417	.261	0.7095	.3102	.311	0.8816	.2705	.361	1.0848	.2215
.212	0.5592	.3412	.262	0.7128	.3095	.312	0.8853	.2696	.362	1.0893	.2204
.213	0.5622	.3406	.263	0.7160	.3087	.313	0.8890	.2687	.363	1.0939	.2193
.214	0.5651	.3401	.264	0.7192	.3080	.314	0.8927	.2678	.364	1.0985	.2182
.215	0.5681	.3395	.265	0.7225	.3073	.315	0.8965	.2669	.365	1.1031	.2171
.216	0.5710	.3389	.266	0.7257	.3066	.316	0.9002	.2660	.366	1.1077	.2160
.217	0.5740	.3384	.267	0.7290	.3058	.317	0.9040	.2651	.367	1.1123	.2149
.218	0.5769	.3378	.268	0.7323	.3051	.318	0.9078	.2642	.368	1.1170	.2138
.219	0.5799	.3372	.269	0.7356	.3044	.319	0.9116	.2633	.369	1.1217	.2127
.220	0.5828	.3366	.270	0.7388	.3036	.320	0.9154	.2624	.370	1.1264	.2115
.221	0.5858	.3360	.271	0.7421	.3029	.321	0.9192	.2615	.371	1.1311	.2104
.222	0.5888	.3354	.272	0.7454	.3022	.322	0.9230	.2606	.372	1.1359	.2093
.223	0.5918	.3349	.273	0.7488	.3014	.323	0.9269	.2596	.373	1.1407	.2081
.224	0.5948	.3343	.274	0.7521	.3007	.324	0.9307	.2587	.374	1.1455	.2070
.225	0.5978	.3337	.275	0.7554	.2999	.325	0.9346	.2578	.375	1.1503	.2059
.226	0.6008	.3331	.276	0.7588	.2992	.326	0.9385	.2568	.376	1.1552	.2047
.227	0.6038	.3325	.277	0.7621	.2984	.327	0.9424	.2559	.377	1.1601	.2035
.228	0.6068	.3319	.278	0.7655	.2976	.328	0.9463	.2550	.378	1.1650	.2024
.229	0.6098	.3313	.279	0.7688	.2969	.329	0.9502	.2540	.379	1.1700	.2012

由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y	由$x/\sigma=0$之面積	x/σ	y
.380	1.1750	.2000	.420	1.4051	.1487	.460	1.7507	.0862
.381	1.1800	.198	.421	1.4118	.1473	.461	1.7624	.0844
.382	1.1850	.1977	.422	1.4187	.1458	.462	1.7744	.0826
.383	1.1901	.1965	.423	1.4255	.1444	.463	1.7866	.0809
.384	1.1952	.1953	.424	1.4325	.1 30	.464	1.7991	.0791
.385	1.2004	.1941	.425	1.4395	.1416	.465	1.8119	.0773
.386	1.205	.1929	.426	1.4466	.1401	.466	1.8250	.0755
.387	1.2107	.1917	.427	1.4538	.1387	.467	1.8 84	.0736
.388	1.2160	.1905	.428	1.4611	.1372	.468	1.8522	.0718
.389	1.2212	.1893	.429	1.4684	.1357	.469	1.8663	.0699
.390	1.2265	.1880	.430	1.4758	.1343	.470	1.8808	.0680
.391	1.2319	.1868	.431	1.4833	.1328	.471	1.8957	.0662
.392	1.2372	.1856	.432	1.4909	.1313	.472	1.9110	.0643
.393	1.2426	.1843	.433	1.4985	.1298	.473	1.9268	.0623
.394	1.2481	.1831	.434	1.5063	.1283	.474	1.9431	.0604
.395	1.2536	.1818	.435	1.5141	.1268	.475	1.9600	.0585
.396	1.2591	.1806	.436	1.5220	.1253	.476	1.9774	.0565
.397	1.2646	.1793	.437	1.5301	.1237	.477	1.9954	.0545
.398	1.2702	.1780	.438	1.5382	.1222	.478	2.0141	.0525
.399	1.2759	.1768	.439	1.5464	.1207	.479	2.0335	.0505
.400	1.2816	.1755	.440	1.5548	.1191	.480	2.0537	.0484
.401	1.2873	.1742	.441	1.5632	.1176	.481	2.0749	.0464
.402	1.2730	.1729	.442	1.5718	.1160	.482	2.0969	.0443
.403	1.2988	.1716	.443	1.5805	.1144	.483	2.1201	.0422
.404	1.3047	.1703	.444	1.5893	.1128	.484	2.1444	.0400
.405	1.3106	.1690	.445	1.5982	.1112	.485	2.1701	.0379
.406	1.3165	.1677	.446	1.6072	.1096	.486	2.1973	.0357
.407	1.3225	.1664	.447	1.6164	.1080	.487	2.2262	.0335
.408	1.3285	.1651	.448	1.6258	.1064	.488	2.2571	.0312
.409	1.3346	.1637	.449	1.6352	.1048	.489	2.2904	.0290
.410	1.3408	.1624	.450	1.6449	.1031	.490	2.3263	.0267
.411	1.3469	.1610	.451	1.6546	.1015	.491	2.3656	.0243
.412	1.3532	.1597	.452	1.6646	.0998	.492	2.4089	.0219
.413	1.3595	.1583	.453	1.6747	.0982	.493	2.4573	.0195
.414	1.3658	.1570	.454	1.6849	.0965	.494	2.5121	.0170
.415	1.3722	.155	.455	1.6954	.0948	.495	2.5758	.0145
.416	1.3787	.1542	.456	1.7060	.0931	.496	2.6521	.0118
.417	1.3852	.1529	.457	1.7169	.0914	.497	2. 478	.0091
.418	1.3917	.1515	.458	1.7279	.0897	.498	2.8782	.0063
.419	1.3984	.1501	.459	1.7392	.0879	.499	3.0902	.0034

此表係根據 HOLZINGER—Statistical Tables for Students in Education and Psychology.

表 IV

自然數一次方至六次方之總和

1 至 50

n	$\Sigma(n)$	$\Sigma(n^2)$	$\Sigma(n^3)$	$\Sigma(n^4)$	$\Sigma(n^5)$	$\Sigma(n^6)$
1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65
3	6	14	36	98	276	794
4	10	30	100	354	1 300	4 890
5	15	55	225	979	4 425	20 515
6	21	91	441	2 275	12 201	67 171
7	28	140	784	4 676	29 008	184 820
8	36	204	1 296	8 772	61 776	446 964
9	45	285	2 025	15 333	120 825	978 405
10	55	385	3 025	25 333	220 825	1 978 405
11	66	506	4 356	39 974	331 876	3 749 966
12	78	650	6 084	60 710	630 708	6 735 950
13	91	819	8 281	89 271	1 002 001	11 562 759
14	105	1 015	11 025	127 687	1 539 825	19 092 295
15	120	1 240	14 400	178 312	2 299 200	30 482 920
16	136	1 496	18 496	234 848	3 347 776	47 260 136
17	153	1 785	23 409	327 369	4 767 633	71 397 705
18	171	2 109	29 421	432 345	6 657 201	105 409 929
19	190	2 470	36 100	562 666	9 133 300	152 455 810
20	210	2 870	44 100	722 666	12 333 300	216 455 810
21	231	3 311	53 361	917 147	16 417 401	302 221 931
22	253	3 795	64 009	1 151 403	21 571 033	415 601 835
23	276	4 324	76 176	1 431 244	28 007 376	563 637 724
24	300	4 900	90 000	1 763 020	35 970 000	754 740 700
25	325	5 525	105 625	2 153 645	45 735 625	998 881 325

26	351	6 201	123 201	2 610 621	57 617 001	1 307 797 101
27	378	6 930	142 884	3 142 062	71 965 908	1 695 217 590
28	406	7 714	164 836	3 756 718	89 176 276	2 177 107 894
29	435	8 555	189 225	4 463 999	109 687 425	2 771 931 215
30	465	9 455	216 225	5 273 999	133 987 425	3 500 931 215
31	496	10 416	246 016	6 197 520	152 616 576	4 388 434 896
32	528	11 440	278 784	7 246 096	196 171 008	5 462 176 720
33	561	12 529	314 721	8 432 017	235 306 401	6 753 644 689
34	595	13 685	354 025	9 768 353	280 741 825	8 298 449 105
35	630	14 910	396 900	11 268 978	333 263 700	10 136 714 730
36	666	16 206	443 556	12 948 594	393 729 876	12 313 497 066
37	703	17 575	494 209	14 822 755	463 073 833	14 879 223 475
38	741	19 019	549 081	16 907 891	542 309 001	17 890 159 859
39	780	20 540	608 400	19 221 332	632 533 200	21 408 903 620
40	820	22 140	672 400	21 781 332	734 933 200	25 504 903 620
41	861	23 821	741 321	24 607 093	850 789 401	30 125 007 861
42	903	25 585	815 409	27 718 789	981 480 633	35 744 039 605
43	946	27 434	894 916	31 137 590	1 128 489 076	42 065 402 654
44	990	29 370	980 100	34 885 636	1 293 405 300	49 321 716 510
45	1035	31 395	1 071 225	38 986 311	1 477 933 425	57 625 482 135
46	1 081	33 511	1 168 561	43 463 767	1 683 896 401	67 099 779 031
47	1 128	35 720	1 272 384	48 343 448	1 913 241 408	77 878 994 360
48	1 176	38 024	1 382 976	53 651 864	2 168 045 376	90 109 584 824
49	1 225	40 425	1 500 625	59 416 665	2 450 520 625	103 950 872 025
50	1 275	42 925	1 625 625	65 666 665	2 763 020 625	119 575 872 025

此表係根據 MILLS—Problems and Tables in Statistics

表 V　由 ρ 之值求 r

$$r = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right) \qquad \rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0833	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7368	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9009
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

此表係根據著者之「統計原理及應用」附表A

表 VI 由 R 之值求 r 表

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1,\qquad R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}$$

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.598	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

此表係根據著者之「統計原理及應用」附表B

表 VII　由 U 之百分比例數求 r 值

$$r = \cos \pi U$$

U	r	U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.38	.3682
.01	.9996	.14	.9044	.27	.6615	.39	.3387
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.40	.3089
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.41	.2788
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.42	.2485
.05	.9880	.18	.8439	.31	.5620	.43	.2180
.06	.9826	.19	.8268	.32	.5358	.44	.1873
.07	.9762	.20	.8089	.33	.5091	.45	.1564
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.46	.1253
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.47	.0941
.10	.9510	.23	.7504	.36	.4260	.48	.0628
.11	.9407	.24	.7293	.37	.3973	.49	.0314
.12	.9295	.25	.7074			.50	.0000

此表係根據著者之「統計原理及應用」附表C