Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 7

Beringte Räume

Definition 7.1. Ein topologischer Raum, der mit einer Garbe von kommutativen Ringen versehen ist, heißt *beringter Raum*.

Ein beringter Raum wird oft in der Form $(X, \mathcal{O}_X)$ angegeben, wobei X der zugrunde liegende Raum ist und $\mathcal{O}_X$ die Garbe von kommutativen Ringen ist. Diese heißt die *Strukturgarbe* des beringten Raumes. Die Auswertung $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U)$ nennt man auch den *Schnittring* zur offenen Menge $U \subseteq X$ und $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ den *globalen Schnittring*. Im Anschluss an Beispiel 3.9 bzw. Beispiel 3.10 haben wir die folgenden Standardbeispiele.

Beispiel 7.2. Es sei X ein topologischer Raum. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$\mathcal{C}(U) = C^0(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ein kommutativer Ring und die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ ist mit den natürlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe, wodurch X zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.3. Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ durch

$$C^1(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

ein kommutativer Ring gegeben. Diese Zuordnung ist eine Garbe, wodurch M zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.4. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M ist zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ durch

$$C^1(U, \mathbb{C}) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

ein kommutativer Ring gegeben. Diese Zuordnung ist eine Garbe, wodurch M zu einem beringten Raum wird.

Beispiel 7.5. Es sei R ein kommutativer Ring und $X = \{P\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. Dieser wird durch die Festlegung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := R$ und $\Gamma(\emptyset, \mathcal{O}_X) := 0$ zu einem beringten Raum.

Definition 7.6. Zu einem Punkt $P \in X$ in einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man den Halm der Strukturgarbe den *Halm* im Punkt P.

Er wird mit $\mathcal{O}_{X,P}$ oder kurz mit $\mathcal{O}_P$ bezeichnet.

Morphismen von beringten Räumen

Zu einer stetigen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen gehört zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ der Ringhomomorphismus

$$C^0(V, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\varphi^{-1}(V), \mathbb{R}),\ f \longmapsto f \circ \varphi.$$

Für diese zurückgezogene stetige Funktion schreibt man auch $\varphi^* f$. Diese Schreibweise verwenden wir auch in der folgenden abstrakten Definition.

Definition 7.7. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ beringte Räume. Ein *Morphismus beringter Räume* ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zusammen mit einer Familie von Ringhomomorphismen

$$\varphi_V^*\colon\ \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$$

zu jeder offenen Menge $V \subseteq Y$, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind.

Die Verträglichkeit bedeutet, dass für offene Mengen $W \subseteq V \subseteq Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) & \stackrel{\varphi_V^*}{\longrightarrow} & \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(W, \mathcal{O}_Y) & \stackrel{\varphi_W^*}{\longrightarrow} & \Gamma(\varphi^{-1}(W), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

kommutiert. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von beringten Räumen induziert für jeden Punkt $P \in X$ einen Ringhomomorphismus der Halme

$$\mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P},$$

wobei ein $f \in \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)}$, das durch $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ mit einer offenen Umgebung $\varphi(P) \in V$ repräsentiert wird, auf den Keim von $\varphi^*(f) \in \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ abgebildet wird.

Definition 7.8. Ein Morphismus beringter Räume $\varphi\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $\psi\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ beringter Räume mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ (als Identität von beringten Räumen) gibt.

Verklebungsdaten für beringte Räume

Die folgende Konstruktion ist eine Erweiterung von Lemma 2.6.

Definition 7.9. Unter einem *Verklebungsdatum* für beringte Räume versteht man den folgenden Datensatz.

(1) Eine Familie $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$, von beringten Räumen.
(2) Für jedes Paar (i, j) eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ (mit $U_{ii} = U_i$).

(3) Für jedes Paar (i,j) einen Isomorphismus

$$\varphi_{ji} \colon \left(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}\right) \longrightarrow \left(U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}}\right)$$

von beringten Räumen (mit $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{(U_i, \mathcal{O}_{U_i})}$.)

(4) Für Indizes $i,j,k \in I$ ist die *Kozykelbedingung*

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$$

als Homomorphismus von $U_{ik} \cap U_{ij}$ nach U_k erfüllt.

Lemma 7.10. *Es sei ein Verklebungsdatum $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$, für beringte Räume gegeben. Dann gibt es einen beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ und Isomorphismen $\psi_i \colon U_i \to V_i$ derart, dass*

$$\psi_i(U_{ij}) = V_i \cap V_j$$

ist und

$$\psi_i|_{U_{ij}} = \psi_j|_{U_{ji}} \circ \varphi_{ji}$$

gilt.

Beweis. Die Existenz eines zugrunde liegenden Raumes X ergibt sich aus Lemma 2.6. Zu einer offenen Menge $W \subseteq X$ liegt eine Überdeckung

$$W = \bigcup_{i \in I} W \cap V_i$$

vor und wir setzen

$$\begin{aligned} & \Gamma(W, \mathcal{O}_X) \\ := \; & \left\{ (s_i, i \in I) \mid s_i \in \Gamma(\psi_i^{-1}(W \cap V_i), \mathcal{O}_{U_i}),\ \varphi_{ji}\left(s_i|_{\psi_i^{-1}(W) \cap U_{ij}} \right) = s_j|_{\psi_j^{-1}(W) \cap U_{ji}} \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Garbe auf X von kommutativen Ringen, die auf den V_i über die ψ_i mit den vorgegebenen Garben auf U_i übereinstimmt. □

Lokal beringte Räume

Definition 7.11. Ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal beringt*, wenn für jeden Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring ist.

Beispiel 7.12. Ein topologischer Raum X ist mit der Garbe der stetigen Funktionen $C^0(-, \mathbb{R})$ ein lokal beringter Raum: Für jeden Punkt $P \in X$ und eine in einer offenen Umgebung von x definierte stetige Funktion f gilt $f(P) \neq 0$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung gibt, auf der f invertierbar ist. Daher sind die Halme $\mathcal{O}_P$ lokale Ringe und X ist lokal beringt.

Entsprechendes gilt auf einer reellen oder komplexen Mannigfaltigkeit.

Definition 7.13. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einem Punkt $P \in X$ nennt man den Restekörper des lokalen Ringes $\mathcal{O}_P$ den *Restekörper* von P. Er wird mit $\kappa(P)$ bezeichnet.

Der Restekörper bei einem topologischen Raum versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen ist einfach $\mathbb{R}$, siehe Aufgabe 7.16.

DEFINITION 7.14. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, einem Punkt $x \in X$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ nennt man den Wert von f im Restekörper $\kappa(x)$ von x die *Auswertung* von f in x. Sie wird mit $f(x)$ bezeichnet.

IN einem lokal beringten Raum hat man zu jedem $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und jedem Punkt $P \in X$ die Äquivalenz $f(P) = 0$ in $\kappa(P)$ genau dann, wenn $f_P \in \mathfrak{m}_P$ genau dann, wenn f_P ist keine Einheit in $\mathcal{O}_{X,P}$.

DEFINITION 7.15. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal beringte Räume. Ein *Morphismus lokal beringter Räume* von X nach Y ist ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ der beringten Räume, für den die induzierten Ringhomomorphismen

$$\varphi_P^*\colon \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

für jeden Punkt $P \in X$ lokale Homomorphismen sind.

Der Invertierbarkeitsort

LEMMA 7.16. *Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ist*

$$X_f := \{P \in X \mid f(P) \neq 0 \text{ in } \kappa(P)\}$$

offen.

Beweis. Zunächst ist $f(P) = 0$ im Restekörper genau dann, wenn $f \in \mathfrak{m}_P$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_P$ gilt, und dies ist genau dann der Fall, wenn f in $\mathcal{O}_P$ nicht invertierbar ist. Sei $P \in X_f$. Dann ist f in $\mathcal{O}_P$ invertierbar und es gibt $g \in \mathcal{O}_P$ mit $gf = 1$. Es gibt eine offene Umgebung $P \in U \subseteq X$ mit (einem Repräsentanten)

$$g \in \Gamma(U, \mathcal{O})$$

und eine eventuell kleinere offene Umgebung U' mit $fg = 1$. Auf dieser offenen Umgebung ist somit f invertierbar und es gilt $P \in U' \subseteq X_f$. Die Vereinigung dieser offenen Umgebungen zeigt, dass X_f offen ist. □

Die Menge der Punkte, für die f als Element im Halm $\mathcal{O}_P$ nicht 0 ist, muss hingegen nicht offen sein, siehe Beispiel 11.17.

DEFINITION 7.17. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einer globalen Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man

$$X_f := \{P \in X \mid f(P) \neq 0 \text{ in } \kappa(P)\}$$

den *Invertierbarkeitsort* von f.

Nach Aufgabe 7.20 ist f in $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ eine Einheit.

LEMMA 7.18. *Es seien X und Y lokal beringte Räume und $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus lokal beringter Räume. Dann gilt für die Invertierbarkeitsorte zu $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ die Beziehung*

$$\varphi^{-1}(Y_f) = X_{\varphi^* f}.$$

Beweis. Das Element f ist in $\Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y)$ eine Einheit und der Ringhomomorphismus

$$\Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(Y_f), \mathcal{O}_X)$$

zeigt, dass $\varphi^* f$ in $\Gamma(\varphi^{-1}(Y_f), \mathcal{O}_X)$ eine Einheit ist, was $\varphi^{-1}(Y_f) \subseteq X_{\varphi^* f}$ bedeutet. Für einen Punkt

$$P \in X_{\varphi^* f}$$

ist $\varphi^* f$ eine Einheit im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,P}$. Wegen der Lokalität des Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

muss auch $f \in \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)}$ eine Einheit sein, was $\varphi(P) \in Y_f$ und damit

$$P \in \varphi^{-1}(Y_f)$$

bedeutet. □

Abbildungsverzeichnis