

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 21

### Übungsaufgaben

AUFGABE 21.1. Es sei ein konkretes Registerprogramm  $P$  gegeben. Ist es grundsätzlich menschenmöglich, zu entscheiden, ob dieses anhält oder nicht? Was bedeutet das für die Churchsche These?

AUFGABE 21.2. Beschreibe für die in Vorlesung 18 besprochenen Registerprogramme die Konfigurationsfolge bei Nulleingabe.

AUFGABE 21.3. Erstelle für das Registerprogramm (mit keinem Register und leerer Anfangsbelegung)

- (1) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalteeigenschaft beschreibt.

AUFGABE 21.4. Erstelle für das Registerprogramm (mit zwei Registern  $R_1$ ,  $R_2$  und leerer Anfangsbelegung)

- (1) 1+
- (2) 2-
- (3) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalteeigenschaft beschreibt.

AUFGABE 21.5. Es sei  $S$  ein Symbolalphabet und  $L^S$  die zugehörige Sprache erster Stufe, wobei die Sprache zumindest eine Variable besitzen möge. Es sei  $T \subseteq L_0^S$  eine Theorie. Zeige, dass  $T$  genau dann widersprüchlich ist, wenn  $T = L_0^S$  ist.

AUFGABE 21.6. Kann es ein Entscheidungsverfahren für mathematisch relevante Untertheorien  $T \subseteq L_0^{\text{Ar}}$  geben?

AUFGABE 21.7. Kann es ein Entscheidungsverfahren für die Symbolalphabeten  $\{0, 1, +\}$  bzw.  $\{0, 1, \cdot\}$  (jeweils mit Variablen) geben? Wo geht bei der Arithmetisierung der Registerprogramme die Addition und wo die Multiplikation ein?

AUFGABE 21.8. Gibt es offene zahlentheoretische Probleme, die ohne Bezug auf die Addition oder ohne Bezug auf die Multiplikation formuliert werden können?

AUFGABE 21.9. Kann es mathematische Probleme innerhalb entscheidbarer Theorien geben?

AUFGABE 21.10. Zeige, dass eine endlich axiomatisierbare Theorie auch durch einen einzigen Ausdruck axiomatisierbar ist.

AUFGABE 21.11. Es sei  $T \subseteq L^S$  eine abzählbar axiomatisierbare Theorie und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^S$ . Zeige, dass dann auch

$$T' = (T \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})^\vdash$$

abzählbar axiomatisierbar ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 21.12. (4 Punkte)

Erstelle für das Registerprogramm (mit zwei Registern  $R_1, R_2$  und leerer Anfangsbelegung)

- (1)  $1+$
- (2)  $C(2, 1)$
- (3) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalte-eigenschaft beschreibt.

AUFGABE 21.13. (3 Punkte)

Begründe, dass die (durch die erststufigen Peano-Axiome definierte) Peano-Arithmetik abzählbar-axiomatisierbar ist.

AUFGABE 21.14. (3 Punkte)

Zeige, dass es zwischen der erststufigen Peano-Arithmetik und der Standardarithmetik unendlich viele Theorien gibt.