1

三角數理卷一

英國海麻士輯
英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

此卷論三角法中用比例數之理

以數明線與角之幾何

第一款　凡平面之三角形必有六事焉其三者為邊其三者為角知其六事中之三則其餘三事亦可用法求得之惟其所知之三事中須有一為邊若三者俱為角則不可求此因任何平三角形之三箇角其和俱等于兩箇正角則能作無數三角形其邊俱不相同而俱

合于所設之三角也。

已知三角形之數箇邊角，從幾何之理，有法可畫成其全形，惟因最精之畫圖器亦不能無差，且不能辨其毫釐之數，故以畫法作三角形，祇得大略而已，欲求精密不可得也，是以算學家設立各種算法，以代畫圖之規矩，則得數最密。

三角算法者，乃從三角形內已知之事而求其未知之事也，此爲解明三角數理之學。

近年以來，三角算法之意，比昔更廣，凡角度大小之理，各角之數，所有彼此相關之理，並角與他幾何相關之

理俱能以算式賅之且能顯明直線與角度相關之故
從此得各種測量之公法

第二款　凡平三角形每邊之長短及他線之長短俱以一公常數度之（如言若干尺數若干寸數是也）若將公元甲代任何直線其意謂甲倍一尺或甲倍一寸是也甲所代者爲其本線與一尺或一寸之比例也

第三款　凡角之大小亦以一公大小之數度之則其角必爲所定爲主之角之若干倍
定其爲主之角法將正角（卽方角）用幾何之法平分爲九十名其每分爲度又平分其每度爲六十名其每分爲

分又平分其每分爲六十名其每分爲秒如此則無論何角必能以若干度分秒言其角之大小

凡度數以○別之分數以ノ別之秒數以〃別之皆在右角之上

假如其角爲十四度九分三十七秒十分秒之四則可作一四○九ノ三七〃四是也

第四款　又有一角度之法令度分秒皆以百進位如平分正角爲百分名其每分爲度又平分其度爲百分名其每分爲分又平分其分爲百分名其每分爲秒

其度以〇別之其分秒亦用ノ夕.

如此則一分爲·〇一度.一秒爲·〇〇〇一度故其分秒易變爲度之小數.

假如其角爲十四度九分三十七秒.可作

一四⊥九╳·〇一⊥三七╳·〇〇〇一

＝一四·〇九三七.

如欲以正角之分數言之可作·一四〇九三七.

分正角爲百度.每度爲百分.每分爲百秒.則無論何角

之數能頃刻變其度分秒或變之爲正角之分數不必用繁重之法化之故簡易數倍然今天下之人仍常用分正角爲九十之度而分秒皆以六十進位者其法甚繁重

第五款 茲設法能將常度變爲百分度並反求之法

令庚爲百分正角之一度丁爲常度之一度喚與叮爲任一角之百分度及常度則

$$喚庚=叮丁$$

$$一〇〇庚=九〇丁$$

而

$$\frac{一〇〇}{喚}=\frac{九〇}{叮}$$

$$喚=\frac{九}{一〇}叮=叮\perp\frac{九}{一}叮$$

$$叮=\frac{一〇}{九}喚=喚\top\frac{一〇}{一}喚$$

所以凡欲變常度爲百分之度必先將其分秒化爲度之小數而加全數九分之一即得百分度之數

若欲變百分之度爲常度將其分秒化爲度之小數減其全數十分之一則得常度並其度之小數又將小數變爲常分秒即爲常度並其分秒數

假如有常度二十九度五分三十三秒欲變之爲百分度則令

$$\text{二九}^{\circ}\text{五}'\text{三三}''=(\text{二九.〇九二五})$$

$$=\left(\text{二九.〇九二五}\perp\frac{\text{九}}{\text{二九.〇九二五}}\right)$$

$$=(\text{三二.三二五〇})=\text{三二}^{\circ}\text{三二}'\text{五〇}''$$

即爲三十二度三十二分五十秒

假如有百分之度三十二度三十二分五十秒。欲變之爲常度則令

$$\text{三二}^{\circ}\text{三二}'\text{五〇}'' = (\text{三二.三二五〇})$$

$$= \left(\text{三二.三二五〇} \;\text{丅}\; \frac{\text{一〇}}{\text{三二.三二五〇}}\right)$$

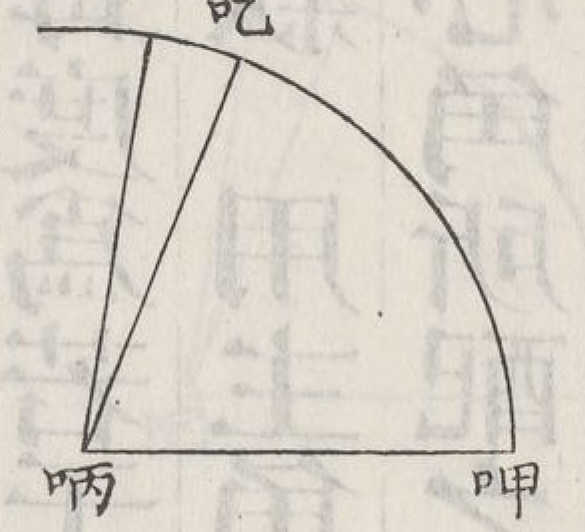
$$= (\text{二九.〇九二五}) = \text{二九}^{\circ}\text{五}'\text{三三}''.$$

卽爲二十九度五分三十三秒。

第六款　凡尋常之算法。用常度者居多。惟最深之代數中。則有一法。以等于平圓半徑之弧所配圓心之角爲主。則比常法更便。因平圓周徑相比。恆有一定之率。故無論平圓之大小如何。此角必爲不變之數。

若以周字代平圓之周率三.一四一五九……以未代平

圓之半徑則平圓之全周必等于二周未.



如圖呷⿰口丙吃爲從圓心所分之角此角所配之呷吃弧等于本平圓之半徑呷⿰口丙亦卽吃⿰口丙

則依幾何原本第六卷三十三題之理凡圓心各角之二周未
未.
比必如其所配各弧之比則全周
呷吃弧所以二周
四正角.此式與四正角
呷⿰口丙吃角呷⿰口丙吃角
未無相關所以無論其平圓之大小如何此角必爲不

變之數、

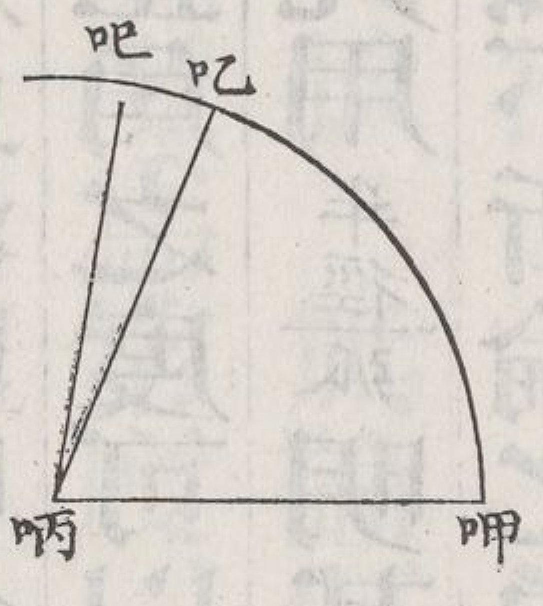
此角雖不能以幾何之法定之然易以代數之理明其爲不變之數故可用此角爲主以度他角、

其主角若以井字代之而他角可以斗字代之則其斗爲任何大小之角與井之比、

如不用等于半徑之弧之角爲主而用常度亦不必言其每度爲若干大、無論何角皆可以斗代之、

第七款　用主角之法定各角之大小則以斗爲任何平圓心角所配之弧與其半徑之比所以謂之眞弧度、

如圖令呷呐半徑從本方位以呐爲心旋轉而成呷呐



𠮙角呷呐吧角，則呷𠮙與呷吧俱為呷點所成之弧，其呷𠮙弧等于半徑，故呷呐𠮙為主角，可以井代之，其呷呐吧為他角，可以井斗明之。

一則從幾何原本第六卷三十三題知

$\frac{呷呐}{呷吧}$、$=\frac{呷𠮙}{呷吧}=\frac{呷呐𠮙角}{呷呐吧角}$

$\frac{半徑}{弧}$、$=井=\frac{呷呐}{呷吧}$ 呷呐𠮙角 $=$ 呷呐吧角

所以$\frac{半徑}{弧}$、$=斗$

平圓之半徑若爲一則弧斗卽爲本角之弧弧之長所以無論何角皆可以眞弧度明之亦謂之以弧明角法。

第八款　前已言平圓周徑之比例可用周率明之故半周與半徑之比例亦可用周率明之而四分全周之弧卽一象限與半徑之比可用二分周率之一明之。用此法以明角之大小則兩象限之度必以周率明之正角之度可以二分周率之一明之。

凡用半徑弧明其角度者恆用徧名爲元以別之。

以下所論之角或明言其角之度分數或但言其本角

之名.

第九款　無論何角可變其常度爲眞弧度亦可變其眞弧度爲常度.

以周字代周率 $三·一四一五九$. 未代半徑丙代全周則 $丙=二周未$. 令天爲等于半徑之弧其相配之角并爲常度則依幾何原本第六卷三十三題之理. $\frac{一八○^\circ}{天^\circ}=\frac{周未}{未}$. 故

$$天^\circ=\frac{三·一四一五九}{一八○^\circ}.$$

卽

$$天^\circ=五七·二九五七七.$$

若將井角爲主而求任角斗之常度必爲 $斗\times五七^{\circ}二九五七七$ 如反求之有任角呷已知其常度欲化爲以井爲主之度則其數必爲 $\dfrac{五七^{\circ}二九五七七}{呷}$。

三角比例數界說

第十款 若欲思一法能將平三角形之角與邊俱以數目論之則初時之念必欲攷明三角形之各邊與其各角所配之弧之長有何相關之理。

惟各角之弧線不能依幾何之理彼此相比又不能與邊之直線相比故思之未久即知用角度之數入算窒礙之事極多再久思之必棄去此意而借從角所作之直線以作此比例則有其角度之數即可求其比例之數有其比例之數亦可求其角度之數

所用之比例線祇爲直三角形（即句股形也）惟因其數之性情可依幾何之法彼此相比雖不能用此數以度其角卻能借此數以定其角故無論何種算學中皆可用此各線名曰三角比例數

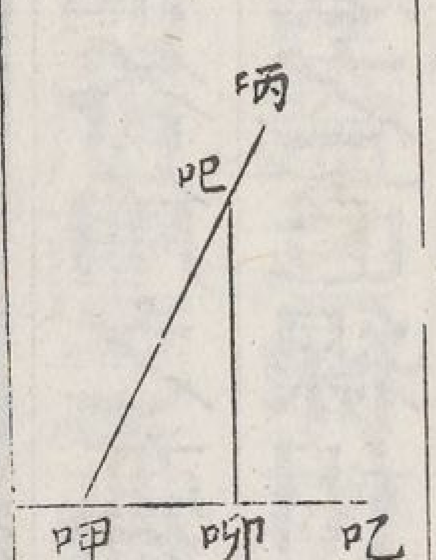
第十一款 無論何角若從其爲界之兩條直線上任取

一點自此點作線與彼線爲垂線或與彼線引長之線爲垂線則能成直三角形有界說三則如左

對正角之邊與對本角之邊比爲$\frac{高}{斜}$是謂本角之正弦

本角所倚之底邊與本角所對之邊比爲$\frac{高}{底}$是謂本角之正切

本角所倚之底邊與對正角之邊比爲$\frac{斜}{底}$是謂本角之正割



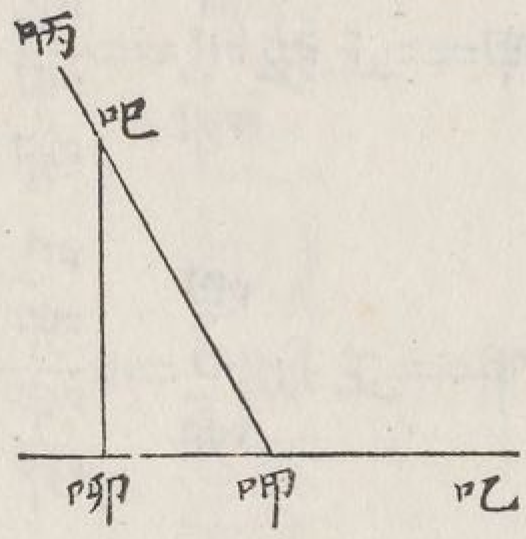
如圖令呷呐線從呷𠮙之方位起繞呷點旋轉成𠮙呷呐角又在呷呐線上任

取吧點自此點作直線吧唦與呷吃成垂線或與呷吃引長之線成垂線則呷角之比例數能以簡式明之

$$正弦呷=\frac{吧唦}{呷吧}$$

$$正切呷=\frac{吧唦}{呷唦}$$

$$正割呷=\frac{呷吧}{呷唦}$$



第十二款　有他角與本角相加而能成正角者則名其他角曰餘角　如本角爲四十五度則餘角亦爲四十五度本角爲三十度則餘角爲六十度是也　惟本角若大于九十度則其餘角爲負　如本角爲一百二十七度則餘角爲負三十七度

可見凡直三角形之二銳角彼此互視爲餘角。

餘角之正弦正切正割即本角之餘弦餘切餘割。

依此各界說之例得

餘弦呷＝正弦(九°丅呷)。

餘切呷＝正切(九°丅呷)。

餘割呷＝正割(九°丅呷)。

又從第十一款之例得

餘弦呷＝正弦$\angle$呷吧𠰳＝$\frac{呷吧}{呷𠰳}$＝$\frac{斜}{底}$。

餘切呷＝正切$\angle$呷吧𠰳＝$\frac{吧𠰳}{呷𠰳}$＝$\frac{高}{底}$。

餘割呷＝正割$\angle$呷吧𠰳＝$\frac{吧𠰳}{呷吧}$＝$\frac{高}{斜}$。

依本款界說得

餘弦(九°丄呷)＝正弦(丅呷)。

餘切(九°丄呷)＝正切(丅呷)。

餘割(九°丄呷)＝正割(丅呷)。

第十三款　由此可知凡本角之餘弦、餘切、餘割，即爲正割、正切、正弦之倒數，因 $正割呷 = \frac{一}{餘弦呷}$ 　$正切呷 = \frac{一}{餘切呷}$ 　$正弦呷 = \frac{一}{餘割呷}$ 故也。

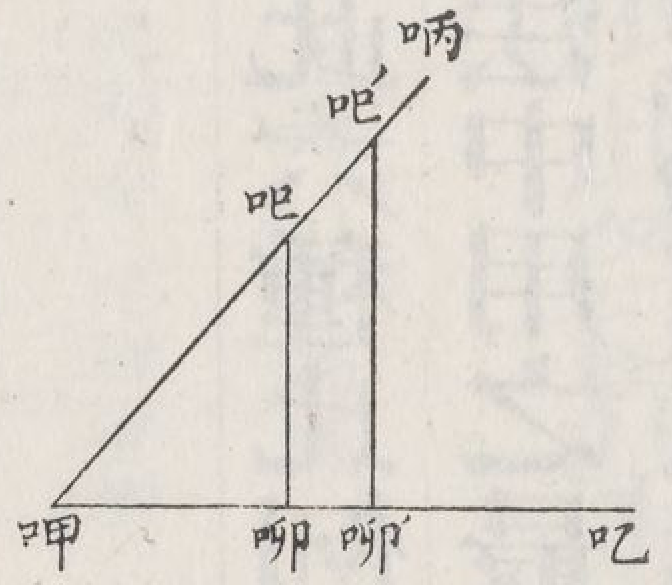
此六種比例數，謂弦切割三正三餘也惟正弦、餘弦、正切，爲三角法中用之最繁，故名此三線爲第一類比例數，其餘三線爲次類比例數，有時亦可用之。

更有兩線，亦可用以定角之大小，卽正矢與餘矢是也。

其正矢呷、餘矢呷可用以明一丅餘弦呷、一丄餘弦呷兩式。

第十四款　有此各數則能以比例之理定任何平三角形邊角相求之法.

假如有已知之角𠮙呷呐.若此角已定.則無論在呷呐



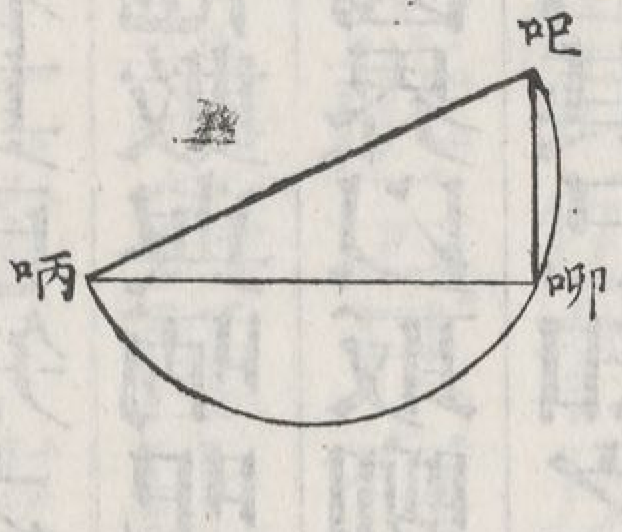
線上任取吧點.作垂線吧𠰍.又任取第二點吧′.作垂線吧′𠰍′.則所成之呷吧𠰍三角形.呷吧′𠰍′三角形.其比例之數恆相同.因其兩箇三角形爲同式.故可以同理相比也.

所以無論用呷吧𠰍三角形.或呷吧′𠰍′三角形.以明呷角之正弦正切正割之數.其理必無異.

設有已知之比例數如 $正弦呷 = 甲$ 或 $餘弦呷 = 甲$ 或 $正切呷 = 甲$ ……而欲定其角則

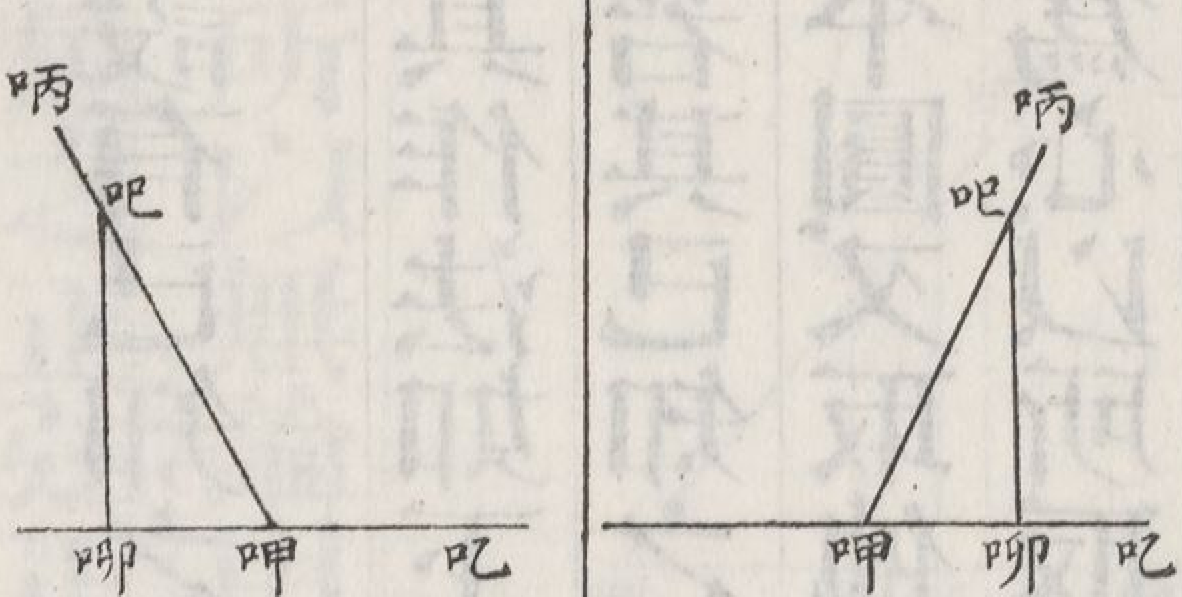
其作法如下

若其已知之數為正弦則可任取一吧呐線為徑作半平圓又取他數與呐吧之比若甲與一之比乃以吧點為心以所取之他數為半徑作圓界與前所有之圓界交于㖹乃作呐㖹吧吧㖹則吧呐㖹角之正弦等于甲因吧㖹呐為正角所以 $正弦\,吧呐㖹 = \frac{呐吧}{吧㖹} = 甲$



若其已知之數爲餘弦則作其角之理與前相似亦取他數與㖞吧之比若甲與一之比惟必以㖞爲心而作圓界以取㖿點耳

若其已知之數爲正切則可任取一呷㖿線又取他數與呷㖿之比若甲與一之比乃從呷㖿線之㖿端作垂線吧㖿與所取之他數等長則吧呷㖿角之正切必與甲相等



因 甲＝$\frac{吧㖿}{呷㖿}$＝呷正切 故也

以上爲已有弦切各數而用幾何之法作其本角之形所以表明前各款界說之意也

若將各比例數與其各角之度並列爲表則能彼此相定而得極密之數以規矩畫圖者大不及此也

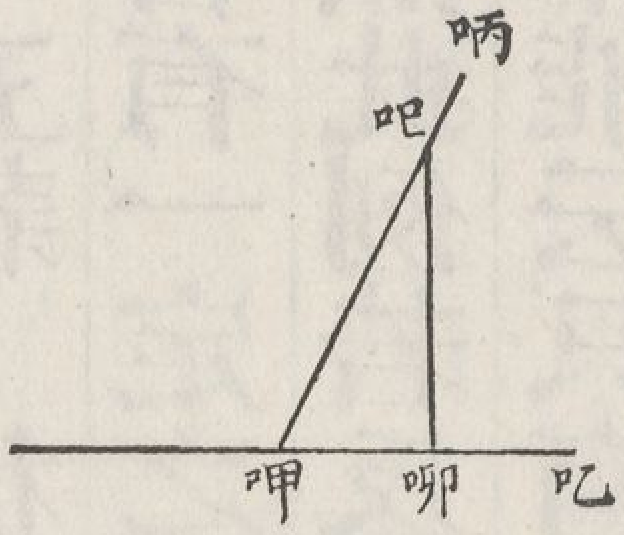
第十五款　從以上各款之說可見無論何角其比例線各有一定之數而不致游移

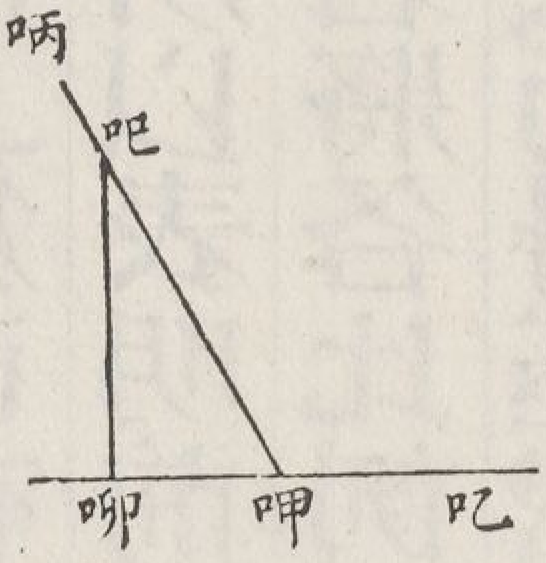
然此例若反言之則未必爲眞因已知其弦切各數則不能云只有一角與之相配也此理俟後解明之

論各種比例線有彼此相關之理

第十六款　茲欲以任何角之正弦明其餘弦之式且欲

以任何角之餘弦明其正弦之式又欲以任何角之正弦餘弦明其割線切線之各式





如圖呷吧叩為直三角形其 $吧叩^{二} \perp 呷叩^{二} = 呷吧^{二}$ 故 $\left(\frac{呷吧}{吧叩}\right)^{二} \perp \left(\frac{呷吧}{呷叩}\right)^{二} = 一$

即 $正弦^{二}呷 \perp 餘弦^{二}呷 = 一$ ㊀所以知 $餘弦呷 = \perp\sqrt{一 \top 正弦^{二}呷}$ $正弦呷 = \perp\sqrt{一 \top 餘弦^{二}呷}$ 此式中正負二

號並用之意于第三十一·第三十二·兩

款解明之又依同理得

$$\text{正切甲}=\frac{\text{呷卯}}{\text{吔卯}}=\frac{\frac{\text{呷吔}}{\text{呷卯}}}{\frac{\text{呷吔}}{\text{吔卯}}}=\frac{\text{餘弦甲}}{\text{正弦甲}}$$

㊁從第十三款之理

又得

$$\text{正割甲}=\frac{\text{餘弦甲}}{\text{一}}$$

㊂。

$$\text{餘切甲}=\frac{\text{正切甲}}{\text{一}}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{餘弦甲}}$$

㊃。

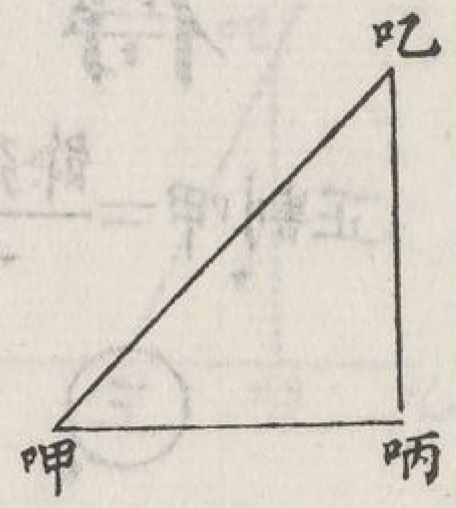
$$\text{餘割甲}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{一}}$$

㊄。

第十七款 若本角之正弦餘弦已知則可用前款㊁至㊄各式而求其正切正割之數。

一題　設有呷吃呭三角形呭為正角其呷角為四十五度欲求其比例數

此為兩等邊直三角形其兩銳角之和必等于正角而呷吃二角必皆等于半箇正角



惟因

$$\text{呷吃}^{二}=\text{呷呭}^{二}+\text{吃呭}^{二}=\text{二}\,\text{吃呭}^{二}$$

卽

$$\text{呷吃}=\sqrt{\text{二}}\,\text{吃呭}$$

所以得

$$\text{正弦四五}^{\circ}=\frac{\text{吃呭}}{\text{呷吃}}=\frac{\text{一}}{\sqrt{\text{二}}}=\frac{\text{一}}{\text{二}}\sqrt{\text{二}}$$

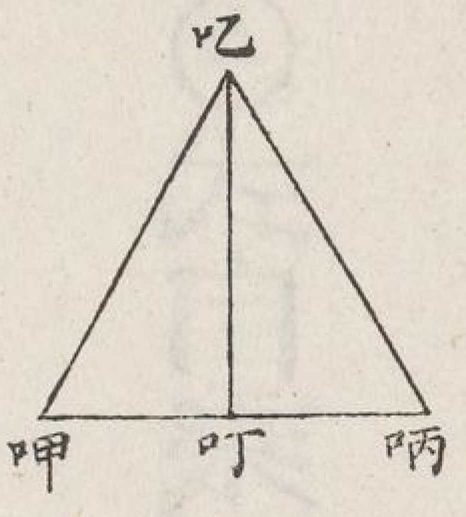
$$\text{餘弦四五}^{\circ}=\text{正弦}(\text{九〇}^{\circ}-\text{四五}^{\circ})=\text{正弦四五}^{\circ}=\frac{\text{一}}{\text{二}}\sqrt{\text{二}}$$

$$\text{正切四五}^{\circ}=\text{餘切四五}^{\circ}=\text{一}$$

$$\text{正割四五}^{\circ}=\text{餘割四五}^{\circ}=\sqrt{\text{二}}$$

二題　設有呷吃哂等邊三角形各角皆等于三分兩正角之一。即每角皆為六十度求其比例之數。

任從何角作線與對邊為垂線則吃叮平分呷吃哂角亦平分呷哂邊。



一　所以從

$正弦呷吃叮 = \frac{呷叮}{呷吃} = \frac{\frac{一}{二}呷吃}{呷吃} = \frac{一}{二}$。

得

$正弦三〇^{\circ} = 餘弦六〇^{\circ} = \frac{一}{二}$。

$餘弦三〇^{\circ} = 正弦六〇^{\circ} = \sqrt{\frac{三}{四}} = \frac{\sqrt{三}}{二}$。

依第十六款之理

$正切三〇^{\circ} = 餘切六〇^{\circ} = \frac{一}{\sqrt{三}} = \frac{\sqrt{三}}{三}$。

$餘切三〇^{\circ} = 正切六〇^{\circ} = \sqrt{三}$。

$正割三〇^{\circ} = 餘割六〇^{\circ} = \frac{二\sqrt{三}}{三}$。

$餘割三〇^{\circ} = 正割六〇^{\circ} = 二$。

第十八款　前所得之五箇公式(第十六款)為各比例數相求之根本凡有祇論一角之比例數皆能從此五式得之茲擇其變式中之最要者錄之如下

將㈡式自乘兩邊各加一即得

$$一+正切^2甲=一+\frac{正弦^2甲}{餘弦^2甲}=\frac{正弦^2甲+餘弦^2甲}{餘弦^2甲}。$$

惟因

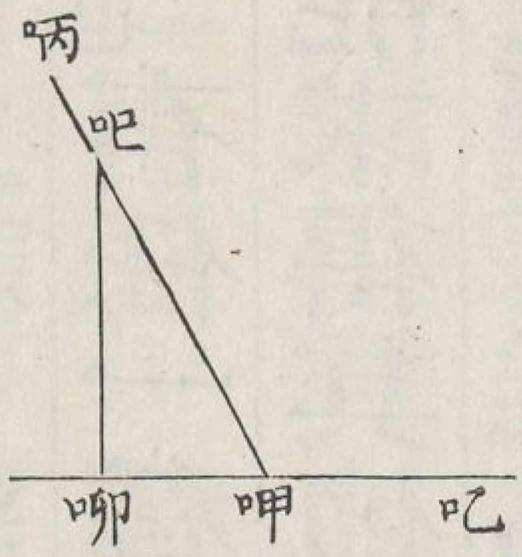
$$正弦^2甲+餘弦^2甲=一。$$

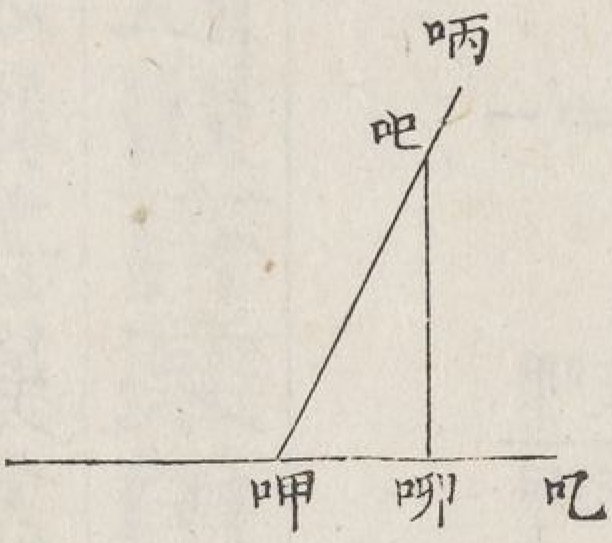
而

$$\frac{一}{餘弦^2甲}=正割^2甲。$$

所

以知一丄正切^{二}呷＝正割^{二}呷。其條段之理，觀呷吧哵三角形，亦能明之。





因其呷吧^{二}＝呷哵^{二}丄哵吧^{二}。所以$\left(\frac{呷哵}{呷吧}\right)^{二}$＝一丄$\left(\frac{呷哵}{吧哵}\right)^{二}$。即正割^{二}呷＝一丄正切^{二}呷。若以九〇丅呷代其呷。

則得$\left(\frac{吧哵}{呷吧}\right)^{二}$＝一丄$\left(\frac{吧哵}{呷哵}\right)^{二}$。即餘割^{二}呷＝一丄餘切^{二}呷。

第十九款　總之無論何角若其六種比例數謂弦切割三正三餘也有任一種已知則從第十六款中五箇根本之式必能求得其他五種數惟須解開一二次方程式即可得之無甚難爲之事也

假如有某角已知其正切之數欲求其正弦餘弦則必將

$$\text{正弦}^{\text{二}}\text{呷} \perp \text{餘弦}^{\text{二}}\text{呷} = \text{一}$$

（一）

$$\text{正切呷} = \frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}$$

（二）從（二）式得

$$\text{正弦呷} = \text{正切呷餘弦呷}.$$

則

$$\text{正弦}^{\text{二}}\text{呷} = \text{正切}^{\text{二}}\text{呷餘弦}^{\text{二}}\text{呷}.$$

乃將 $\text{正弦}^{\text{二}}\text{呷}$ 之同數代入

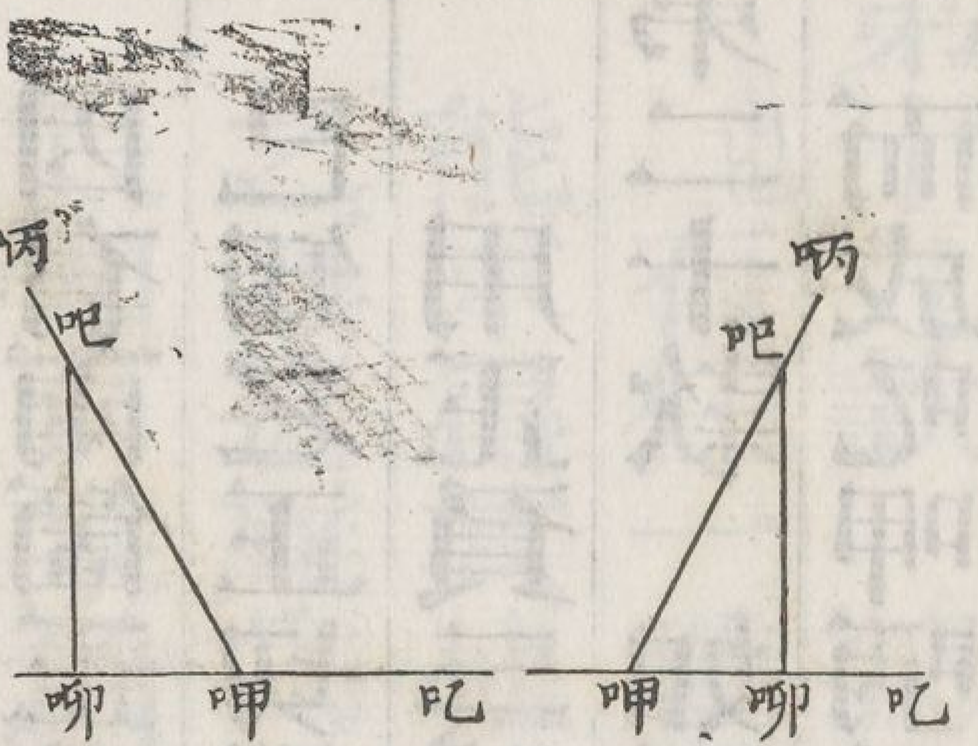
㊀式中卽易得$餘弦呷=\pm\frac{一}{\sqrt{一+正切^{二}呷}}$，$正弦呷=\pm\frac{正切呷}{\sqrt{一+正切^{二}呷}}$。此式中正負兩號並用之意

因有兩箇正弦兩箇餘弦其數相等而號相反皆能與已知之正切相配此理後在第三十三款中解明之

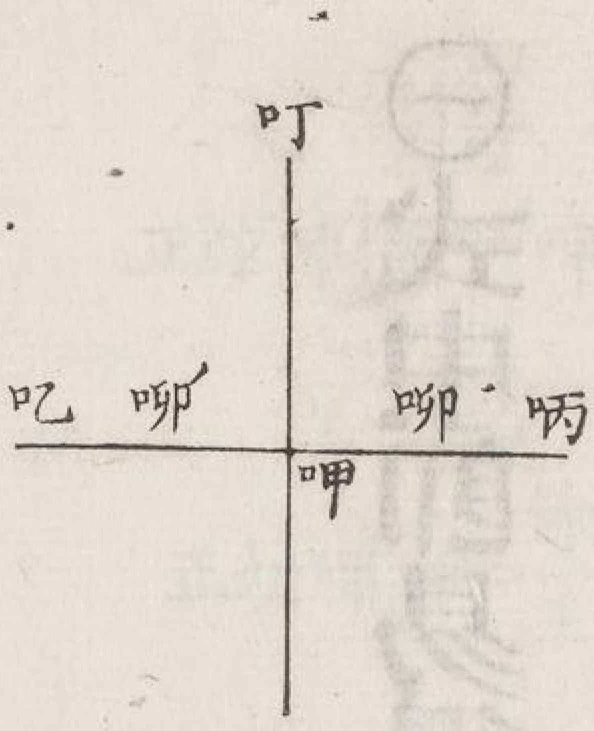
用正負二號以明方位相反之法

第二十款　如圖呷呐線從呷叱之方位起繞呷點左旋而成叱呷呐角則繞行之時無論至何處其所成之角

各有比例線故角之大于正角者其比例線之方位可與角之小于正角者相反卽如吃呷呐角小于正角則呷唧線在呷點之右吃呷呐角若大于正角則呷唧線在呷點之左



凡方向相反之事在算式中可用正負二號以顯其線



之方位如呐吃直線內有已知之兩點呷與吃其相距為 呷吃=甲 設于直線內任

取二點.一爲哵.一爲哵′.其與呷點之相距皆爲乙.今欲以代數之式明此二點距叱之數.則以天代其相距數卽得 天＝甲⊥乙. 或 天＝甲丅乙. 其用⊥用丅.必視其所取之點在呷呐之間抑呷叱之間.故可作兩式以顯其點之方位.

若其兩點距呷之數相等.而方位相反者.則可用一式而以正負二號明之.卽如于 天＝甲⊥乙. 式中.令乙爲負數.卽可變爲 天＝甲丅乙. 則哵′點在呷之左.哵點在呷之右.其距呷之數

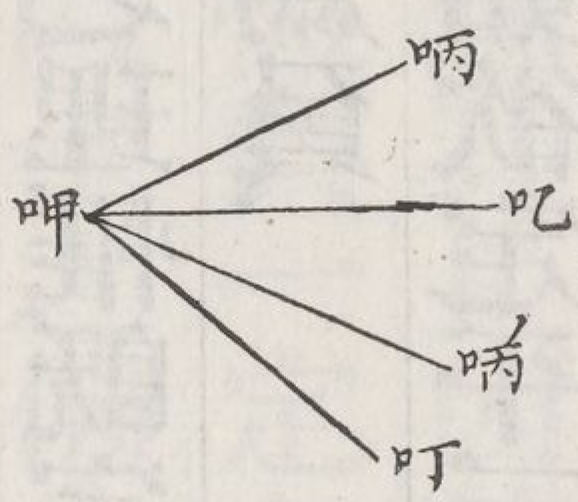
相同如此則能定叱哂線內所能有各點之方位卽能定⿰口卯⿰口卯′等點離呷叮線之各相距

依同理推之若以叱哂線爲主而作垂線呷叮在呷叮線上任取各點或于與呷哂平行之線上任取各點則各點之距呷哂線若向上度之其號當爲正若向下度之其號當爲負

其叱哂呷叮兩線若非正角相交則但用正負二號不足以顯出點之方位所以惟在十字正交之線或彼此平行之線能用正負號顯之

第二十一款　又有一法能用正負號明角之方位

如圖呷𠮙與呷叮兩線相交于呷而成𠮙呷叮角名之曰呷角又命呷𠮙與呷呐或呷吶相交而成之角曰𠮙角今欲明呷呐線或呷吶線與呷叮線相交所成之角則可以呐名之而呐=呷丄𠮙。或吶=呷丅𠮙。此兩式又可合爲呐=呷±𠮙。欲定𠮙角之號當辨其角在呷𠮙線之上下而異上爲正下爲負所以凡直線從某方位用一順之方向而旋則所成之各角可用正號明之若其線以相反之方向而旋則其所成之各角可用負號明之。此例不但角度如此即



其角所配之弧亦如此.

第三十二款 以上所論之事.能引起以下各要例.其例爲代加德所作.

例曰.如在任何線內.其線或直或曲俱可取一點爲原點.而測他點之相距.可用正負之號明之.

點在原點之某邊.當爲正.某邊.當爲負.本無一定不易之理.惟既定其在此邊者爲正.則不得不以在彼邊者爲負.

如欲定平三角形之角點.即從正交之二軸.以縱橫線量之.如欲定其各角.可用與本角兩界平行之線測之.

常以其不滿九十度者紀之。如欲定三角形之邊只須論其長因其方位已爲對此邊之角兩界所限則不能恆與一定之線爲平行。故不能以正負之號定之。

以上之例。爲代加德所定者也。此例之理非有法能從已知之事證之惟各算學家猥云此例不誤。

凡用三角比例。切勿反代加德所定之例其例之妙處用時自能知之。

第二十三款

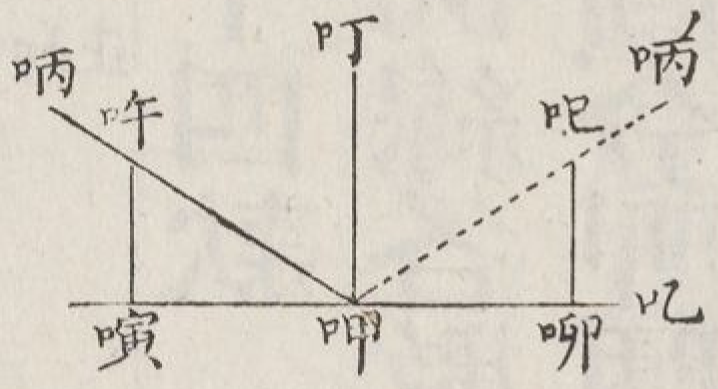
凡他角與本角相加而能成一百八十度者。名其他角曰外角。

若本角大于一百八十度則其外角爲負。如本角爲一百度則外角爲八十度。 如本角爲二百度則外角爲負二十度。

凡兩角相加而能成一百八十度者其兩角能彼此互爲外角。

凡本角之比例線與外角之比例線其數無異惟除正弦餘割之外其號俱相反。

如圖呷叱哂爲大于九十度之角名之曰呷角則于呷哂線上任取一吘點作吘嗔線此線與叱呷引長之線爲垂線又作叱呷哂角等于嗔呷吘角取呷吧等于呷



咋作吧咧為呷吃之垂線則吧呷咧三角形與咋呷嗔三角形各數相等

故可令

呷咧＝乙

吧咧＝巳

呷吧＝未

呷嗔＝丅乙

嗔咋＝巳

呷咋＝未

惟因

正弦吃呷呐＝正弦呷＝$\frac{呷咋}{咋嗔}$＝$\frac{未}{巳}$

正弦吃呷呐＝正弦（一八〇丅呷）＝$\frac{呷吧}{吧咧}$＝$\frac{未}{巳}$

所以知

正弦呷＝正弦（一八〇丅呷）

惟因

餘弦吃呷呐＝餘弦呷＝$\frac{呷咋}{呷嗔}$＝$\frac{未}{丅乙}$

餘弦吃呷呐＝餘弦（一八〇丅呷）＝$\frac{呷吧}{呷咧}$＝$\frac{未}{乙}$

所以又知

餘弦呷＝丅餘弦（一八〇丅呷）

$$\text{正切呷}=\frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{丅餘弦}(\text{一八〇丅呷})}{\text{正弦}(\text{一八〇丅呷})}=\text{丅正切}(\text{一八〇丅呷})\cdot$$

$$\text{正割呷}=\frac{\text{餘弦呷}}{\text{一}}=\frac{\text{丅餘弦}(\text{一八〇丅呷})}{\text{一}}=\text{丅正割}(\text{一八〇丅呷})\cdot$$

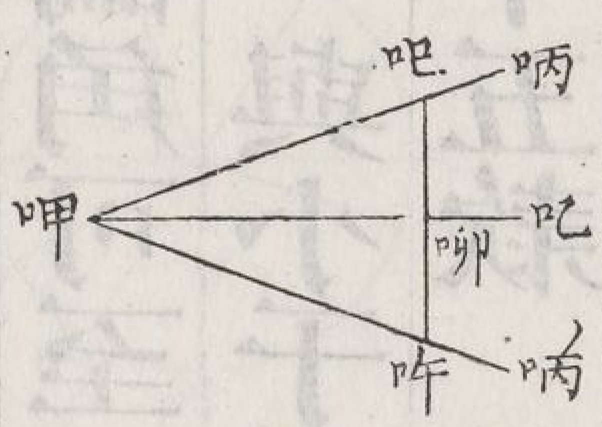
$$\text{餘切呷}=\frac{\text{正切呷}}{\text{一}}=\frac{\text{丅正切}(\text{一八〇丅呷})}{\text{一}}=\text{丅餘切}(\text{一八〇丅呷})\cdot$$

$$\text{餘割呷}=\frac{\text{正弦呷}}{\text{一}}=\frac{\text{正弦}(\text{一八〇丅呷})}{\text{一}}=\text{餘割}(\text{一八〇丅呷})\cdot$$

第二十四款　若有兩角、大小相等而正負相反者、則其比例線各數相同、惟除餘弦正割之外、其號皆相反。

如圖、令呷呩線從原方位呷吃、繞呷點而旋行成吃呷

㖠角其度爲呷惟若從呷吃原方位而用相反之方向



旋行成吃呷㖠角等于吃呷㖠角則其度數爲丅呷又于呷吃線上任取𠰍點作吧𠰍吘垂線而遇呷㖠呷㖠于吧吘二點令

$$\frac{呷吧}{} = 未 \qquad \frac{呷𠰍}{} = 乙 \qquad \frac{吧𠰍}{} = 巳$$

則

$$\frac{𠰍吘}{} = 丅巳 \qquad \frac{呷吘}{} = 未$$

惟因

$$正弦\frac{吃}{呷㖠} = 正弦呷 = \frac{呷吧}{吧𠰍} = \frac{未}{巳}$$

$$正弦\frac{吃}{呷㖠} = 正弦(丅呷) = \frac{呷吘}{吘𠰍} = \frac{未}{丅巳}$$

所以

正弦呷 = 丅正弦(丅呷)

惟因

$$\text{餘弦}\,\substack{\text{叱}\\\text{呷}\\\text{呐}}=\frac{\text{呷吧}}{\text{呷㖙}}=\frac{\text{未}}{\text{乙}}.$$

$$\text{餘弦}\,\substack{\text{叱}\\\text{呷}\\\text{呐}}=\frac{\text{呷吘}}{\text{呷㖙}}=\frac{\text{未}}{\text{乙}}.$$

所以

$$\text{餘弦呷}=\text{餘弦}(\text{丅呷}).$$

惟因

$$\text{正切呷}=\frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{餘弦}(\text{丅呷})}{\text{丅正弦}(\text{丅呷})}=\text{丅正切}(\text{丅呷}).$$

$$\text{正割呷}=\frac{\text{餘弦呷}}{\text{一}}=\frac{\text{餘弦}(\text{丅呷})}{\text{一}}=\text{正割}(\text{丅呷}).$$

所以

$$\text{餘切呷}=\text{丅餘切}(\text{丅呷}).$$

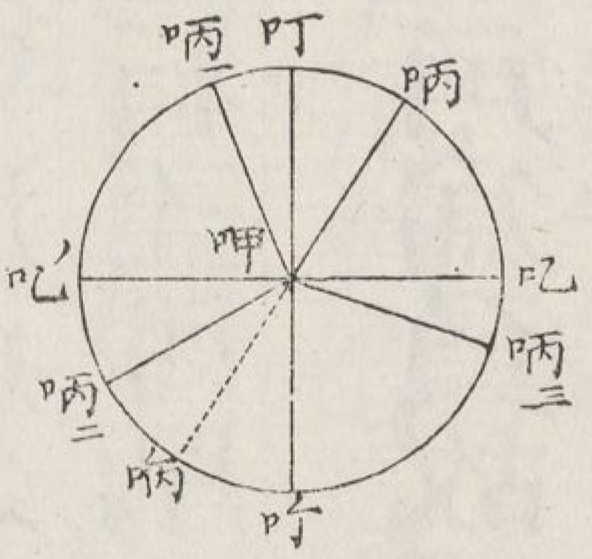
$$\text{餘割呷}=\text{丅餘割}(\text{丅呷}).$$

論角可至任何大其大于正角之比例線可化之使與小于正角之比例線無異

第二十五款　幾何中所論之角俱小于兩正角之和惟三角法中論角之意比古法更廣因三角之法可以角

度之數明之者並無限量所以角亦可至甚何大。

如以呷為心以任何直線呷吃為半徑而作平圓令呷呐半徑從原方位呷吃向呐呐方向而旋則與呷吃線能成大小不同之各角其號俱為正。



令 吃呷呐角 ＝ 斗。 吃呷呐一角 ＝ 斗一。 若其呷呐線恆依一順之方向而旋轉不已即可成周丄吃呷呐二之角此即為大于兩箇正角之角其角之度數為 $\frac{\text{呷吃}}{\text{吃叮吃呐二}}=\text{斗二}$。 又可成周丄吃呷呐三之角其度為 $\frac{\text{呷吃}}{\text{吃叮吁呐三}}=\text{斗三}$。

至呷呩半徑歸到呷吃方位之時所成之角等于四箇正角之和即二周也其第二次至呷呩之時所成之全角爲二周丄吃呷呩即二周丄斗總之其卯次至呷呩時所成之角爲二(卯丅一)周丄斗又以同理令呷呩從呷吃之方位逆行而旋則呷呩與呷吃所成之各角爲負亦能以此法定之即如呷呩半徑行至呷呩三與呷呩二之方位時能定其吃呷呩三角吃呷呩二角爲負故可用丅(二周丅斗三)及丅(二周丅斗二)明之此與正號之角用斗三斗二定之者無異理也

凡角之大于兩正角之和者有時名之曰測角以別之

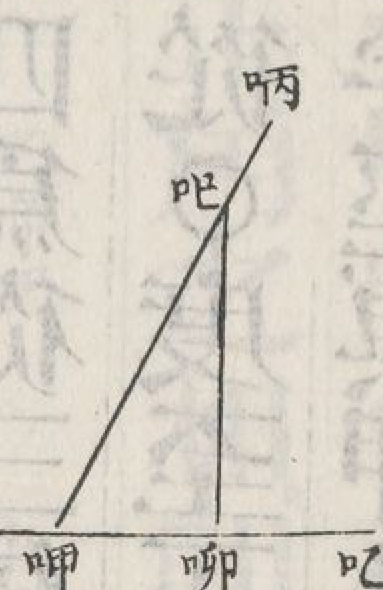
第二十六款　茲論角從○度至二周度之間各比例數大小正負改變之法

因無論何角其比例之數皆與其直三角形之弦不相關故可令半徑為常數末而論以下四種角

一為從○度至正角間之角　二為從正角至兩倍正角間之角　三為從兩倍正角至三倍正角間之角

四為從三倍正角至四倍正角間之角

從○度至正角間之各角以下圖明之其旋動之呷㕲半徑與呷吃相合之時其角為○度而吧㗇不見因其



$\frac{呷}{咖}=\frac{呷}{吧}=未.$

所以

$正弦\ 〇^{\circ}=\frac{未}{〇}=〇.$

$餘弦\ 〇^{\circ}=\frac{未}{未}=一.$

$正切\ 〇^{\circ}=\frac{未}{〇}=〇.$

$餘割\ 〇^{\circ}=\infty.$

$正割\ 〇^{\circ}=一.$

$餘切\ 〇^{\circ}=\infty.$

其角從〇度漸增而大則吧咖線漸變而長呷咖線漸變而短所以正弦正切正割之數漸增餘弦餘切餘割之數漸損至其角變爲正角則

$\frac{吧}{咖}=\frac{呷}{吧}=未.$

而其呷咖線不見所以

$正弦\ \frac{二}{周}=\frac{未}{未}=一.$

$餘弦\ \frac{二}{周}=\frac{未}{〇}=〇.$

$正切\ \frac{二}{周}=\frac{〇}{未}=\infty.$

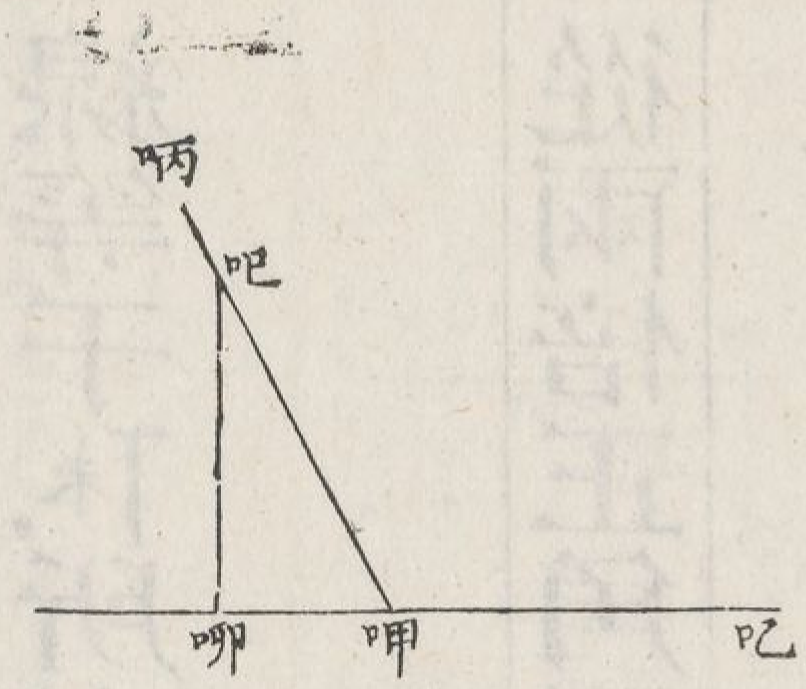
$餘割\ \frac{二}{周}=一.$

$正割\ \frac{二}{周}=\infty.$

$餘切\ \frac{二}{周}=〇.$

凡在○度與正角間之各比例數其號俱爲正又因呷吧唎三角形大邊必對大角故角若小于半箇正角則正弦小于餘弦角若大于半箇正角則正弦大于餘弦

從正角至兩倍正角間之各角因其叱呷哂角從二分周率之一漸增至周率故其吧唎漸短呷唎線漸長所以正弦正切正割之數漸損餘弦餘切餘割之數漸增又因吧唎爲正呷唎爲負故其正弦餘割爲正而他數俱爲負



及其角度增至等于周率之時則吧唎線不見而呷唎

線等于丅未。所以

正弦周 $=\frac{\text{未}}{\text{〇}}=$ 〇。

餘弦周 $=\frac{\text{未}}{\text{丅未}}=$ 丅一。

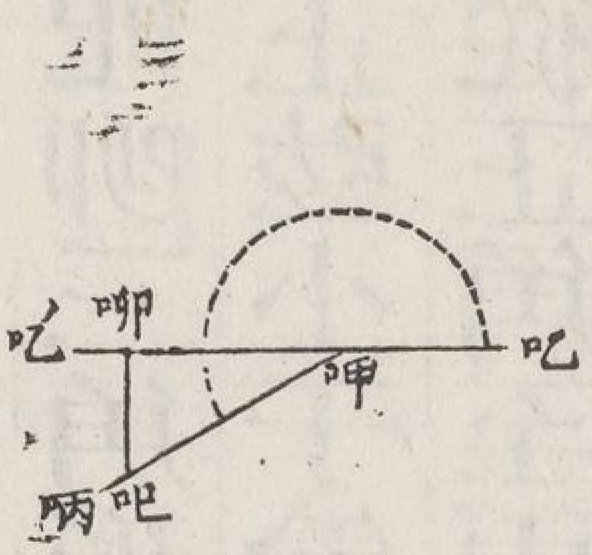
正切周 $=\frac{\text{丅未}}{\text{〇}}=$ 〇。

餘割周 $=$ ∞。

正割周 $=$ 丅一。

餘切周 $=$ ∞。

從兩倍正角至三倍正角間之各角。如圖之⿰口乙呷⿰口丙角。



從周率漸增未至$\frac{\text{二}}{\text{三}}$周之度。則正弦正切正割之數漸增。餘弦餘切餘割之數漸損。又因吧⿰口卯為負。呷⿰口卯亦為負。故其正弦餘弦正割餘割皆為負。而正切餘切為正。及其角增至$\frac{\text{二}}{\text{三}}$周之度。則呷⿰口卯不見

而$\text{吧叩}=\text{丅未}$。所以

$\text{正弦}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\frac{\text{未}}{\text{丅未}}=\text{丅}$

$\text{餘弦}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\frac{\text{未}}{\text{〇}}=\text{〇}$。

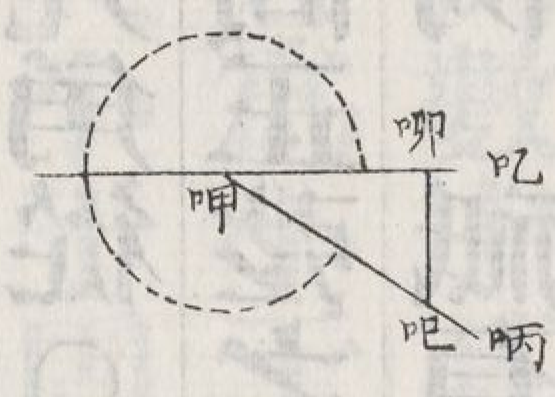
$\text{正切}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\frac{\text{〇}}{\text{丅未}}=\infty$。

$\text{餘割}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\text{丅一}$。

$\text{正割}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\infty$。

$\text{餘切}\,\frac{\text{二}}{\text{三周}}=\text{〇}$。

從三倍正角至四倍正角間之各角，如圖之叱呷呐角，



從$\frac{\text{二}}{\text{三周}}$未增至二周之時，則正弦正切正割漸損，餘弦餘切餘割漸增，又因吧叩為負，呷叩為正，故餘弦正割為正，而他數俱為負，及角滿二周，則

$\text{正弦二周}=\frac{\text{未}}{\text{〇}}=\text{〇}$。

$\text{餘弦二周}=\frac{\text{未}}{\text{未}}=\text{一}$。

$\text{正切二周}=\frac{\text{未}}{\text{〇}}=\text{〇}$。

$\text{餘割二周}=\infty$。

$\text{正割二周}=\text{一}$。

$\text{餘切二周}=\infty$。

從此得三例如左.

一例　無論何角之正弦餘弦恆不能大于一、故其數可爲或正或負之小數除一之外不能有整數.

凡角從〇增至二周之時在$\frac{\text{四}}{\text{一}}$周與$\frac{\text{四}}{\text{三}}$周之間及$\frac{\text{四}}{\text{五}}$周與$\frac{\text{四}}{\text{七}}$周之間正弦之數大于餘弦.

二例　祇有正切餘切之數從正號至無窮從負號至無窮其間之各數俱可通可作實數用之.

三例　正割餘割之數從正至負之間不可通不能作非小于一之分數用之.

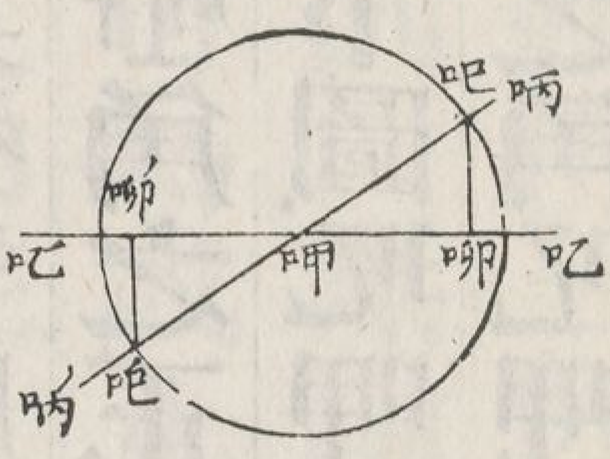
第二十七款　用代數以解三角之題必常論大于幾倍

周率之角度所以必設法以小于二分周率之角之比例數明其大于幾倍周率之角以下所論之事學者必嫌其太詳細太繁瑣然此事若不解明則以下所論之各角總不得通也

比例數中其用最繁者爲正弦餘弦因凡大于周率之角必爲小于周率之角與周率之角相加而成或爲數倍其小于周率之角與周率之角相加而成故特先攷明周丄斗角之正弦餘弦其斗者卽小于周率之角也

如下圖𠮙呷呐角以斗代之將呐呷線引長至呐其正號之角𠮙呷呐可用周丄斗代之則此二角必有相等之正

弦二為$\frac{\text{呷吧}}{\text{吧𠰭}}$。一為$\frac{\text{呷吧}'}{\text{吧}'\text{𠰭}}$。惟因吧𠰭與吧′𠰭有相反之方向故其數之正負必不同。



又以同理論兩角之餘弦$\frac{\text{呷吧}}{\text{呷𠰭}}$與$\frac{\text{呷吧}'}{\text{呷𠰭}'}$。其數亦相等而號相反所以知

正弦（周丄斗）＝丅正弦斗。

餘弦（周丄斗）＝丅餘弦斗。

又如將斗與二周相加則呷呐半徑必歸到原方位而其

正弦餘弦之號再變而復其初所以

正弦(二周±斗)＝正弦斗

餘弦(二周±斗)＝餘弦斗

總之無論斗角之大小如何若與周率之角相加或與任奇倍周率之角相加則其作界之半徑必移至與原方向相反之處故其正弦餘弦之數雖不變而號之正負必變

惟若將斗角與二倍周率之角相加或與任偶倍周率之角相加則其作界之半徑仍歸至原方位故其正弦

餘弦大小正負俱不變。

所以任幾倍周率之角，其正弦必爲○。其餘弦或爲丄一。或爲丅一。而正負之號，因倍數之奇偶而異，奇則爲負，偶則爲正，即

正弦卯周＝○。

餘弦卯周＝(丅一)^{卯}。

從以上各事易知

正切(周丄斗)＝正切斗。

正切(二周丄斗)＝正切斗。

第二十八款　以上之式謂前款及第二十三款二十四款之式也無論其角

大小正負俱合于理故得

正弦(周丅斗)=正弦斗
餘弦(周丅斗)=丅餘弦斗　(一)

正弦(周丄斗)=丅正弦斗
餘弦(周丄斗)=丅餘弦斗　(二)

正弦(二周丄斗)=正弦斗
餘弦(二周丄斗)=餘弦斗　(三)

正弦(丅斗)=丅正弦斗
餘弦(丅斗)=餘弦斗　(四)

其(一)式爲○與周率間所有斗角同數之證如將其斗

變爲周丄斗卽得

正弦(丅斗)=正弦(周丄斗)

餘弦(丅斗)=丅餘弦(周丄斗)

此兩式以(二)(四)兩式證之知其眞

合于理如將其斗再以周率加之可至任何大　又如

以丅斗代其斗、可見其兩式仍合于理、所以知無論何角、此兩式必爲眞、

其㊁式明正號之角、前已證其爲眞、如以丅斗代㊁式中之斗、則與㊀式同、所以知負號之角、其式亦爲眞、

觀㊃式易知其斗可以丅斗代之、亦合于理、又從設此各式之法、可見斗之大小、並無限量、

以㊂式明斗之各正數、已知其理爲眞、因任何角無論正負、與三倍周率之角相加、則其正弦餘弦俱不改變、所以斗若爲任何負數、其式亦爲眞、

從第十二款、又得各式如左、

餘弦(三周丄斗)＝正弦(丅斗)＝丅正弦斗、

餘切(三周丄斗)＝正切(丅斗)＝丅正切斗、

餘割(三周丄斗)＝正割(丅斗)＝正割斗、

第二十九款　學者若已明上數款之理則易將任何大角之比例數化之爲正角以內之比例數、其化法必先將滿三百六十度者去之則正弦餘弦正切皆不改變若其角尚大于一百八十度者則可以一百八十度減之將其正弦餘弦之號反之惟正切之號

不變若其角尚大于九十度則必取其外角而將其餘弦與正切之號反之惟正弦之號不變其他比例數之正負可用正弦餘弦正切定之

題設有大于三百六十度之角欲以正角以內之比例數明之

卽如

正弦一〇二九°＝正弦三〇九°＝丅正弦一二九°

＝丅正弦五一°

餘弦一〇二九°＝餘弦三〇九°＝丅餘弦一二九°

＝丅餘弦五一°

又如

正切六七五°＝正切三一五°＝正切一三五°

＝丅正切四五°

又如

正弦(丅一〇二九°)＝正弦(丅三〇九°)＝

丅正弦(丅一二九°)＝正弦五一°

第三十款

惟因

$$\text{正弦斗}=\text{正弦}(\text{周丅斗})=\text{丅正弦}(\text{丅斗})=\text{丅正弦}(\text{周丄斗}).$$

又因能將任何角與二周任幾倍之角相加減而其比例數不變所以

$$\text{正弦斗}=\text{正弦}(\text{二卯周丄斗})=\text{正弦}[(\text{二卯丄一})\text{周丅斗}]$$

$$=\text{丅正弦}(\text{二卯周丅斗})=\text{丅正弦}[(\text{二卯丄一})\text{周丄斗}].$$

或但以

$$\text{正弦斗}=\text{正弦}[\text{卯周丄}(\text{丅一})^{\text{卯}}\text{斗}].$$

明之亦同。

又以同理得

餘弦斗＝餘弦(三卯周丄斗)＝丅餘弦[(三卯丄一)周丅斗]

＝餘弦(三卯周丅斗)＝丅餘弦[(三卯丄一)周丄斗].

或但以

餘弦斗＝(丅一)^卯餘弦(卯周±斗)

明之亦同.

惟因

正切斗＝丅正切(周丅斗)＝丅正切(丅斗).

＝正切(周丄斗).

故

正切斗＝正切(三卯周丄斗)

＝丅正切[(三卯丄一)周丅斗]

＝丅正切(三卯周丅斗)

＝正切[(三卯丄一)周丄斗].

或但以

正切斗＝正切(卯周丄斗)

明之亦同.

以上各式中其卯或爲○或爲任何正負之整數其斗爲任何正負之角度

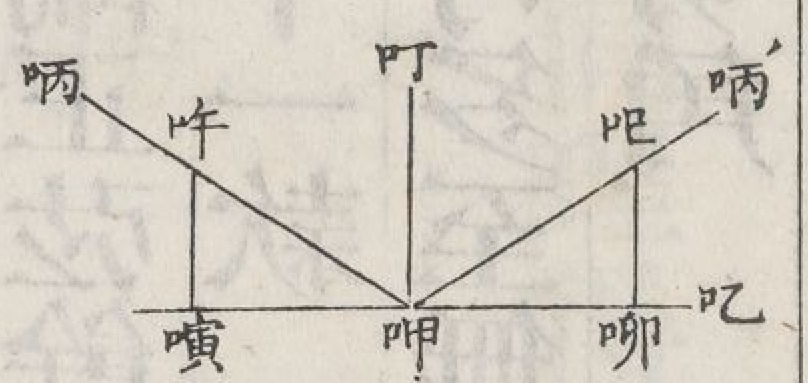
既有正弦餘弦正切之式則他比例數之式亦可從此求得矣

論正弦餘弦各數所配之角

第三十一款　從上說可見凡有同用此比例數之角其角可多至無窮茲設比例之數爲已知而求其相配之一切角

求合于 正弦斗＝甲 式之各角

依第十四款之法作圖令吃呷呐角＝一角．其正弦＝甲．又作吃呷呐角＝周丅角．此角爲



吃呷呐之外角則其正弦斗＝甲．只能以呷吃與呷呐爲界之角或呷吃與呷呐爲界之角明之

所以其正號之角或爲吃呷呐角或爲吃呷呐角或爲吃呷呐角或爲吃呷呐與二周之任若干倍相加所成之角或爲吃呷呐與二周之任若干倍相加所成之角即二卯周丄角．二卯周丄周丅角．

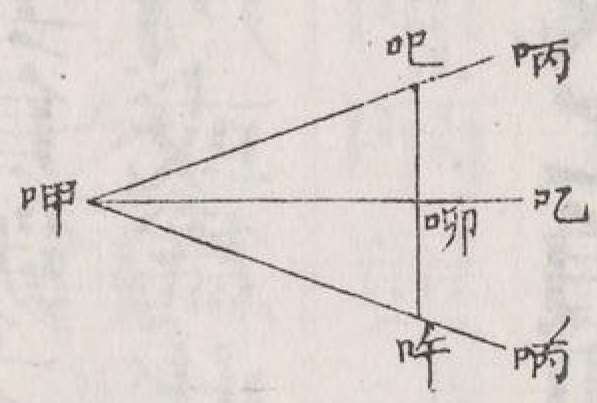
又其負號之角爲叱呷哂與叱呷哂依負號之理所成之角或爲此二角與二周之任若干倍相加依負號之理所成之角卽丅二卯周丅(二周丅角)與丅二卯周丅(周丄角)或丅二(卯丄一)周丄角與丅(二卯丄一)周丅角

以上正負兩幅角式可用一式賅之爲卯周丄(丅一)^{卯}角以此式代其角則正弦角不因此而變惟其餘弦角必爲±餘弦角其號因卯之奇偶而異已見第二十九款

若以 正弦角 爲主而明其 餘弦角. 則依第十六款之說必得兩箇同大小之數而其正負相反.

第三十二款

求合于 餘弦斗＝甲 式之各角.



作 吃呷呐角＝角. 其 餘弦＝甲. 又作負角 吃呷呐′＝吃呷呐. 則其 餘弦斗＝甲 只能以呷吃與呷呐爲界之角.或呷吃與呷呐′爲界之角.明之.

所以其正號之角或爲𠮙呷昞角或爲𠮙呷昞角此爲缺形

之角或爲𠮙呷昞與二周之任若干倍相加所成之角或爲𠮙呷昞與二周之任若干倍相加所成之角即二卯周丄角與二卯周丄(二周丅角)

又其負號之角爲𠮙呷昞與𠮙呷昞依負號之理所成之角或爲此二角與二周之任若干倍相加依負號之理所成之角即丅二卯周丅(二周丅角)與丅二卯周丅角

以上正負兩幅角式可用一式賅之爲二卯周丄丅角其卯爲任何

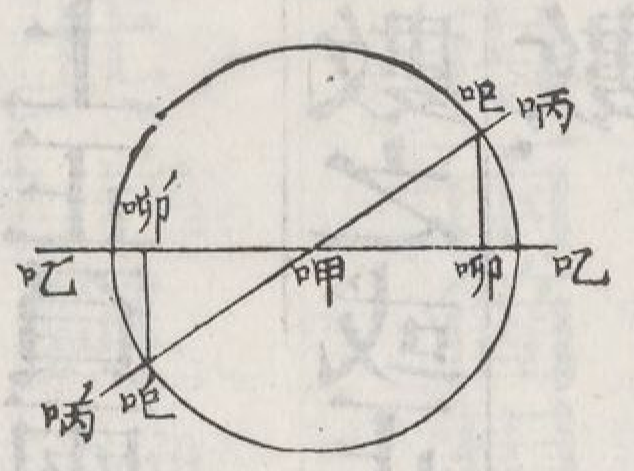
整數言卯或正或負或○俱通也所以此式爲斗角之公數、

若將二卯周十角代其角則餘弦角不因此而變惟正弦角二十正弦角已見第二十九款、若以餘弦角爲主而明其正弦角、則依第十六款之說必得兩箇大小相等正負相反之數、

第三十三款

求合于正切斗二甲式之各角、

依第十四款之理作圖令吃呷呐角＝角、其正切＝甲、而將呐呷引長之



至呐則正切斗＝甲、只能以呷吃與呷呐為界之角或呷吃與呷呐為界之角明之、

所以其正號之角或為吃呷呐角或為吃呷呐角或為吃呷呐與二周之任若干倍相加所成之角或為吃呷呐與二周之任若干倍相加所成之角即二卯周丄角、二卯周丄(周丄角)、

又其負號之角爲叱呷呐與叱呷呐依負號之理所成之角或爲此二角與二周之任若干倍相加依負號之理所成之角即丅二卯周丅(二周丅角)與丅二卯周丅(周丅角)或丅二(卯丄一)周丄角與丅(二卯丄一)周丄角

以上正負兩幅角式可用一式賅之爲卯周丄角其卯爲任何整數之或正或負者即〇亦在其內所以此式爲斗之公數

又從第三十款之例得餘弦(二周丄角)＝±餘弦角正弦(卯周丄角)＝±正弦角其號依卯之奇

偶而異。

如以正切依第十九款之法明任何角之正弦餘弦則必得兩箇相同之數因以卯周丄角代其角則正切角之同數不變而其餘弦角與正弦角各有兩數大小相同而正負相反之故。

第三十四款 茲不必再論正割餘割餘切各數之角式因

$$\text{餘割斗}=\frac{\text{一}}{\text{正弦斗}}\cdot\quad \text{正割斗}=\frac{\text{一}}{\text{餘弦斗}}\cdot\quad \text{餘切斗}=\frac{\text{一}}{\text{正切斗}}\cdot$$

所以凡解

$$\text{餘割斗}=\text{甲}\cdot\quad \text{正割斗}=\text{甲}\cdot\quad \text{餘切斗}=\text{甲}\cdot$$

之角式必與解

正弦斗＝甲. 餘弦斗＝甲. 正切斗＝甲. 角式之理相通惟勿忘 正弦斗＝甲 餘弦斗＝甲 兩式中甲之同數必在丄一與丅一之間又勿忘 正切斗＝甲. 其甲在丄∞丅∞之間.

此數款中所論之角式為與所設之比例數相配之最小正號之角也所以其度數常在○與周率之間.惟正弦餘割之數若為負則所配最小之角必在周率與$\frac{三周}{二}$之間.

附款 前于第二十款中已言用正負二號以明方位之

相反此外更有一公號之式爲餘弦斗丄$\sqrt{\text{一}}$正弦斗此式能顯出任何線之方位與軸線所成之斜度所以可用甲（餘弦斗丄$\sqrt{\text{一}}$正弦斗）代一直線其長爲甲其與軸線所成之角爲斗之大小及方位故余于所著解明相等式之書中曾有證云若$\text{角}=\text{餘弦}\frac{\text{卯}}{\text{二周}}\perp\sqrt{\text{一}}\,\text{正弦}\frac{\text{卯}}{\text{二周}}$則自一

角、$二$角以至$卯一$角，俱為天^{卯}丅一＝〇式之根，任循環多次，其根之次第必依其原次第。若于平圓內作卯箇半徑為甲、甲$_{二}$以至甲$_{卯一}$，如各半徑所成之$\frac{二周}{卯}$角彼此相等，則各半徑之方位必合于甲^{角}、甲^{二角}以至甲^{卯一角}，各數所以其各半徑之大小及方位可用各數明之，雖其正負之號各有不同，然其大小無不相同，因角為其各根之一，如令甲^{角}代其甲，則因甲$_{二}$與甲，其方位之相關，如甲$_{二}$與甲方位相關，則必用$(甲^{角})^{角}$即甲^{二角}代其甲$_{二}$，又依同理，甲^{三角}能代甲$_{三}$之大小及

方位其他仿此類推。所以各線甲、甲$_{二}$……彼此之方位可以$角_{甲}$、$角_{甲}$……明之，則依原線即軸線而論，可用$角_{甲}$、$角_{甲}^{二}$以至$角_{甲}^{卯丅一}$、$角_{甲}^{卯}$各項明之。其$角_{甲}^{卯}$之式若令$甲^{卯}=一$、必與原線甲相合。所以其公式為

$$甲角^{未}=甲\left(餘弦\frac{卯}{二未周}\perp\sqrt{丅一}\,正弦\frac{卯}{二未周}\right)、$$

此式能明$甲^{未}$半徑與原線相斜所

成之角爲$\frac{\text{卯}}{\text{二未周}}$。所以（斗弦正$\pm$斗弦餘）甲能明有長等于甲而與原線相斜成斗角之線之長短及方位，因恆能得未與卯爲整數，而其$\frac{\text{未}}{\text{卯}}$或眞等于$\frac{\text{斗}}{\text{二周}}$，或甚近于$\frac{\text{斗}}{\text{二周}}$，所以甲未或眞合于與原線成斗角之線，或甚近于與原線成斗角之線。

興化劉彝程校算

上海曹擷亭繪圖

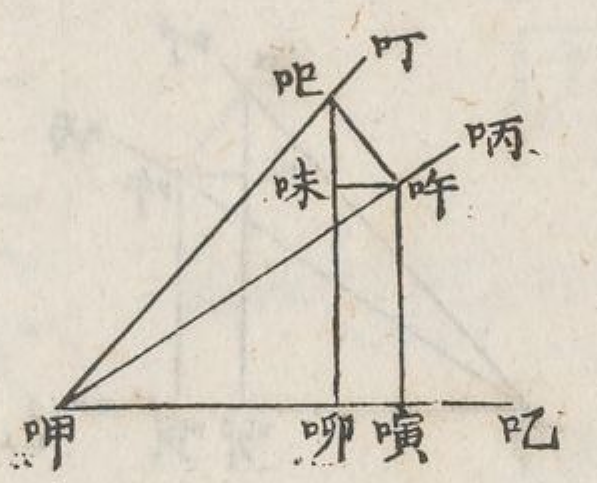
三角數理卷二

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

此卷論兩角或多角之各比例數

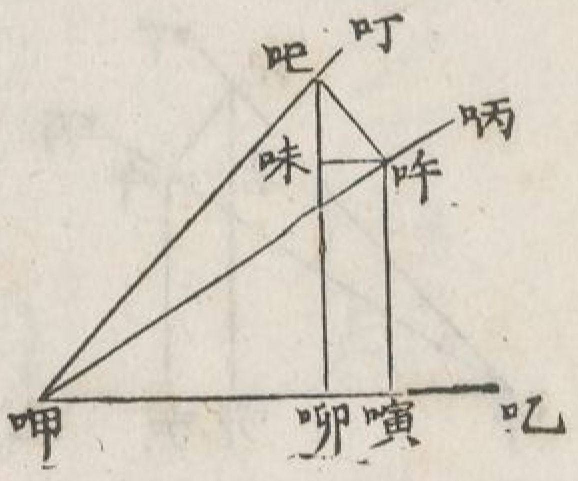
求任兩角和較所成之角之正弦餘弦

第三十五款　以兩角之正弦餘弦明和角之正弦餘弦



如圖令吃呷哂角爲呷令哂呷叮角爲吃則吃呷叮＝呷丄吃于呷叮線內任取吧點作吧卯與呷吃爲垂線作吧咋與呷哂爲垂

線又作吽味吽嗔與呷吃一爲平行一爲垂線則味嗔爲矩形而吽吧味角爲吧吽味之餘角所以必等于味吽呷角即等于呷角



惟因

$$正弦(呷丄吃)=\frac{呷吧}{吧㖂}=\frac{呷吧}{㖂味丄味吧}=\frac{呷吧}{吽嗔}丄\frac{呷吧}{吧味}$$

若將$\frac{呷吧}{吽嗔}$以原比例$\frac{呷吽}{吽嗔}$與$\frac{呷吧}{呷吽}$代之又其

$\frac{\text{呷叱}}{\text{叱咊}}$亦以原比例代之則得

$$\text{正弦}(\text{呷}丄\text{叱})=\frac{\text{呷吘}}{\text{吘嗔}}\times\frac{\text{呷叱}}{\text{呷吘}}丄\frac{\text{叱吘}}{\text{叱咊}}\times\frac{\text{呷叱}}{\text{叱吘}}=$$

$$\text{正弦呷餘弦叱}丄\text{餘弦呷正弦叱}。$$

又因

$$\text{餘弦}(\text{呷}丄\text{叱})=\frac{\text{呷叱}}{\text{呷咧}}=\frac{\text{呷叱}}{\text{呷嗔}丅\text{嗔咧}}$$

$$=\frac{\text{呷叱}}{\text{呷嗔}}丅\frac{\text{呷叱}}{\text{吘咊}}。$$

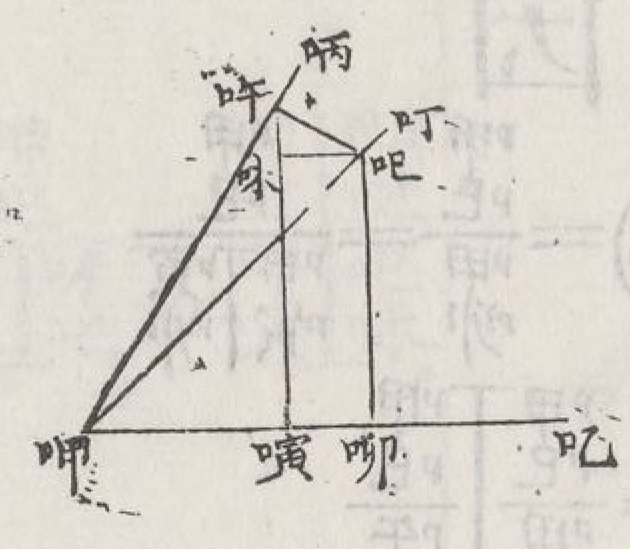
各以原比例代之即得

$$\text{餘弦}(\text{呷}丄\text{叱})=\frac{\text{呷吘}}{\text{呷嗔}}\times\frac{\text{呷叱}}{\text{呷吘}}丅\frac{\text{叱吘}}{\text{吘咊}}\times\frac{\text{呷叱}}{\text{叱吘}}=$$

$$\text{餘弦呷餘弦叱}丅\text{正弦呷正弦叱}。$$

第三十六款　以兩角之正弦餘弦明較角之正弦餘弦

如圖令吃呷呐角爲呷令呐呷叮角爲吃則吃丅呷＝吃呷叮于呷叮線內任取吧點作吧唧爲呷吃之垂線作吧吘爲呷呐之垂線又作吘嗔吧味爲呷吃之垂線及平行線則味唧爲矩形而吧吘味角爲呷吘嗔之餘角所以必等于吘呷嗔角即等于呷角



惟因(吃丅呷)正弦＝$\frac{呷吧}{吧唧}$＝$\frac{呷吧}{吘味}$丅$\frac{呷吧}{吘嗔}$＝$\frac{呷吧}{吘味丅吘嗔}$若將其兩項分數各以原比例代之則

得

$$\text{正弦}(\text{呷丁叱})=\frac{\text{呷吘}}{\text{吘嗔}}\times\frac{\text{呷吧}}{\text{呷吘}}\;\text{丁}\;\frac{\text{吘吧}}{\text{吘味}}\times\frac{\text{呷吧}}{\text{吘吧}}=$$

正弦呷餘弦叱丁餘弦呷正弦叱.

又因

$$\text{餘弦}(\text{呷丁叱})=\frac{\text{呷吧}}{\text{呷唧}}=\frac{\text{呷吧}}{\text{呷嗔}\;\text{丁}\;\text{嗔唧}}=\frac{\text{呷吧}}{\text{呷嗔}}\;\text{丁}\;\frac{\text{呷吧}}{\text{吧味}}.$$

若將其兩項分數亦各以原比例代之則得

$$\text{餘弦}(\text{呷丁叱})=\frac{\text{呷吘}}{\text{呷嗔}}\times\frac{\text{呷吧}}{\text{呷吘}}\;\text{⊥}\;\frac{\text{吧吘}}{\text{吧味}}\times\frac{\text{呷吧}}{\text{吧吘}}=$$

餘弦呷餘弦叱⊥正弦呷正弦叱.

第三十七款　觀前兩款之圖，似呷吃必爲正號之角，而呷⊥吃必小于正角，又在呷⊤吃之式中，其呷角必大于吃角，方可通。然亦可改之，使合于相反之理。惟因角之和較，變態甚多，用圖明之，不足以盡其變，不如但用以下四式爲便。

正弦(呷⊥吃)＝正弦呷餘弦吃⊥餘弦呷正弦吃　(一)、

餘弦(呷⊥吃)＝餘弦呷餘弦吃⊤正弦呷正弦吃　(二)、

正弦(呷⊤吃)＝正弦呷餘弦吃⊤餘弦呷正弦吃　(三)、

餘弦(呷⊤吃)＝餘弦呷餘弦吃⊥正弦呷正弦吃　(四)、

此四式，無論角之大小正負，無

不可通。

一其㊂㊃兩式呷必大于吃若呷不大于吃則有法可通之因呷小于吃則㊂㊃兩式俱合于吃丅呷之用所以可改之為

正弦(呷丅吃)＝丅正弦(吃丅呷)＝丅正弦吃餘弦呷丄餘弦吃正弦呷

餘弦(呷丅吃)＝丄餘弦(吃丅呷)＝餘弦吃餘弦呷丄正弦吃正弦呷

從此得正弦(呷丅吃)與餘弦(呷丅吃)、則無論呷之大小于吃、

其式必同所以上四式中如呷與吃俱爲正號之角而吃呷角小于九十度或兩角俱在。度與四十五度之間者其四式必爲眞

二其㊂㊃兩式俱能從㊀㊁兩式得之祇須將其吃改爲丅吃耳

所以可見。度與負四十五度間之角㊀㊁兩式能合于吃爲負號之用茲欲證其㊀㊁兩式亦合于呷在。度與負四十五度間之各負號亦必爲眞

假如其哂角爲小于四十五度之角而合丅哂=丅呷則從此可

見

正弦(呷丄叱)＝正弦(丅呞丄叱)＝丅正弦(呞丅叱)．

餘弦(呷丄叱)＝餘弦(丅呞丄叱)＝餘弦(呞丅叱)．

惟因呞與叱俱在㊂㊃兩式所證之限內．又因

正弦呞＝丅正弦呷．

餘弦呞＝餘弦呷．

所以得

正弦(呷丄叱)＝丅(正弦呞餘弦叱丅餘弦呞正弦叱)

＝正弦呷餘弦叱丄餘弦呷正弦叱．

餘弦(呷丄叱)＝餘弦呞餘弦叱丄正弦呞正弦叱

＝餘弦呷餘弦叱丅正弦呷正弦叱．

卽與㊀㊁兩式相同．

三欲證(一)(二)兩式內其呷吃兩角正負之限可推廣之

如令

呷＝九〇°丄呐

其呐為丅四五°與丄四五°間之角依第十二款之法取其餘角卽得

正弦(呷丄吃)＝正弦(九〇°丄呐丄吃)＝餘弦(丅呐丅吃)＝餘弦(呐丄吃)

餘弦(呷丄吃)＝餘弦(九〇°丄呐丄吃)＝正弦(丅呐丅吃)＝丅正弦(吃丄呐)

惟因

正弦呷＝餘弦(丅呐)＝餘弦呐

餘弦呷＝正弦(丅呐)＝丅正弦呐

又吃呐兩角必在其限

內所以得

正弦(呷丄𠮙)＝餘弦⿰口丙餘弦𠮙丅正弦⿰口丙正弦𠮙

＝正弦呷餘弦𠮙丄餘弦呷正弦𠮙

餘弦(呷丄𠮙)＝丅正弦⿰口丙餘弦𠮙丅餘弦⿰口丙正弦𠮙

＝餘弦呷餘弦𠮙丅正弦呷正弦𠮙

則㊀㊁兩式俱合于呷為正號之角其限可至一百三十五度若再以同法推之其限可至任若干大

又因前已證呷為小于四十五度之正號之角其㊀㊁兩式必為眞則各負數亦必為眞依此法可證呷角正號之限非不能小于四十五度

㈠㈡兩式既合于呷爲任何正號之角又合于呷爲任何負角之用又可用同法證其吃角亦如是則呷吃二角之限可任意推廣之又因㈠㈡兩式既可如此則其㈢㈣兩式亦然

第三十八款

求任倍之角之正弦餘弦

若于前款正弦(呷丄吃)與餘弦(呷丄吃)之式內令吃＝呷則得

正弦二呷＝二正弦呷餘弦呷　㈠

餘弦二呷＝餘弦^{2}呷丅正弦^{2}呷　㈡

從此兩

式可推得任幾倍之角之正弦餘弦.

若于㊀式中以$\sqrt{一丅正弦^{二}呷}$代其餘弦呷.以$\sqrt{一丅餘弦^{二}呷}$代其正弦呷.則得

$$正弦二呷＝二正弦呷\sqrt{一丅正弦^{二}呷}.$$

$$正弦二呷＝二餘弦呷\sqrt{一丅餘弦^{二}呷}.$$

由此知正弦二呷.若以正弦呷或餘弦呷明之每式必有兩箇同數因其平方根之故也.

又如于㊁式中以一丅正弦^{二}呷代其餘弦^{二}呷.以一丅餘弦^{二}呷代其正弦^{二}呷.可得其餘弦

之式

餘弦二甲═一丅二正弦^{2}甲

餘弦二甲═二餘弦^{2}甲丅一

則其餘弦二甲以正弦甲或餘弦甲明之亦有兩箇同數

第三十九款

若于前所有之正弦(甲丄乙)與餘弦(甲丄乙)兩式中令乙═二甲卽得

正弦三甲═正弦甲餘弦二甲丄餘弦甲正弦二甲

餘弦三甲═餘弦甲餘弦二甲丅正弦甲正弦二甲

若將

其$\text{正弦}^{二}\text{甲}$與$\text{餘弦}^{二}\text{甲}$．以前款所得之同數代之又依$\text{正弦}^{二}\text{甲}\ 丄\ \text{餘弦}^{二}\text{甲} = 一$之式化之．則可得

$$\text{正弦三甲} = \text{正弦甲}\left(一\ 丅\ \text{二正弦}^{二}\text{甲}\right)\ 丄\ \text{餘弦甲二正弦甲餘弦甲}$$

$$= \text{正弦甲}\left(一\ 丅\ \text{二正弦}^{二}\text{甲}\right)\ 丄\ \text{二正弦甲}\left(一\ 丅\ \text{正弦}^{二}\text{甲}\right)$$

$$= \text{三正弦甲}\ 丅\ \text{四正弦}^{三}\text{甲}.$$

$$\text{餘弦三甲} = \text{餘弦甲}\left(\text{二餘弦}^{二}\text{甲}\ 丅\ 一\right)\ 丅\ \text{正弦甲二正弦甲餘弦甲}$$

$$= \text{餘弦甲}\left(\text{二餘弦}^{二}\text{甲}\ 丅\ 一\right)\ 丅\ \text{二餘弦甲}\left(一\ 丅\ \text{餘弦}^{二}\text{甲}\right)$$

$$= \text{四餘弦}^{三}\text{甲}\ 丅\ \text{三餘弦甲}.$$

依此法可求得四甲五甲．以

至任若干倍之呷之正弦餘弦式另有乘角之公式在他卷中詳論之.

其正弦寅呷若以正弦呷明之則視寅數之奇偶而異每式必有兩數其餘弦寅呷若以餘弦呷明之祇有一數其故可解之如下.

因凡有正弦之角其公數為卯周丄(丅一)^{卯}角. 若將其正弦寅呷以正弦呷明之則其所得之數因寅數之為奇為偶而異寅若為偶則必

爲

$$\text{正弦寅}\left[\text{卯周}\,丄\,(\text{丅一})^{\text{卯}}\text{角}\right]＝$$

$$\text{餘弦寅卯周正弦}(\text{丅一})^{\text{卯}}\text{寅角}$$

$$＝\pm\text{正弦寅角}.$$

寅若爲奇則必爲

$$(\text{丅一})^{\text{卯}}(\text{丅一})^{\text{卯}}\text{正弦寅角}＝\text{正弦寅角}.$$

此因任幾倍周率之角其正弦必爲〇、而餘弦則爲±一之故。

又依同理知 餘弦寅呷 若以 餘弦呷 明之則爲

$$\text{餘弦寅}(\text{二卯周}\pm\text{角})＝$$

$$\text{餘弦二寅卯周餘弦}(\pm\text{寅角})$$

$$＝\text{餘弦寅角}$$

求任幾分之角之正弦餘弦

第四十款　若將第三十八款(一)(二)兩式中之呷變之爲$\frac{呷}{二}$則其式變爲

$$二正弦\frac{呷}{二}餘弦\frac{呷}{二}=正弦呷$$

$$餘弦^{二}\frac{呷}{二}丅正弦^{二}\frac{呷}{二}=餘弦呷$$

而

$$餘弦^{二}\frac{呷}{二}丄正弦^{二}\frac{呷}{二}=一$$

第四十一款

若其餘弦呷爲已知之數則已有本角之餘弦而求其半角

之正弦餘弦法將前款之末兩式相加減而求其平方之根得

$$正弦\frac{呷}{二}=\sqrt{\frac{一丅餘弦呷}{二}}$$

$$餘弦\frac{呷}{二}=\sqrt{\frac{一丄餘弦呷}{二}}$$

因此兩箇根式有$\pm$之號故其所求之數$正弦\frac{呷}{二}$與$餘弦\frac{呷}{二}$必各有大小相同正負相反之兩數此因根號內之呷可用$二卯周\pm角$代之此卽第三十二款所謂能有此餘弦之角之公數也則其相等式之前項亦可用此式同法代之所以又能

用 $\text{正弦}\left(\text{卯周}\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)$．$\text{餘弦}\left(\text{卯周}\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)$．兩式以晐之其卯爲任何整數．

惟以上兩式依第二十九款之例其卯若爲偶數必同于

$$\text{正弦}\left(\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)=\pm\text{正弦}\frac{\text{角}}{\text{二}}．$$
$$\text{餘弦}\left(\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)=\text{餘弦}\frac{\text{角}}{\text{二}}．$$

卯若爲奇數則同于

$$-\text{正弦}\left(\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)=\mp\text{正弦}\frac{\text{角}}{\text{二}}．$$
$$-\text{餘弦}\left(\pm\frac{\text{角}}{\text{二}}\right)=-\text{餘弦}\frac{\text{角}}{\text{二}}．$$

由此可見若 $\text{正弦}\frac{\text{卯}}{\text{二}}$ 與 $\text{餘弦}\frac{\text{卯}}{\text{二}}$．從 $\text{餘弦}\text{角}$ 而定之必有兩數大小相等正負相反．

然此兩數之外不能再有他數。

第四十二款

若其$正弦呷$為已知之數則已有本角之正弦而求其半角之正弦餘弦可用

$$二正弦\frac{二}{呷}餘弦\frac{二}{呷}＝正弦呷。$$

$$餘弦^{二}\frac{二}{呷}丄正弦^{二}\frac{二}{呷}＝一。$$

兩式相加減而求其平方之根得

$$\left\{\begin{array}{l}餘弦\frac{二}{呷}丄正弦\frac{二}{呷}＝\sqrt{一丄正弦呷}\\ 餘弦\frac{二}{呷}丅正弦\frac{二}{呷}＝\sqrt{一丅正弦呷}\end{array}\right\}$$

㊀。從此易得

$$正弦\frac{二}{呷}＝二\sqrt{一丄正弦呷}丅\sqrt{一丅正弦呷}。$$

$$餘弦\frac{二}{呷}＝二\sqrt{一丄正弦呷}丄\sqrt{一丅正弦呷}。$$

此兩式中之呷。若

爲小于九十度之角，則餘弦二呷大于正弦二呷，而兩者俱爲正，所以

但取其正號之根。

因正弦二呷與餘弦二呷之式中各有兩箇根式，則必有四箇同數。其

所以能有四箇同數者，因其式必應包括凡有正弦＝正弦呷之角

之半角之正弦餘弦，即必包括凡有三卯周丄(丅一)卯三角之各角，其卯爲任何整

數詳見第三十一款或包括三卯周⊥$\frac{二}{角}$與三(卯丅一)周⊥$\frac{二}{(周丅角)}$兩箇角式視卯之奇偶而異.

所以依卯之奇偶取其角之正弦得正弦$\frac{二}{呷}$為餘弦$\frac{二}{卯周}$正弦$\frac{二}{角}$與餘弦$\frac{二}{(卯丅一)周}$正弦$\frac{二}{周丅角}$.

卽$\pm$正弦$\frac{二}{角}$與$\pm$正弦$\frac{二}{周丅角}$. 其偶倍三周之角正弦為○. 餘弦為$\pm$一.

又依同理視卯數之奇偶而取其角之餘弦則可得其

餘弦$\frac{二}{呷}$為餘弦$\frac{二}{卯周}$餘弦$\frac{二}{角}$與餘弦$\frac{二}{(卯丅一)周}$餘弦$\frac{二}{周丅角}$．即$\frac{丄}{丅}$餘弦$\frac{二}{角}$與$\frac{丄}{丅}$餘弦$\frac{二}{周丅角}$．

從以上各式．可見其正弦$\frac{二}{呷}$與餘弦$\frac{二}{呷}$．若從正弦呷求之．必有四數．兩兩相等而其號相反．惟此四數之外．不能再有他數．

若其角為正角．則$\frac{二}{周丅角}$與$\frac{二}{角}$．皆為半箇正角．而四數變為兩數．

第四十三款

若已知正弦呷之數爲甲則依前款之式求其$\text{正弦}\frac{\text{呷}}{\text{二}}$必有四箇同數然其能合于$\text{甲}=\text{正弦呷}$之各角內若有特設之角其半角之正弦餘弦只能有一數者必用法查出此爲甲所特設之角其半角之正弦餘弦大小正負如何則能定以下兩式

$$\text{餘弦}\frac{\text{呷}}{\text{二}} \perp \text{正弦}\frac{\text{呷}}{\text{二}} = \pm\sqrt{\text{一} \perp \text{正弦呷}}$$

$$\text{餘弦}\frac{\text{呷}}{\text{二}} \top \text{正弦}\frac{\text{呷}}{\text{二}} = \pm\sqrt{\text{一} \top \text{正弦呷}}$$

此兩式右邊之根號應用之正負須

視呷角之大小而定之

呷角若小于九十度則上下兩式之根俱爲正

呷角若在九十度與一百八十度之間則餘弦三呷與正弦三呷俱爲正而其正弦爲大所以上式之根當爲正下式之根當爲負

呷角在一百八十度與二百七十度之間亦上式之根爲正下式之根爲負因其餘弦三呷雖爲負而其數小于正弦三呷之正數故也

呷角在二百七十度與三百六十度之間則 $\text{正弦}\frac{\text{三}}{\text{呷}}$ 為正 $\text{餘弦}\frac{\text{三}}{\text{呷}}$ 為負而其負數為大所以上下兩式之根皆當為負

第四十四款　玆欲將本角之正弦餘弦明其三分本角之角之正弦餘弦

法將第三十九款之式變其呷為 $\frac{\text{三}}{\text{呷}}$ 即得

$$\text{正弦呷}=\text{三正弦}\frac{\text{三}}{\text{呷}}-\text{四正弦}^{\text{三}}\frac{\text{三}}{\text{呷}}$$

$$\text{餘弦呷}=\text{四餘弦}^{\text{三}}\frac{\text{三}}{\text{呷}}-\text{三餘弦}\frac{\text{三}}{\text{呷}}$$

設有餘弦呷爲已知之數欲求其餘弦$\frac{呷}{三}$。則令餘弦呷$=$甲。餘弦$\frac{呷}{三}=$人。而得

$$人^{三}\,丅\,\frac{四}{三}人\,丅\,\frac{四}{一}甲 = ○$$

解其立方式即得餘弦$\frac{呷}{三}$之同數。有一法能徑證其餘弦$\frac{呷}{三}$若從餘弦呷$=$甲而定之必有三箇實數惟三數以外不能再有他數因凡合于餘弦呷$=$甲之式其能有甲

之角不出乎 $呷=二卯周丅角$ 式之中則前式之根必在 $人=餘弦\frac{三}{二卯周丅角}$ 式中人之同數內惟其卯必爲 $\frac{三寅}{三寅丅一}$ 兩式之一所以

$$人=餘弦\left(二寅周丅\frac{三}{角}\right)=餘弦\frac{三}{角}$$

$$人=餘弦\left(二寅周丅\frac{三}{二周}丅\frac{三}{角}\right)=餘弦\frac{三}{二周丅角}$$

由此知只能有三箇實數而不能多惟 $周=角$ 方可

求切線之各式

第四十五款　有兩角之正切求其和角較角之正切

因和角之正弦餘弦與正切相關之式為

正切（呷丄吃）＝＝ 餘弦（呷丄吃）／正弦（呷丄吃）

若將其正弦（呷丄吃）與餘弦（呷丄吃）各以同數代之見第三十五款得

正切（呷丄吃）＝＝ 餘弦呷餘弦吃丅正弦呷正弦吃／正弦呷餘弦吃丄餘弦呷正弦吃

如欲令此式中

但有呷吃二角之正切可用餘弦呷餘弦吃約之得

$$\text{正切}(\text{呷}\perp\text{吃})=\frac{\text{一}\top\frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}\times\frac{\text{餘弦吃}}{\text{正弦吃}}}{\frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}\perp\frac{\text{餘弦吃}}{\text{正弦吃}}}=\frac{\text{一}\top\text{正切呷正切吃}}{\text{正切呷}\perp\text{正切吃}}.$$

又以同法得較角之正切為

$$\text{正切}(\text{呷}\top\text{吃})=\frac{\text{一}\perp\text{正切呷正切吃}}{\text{正切呷}\top\text{正切吃}}.$$

第四十六款

如于前款之式中令 $吃=呷$ 則得

$$正切二呷=\frac{一\top正切呷}{二正切呷}$$

爲倍角正切之式。

如于前款之式中令 $吃=二呷$ 則得

$$正切三呷=\frac{一\top正切呷正切二呷}{正切呷\perp正切二呷}$$

其正切二呷。若以同數代之

即得正切三呷以正切呷爲主而明之之式。正切四呷以下可仿此類推。

第四十七款

呷若爲四十五度之角則正切呷＝一。所以

正切（四五°丄𠮙）＝（一丅正切𠮙）／（一丄正切𠮙）。

正切（四五°丅𠮙）＝（一丄正切𠮙）／（一丅正切𠮙）。

第四十八款

如欲以正切呷爲主而求正切三呷則可將正切二呷式中之呷變爲二呷。

即得

$$\frac{\text{一丅正坊}\frac{二}{呷}}{\text{二正切}\frac{二}{呷}}=\text{正切呷}$$

此式與二次式

$$\text{正切}\frac{二}{呷}\text{丄}\frac{\text{正切呷}}{二}\text{正切}\frac{二}{呷}\text{丅一}=〇$$

相同故可得

$$\text{正切}\frac{二}{呷}=\frac{\text{正切呷}}{一}\left(\text{丅}\sqrt{\text{一丄正坊呷}}\right)$$

由此知 $\text{正切}\frac{二}{呷}$ 若從 正切呷 求之祇有兩箇同數其不能有多于兩數之故可與正弦一例證之因必明 $\text{正切}\frac{二}{(\text{卯周丄呷})}$ 之數其卯爲

任何整數其正切$\frac{\text{二}}{\text{一}}$角與丅餘切$\frac{\text{二}}{\text{一}}$角俱依卯之奇偶而異此與下款之說合

第四十九款

有時遇正切$\frac{\text{二}}{\text{甲}}$能爲下三式

$$\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{甲}}=\sqrt{\frac{\text{一丄餘弦甲}}{\text{一丅餘弦甲}}}$$

$$\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{甲}}=\frac{\text{一丄餘弦甲}}{\text{正弦甲}}$$

$$\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{甲}}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{一丅餘弦甲}}$$

此三式從已知之式易變得之即如從第四十款及四十一款之式

可得

$$正切\frac{二}{呷}=\frac{餘弦\frac{二}{呷}}{正弦\frac{二}{呷}}=\sqrt{\frac{一\perp餘弦呷}{一\top餘弦呷}}.$$

$$正切\frac{二}{呷}=\frac{二餘弦^{\frac{二}{呷}}}{二正弦\frac{二}{呷}餘弦\frac{二}{呷}}=\frac{一\perp餘弦呷}{正弦呷}.$$

$$正切\frac{二}{呷}=\frac{二正弦\frac{二}{呷}餘弦\frac{二}{呷}}{二正弦^{\frac{二}{呷}}}=\frac{正弦呷}{一\top餘弦呷}.$$

從此末兩式易得

$$餘切\frac{二}{呷}=餘割呷\perp餘切呷.$$

$$正切\frac{二}{呷}=餘割呷\top餘切呷.$$

便用之變式

第五十款

卽如第三十五三十六兩款中有和角較角之正弦餘弦式能變為多式以便于推算天文之用其要如下

一將兩式相加減得

$$二正弦呷餘弦叱＝正弦(呷丄叱)丄正弦(呷丅叱) \quad (一)$$

$$二餘弦呷正弦叱＝正弦(呷丄叱)丅正弦(呷丅叱) \quad (二)$$

$$二餘弦呷餘弦叱＝餘弦(呷丅叱)丄餘弦(呷丄叱) \quad (三)$$

$$二正弦呷正弦叱＝餘弦(呷丅叱)丅餘弦(呷丄叱) \quad (四)$$

從此各式能得兩角之正弦與餘弦相乘之積或兩正弦或兩餘弦相乘之積亦能得和角較角之正弦餘弦相和相較之式

第五十一款

若于前款之式中以(卯丅一)吃代其呷，卽可變得數式爲任何倍角之正弦餘弦能以倍數更小之角之正弦餘弦明之卽如從(一)(二)兩式得

正弦卯吃＝二正弦(卯丅一)吃餘弦吃丅正弦(卯丅二)吃

餘弦卯吃＝二餘弦(卯丅一)吃餘弦吃丅餘弦(卯丅二)吃

是也，

第五十二款

又如從

呷＝二三(吃呷丄)丄三(吃呷丅)

吃＝二三(吃呷丄)丅三(吃呷丅)

兩式將其右邊之數之正弦餘弦從第三十五三十六兩款推廣之以加減兩法得

正弦呷丄正弦吃＝二正弦三(吃呷丄)餘弦三(吃呷丅)　(一)

正弦呷丅正弦吃＝二餘弦三(吃呷丄)正弦三(吃呷丅)　(二)

(𠮙丅呷)三弦餘(𠮙丄呷)三弦餘二＝𠮙弦餘丄呷弦餘

(三).

(𠮙丅呷)三弦正(𠮙丄呷)三弦正二＝呷弦餘丅𠮙弦餘

(四).

此四式之用最廣，因其能將任何兩角之正弦或任何兩角之餘弦相和相較之數，變為相乘之數，故對數中尤便于用。

第五十三款

若將前款之四式以約法變之又以約法及

$$\frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}=\text{正切呷}=\frac{\text{餘切呷}}{\text{一}}$$

之理變之即得

$$\frac{\text{正弦呷}\top\text{正弦吃}}{\text{正弦呷}\perp\text{正弦吃}}=\frac{\text{餘弦}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\perp\text{吃})\,\text{正弦}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\top\text{吃})}{\text{正弦}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\perp\text{吃})\,\text{餘弦}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\top\text{吃})}=\frac{\text{正切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\top\text{吃})}{\text{正切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\perp\text{吃})}$$

(一)

$$\frac{\text{餘弦呷}\perp\text{餘弦吃}}{\text{正弦呷}\pm\text{正弦吃}}=\text{正切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\pm\text{吃})$$

(二)

$$\frac{\text{餘弦吃}\top\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}\pm\text{正弦吃}}=\text{餘切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\mp\text{吃})$$

(三)

$$\frac{\text{餘弦呷}\perp\text{餘弦吃}}{\text{餘弦吃}\top\text{餘弦呷}}=\text{正切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\perp\text{吃})\,\text{正切}\frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{呷}\top\text{吃})$$

(四)

此

四式之用亦甚廣其㈠式之理尤奇若以言語明之卽
爲任兩角正弦之和與正弦之較之比若半和角之正
切與半較角正切之比
第五十四款 有時遇三角比例之變式雖窮其源則必
證之其證法惟將式之左右兩邊各以一法變之而已
如有式 正弦(呷⊥吃)正弦(呷丅吃)＝正弦^{2}呷丅正弦^{2}吃 欲證其合理否則可將正弦(呷⊥吃)與正弦(呷丅吃)各以同數代

之則得

正弦(呷⊥叱)正弦(呷丅叱)＝正弦^{二}呷餘弦^{二}叱丅餘弦^{二}呷正弦^{二}叱

再將一丅正弦^{二}呷與一丅正弦^{二}叱代其餘弦^{二}呷與餘弦^{二}叱而變之卽得所求之證。或變其

正弦^{二}呷丅正弦^{二}叱＝

$\frac{二}{一}$(一丅餘弦二呷)丅$\frac{二}{一}$(一丅餘弦二叱)

＝$\frac{二}{一}$(餘弦二叱丅餘弦二呷)＝

$\frac{二}{一}$[二正弦(呷⊥叱)正弦(呷丅叱)]

亦可。

第五十五款

若有

$$\text{餘弦甲}=\frac{\text{一丄正切}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}{\text{一丅正切}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}\text{．}\qquad \text{正弦甲}=\frac{\text{一丄正切}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}{\text{二正切}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}\text{．}$$

兩式而欲證之則可將$\text{正切}\frac{\text{甲}}{\text{二}}$．以同數$\frac{\text{餘弦}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}{\text{正弦}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}$代之則式之右邊變為

$$\frac{\text{餘弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}\text{丄正弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}{\text{餘弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}\text{丅正弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}\text{與}\frac{\text{餘弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}\text{丄正弦}^{\text{二}}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}{\text{二正弦}\frac{\text{甲}}{\text{二}}\text{餘弦}\frac{\text{甲}}{\text{二}}}\text{．}$$

依第四十款之法化之得餘弦甲與正弦甲．為相等之證．

第五十六款

茲設三角比例數之各種變式如下．學者可將各式變化之以習證法．

餘切呷丅正切呷＝二餘切二呷．

正切呷丄餘切呷＝二餘割二呷．

正切呷丄正割呷＝正切$\left(\text{四五}丄\frac{\text{二}}{\text{呷}}\right)$．

正切$\left(\text{四五}丄\text{呷}\right)$丅正切$\left(\text{四五}丅\text{呷}\right)$＝二正切二呷．

餘弦呷＝$\dfrac{一丄正切呷正切\frac{二}{呷}}{一}$

餘弦(呷丄乙)餘弦(呷丅乙)＝餘弦^{二}呷丅正弦^{二}乙．

餘切乙$\pm$正切呷＝$\dfrac{\text{餘弦呷正弦乙}}{\text{餘弦(呷}\mp\text{乙)}}$．

正切呷$\pm$正切乙＝$\dfrac{\text{餘弦呷餘弦乙}}{\text{正弦(呷}\pm\text{乙)}}$．

正切(呷丄乙)丅正切呷＝$\dfrac{\text{餘弦(呷丄乙)餘弦呷}}{\text{正弦乙}}$．

又設

呷丄叱丄昞＝一八〇°

則

正弦呷丄正弦叱丄正弦昞＝四餘弦½呷餘弦½叱餘弦½昞

㈠

餘弦呷丄餘弦叱丄餘弦昞＝四正弦½呷正弦½叱正弦½昞丄一

㈡

正切呷丄正切叱丄正切昞＝正切呷正切叱正切昞

㈢

餘切呷丄餘切叱丄餘切昞＝餘切呷餘切叱餘切昞丄餘割呷餘割叱餘割昞

㈣

從㈢式可見有法能取

三數，令三數之和，與其連乘之積相等。

第五十七款

以上兩款所設之各式，皆從吃呷與吃呷之正弦餘弦式變化而成，故皆可作公式用之。

學者讀畢此卷，應先觀第六卷明其對數之理，然後再讀第三卷，則易解矣。

興化劉彝程校算

上海曹摑亭繪圖