中等教育代数学

山崎猛志・著

山崎猛一

昭和１５

中等
教育

代數學

工學士　山崎猛志　著

緒　　言

代數學全般ニ渉リテ統一セル知識ヲ得セシメンガ爲メニ中等教育代數學ノ各項目ヲ採用編述シタリ,尙注意セシ要點ヲ掲グレバ次ノ如シ

1. 算術ト代數學ノ連絡ニ留意シタルコト
2. 函數ノ觀念ヲ正確ニスル爲メニぐらふノ一項ヲ設ケ一次方程式及二次方程式ノ關係ヲ明了ナラシメタルコト
3. 對數計算ヲ實用數學トシテ詳述シタルコト
4. 二次方程式ニ詳細ナル說解ヲナシタルコト
5. 附錄トシテ學力ニ餘裕アル學生ノ爲メニ必要ナル項目ヲ添加シテ學

力ノ増進ヲ計リタルコト

6. 補習問題ト專門學校入學試驗問題トハ實力ノ涵養課題トシテ多數ヲ採錄シタルコト

本書ハ改訂ヲ要スルコト多々アルベキト信ズルヲ以テ實地敎授諸氏ノ指導ヲ待チテ其完了ヲ望ムコト切ナリ

昭和十五年四月

著者識ス

目　次

第一章　總　則

第二章　整式四則

第三章　一次方程式

第四章　因數分解法

第五章　最大公約數及最小公倍數

第六章　分　數

第七章　二次方程式

第八章　羃數及根數

中等教育 代　數　學

第　一　章

總　　則

(1) 代數學トハ算術ノ如ク數ニ就キテ論ズル數學科ノ一分科ナリ。

算術ニ於テ取扱フ數ハ一定不變ノ數ナルモ代數學ニアリテハ算術ニ於テ用フル數及 a, b, c 等ノ文字ニテ表ハサレタル一般ナル數ヲモ併用シテソノ應用ヲ擴張セリ。

算術ニ於テ用ヰタル符號 $+, -, \times, \div, =$ 等ハ代數學ニ於ケル同ジ目的ニ使用サル。

(2) 一項又ハ數項ヨリ成ル運算ヲ示ス式ヲ代數式ト稱ス。

一項ヨリ成ル代數式ヲ一項式又ハ單項式ト云フ。

例ヘバx, $3b$, $4z$ 等ノ如シ。

二項以上ヨリ成リ立ツ代數式ヲ多項式ト云フ。

例ヘバ$a+b$ハ二項式,$a+b+c$ハ三項式ト云フガ如シ。

(3) 二ツ又ハ二ツ以上ノ數ヲ乘ズルトキハ其ノ結果ヲ積ト稱ス。

積ヲナス各數ヲ因數ト稱ス。

例ヘバ$5\times a\times b$ハ積ニシテ$5, a, b,$ハコノ積ヲナス因數ナリ。

代數學ニアリテハ$5\times a\times b$ヲ表ハスニ×號ヲ省キテ$5ab$ト書クヲ普通トス但シ數ト數トノ間ニハ×號ヲ省カサルモノトス例ヘバ7×8ハ×號ヲ省ケバ78トナリ56ヲ表ハサヾルコトヽナル。

因數ノ一ツガ數字ナルトキハ之ヲ數係數ト稱ス,例ヘバ$5ab$ニ於テ5ハabノ數係數ナリト云フ。

時トシテハ係數ナル語ハ尙廣キ意味ニ用フルコトアリ,例ヘバ$5ab$ニ於テ$5a$ハbノ係數,$5b$ハ

aノ係數ト云フ如ク積ヲナス文字ノ一ツニ對シテ殘リノ數ヲソノ係數ト稱スルコトアリ。

又aハ$1\times a$ト等シキヲ以テaノ數係數ハ1ナリ。

(4) 冪數又ハ指數

$x\times x$ヲxノ二冪又ハ自乘ト稱シx^2ニテ表ハサル。

$x\times x\times x$ヲxノ三冪又ハ三乘ト稱シx^3ニテ表ハサル。

同樣ニ$x\times x\times x\times$………m度xヲ乘ズルトキ之ヲxノm冪又ハxノm乘ト稱シx^mニテ表ハサル冪ヲ表ハス數ヲ指數又ハ冪數ト云フ。

(注意) x^2ノコトヲxノ平方,x^3ノコトヲxノ立方ト稱スルコトアリ又aノ冪數ハ1ナリ。

係數ト冪數トハ混同スベカラズ,例ヘバ$3x$トx^3トハ全ク別ノ數ニシテ$3x$ハxノ三倍ヲ表ハシ,x^3ハxヲ三度乘ズルコトヲ表ハスヲ以テ例ヘバxヲ2トスレバ$3x$ハ$3\times 2=6$ヲ表シ,x^3ハ$2^3=$

2×2×2=8ヲ表ハスヲ以テ全然異ナル數ナリ，又1ハ何乘スルモ常ニ1ナルコトニ注意スベシ

$$1^2=1,\quad 1^3=1,\quad 1^5=1,$$

ナルガ如シ。

(5) 代數式ノ數值

代數式ノ表ハス文字ニ特別ナル數ヲ代入シタル值ヲ,コノ代數式ノ數值ト稱ス。

例 1. $a=3, b=4, c=5$ ナルトキ $6abc$ ノ數值如何

解 $6abc=6\times3\times4\times5=360$

例 2. $a=1, b=2, c=3$ ナルトキ $12a^2-2b^2+c^2$ ノ值ヲ求メヨ。

解 $12a^2-2b^2+c^2=12\times1\times1-2\times2\times2+3\times3$

$=12-8+9=13$

例 3. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{4}, c=2$ ナルトキ $\frac{a^2+bc}{3c}$ ノ值ヲ求メヨ。

解 $\frac{a^2+bc}{3c}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\times2}{3\times2}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}{6}=\frac{\frac{7}{4}}{6}=\frac{7}{24}$

演 習 問 題 (1)

$a=3, b=2, c=1, d=0$ ナルトキ次ノ各式ノ值ヲ求メヨ。

(1) $7a+2b-3c+2d$　　(2) $4a-5b+8c-3d$

(3) $2ab-2cd+3db+5cd$　　(4) $2a^2+3b^2+4c^2$

(5) $7a^2+2b^3-3c^4$

$a=1, b=2, c=3$ ナルトキ次ノ各式ノ值ヲ求メヨ。

(6) $a^3+b^3+c^3$　　(7) $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}bc-\frac{1}{3}ca$

(8) $(a^2+3c)\times(2b-c)\times(c+a)$

(9) $\frac{a}{b}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^3}{b^3}$

(10) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

(6) 負數及文字ヲ含マサル數ノ四則

算術ニテ取扱ヒタル整數,小數,分數ヲ正數ト稱ス,正數ノ內ニテ最小ナルモノハ零ナリ,故ニ算術ニテハ零ヨリ大ナル數ニ付テノミ考ヘタリ。

代數學ニテハ零ヨリ如何程ニテモ小ナル數アリト考フルヲ便利トス。

從ツテ代數學ニアリテハ零ヲ境トシテ零ヨリ小ナル數ト零ヨリ大ナル數トアリト云フ學說ヲ用フルモノトス。

零ヨリ小ナル數ヲ負數ト稱ス,負數ヲマイナストヒ正數ノコトヲプラスト稱ス。

(7) 零ヨリ小ナル數ヲ考フル實例

商人アリ第一回ノ商取引ニ於テ500圓ノ利益ヲ得,第二回商取引ニ於テ300圓ノ損ヲナセリトセバ,コノ商人ハ二回ノ商取引ニ於テ

500圓—300圓=200圓

200圓ノ利益ヲ得タコト、ナル。

又コノ商人第一回ノ商取引ニ於テ300圓ノ利益ヲ得,第二回ノ商取引ニ於テ500圓ノ損ヲナセシトキハコノ二回ノ商取引ニ於テ

500圓—300圓=200圓

200圓ノ損ヲナセシコト、ナル。

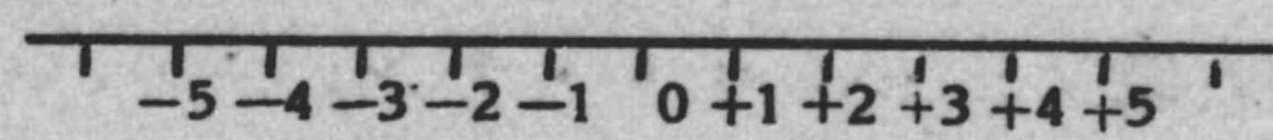
コノ第二ノ場合ヲ考フルニ200圓ノ損ト云フコトハ200圓ノ負債アルコト、ナリ,負債ハ所有金ガ零ナル場合ヨリモ尙資產ガ200圓少ナシト云フコト、ナル,卽チ借金200圓ト云フコト、ナルヲ以テ,自己ノ資產ヲ正數トスレバ負債ハ資產ガ零ヨリ小ナル金高ト考フルコトヲ得ベシ卽チ零ヨリ小ナル數ヲ考フルコトヲ得ベシ。

同樣ニ東ニ測リタル距離ヲ正數ニテ表ハセバ西ニ測リタル距離ハ負數ニテ表ハスコトヲ得。

寒暖計ノ零度以上ノ度數ヲ正數トスレバ零度以下ハ負數ニテ表ハスコトヲ得ベシ。

代數學ニ於テ例ヘバ整數ニ付テ考フルニ直線上ノ0點ヲ起點トシテ右方ニ等距離ニ點ヲ設ケ,之ヲ順々ニ+1, +2, +3, +4,……ヲ以テ表ハ

シ,又0点ヨリ左ヘ等距離ニ點ヲ設ケ之ヲ$-1, -2, -3, \ldots\ldots$等ヲ以テ表ハストキハ零ヨリ如何ナル大ナル整數ヲモ又零ヨリ如何ニ小ナル整數ヲモ表示スルコトヲ得ベシ。



(8) 正數,負數ヲ論ゼズソノ數字ノ大サノミヲ考フルトキハソノ數字ヲ其數ノ絶對値ト稱ス

例ヘバ$+13$ノ絶對値ハ13ニシテ,-10ノ絶對値ハ10ナリ。

數ノ大小ハ正數ニアリテハ絶對値ノ大ナル方ノ數ガ絶對値ノ小ナル方ノ數ヨリ大ナリ。

例ヘバ$+15$ト$+13$トハ絶對値ハ13ヨリ15ノ方大ナルヲ以テ$+15$ハ$+13$ヨリ大ナリ。

又負數ニアリテハ絶對値ノ大ナル方ノ數ガ絶對値ノ小ナル方ノ數ヨリ小ナリ。

例ヘバ-7ト-5トニ於テ絶對値ハ5ヨリ7ノ方大ナルヲ以テ-7ハ-5ヨリ小ナリ。

正數ハ負數ヨリ常ニ大ナルコト明ナリ。

數ノ大小ヲ表ハスニ不等號$>$ヲ用ユ。

例ヘバ　$+5 > +2$

ニ於テ$+5$ハ$+2$ヨリ大ナルコトヲ表ハシ,不等號ノ尖レル方ニアル數ハ他ノ方ニアル數ヨリ小ナルコトヲ表ハスモノナリ。

(9) 加法

法則(第一)

同シ符號ノ二數ヲ加フルニハ絶對値ノ和ヲ取リ,之ニソノ有スル符號ヲ前置スベシ。

例　$+12+(+3)=+(12+3)=+15$

$-10+(-20)=-(10+20)=-30$

法則(第二)

異符號ノ二數ヲ加フルニハ絶對値ノ差ヲ取リ,之ニ絶對値ノ大ナル方ノ數ノ有スル符號ヲ附記スベシ。

例　$(+8)+(-3)=+(8-3)=+5$

$(+7)+(-9)=-(9-7)=-2$

$(-11)+(+3)=-(11-3)=-8$

$(+15)+(-7)+(-2)=+(15-7)+(-2)$

$=+8+(-2)=+(8-2)=+6$

(10) 減法

法則　一數ヨリ他ノ數ヲ減スルニハ減數ノ符號ヲ變ジテ加フベシ。

例 1.　$(+7)-(+3)=(+7)+(-3)=+(7-3)=+4$

例 2.　$(+8)-(-5)=(+8)+(+5)=+(8+5)=+13$

例 3.　$(-9)-(+7)=(-9)+(-7)=-(9+7)=-16$

例 4.　$(-15)-(-12)=(-15)+(+12)=-(15-12)=-3$

例 5.　$(-2)-(-2)=(-2)+(+2)=(2-2)=0$

例 6.　$(-1)-(-2)-(-3)=(-1)+(+2)+(+3)$

$=+(2-1)+(+3)=+1+(+3)$

$=+(1+3)=+4$

演習問題 (2)

次ノ各數ノ和ヲ求メヨ。

(1)　$(+12)+(+18)$　　(2)　$(-70)+(-30)$

(3)　$(+11)+(-11)$　　(4)　$(-52)+(+32)$

(5)　$\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$　　(6)　$(-0.2)+(-0.3)$

(7)　$(-2)+(-3)+(-7)+(+2)+(-4)$

(8)　$(-0.1)+(+0.3)+(-0.4)+(-0.7)$

(9)　$\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$

(10)　$(-5)+(+2)+\left(-\frac{1}{2}\right)+(+0.2)$

(11)　$(-128)-(+28)$　　(12)　$(+15)-(-13)$

(13)　$(-275)-(-225)$　　(14)　$53-(-17)$

(15)　$(-3)-\left(-1\frac{1}{2}\right)$　　(16)　$(-0.7)-(-0.4)$

(17)　$(-4)-(-3)-(+7)-(-8)-(+9)$

(18)　$\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)$

次ノ各式ノ計算ヲナセ。

(19)　$(-2)+(-4)-(-3)-(+6)+(-7)$

(20)　$(-5)-(-105)+(+100)-(-12)$

(11) 乘法

法則(第一)

同符號ノ二數ノ積ハ正ニシテ絶對値ノ積ヲ作ルベシ。

法則(第二)

異符號ノ二數ノ積ハ常ニ負ニシテ絶對値ノ積ヲ作ルベシ。

例　$(+3)\times(+6)=+(3\times6)=+18$

$(-7)\times(-9)=+(7\times9)=+63$

$(+5)\times(-4)=-(5\times4)=-20$

$(-11)\times(+7)=-(11\times7)=-77$

法則(第三)

零ト或數ノ積又ハ或數ニ零ヲ乘ズルトキハ其積ハ零ナリ。

例　$0\times(+7)=0$　　$(-9)\times0=0$

演習問題 (3)

次ノ各式ノ積ヲ求メヨ。

(1)　$(+2)\times(-11)$　　(2)　$(-8)\times(-12)$

(3)　$(-6)\times(+8)$　　(4)　$(-7)\times\left(+1\frac{2}{7}\right)$

(5)　$0\times\left(+\frac{1}{2}\right)$　　(6)　$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$

(7)　$(+3)\times(-5)\times(-2)\times(-8)\times(-9)$

(8)　$\left(+1\frac{1}{2}\right)\times\left(-1\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

(9)　$(-3)^2\times(-2)^2\times\left(+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

(10)　$\left(-\frac{3}{4}\right)^2\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$

(12) 除法

法則(第一)

同符號ノ二數ノ商ノ符號ハ正ニシテ,絕對値ノ割リ算ノ商ガ求ムル絕對値ナリ。

法則(第二)

異符號ノ二數ノ商ノ符號ハ負ニシテ,絕對値ノ割リ算ノ商ガ求ムル絕對値ナリ。

例　$(+15)\div(+3)=+\frac{15}{3}=+5$

$(-14)\div(-7)=+\frac{14}{7}=+2$

$(+8)\div(-4)=-\frac{8}{4}=-2$

$(-66)\div(+6)=-\frac{66}{6}=-11$

法則(第三)

零ハ如何ナル數ニテ除スルモ零ナリ。

例　$0\div7=0$

$0\div\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

演習問題 (4)

次ノ商ヲ求メヨ。

(1) $(+100)\div(-5)$　(2) $(-21)\div(+7)$

(3) $(-125)\div(-25)$　(4) $\left(-1\frac{1}{2}\right)\div\left(+\frac{1}{2}\right)$

(5) $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$　(6) $(+0.5)\div(-0.2)$

(7) $(-4)\div(-8)\div(-2)$

(8) $(+0.1)\div(-0.002)$

(9) $(-4)^2\div(-2)^2\div(+2)$

(10) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\div\left(-2\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)$

第二章

整式四則

(13) 加法

數係數ノミヲ異ニスル代數式ノ項ヲ同類項ト稱ス。

例ヘバ $5a$ ト $7a$ トハ a ノ數係數ヲ異ニスルノミナルヲ以テ同類項ナリ,同樣ニ $5a^2b$ ト $6a^2b$ ト a^2b トハ皆同類項ナリ。

同類項ノ加法ニ關スル法則ハ次ノ如シ。

法則(第一)

多クノ同類項ノ和ハ同類項ナリ。

法則(第二)

總テノ項ガ正ナル同類項ノ和ハソノ數係數ノ和ヲ取ルベシ。

$$2a^2+3a^2+4a^2=(2+3+4)a^2=9a^2$$

法則(第三)

總テノ項ガ負ナル同類項ノ和ハ,ソノ數係數ノ絕對值ノ和ニ一號ヲ前置スベシ。

$$-4x-11x-13x=-(4+11+13)x=-28x$$

法則(第四)

項ガ正及負ノ異ナル符號ヲ有スル同類項ノ和ハソノ正ナル總テノ項ノ數係數ヲ加ヘ次ニ負ナル總テノ項ノ數係數ヲ加ヘ,コノ差ヲ取リテ絕對値ノ大ナル方ノ符號ヲ附スベシ。

$$+7a-2a+6a-3a=7a+6a-2a-3a=13a-5a=8a$$

演習問題(5)

次ノ加法ヲ行ヘ。

(1) $3a, 4a, 5a, 6a$ (2) $-6x, -2x, -3x, -10x$

(3) $2x^2, -3x^2, +4x^2, -13x^2$

(4) $-7a, -5a, 3a, 12a$

(5) $12ab, -3ab, 7ab$

(6) $101xy, -28xy, -36xy$

次ノ各式ノ計算ヲナセ。

(7) $6x^2-4x^2+3x^2-11x^2+7x^2-13x^2$

(8) $8a^2x^2-3a^2x^2+5a^2x^2-6a^2x^2-7a^2x^2$

(9) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}a-\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}a$

(10) $-5x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}x^2$

(11) $-2(a+b)+3(a+b)-4(a+b)+13(a+b)$

(14) 括弧

括弧( )ハコノ中ノ數ハ一ツノ量トシテ考ヘラルヽモノナリ。

例ヘバ$3+(7+5)$ニ於テ$(7+5)$ハ$7+5$即チ12ヲ3ニ加フルコトヲ表ハスモノナリ,然ルニ3ニ12ヲ加フルコトハ$3+7+5$ト同ジ結果トナル故ニ+ヲ前置セル括弧ハ取リ去ルコトヲ得

$$a+(+b)=a+b$$

$$a+(-b)=a-b$$

$$a+(b+c)=a+b+c$$

$$a+(b-c)=a+b-c$$

換言スレバ+ヲ前置シタル括弧ヲ去ルニハ括弧中ノ文字ソノ儘ヲ前ノ項ノ次ニ順ニ附記スレバヨシ。

例 $3a-2b+5c+(6a-5b-4c)$

$=3a-2b+5c+6a-5b-4c$

$=3a+6a-2b-5b+5c-4c$

$=9a-7b+c$

(注意)　コノ例ノ如ク括弧ヲ去リタル後ハ同類項ヲ集メテ計算スルモノトス

演習問題 (6)

次ノ各式ノ同類項ヲ簡單ニセヨ。

(1)　$6a+5a-2b-4b$　　(2)　$6a-b+c+2a-3b-c$

(3)　$3x-y-2x+4y-3z+z$

(4)　$5x+3y-x-y$

(5)　$3a-2b+5c+a+2b+c-4a-5b-6c$

(6)　$\frac{1}{8}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}a-\frac{1}{3}b+c$

(7)　$3a-b+c-2d+e+6a-3b+5c-d-e$

次ノ代數式ノ括弧ヲ去リ簡單ニセヨ。

(8)　$5a-6b+2c+(3a-7b-12c)$

(9)　$7x+3y+8z+(-2x-6y-7z)$

(10)　$5x^2-6y^2+2z^2+(12x^2-21y^2-34z^2)$

(15)　算術ノ加法ノ如ク代數ニ於テモ二式ノ同類項ヲ同シ行ニ並ヘテ加フルコトヲ得。

例 1.　$5a-7b-7c$ ト $3a+10b+2c$ ト $4a+4b-6c$ ヲ加ヘヨ。

解

$$\begin{array}{r} 5a-7b-7c \\ 3a+10b+2c \\ 4a+4b-5c \ (+ \\ \hline 12a+7b-11c \end{array}$$

例 2.　$7ab-11bc+5ca$ ト $-12ab+8bc-3ca$ ト $9ab-2bc+6ca$ トノ和ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{r} 7ab-11bc+5ca \\ -12ab+8bc-3ca \\ 9ab-2bc+6ca \ (+ \\ \hline 4ab-5bc+8ca \end{array}$$

例 3.　$2x^3+5x^2-4x+6$ ト $7x^3+5x-11$ ト $-3x^3+2$ トノ和ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +5x^2 & -4x & +6 \\ 7x^3 & & +5x & -11 \\ -3x^3 & & & +2 \ (+ \\ \hline 6x^3 & +5x^2 & +x & -3 \end{array}$$

演習問題 (7)

次ノ各式ノ加法ヲ行ヘ。

(1)　$3a+2b, 2a+3b$　　(2)　$4a+7b, 3a+2b$

(3)　$2x+5y-2z, 4x+y+6z$　　(4)　$2a-4b, 3a-b$

(5)　$6a-3, 2a-5$　　(6)　$4-7y, 2-3y$

(7) $2a-3b+4c,\ -a+4b-6c$

(8) $3a-b-c,\ 2a+4b-3c,\ a-2b-c$

(9) $-x+2y-3z,\ 2x-3y+z,\ 3x+y+2z$

(10) $a^2-3a-1,\ 2a^2+4a+2,\ -a^2+a+3$

(11) $x-y-z,\ 2y-3z,\ 4x-y,\ x+y+z$

(12) $a^2-2ab-b^2,\ 3a^2+4ab+2b^2,\ -a^2-3ab-3b^2$

(13) $\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b+\frac{3}{5}c+\left(\frac{1}{6}a-\frac{1}{5}b-\frac{1}{10}c\right)$

(14) $\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{6}y^2+\left(\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{3}y^2\right)+\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{6}y^2\right)$

(15) $a+2b+3c+(4a-2b-c)+(-a+2b-2c)$

(16) $3x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2,\ x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x,\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}$

(16) 昇冪及降冪

代數式ガ冪數ノ順ニ列ヘラレタルトキ,冪數ガ段々小トナルトキハ降冪ノ順ニ列ヘラレタリト稱シ,冪數ガ段々大トナルトキハ昇冪ノ順ニ列ベラレタリト稱ス。

例ヘバ　$7x^3-2x^2-3x+5$

$6x^5-4x^4+2x+1$

ノ如キハ何レモxニ關シテ降冪ノ順ニ列ヘラレタル代數式ニシテ

$7-2x+5x^2-6x^3$

$4-3x^2+6x^4$

ハxニ關シテ昇冪ノ順ニ列ヘラレタル代數式ナリ。

(注意)　多項式ノ加法ニ於テ各代數式ノ冪數ノ順不規則ナルトキハ一度之ヲ降冪又ハ昇冪ノ順ニ列ヘ換ヘテ後ニ加法ヲ行フモノトス。

例　$7x^4-5+8x-6x^2-x^3$ ト $2x^2+5x^4-6x-8x^3+12$ ト $2x^4+3x^2+4x^3-1+x$ ヲ加ヘヨ

解
$$\begin{array}{l} 7x^4-\ x^3-6x^2+8x-5 \\ 5x^4-8x^3+2x^2-6x+12 \\ 2x^4+4x^3+3x^2+\ x-1\ (+ \\ \hline 14x^4-5x^3-\ x^2+3x+6 \end{array}$$

(17) 減法

一般法則　一ツノ代數式ヨリ他ノ代數式ヲ減ズルニハ減式ノ符號ヲ變ジテ被減式ノ後ニ附記シ,同類項ヲ簡約スベシ。

$$a-(+b)=a-b$$
$$a-(-b)=a+b$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$

例 1.　$7a-2a=5a$

例 2.　$8a-9a=8a-8a-a=-a$

例 3.　$6a-(+3a)=6a-3a=3a$

例 4.　$7a-(-10a)=7a+10a=17a$

例 5.　$3a-6b-(2a-7b)=3a-6b-2a+7b$
$=3a-2a-6b+7b=a+b$

(18) 多項式ノ減法

（Ⅰ） 被減式ノ下ニ減式ノ符號ヲ全部變ジタルモノヲ同類項ノ下ニ書キ之ヲ加フベシ。

例 1.　$7a-5b+3c$ ヨリ $10a-4b-7c$ ヲ減ゼヨ。

解
$$\begin{array}{r} 7a-5b+3c \\ -10a+4b+7c\ (+ \\ \hline -3a-b+10c \end{array}$$

（Ⅱ） 減式ヲソノ儘被減式ノ下ニ同類項ヲ揃ヘテ書キ下式ノ各項ヲ心ノ内ニテ其符號ヲ變ジテ後ニ上ノ同類項ト計算ヲナスベシ

例 2.　$10a-3b-4c$ ヨリ $5a-2b-2c$ ヲ減ゼヨ。

解
$$\begin{array}{r} 10a-3b-4c \\ 5a-2b-2c\ (- \\ \hline 5a-b-2c \end{array}$$

コノ(Ⅱ)ノ方法ニヨリテ充分ニ練習シ置クベシ。

演習問題 (8)

次ノ各式ノ減法ヲ行へ。

（1）　$6a-8b+10c-(-13a-7b+8c)$

（2）　$5x^2-6x+13-(-3x^2-4x+10)$

（3）　$-6ab+3bc-2ca-(-10ab+7bc-8ca)$

（4）　$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}y^2-\frac{3}{10}z^2-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}y^2-\frac{3}{20}z^2\right)$

第一式ヨリ第二式ヲ減ゼヨ。

（5）　$2a^5+11a^4+9a^3-11a^2-4a,\ 2a^5+3a^4-a^3$

（6）　$x^3-5x^2+5x+2,\ x^3-3x^2+2x-6$

（7）　$7a^4-8a^2+3a^5+a,\ a^2-5a^3+5b^3-c^3$

（8）　$-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y-5z,\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y-\frac{11}{3}z$

（9）　$\frac{1}{8}a^3-2ax^2-\frac{1}{3}a^2x,\ \frac{1}{3}a^2x+\frac{1}{4}a^3-\frac{3}{2}ax^2$

(10)　$3x^5-10x^4+6x^3-4x^2+1,\ 5x^5-3x^3+2x^2-15$

(19) 括弧用法

多クノ括弧ヲ有スル代數式ヲ簡單ニスルニハ括弧ヲ一ツヅヽ次ノ法則ニヨリテ取リ去リテ後ニ同類項ノ計算ヲナスモノトス。

茲ニ括弧ハ可成內部ノモノヨリ一ツヅヽ取リ去ルヲヨシトス。

(法則)　十號括弧ヲ去ルニハ括弧內ノ符號ヲ變ズルコトナク前ノ式ノ後ニ後ノ式ヲソノ儘書キ行クベシ。

一號括弧ヲ去ルニハ括弧內ノ符號ヲ全部變ジテ前ノ式ノ後ニ書キ行クベシ。

例 1.　$3a-[2b-\{5a-(3a-2b)\}]$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$3a-[2b-\{5a-(3a-2b)\}]$

$=3a-[2b-\{5a-3a+2b\}]$

$=3a-[2b-5a+3a-2b]$

$=3a-2b+5a-3a+2b$

$=3a+5a-3a-2b+2b$

$=5a$

例 2.　$a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)\}]$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)\}]$

$=a-[5b-\{a-3c+3b+2c-a+2b+c)\}]$

$=a-[5b-a+3c-3b-2c+a-2b-c]$

$=a-5b+a-3c+3b+2c-a+2b+c=a$

(20) 括弧ニテ括クル法

括弧ヲ去ル法ヲ逆ニ利用シテ代數式中ノ或項以下ヲ十號又ハ一號括弧ニ括クルコトヲ得

(法則)　十號括弧ニテ括ラントスルトキハソノ項以下ノ括ルベキ各項ノ符號ヲ其儘ニシテ括弧ノ中ニ入ルルベシ。

一號括弧ニテ括クラントスルトキハソノ項以下ノ括ルベキ各項ノ符號全部ヲ變ジテ括弧ノ中ニ入ルルベシ。

例 1.　$3a-5b+6c-3d$ ノ第二項以下ヲ十號括弧ノ中ニ入レヨ。

解　$3a-5b+6c-3d=3a+(-5b+6c-3d)$

例 2.　$7x^2-8y^2-4z^2+5xy-6yz$ ノ三項以下ハ一號括弧ノ中ニ入レヨ。

$$7x^2-8y^2-4z^2+5xy-6yz$$

$$=7x^2-8y^2-(4z^2-5xy+6yz)$$

演習問題 (9)

次ノ各式ノ括弧ヲ去リ簡單ニセヨ。

(1)　$3a-\{5b-(6a-3c)-(2b+5c)\}$

(2)　$7a-[5a-\{6b-3c-(2c-3a)\}]$

(3)　$3x-\{2a-(9b-2c)\}+(2a-3b+2c)$

(4)　$a-\{2b-(3c+2b)-a\}$

(5)　$a-[2b+\{3c-3a-(a+b)\}+2a-(b+3c)]$

次ノ各式ノ第三項ト第四項トヲ十號括弧ニ入レヨ

(6)　$5a-2b+3c-5d+6e$

(7)　$8x-5y-6z+2xy-3xz+4yz$

次ノ各式ノ第三項以下ヲ一號括弧ニ入レヨ。

(8)　$5ab-6ac+3bc-5abc+7a$

(9)　$3x^4-2x^3-3x^2+4x-7$

(10)　$5x^3y^4-6x^2y^5+3xy^6-7y^7+3x^7$

乘　法

(21) 單項式乘法

法則(第一)

同ジ文字ノ羃數ヲ乘ズルニハ羃數ニ羃數ノ和ヲ取ルベシ。

例ヘバ　$a^3\times a^7=a^{3+7}=a^{10}$

一般ニ m,n ヲ正整數トスレバ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

之ヲ指數法則ト稱ス。

法則(第二)

多クノ數ノ積ノ順序ハ何レヨリスルモ其値ハ相等シ。

例ヘバ　a,b ヲ正ノ整數トスレバ

$$a\times b=b\times a$$

ナルコトハ算術ニテ已ニ之ヲ學ビタリ

代數學ニアリテハ a,b ガ正ノ整數ニ限ラズ負數ナルトキモ正數ナルトキモコノ法則ハ行ハルヽモノトス。

一般ニ

$$abc=a\times b\times c=(a\times b)\times c$$
$$=b\times(a\times c)=c\times(a\times b)$$

即チ多クノ數ノ積ノ順序ハ何レヨリスルモ其値相等シ。

（注意）　同符號ノ二數ノ積ハ正數ニシテ,異符號ノ二數ノ積ハ負數ナリ。

例 1.　$7a\times 3b\times 5c=7\times 3\times 5abc=105abc$

例 2.　$6a^2\times 9a^3=6\times 9\times a^2\times a^3=54a^{2+3}=54a^5$

例 3.　$-2a^4b^2\times\frac{3}{5}a^2b^5=-2\times\frac{3}{5}\times a^4\times a^2\times b^2\times b^5$

$$=-\frac{6}{5}a^{4+2}b^{2+5}=-\frac{6}{5}a^6b^7$$

演　習　問　題　(10)

次ノ計算ヲナセ。

(1)　$5x^2\times 7x^5$　　(2)　$4a^3\times 5a^5$

(3)　$7ab\times 8a^3b^2$　　(4)　$-3x^2\times\frac{5}{3}x^4$

(5)　$-7x^4\times(-8x^5)$　　(6)　$-\frac{2}{3}a^2b\times\frac{6}{5}a^3b^4$

(7)　$49a^3b^3c^5\times\left(-\frac{3}{14}a^2b^2c^2\right)\times\left(-\frac{1}{2}a^3b^3c^5\right)$

(8)　$(-0.3x^2)(+1.2y^2)(-0.2x^2y^3)$

(9)　$9a^2\times(-3a^4)\times(-7a^6)$

(10)　$-2x^3y^3\times\left(+\frac{2}{3}x^3y^3\right)\times\left(-\frac{6}{7}x^2y^2\right)$

(22) 多項式ト單項式ノ乘法

（法則）　多項式ノ各項ニ單項式ヲ乘ジテソノ代數和ヲ取レバヨシ。

$$(x+y-z)m=mx+my-mz$$

例 1.　$2(3x^2-2x+1)=2\times 3x^2-2\times 2x+2\times 1$

$$=6x^2-4x+2$$

例 2.　$(x^2+y^2-z^2)x^2y=x^2x^2y+y^2x^2y-z^2x^2y$

$$=x^4y+x^2y^3-x^2yz^2$$

例 3.　$(2a-5b+3c)\times(-2a^2)$

$$=2a(-2a^2)-5b(-2a^2)+3c(-2a^2)$$
$$=-4a^3+10a^2b-6a^2c$$

演　習　問　題　(11)

次ノ積ヲ求メヨ。

(1)　$(ab+bc)a^2b$　　(2)　$(5ab-7bx)4a^2bx^3$

(3)　$(5x+3y)2x^2$　　(4)　$(a^2+b^2-c^2)a^2b$

(5) $(bc+ca-ab)(-2abc)$

(6) $(6x^3-5x^2y+7xy^2)(-8x^2y^3)$

(7) $(5x^2y+xy^2-7x^2y^2)(-3x^2)(-2y^2)$

(8) $\left(\frac{2}{3}ab-\frac{3}{5}bc+\frac{5}{6}ca\right)\left(-\frac{15}{2}abc\right)$

(9) $(-3a-2b+5c)(-2c^2)$

(10) $(3x^3-4x^2+2x-18)(-3x^3)$

(23) 多項式ト多項式ノ乘法

$(a+b)$ ト $(c+d)$ トノ積ヲ求メンニハ先ヅ

$$c+d=m$$

ト置ケバ

$$(a+b)(c+d)=(a+b)m$$

多項式ト單項式ノ乘法ニヨリ

$$(a+b)(c+d)=am+bm$$

今 m ヲモトノ $c+d$ ニ復歸セシムレバ

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

之ニ再ビ多項式ト單項式ノ乘法ヲ行ヘバ

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

之ヨリ次ノ法則ヲ得。

（法則）　多項式ニ多項式ヲ乘ズルニハ一方ノ多項式ノ各項ヲ他ノ多項式ノ各項ニ乘ジテソノ代數和ヲ取ルベシ。

例ヘバ
$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$
$$(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$$
$$(a-b)(c+d)=ac-bc+ad-bd$$
$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

例1. $(x+3)(x+5)=x^2+3x+5x+15$
$=x^2+8x+15$

例2. $(x-4)(2x-7)=2x^2-8x-7x+28$
$=2x^2-15x+28$

例3. $(5x-6)(2x-3)=10x^2-12x-15x+18$
$=10x^2-27x+18$

例4. $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}b\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}ab$
$+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}ab-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}b^2=\frac{2}{15}a^2-\frac{4}{45}ab-\frac{1}{6}b^2$

例5. $(x+4)(x+2)=x^2+(4+2)x+4\times 2=x^2+6x+8$

例6. $(x-2)(x+8)=x^2+(-2+8)x+(-2)\times 8$
$=x^2+6x-16$

例7. $(x-3)^2=x^2-2\times x\times(3)+3^2=x^2-6x+9$

例8. $(3x+2)(3x-2)=(3x)^2-2^2=9x^2-4$

例 5. $(a+b-c)(x+y)$

$$=ax+bx-cx+ay+by-cy$$

演 習 問 題 (12)

次ノ積ヲ求メヨ。

(1) $(x-2)(x+3)$　　(2) $(x+7)(x+8)$

(3) $(x-5)(x-9)$　　(4) $(2x-7)(3x+4)$

(5) $(5xy-6)(7xy+2)$　　(6) $(3x-5)(6x-8)$

(7) $(xy+ab)(xy-ab)$　　(8) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

(9) $(2x-3y+4z)(x-y)$

(10) $(3a+2b-5c)(a-2c)$

(24) 以上ノ乘法ハ直線的ニ掛算ヲ行ヒタルモ算術ノ如ク上下ニ記載シテ其結果ヲ求ムルコトヲ得,最モ實用的ナリ。

例 1. $(a-2b)(3a+b)$ ヲ計算セヨ。

解

$$\begin{array}{r}
a-2b\\
3a+\ b\\
\hline
3a^2-6ab\qquad\\
+\ ab-2b^2\\
\hline
3a^2-5ab-2b^2
\end{array}$$

例 2. $(3x-2y+5z)(2x+4y-7z)$ ヲ計算セヨ。

解

$$\begin{array}{lllllll}
3x & -2y & +5z & & & & \\
2x & +4y & -7z & & & & \\
\hline
6x^2 & -4xy & +10xz & & & & \\
 & +12xy & & +20yz & -8y^2 & & \\
 & & -21xz & +14yz & & -35z^2 & \\
\hline
6x^2 & +8xy & -11xz & +34yz & -8y^2 & -35z^2 &
\end{array}$$

例 3. $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)$ ヲ計算セヨ。

解

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{2}ab & +\frac{1}{3}b^2 & & \\
\frac{1}{2}a & -\frac{1}{3}b & & & \\
\hline
\frac{1}{4}a^3 & -\frac{1}{4}a^2b & +\frac{1}{6}ab^2 & & \\
 & -\frac{1}{6}a^2b & +\frac{1}{6}ab^2 & -\frac{1}{9}b^3 & \\
\hline
\frac{1}{4}a^3 & -\frac{5}{12}a^2b & +\frac{1}{3}ab^2 & -\frac{1}{9}b^3 &
\end{array}$$

例 4. $(7-2x^2-3x+x^3)(3x-2+2x^2)$ ヲ計算セヨ。

解 先ヅxニ關スル降冪ノ順ニ配列スベシ。

$$\begin{array}{llllll}
x^3 & -2x^2 & -3x & +7 & & \\
2x^2 & +3x & -2 & & & \\
\hline
2x^5 & -4x^4 & -6x^3 & +14x^2 & & \\
 & +3x^4 & -6x^3 & -9x^2 & +21x & \\
 & & -2x^3 & +4x^2 & +6x & -14 \\
\hline
2x^5 & -x^4 & -14x^3 & +9x^2 & +27x & -14
\end{array}$$

演 習 問 題 (13)

次ノ積求ム。

(1) $(3a-2b)(5a+6b)$　　(2) $(4a-5b)(6a+5b)$

(3) $(2x-3y)(x-2y)$

(4) $(x^3+2x^2-x+1)(x-1)$

(5) $(2x^2-3x-4)(2x-5)$

(6) $(7x^2-8x+3)(2x+3)$

(7) $(3a^2-ab+2b^2)(3a^2+ab-2b^2)$

(8) $(a^2+3ab+b^2)(a^2-3ab+b^2)$

(9) $(x^2-xy+y^2-z^2)(x^2+xy-y^2-z^2)$

(10) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(11) $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)$

(12) $\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)$

(13) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)$

(14) $(x+y+z)(x-y+z)$

(25) 除　法

單項式ノ除法

(法則)　同ジ文字ノ異ナル冪ヲ有スル二數ノ商ハ指數ノ差ヲ取ルベジ。

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

例　$a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a$

(符號ノ法則)　同符號ノ二數ノ商ハ正ニシテ異符號ノ二數ノ商ハ負ナリ。

$$-ab \div (-a) = +b$$

$$-ab \div (+a) = -b$$

例 1.　$15a^5b^6c^3 \div 3a^2b^3c = 5a^{5-2}b^{6-3}c^{3-1}$

$= 5a^3b^3c^2$

例 2.　$-14x^5y^6 \div (+2x^3y^3) = -7x^{5-3}y^{6-3}$

$= -7x^2y^3$

例 3.　$-56a^6b^4 \div (-7a^5) = 8a^{6-5}b^4$

$= 8ab^4$

例 4.　$x^7 \div x^{10} = \frac{x^7}{x^{10}} = \frac{x^7}{x^7x^3} = \frac{1}{x^3}$

例4ノ如ク除數ノ冪ノ方被除數ノ冪ヨリ大ナルトキハ分數ノ形ニシテ分母ニ冪數ノ差ヲ冪數トスル數ヲ取ルベシ。

例 5.　$a^0=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

$$a^4 \div a^4 = \frac{a^4}{a^4} = 1$$

又　$a^4 \div a^4 = a^{4-4} = a^0$

$\therefore \quad a^0 = 1$

演 習 問 題 (14)

次ノ除法ヲ行ヘ。

(1) $4a^5 \div 2a^2$　　(2) $8x^2y^2 \div 4xy$

(3) $10a^3b^2 \div (-5a^2b)$　　(4) $-14x^4y \div 7x^3$

(5) $-10a^4b^5 \div (-a^2b^4)$　　(6) $-30x^3y^4 \div 10x^5y^2$

(7) $-16x^4y^3 \div (-4x^4)$　　(8) $-\frac{1}{3}a^3b^7 \div \left(-\frac{1}{6}a^2b^5\right)$

(9) $-\frac{7}{25}x^8y^7 \div \left(-\frac{14}{15}x^4y^4\right)$

(10) $22a^2x^8 \div (-11ax^7)$

(26) 多項式ヲ單項式ニテ除スルコト

(法則) 多項式ヲ單項式ニテ除スルニハ多項式ノ各項ヲ單項式ニテ除シ其商ノ代數和ヲ取ルベシ。

$$(a+b-c) \div m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

例 1. $(15x-18y-21z) \div (-3) = \frac{15x}{-3} + \frac{-18y}{-3}$

$+\frac{-21z}{-3}$

$= -5x+6y+7z$

例 2. $(25x^5y^4-10x^3y^2+15x^2y^4) \div (5x^2y^2)$

$= \frac{25x^3y^4}{5x^2y^2} + \frac{-10x^3y^2}{5x^2y^2} + \frac{15x^2y^4}{5x^2y^2}$

$= 5x^3y^2 - 2x + 3y^2$

例 3. $(7a^2-5ab+6ab^2) \div (-\frac{2}{3}a)$

$= 7a^2 \div \left(-\frac{2}{3}a\right) + \left(-5ab\right) \div \left(-\frac{2}{3}a\right)$

$+6ab^2 \div \left(-\frac{2}{3}a\right)$

$= -\frac{21}{2}a + \frac{15}{2}b - 9b^2$

演 習 問 題 (15)

次ノ除法ヲ行ヘ。

(1) $(5a^2+10ab) \div (-5a)$

(2) $(4x^2-8x) \div (-2x)$

(3) $(6a^4-3a^3) \div (-3a^3)$

(4) $(-12x^2y^2+18xy^4) \div (-6xy^2)$

(5) $(-2a^2b-4abc+6ab^2) \div (-2ab)$

(6) $\left(-3x^2+\frac{9}{2}xy-6xz\right) \div \left(-\frac{3}{2}x\right)$

(7) $\left(\frac{1}{4}a^2x-\frac{1}{16}abx-\frac{3}{8}acx\right) \div \frac{3}{8}ax$

(8) $\left(2a^3-3a^2b+5a^3b^2\right)\div\left(-\frac{1}{2}a\right)$

(9) $\left(-24a^6-32a^4-\frac{1}{3}a^3\right)\div\left(-\frac{1}{2}a^2\right)$

(10) $(7x^2y^2-3x^2y^3-5x^4y^4-3x^2y^5)\div(-xy^2)$

(27) 多項式ヲ多項式ニテ除スル法

(法則) 先ヅ除式ト被除式トヲ共ニ降冪又ハ昇冪ノ順ニ列ベヨ。

除式ノ左端ノ項ニテ被除式ノ左端ノ項ヲ除シ之ヲ第一商トス,コノ商ヲ除式ノ各項ニ乗ジ之ヲ被除式ノ同類項ノ下ニ置キ減法ヲ行ヘ。

コノ方法ヲ繰リ返シテ商ヲ順々ニ求ムベシ

例 1. $x^2+11x+30$ ヲ $x+6$ ニテ除セ

解

$$
\begin{array}{rl}
x+6\,) & x^2+11x+30\;(x+5 \\
 & \underline{x^2+\;\;6x\qquad} \\
 & \qquad 5x+30 \\
 & \qquad \underline{5x+30} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

例 2. $(24x^2-65xy+21y^2)\div(8x-3y)$ ヲ求メヨ。

解

$$
\begin{array}{rl}
8x-3y\,) & 24x^2-65xy+21y\;(3x-7y \\
 & \underline{24x^2-\;\;9xy\qquad} \\
 & \qquad -56xy+21y^2 \\
 & \qquad \underline{-56xy+21y^2} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

演習問題 (16)

次ノ除法ヲ行ヘ。

(1) $(x^2+3x+2)\div(x+1)$

(2) $(x^2-7x+12)\div(x-3)$

(3) $(3x^2+10x+3)\div(x+3)$

(4) $(5x^2+16x+3)\div(x+3)$

(5) $(6x^2-7x-3)\div(2x-3)$

(6) $(15a^2+17ax-4x^2)\div(3a+4x)$

(7) $(60x^2-4xy-45y^2)\div(10x-9y)$

(8) $(96x^2-15y^2-4xy)\div(12x-5y)$

(9) $(7x^3+96x^2-28x)\div(7x-2)$

(10) $(16-96x+216x^2-216x^3+81x^4)\div(2-3x)$

(28) 除式ガ二項以上ナル場合

例 1. $(x^3-x^2-9x-12)\div(x^2+3x+3)$ ヲ計算セヨ

解

$$
\begin{array}{rl}
x^2+3x+3\,) & x^3-\;x^2-\;9x-12\;(x-4 \\
 & \underline{x^3+3x^2+\;3x\qquad} \\
 & \quad -4x^2-12x-12 \\
 & \quad \underline{-4x^2-12x-12} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

例 2. $(6x^5-x^4+4x^3-5x^2-x-15)\div(2x^2-x+3)$ ヲ計算セヨ。

解 $2x^2-x+3)\,6x^5-x^4+4x^3-5x^2-x-15\,(3x^3+x^2-2x-5$

$$
\begin{array}{l}
6x^5-3x^4+9x^3 \\
\hline
2x^4-5x^3-5x^2 \\
2x^4-x^3+3x^2 \\
\hline
-4x^3-8x^2-x \\
-4x^3+2x^2-6x \\
\hline
-10x^2+5x-15 \\
-10x^2+5x-15 \\
\hline
0
\end{array}
$$

例 3. $(x^4+4a^4)\div(x^2+2ax+2a^2)$ ヲ計算セヨ。

解 $x^2+2ax+2a^2)\,x^4 \qquad +4a^4\,(x^2-2ax+2a^2$

$$
\begin{array}{l}
x^4+2ax^3+2a^2x^2 \\
\hline
-2ax^3-2a^2x^2 \\
-2ax^3-4a^2x^2-4a^3x \\
\hline
2a^2x^2+4a^3x+4a^4 \\
2a^2x^2+4a^3x+4a^4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

(注意) 被除式ガx^3, x^2, xノ項ヲ欠ク場合ニハ欠ケル項ノ位置ヲ空所トシテ上ノ如ク計算スル方間違少ナシ

例 4. $(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)$ ヲ計算セヨ

解 $x+y+z)\,x^3+y^3+z^3-3xyz\,(x^2-xy-xz+y^2+z^2-yz$

$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2y+x^2z \\
\hline
-x^2y-x^2z-3xyz+y^3+z^3 \\
-x^2y-xy^2-xyz \\
\hline
-x^2z+xy^2-2xyz+y^3+z^3 \\
-x^2z-xz^2-xyz \\
\hline
xy^2+xz^2-xyz+y^3+z^3 \\
xy^2+y^2z+y^3 \\
\hline
xz^2-xyz-y^2z+z^3 \\
xz^2+yz^2+z^3 \\
\hline
-xyz-y^2z-yz^2 \\
-xyz-y^2z-yz^2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

例 5. $\left(\frac{1}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2x+\frac{27}{2}ax^2-27x^3\right)\div\left(\frac{1}{2}a-3x\right)$ ヲ計算セヨ。

解 $\frac{1}{2}a-3x)\,\frac{1}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2x+\frac{27}{2}ax^2-27x^3\,(\frac{1}{4}a^2-3ax+9x^2$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{8}a^3-\frac{3}{4}a^2x \\
\hline
-\frac{3}{2}a^2x+\frac{27}{2}ax^2 \\
-\frac{3}{2}a^2x+9ax^2 \\
\hline
\frac{9}{2}ax^2-27x^3 \\
\frac{9}{2}ax^2-27x^3 \\
\hline
\end{array}
$$

例 6. $2x^3-7x^2+5x-8$ ヲ $2x^2-x+1$ ニテ除シ商及剰餘ヲ求メヨ。

解 $2x^2-x+1)\,2x^3-7x^2+5x-8\,(x-3$

$$
\begin{array}{l}
2x^3-x^2+x \\
\hline
-6x^2+4x-8 \\
-6x^2+3x-3 \\
\hline
x-5
\end{array}
$$

剰餘ノ冪數ガ除式ノ最高冪數ヨリ小トナリタルトキハコノ除法ハ整除サレザルモノナリ

商 $x-3$, 剰餘 $x-5$

演習問題 (17)

次ノ除法ヲ行ヘ。

(1) $(2y^3-3y^2-5y-1)\div(2y^2-5y-1)$

(2) $(6m^3-m^2-14m+3)\div(3m^2+4m-1)$

(3) $(x^4+x^3+7x^2-6x+8)\div(x^2+2x+8)$

(4) $(2x^4-x^3+4x^2+4x-3)\div(x^2-x+3)$

(5) $(30x^4+11x^3-82x^2-12x+48)\div(2x-4+3x^2)$

(6) $(x^9-y^9)\div(x^3-y^3)$

(7) $(a^{12}+2a^6b^6+b^{12})\div(a^4+2a^2b^2+b^4)$

(8) $\left(\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{10}a-\frac{1}{64}\right)\div\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}\right)$

(9) $8x^4-6x^3-7x^2-2x+6)$ ヲ $2x^2-3x+1$ ニテ除シ商及剩餘ヲ求メヨ。

(10) a^4+2a^2+1 ヲ a^2-1 ニテ除シ商及剩餘ヲ求メヨ。

第三章

(29) 一次方程式

二ツノ代數式ガ相等シキコトヲ示ス式ヲ等式ト稱ス。

例ヘバ　$7x-2$ ト $3x+6$ トガ相等シキコトヲ

$$7x-2=3x+6$$

ニテ表ハシ之ヲ等式ト云フ。

等號ノ左側ノ式ヲ等式ノ左邊,等號ノ右側ニ書キタル式ヲ等式ノ右邊ト稱ス。

(30) 等式中ノ文字ガソノ數値ノ如何ニ係ラズ左邊ト右邊トノ値ガ相等シキトキハコノ等式ヲ恒等式ト云フ。

例ヘバ　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ニ於テ

$a=1, b=2$ トスレバ

左邊 $=(1+2)^2=9$

右邊 $=1^2+2\times1\times2+2\times2=9$

トナルヲ以テ左右兩邊相等シキコトヲ知ル

又　$a=2, b=3$ トスレバ

左邊$=(2+3)^2=25$

右邊$=2\times2+2\times2\times3+3\times3=25$

トナルヲ以テ左右兩邊相等シキコトヲ知ル同様ニa,bニ如何ナル數値ヲ代入スルモ常ニ左右兩邊相等シクナルコトヲ知ルヲ以テ,コノ等式ハ恒等式ナリ。

等式ノ兩邊ニ文字ノ特別ナル値ヲ代入スルトキニノミ相等シクナル等式ヲ方程式ト稱ス

例ヘバ　$5x-3=2x+3$ナル等式ニ於テ

$x=2$ナルトキ

左邊$=5\times2-3=7$

右邊$=2\times2+3=7$

トナリ左右邊相等シクナルモ,他ノ如何ナル數値ヲxニ代入スルモ左右邊相等シクナルコトナシ故ニ之ハ方程式ナリ。

コノ例ニ於ケル$x=2$ヲコノ方程式ノ根ト稱ス根ヲ求ムル方法ヲ方程式ヲ解クト稱ス。

方程式中ニ含マルヽ未知數ノ冪ガ1ニシテ1以上ノ冪數ヲ含マザルトキハ之レヲ一次方程式ト云フ。

例ヘバ　$4x-5=6(x-1)$

$\frac{1}{2}(3x-4)=\frac{2}{5}(x-6)-1$

ノ如キハ皆一次方程式ナリ。

(31)　一次方程式ヲ解クニハ次ノ公理ヲ用ユ

公理1.　等シキ數ニ等シキ數ヲ加ヘタル結果相等シ。

公理2.　等シキ數ヨリ等シキ數ヲ減ジタル結果相等シ。

公理3.　等シキ數ニ等シキ數ヲ乘シタル結果相等シ。

公理4.　等シキ數ヲ等シキ數ニテ割リタル結果相等シ。

例1.　$7x-3=3x+17$ヲ解ケ

解　兩邊ニ3ヲ加フレバ

$7x-3+3=3x+17+3$

$7x\qquad=3x+17+3$

兩邊ヨリ$3x$ヲ減ズレバ

$7x-3x=3x-3x+17+3$

$7x-3x=17+3$

$4x=20$

兩邊ヲ4ニテ割レバ

$$4x \div 4 = 20 \div 4$$

$$\therefore \quad x = 5$$

驗算: $x=5$ヲ方程式ノ左右兩邊ニ代入スレバ

左邊$=7x-3=7\times5-3=32$,

右邊$=3x+17=3\times5+17=32$

トナリ左右兩邊ノ數值相等シクナルヲ以テ$x=5$ハ根ナルコトヲ知ル。

(注意) 上ノ方程式ノ解法ニ於ケル形ノ變化ニ注意スベシ。

卽チ原方程式 $7x-3=3x+17$,

第四段變形式 $7x-3x=17+3$

ヲ比較スルニ原方程式ノ左邊ニアリタル-3ハ變形式ニ於テハ左邊ヨリ消失シ,其代リ右邊ニ$+3$トナリテ顯ハレタリ,又原方程式ノ右邊ニアリタル$3x$ハ變形式ニ於テハ右邊ヨリ消失シ左邊ニ$-3x$トナリテ顯ハレタリ。

依リテ次ノ法則アリ。

移項法則 方程式ノ一邊ノ一數ヲ他邊ニ移項スルニハソノ有スル符號ヲ變ジテ持行ケバヨシ

演習問題 (18)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1)	$3x-2=18-x$	(2)	$4x-3=18-3x$
(3)	$2x+1=x+7$	(4)	$5x+4=13+2x$
(5)	$4x+3=23-x$	(6)	$5x-7=2x+11$
(7)	$3x+5=13-x$	(8)	$4x+7=19-2x$
(9)	$8x-3=6x-2$	(10)	$9x+4=8-3x$

(注意) 方程式中ニ括弧ヲ有スルモノハ先ヅ括弧ヲ去リテ後前條ノ法則ニヨリテ之ヲ解クモノトス,又分數ヲ有スルモノハ分母ノ最小公倍數ヲ各項ニ乘ジ,之ヲ整數ノ數係數ノミヲ含ム方程式ニ變ジテ後ニ前條ノ通リニ取リ扱フヲヨシトス。

例 1. $5(x-1)-3(x-2)+4(x-3)=3x+1$ヲ解ケ

解 $5(x-1)-3(x-2)+4(x-3)=3x+1$

$$5x-5-3x+6+4x-12=3x+1$$

$$5x-3x+4x-3x=1+5-6+12$$

$$3x=12$$

$$\therefore \quad x=4$$

例 2. $2(x+2)^2-(x-1)(x-2)=(x-3)(x+1)-4$

ヲ解ケ。

解 $2(x+2)^2-(x-1)(x-2)=(x-3)(x+1)-4$

$2(x^2+4x+4)-(x^2-3x+2)=(x^2-2x-3)-4$

$2x^2+8x+8-x^2+3x-2=x^2-2x-3-4$

$2x^2+8x-x^2+3x-x^2+2x=-3-4-8+2$

$13x=-13$

$\therefore \quad x=-1$

例 3. $2x+1-\{x-1-2(2-x)\}=4$ ヲ解ケ

解 $2x+1-\{x-1-2(2-x)\}=4$

$2x+1-\{x-1-4+2x\}=4$

$2x+1-x+1+4-2x=4$

$2x-x-2x=4-1-1-4$

$-x=-2$

$\therefore \quad x=2$

例 4. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}x$ ヲ解ケ

解 $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}x$

3, 2, 4, 6 ノ最小公倍數12ヲ各項ニ乘ズレバ

$\frac{2}{3}\times 12x-\frac{1}{2}\times 12=\frac{3}{4}\times 12-\frac{1}{6}\times 12x$

$8x-6=9-2x$

$8x+2x=9+6$

$10x=15$

$\therefore \quad x=\frac{3}{2}$

演習問題 (19)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $5x+10-6x+3=4x+12+6x-10$

(2) $4(x-2)=3(x-1)$

(3) $5(x-2)=3(x-1)-1$

(4) $3(x-2)-(1-x)=13$

(5) $6(4-x)-5(2x+3)+55=0$

(6) $x(x-1)=(x-3)^2+9$

(7) $(x+4)(x-3)-(x-2)(x+1)=0$

(8) $2(x+1)^2+3(2-x)^2=5(x-1)^2-1$

(9) $3(x+1)^2-(x-4)^2=2(x+2)^2-27$

(10) $2x-\{3-x-(1-5x)\}=6$

(11)　$2-[2-\{x-(4-x)\}]=3$

(12)　$\frac{1}{2}x+5=12-\frac{2}{3}x$

(13)　$\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}=\frac{1}{5}-\frac{5}{4}x$

(14)　$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{5}(x+2)=\frac{1}{3}x-1$

(15)　$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-5}{3}=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}$

(16)　$\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{3}(x-2)=\frac{1}{2}(5-3x)$

(17)　$\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2$

(18)　$0.5x+3.5=0.25x+3$

(19)　$1.5x+\frac{1}{2}(2.4x-3.9)=0.75x$

(20)　$\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$

(32) 一次方程式應用問題

應用問題ヲ解クニハ先ヅ問題ノ意味ヲ能ク了解シ未知數ト已知數トヲ用井テ問題ノ意味ヲ正シク方程式ニヨリテ表ハシ,次ニコノ一次方程式ヲ解キテ其ノ根ヲ求メ,最後ニコノ根ガ正シキカ否ヤヲ驗算スルコトヲ要ス。

例 1.　二數アリ一數ハ他ノ數ノ4倍ニシテ二數ノ和ハ40ナリト云フ各數如何。

解　一數ヲxトスレバ他ノ數ハ$4x$ナリ,故ニ次ノ方程式アリ。

$$x+4x=40$$

之ヲ解ケバ

$$5x=40$$

$$\therefore\quad x=8$$

依リテ求ムル二數ハ8及32ナリ。

驗算　8ノ4倍ハ32ニシテ

$$8+32=40$$

ナルヲ以テ題意ニ適合スルコトヲ知ル即之求ムル二數ナリ。

例 2.　現今父ノ歳ハ子ノ歳ノ4倍ナルモ,20年後ニハ父ノ歳ハ子ノ歳ノ2倍トナルト云フ現今ハ各幾歳ナルカ。

解　今子ハx歳ナリトスレバ,父ハ$4x$歳ナルコトヲ知ル,依リテ次ノ方程式アリ。

$$4x+20=2(x+20)$$

之ヲ解ケバ

$$4x+20=2x+40$$

$$4x-2x=40-20$$

$$2x=20$$

$$\therefore\quad x=10$$

依リテ父ノ歳ハ40歳ナリ。

驗算　20年後ノ子ノ歳ハ30

20年後ノ父ノ歳ハ60

トナルヲ以テ題意ニ適スルコトヲ知ル。

例3.　正方形ノ土地ト二邊ノ長サガ正方形ノ一邊ヨリ夫々3米及2米長キ矩形ノ地面トノ差ハ31平方米ナリト云フ,コノ正方形ノ面積ヲ求メヨ。

解　正方形ノ一邊ノ長サヲx米トスレバ矩形ノ二邊ノ長サハ$(x+3)$米及$(x+2)$米ナリ,依リテ次ノ方程式アリ。

$$x^2=(x+3)(x+2)-31$$

之ヲ解ケバ

$$x^2=x^2+5x+6-31$$

$$x^2-x^2-5x=6-31$$

$$-5x=-25$$

$$\therefore\quad x=5$$

依リテ正方形ノ一邊ハ5米トナルヲ以テコノ面積ハ25平方米ナリ。

驗算　矩形ノ面積ハ$8\times7=56$平方米トナルヲ以テ$56-25=31$平方米トナリ,題意ニ適合スルコトヲ知ル。

例4.　鶴龜頭數合セテ32アリ足數合セテ98本ナリト云フ各幾頭ナルカ。

解　鶴ノ頭數ヲxトスレバ龜ノ頭數ハ$(32-x)$頭ナリ足ノ總計ハ$2x+4(32-x)$トナルヲ以テ

$$2x+4(32-x)=98$$

ナル方程式ヲ得

之ヲ解ケバ

$$2x+128-4x=98$$

$$2x-4x=98-128$$

$$-2x=-30$$

$$\therefore\quad x=15$$

依リテ鶴ハ15頭,龜ハ17頭ナルコトヲ知ル。

驗算　15×2+17×4=98

トナルヲ以テ題意ニ適合スルコトヲ知ル。

演習問題 (20)

(1)　二數アリ,一數ハ他ノ數ノ3倍ニシテ,二數ノ和ハ188ナリト云フ,二數各如何。

(2)　二數ノ和ハ88ニシテ二數ノ差ハ8ナリト云フ二數ヲ求メヨ。

(3)　27ヲ二數ニ分チ一數ノ4倍ヲ他ノ數ノ5倍ニ等シクセヨ。

(4)　父子アリ現今父ノ歳ハ40ニシテ子ハ8歳ナリ,幾年後ニ父ノ歳ハ子ノ歳ノ三倍トナルカ

(5)　或人ノ日給95錢ニシテ夜業ヲナストキ25錢ヲ増スト云フ,コノ人40日間ニ41圓50錢ヲ得タリ此中夜業ヲナセシ日數如何。

(6)　一個ニ付20錢ノ石鹼ト一個ニ付キ15錢ノ石鹼ト合セテ500個アリ,其代價82圓50錢ナリ,各幾個ヅヽナルカ。

(7)　連續スル二數ノ平方ノ差ガ15ナリト云フコノ二數如何。

(8)　甲乙二人アリ所持金合セテ300圓ナリ,甲ハ所持金ノ半分ヲ費シ乙ハ所持金ノ三分ノ二ヲ費セシニ兩人ノ所持金合セテ120圓トナレリト云フ各人最初ノ所持金如何。

(9)　或距離ヲ往復セシニ往キハ一時間2里ノ速サニテ行キ,歸リハ一時間1里半ノ速サニテ進ミ往復7時間ヲ要セリト云フ,其距離ヲ求メヨ

(10)　矩形ノ土地アリ長サハ幅ヨリ8間長シ,若シ此長サト幅ノ各ニ2間ヲ増セバ其面積600坪ヲ増スト云フ,長サ幅各如何。

(11)　甲乙二人ニテ一ツノ仕事ヲナスニ,甲一人働カバ60日,乙一人働カバ40日ニテ之ヲ完成スト云フ,今甲ガ若干日働キテ後ニ乙之ニ代リテ始メヨリ50日ニテ成就セシトキハ甲ノ働キシ日數如何。

(12)　時計アリ2時後兩針ガ相重ナル時間ヲ求メヨ。

(13)　馬ト車ヲ400圓ニテ買ヒ,馬ハ2割5分,車ハ4割ノ利ヲ得テ賣リタル故之ヲ通算スレバ3割

6分4厘ノ利ニ當ルト云フ馬ノ買價如何。

(14) 梨若干個ヲ子供ニ分配スルニ一人ニ5個宛トスレバ8個餘リ,一人ニ7個ヅヽトスレバ4個不足スト云フ子供ノ數如何。

(15) 父ハ45歳子ハ17歳ナリ,幾年前ニ父ノ歳ハ子ノ歳ノ3倍ナリシカ。

(33) 聯立一次方程式

x及yニ關スル二ツノ一次方程式ノ何レニモ滿足スルx及yノ値ヲ求ムルコトヲ得,之ヲ求ムルコトヲ聯立方程式ヲ解クト稱ス。

例ヘバ　$2x+y=5$

$3x-2y=4$

ナル二ツノ方程式ハ$x=2, y=1$ナルトキ何レノ方程式ニモ適合スルコトヲ知ル,コノx及yノ値ヲ聯立方程式ノ根ト稱ス。

(34) 聯立方程式ノ解法

加減消去法

例 1.　$4x+5y=17, 3x-7y=2$ヲ解ケ

$$4x+5y=17 \qquad (1)$$
$$3x-7y=2 \qquad (2)$$

(1)式ニ(2)式中ノyノ係數7ヲ乘ズレバ

$$28x+35y=119 \qquad (3)$$

(2)式ニ(1)式中ノyノ係數5ヲ乘ズレバ

$$15x-35y=10 \qquad (4)$$

(3)ト(4)トヲ加フレバ

$$\begin{array}{r} 28x+35y=119 \\ 15x-35y=\ 10\ (+ \\ \hline 43x \qquad =129 \end{array}$$

$$\therefore \quad x=3$$

次ニyノ値ヲ求メンニ

(1)式ニ(2)式中ノxノ係數3ヲ乘ズレバ

$$12x+15y=51 \qquad (3)$$

(2)式ニ(1)式中ノxノ係數4ヲ乘ズレバ

$$12x-28y=8 \qquad (4)$$

(3)ヨリ(4)ヲ減ズレバ

$$\begin{array}{r} 12x+15y=51 \\ 12x-28y=\ 8\ (- \\ \hline 43y=43 \end{array}$$

$$\therefore \quad y=1$$

故ニ求ムル根ハ　$x=3, y=1$ナリ。

例 2.　$4x-2y=2,\ 5x+2y=16$ ヲ解ケ

解　兩式ヲ邊々相加フレバ

$$\begin{array}{r} 4x-2y=2 \\ 5x+2y=16 \quad (+ \\ \hline 9x \qquad =18 \end{array}$$

$$\therefore \quad x=2$$

第一方程式ニ5ヲ乘ズレバ

$$20x-10y=10 \qquad (1)$$

第二方程式ニ4ヲ乘ズレバ

$$20x+8y=64 \qquad (2)$$

(1)ヨリ(2)ヲ減ズレバ

$$\begin{array}{r} 20x-10y=10 \\ 20x+8y=64 \quad (- \\ \hline -18y=-54 \end{array}$$

$$\therefore \quad y=3$$

故ニ求ムル根ハ　$x=2,\ y=3$ ナリ。

(35) 代入法

例 1.　$3x+2y=17,\ x-2y=-5$ ヲ解ケ

解　第二方程式ヨリ

$$x=2y-5 \qquad (a)$$

コノ値ヲ第一方程式ノ x ノ代リニ置キ換フレバ

$$3(2y-5)+2y=17$$

$$6y-15+2y=17$$

$$6y+2y=17+15$$

$$8y=32$$

$$\therefore \quad y=4$$

ソノコノ値ヲ(a)中ニ代入スレバ

$$x=2\times4-5=3$$

故ニ求ムル根ハ $x=3,\ y=4$ ナリ

例 2.　$2x+5y=15,\ 4x-3y=17$ ヲ解ケ

第一方程式ヨリ

$$2x=15-5y$$

$$x=\frac{15-5y}{2} \qquad (a)$$

コノ値ヲ第二方程式中ノ x ニ代入スレバ

$$4\times\frac{15-5y}{2}-3y=17$$

$$2(15-5y)-3y=17$$

$$30-10y-3y=17$$

$$-13y=-13$$

$$\therefore \quad y=1$$

ソノコノ値ヲ(a)中ニ代入スレバ

$$\therefore \quad x=\frac{15-5\times1}{2}=5$$

故ニ求ムル根ハ　$x=5, y=1$ ナリ。

(36) 比較法

例　$2x+3y=13,\ 4x+5y=23$ ヲ解ケ

解　第一方程式ヨリ

$$2x=13-3y$$

$$x=\frac{13-3y}{2} \qquad (1)$$

第二方程式ヨリ

$$4x=23-5y$$

$$x=\frac{23-5y}{4} \qquad (2)$$

(1) ト (2) ヲ比較シ右邊ヲ相等シク置ケバ

$$\frac{13-3y}{2}=\frac{23-5y}{4}$$

$$2(13-3y)=23-5y$$

$$26-6y=23-5y$$

$$-6y+5y=23-26$$

$$-y=-3$$

$$\therefore \quad y=3$$

yノコノ値ヲ(1)中ニ代入スレバ

$$x=\frac{13-3\times3}{2}=2$$

故ニ求ムル根ハ $x=2, y=3$ ナリ

例　$4x-3y+z=0,\ 2x+6y+2z=1,\ 6x+3y-z=5$ ヲ解ケ

解　三ツノ方程式ノ内任意ノ二組ヲ取リコノ間ニzヲ消去シタル方程式二組ヲ作リ,之ヲ解キテx,yノ値ヲ求メ,次ニコノ値ヲ原方程式ノ一ツニ代入シテzノ値ヲ求ムルモノトス。

$$4x-3y+z=0 \qquad (1)$$

$$2x+6y+2z=1 \qquad (2)$$

$$6x+3y-z=5 \qquad (3)$$

(1) ヲ2倍スレバ

$$\begin{array}{lrl} & 8x-\ 6y+2z=0 & \\ (2) & 2x+\ 6y+2z=1 & (- \\ \hline & 6x-12y\qquad =-1 & \qquad (4) \end{array}$$

次ニ (1) ト (3) ヲ加フレバ

$$\begin{array}{rl} 4x-3y+z=0 & \\ 6x+3y-z=5 & (+ \\ \hline 10x\qquad =5 & \end{array}$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

コノ値ヲ(4)中ニ代入スレバ

$$6\times\frac{1}{2}-12y=-1$$

$$-12y=-1-3$$

$$-12y=-4$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{3}$$

次ニ　$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}$ ヲ(1)中ニ代入スレバ

$$4\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{3}+z=0$$

$$2-1+z=0$$

$$\therefore\ z=-1$$

故ニ求ムル根ハ　$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=-1$ ナリ

演習問題 (21)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1)　$x+y=11,\ x-y=5$

(2)　$4x+y=6,\ 2x-y=0$

(3)　$2x-3y=3,\ 5x+4y=19$

(4)　$3x+4y=18,\ y=5-x$

(5)　$5x-2y=28,\ 3x+7y=-16$

(6)　$4x+11y=-25,\ 14y-3x=-48$

(7)　$6x-5y+1=0,\ 5x=4y$

(8)　$3(x+y)+y=13,\ 2(x+y)+y=9$

(9)　$4x-\frac{y}{2}=3,\ 2x-y=0$

(10)　$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2,\ 4x-y=5$

(11)　$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=9,\ \frac{x}{15}+\frac{y}{16}=2$

(12)　$0.3x+0.5y=47,\ 0.9x-0.2y=22$

(13)　$\frac{x-4}{4}+\frac{y-5}{2}=-1\frac{1}{2},\ \frac{2x+1}{2}-\frac{1-y}{4}=3$

(14)　$x+y+z=6,\ 2x+y-z=1,\ 3x-y+z=4$

(15)　$-5x+3y+z=38,\ 4x-5y+3z=10,$

$2x+4y-5z=-60$

(37) 聯立一次方程式應用問題

例 1.　二數アリ一數ニ他ノ數ノ4倍ヲ加ヘタルモノハ29ニシテ,一數ノ5倍ヨリ他ノ數ノ4倍ヲ減ジタルモノハ1ナリ,二數各如何

解　二數ヲx, yトスレバ

$$x+4y=29$$
$$5x-4y=1$$

ヲ得,之ヲ解ケバ

$$6x=30$$
$$\therefore\ x=5$$

從ツテ　$y=6$

驗算　$5+4\times6=29$

$$5\times5-4\times6=1$$

例 2.　大人10人,子供8人,一日ノ賃金合セテ44圓40錢ニシテ,大人4人ノ賃金ハ子供6人ノ賃金ヨリ1圓20錢多シト云フ,大人及子供各一人一日ノ賃金如何。

解　大人及子供各一人一日ノ賃金ヲ夫々x錢,y錢トスレバ

$$10x+8y=4440$$
$$4x-6y=120$$

ヲ得之ヲ解ケバ

$$\begin{array}{rl} 30x+24y= & 13320 \\ 16x-24y= & 480\quad (+ \\ \hline 46x\qquad = & 13800 \end{array}$$

$x=$ 300錢

$y=$ 180錢

驗算　$300\times10+180\times8=4440$

$$300\times4-180\times6=120$$

演習問題 (22)

(1)　上茶14斤ト下茶18斤トヲ混ズレバ一斤55錢ノ品トナリ,上茶10斤下茶6斤トヲ混ズレバ一斤58錢ノ品トナル,各一斤ノ代價如何。

(2)　若干人集リテ宴會ヲナスニ人員10人ヲ増シ一人前ノ費用ヲ10錢ヅツ高クナセバ豫定金額ヨリ19圓ヲ增シ,又人員ヲ15人減ジテ一人前ノ費用ヲ30錢ヅツ高クナセバ豫定金額ヨリ4圓50錢ヲ減ズベシト云フ,人數及一人前ノ費用如何。

(3)　羊80匹ト豚50匹トノ代金合計2250圓ニシテ羊ハ二割豚ハ一割ノ利ヲ得テ賣ルトキハ代金合計2575圓ヲ得ルト云フ,各一匹ノ代價如何。

(4)　金5500圓ヲ甲乙丙三人ニ分配貸付ケタルニ甲ヘハ年利一割,乙ニハ年利一割五分,丙ニハ年利五分トナシ一ケ年末ノ利息金各相等シカリシト云フ,各貸付金額如何。

(5)　或人金若干圓ヲ若干人ノ貧民ニ分配セシ

ニ各々ニ5圓ヅツ與フルニハ10圓不足スルコトヲ發見シタル爲メニ,各々4圓ヅツ與ヘタルニ5圓餘リタリト云フ,總金高及貧民ノ數如何。

(6) 7年前ニハ甲ノ年ハ乙ノ年ノ3倍ナリシニ7年後ニハ甲ノ年ハ乙ノ年ノ2倍トナルベシト云フ,現今兩人ノ年齢如何。

(7) 一定ノ速サニテ若干距離ヲ航海スル船アリ,若シ其速サヲ1時間ニ2浬ヅツ增セバ4時間早ク到着シ,若シ1時間ニ2浬ヅツ減ズレバ6時間遲ク到着スルト云フ,其航路及速力ヲ求メヨ

(8) 金ト銀ノ合金二種アリ,第一種ハ金銀ノ比5ト4トノ如シ,第二種ノ比ハ8ト7トノ如シ此二種ヲ混和シテ金14匁ト銀12匁トヨリ成ル合金ヲ作ラントス,各幾許ヲ要スルカ。

(9) 甲乙二數アリ,甲數ノ半分ト乙數ノ三分ノ一トノ和ハ32ニシテ又甲數ノ四分ノ一ト乙數ノ五分ノ一トノ和ハ18ナリト云フ,二數各如何

(10) 矩形ノ土地アリ,間口ヲ2間,奥行ヲ3間廣グルトキハ64坪ヲ增シ,間口ヲ3間,奥行ヲ2間廣グルトキハ68坪ヲ增スト云フ,コノ土地ノ間口及奥行如何。

第四章

因數分解法

(38) 公式 1.

$$ab+ac=a(b+c)$$

代數式ノ各項ガ同ジ數ニテ割リ盡シ得ラルヽヲ以テコノ數ハ代數式ノ一因數ナリ,從ッテ他ノ因數ハコノ數ニテ割リ算ヲ行ヘバ得ラルヽモノナリ。

例 次ノ各代數式ノ因數分解ヲナセ。

(1) $2x^2+4x^3$ (2) $8a^2+12ab-4ac$

(3) $25x^4y^3-20x^2y^5$

(4) $a(a+b)+c(a+b)$

解 (1) $2x^2+4x^3=2x^2(1+2x)$

(2) $8a^2+12ab-4ac=4a(2a+3b-c)$

(3) $25x^4y^3-20x^2y^5=5x^2y^3(5x^2-4y^2)$

(4) $a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$

演習問題 (23)

次ノ各式ノ因數分解ヲナセ。

(1) x^2+2x　　(2) a^2-3a

(3) $8a^3-4a^2$　　(4) $x^2+xy+xz$

(5) $8a^4-4a^2+4a$　　(6) $2x^2+4xy-6xz$

(7) $100a^8b^7-50a^6b^5$　　(8) $a(a-c)+b(a-c)$

(9) $4a(x+y)-b(x+y)$　　(10) $x(a+b)-(a+b)$

(39) 公　式　2.

$$ac+bc+ad+bd=(a+b)(c+d)$$

二項ヅツ組合セテ各組ヲ因數分解スレバ再ビ因數分解ヲナシ得ルコト多シ。

例　$ac+bc+ad+bd=(ac+bc)+(ad+bd)$

$$=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$$

演　習　問　題　(24)

次ノ各式ノ因數分解ヲナセ。

(1) $a^2+ab+ac+bc$　　(2) $a^2-ab+ac-bc$

(3) $a^2+ab-ac-bc$　　(4) $a^2-ab-ac+bc$

(5) $a^2+ax+ay+xy$　　(6) $ax-ay+cx-cy$

(7) $ab-bx+ac-cx$　　(8) $ax-bx+ac-bc$

(9) $2a^3-a^2+2a-1$　　(10) $ax^2+cx-byz-cz+bxy-axz$

(40) 公　式　3.

$$x^2\pm(a+b)x+ab=(x\pm a)(x\pm b)$$

$$x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$$

x^2 ノ係數ガ1ニシテxノ係數ハ二數ノ和ニ等シク,xヲ含マザル項ハコノ二數ノ積ニ等シキ二次三項式ノ形ニアル場合ナリ。

例　次ノ各式ノ因數分解ヲナセ。

(1) $x^2+7x+12$　　(2) $a^2-8a+15$

(3) $y^2+5y-24$　　(4) $a^2-3a-40$

(5) x^4+17x^2+72　　(6) $x^2-18x+81$

解　(1)$x^2+7x+12$ニ於テ二數ノ積ガ12ニシテ二數ノ和ガ7ナル數ヲ求メンニ,先ヅ積ガ$+12$ナルヲ以テ,コノ二數ハ共ニ正數ナルカ,共ニ負數ナルコトヲ要ス,而シテソノ和ガ7ナルヲ以テ二數ハ共ニ正數ナルコトヲ知ル,依リテ積ガ$+12$ナル數ハ1, 12; 2, 6; 3, 4ノ內ノ何レカナルヲ以テコノ內3, 4ヲ取レバ和ガ7トナルコトヲ知ル,故ニ求ムル二數ハ3, 4ナリ。

依リテ

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

例 2. $a^2-8a+15(=x-3)(x-5)$

例 3. $y^2+5y-24=(y-3)(y+8)$

例 4. $a^2-3a-40=(a+5)(a-8)$

例 5. $x^4+17x^2+72=(x^2)^2+17x^2+72$
$\quad =(x^2+8)(x^2+9)$

例 6. $x^2-18x+81=x^2-2\times 9x+9^2=(x-9)^2$

演 習 問 題 (25)

次ノ各式ノ因數分解ヲナセ

(1) x^2+3x+2 (2) $x^2-11x+18$

(3) a^2+6a+8 (4) x^2-6x+5

(5) x^2-x-42 (6) $x^2-5x-24$

(7) $x^2+19x+90$ (8) $x^2-11x-26$

(9) $x^2-5x-84$ (10) $a^2+11a-60$

(11) a^4+6a^2+8 (12) x^4-12x^2+20

(13) $a^2x^2+18ax+80$ (14) $x^2y^2-7xy-18$

(15) x^3-8x^2+12x (16) $4a^2-4ab-8b^2$

(17) $x^4+9x^3+18x^2$ (18) $a^3+a^2b-a^2c-abc$

(19) $6x^4-36x^3y+54x^2y^2$ (20) $2x^3+20x^2+50x$

(21) $x^2-12x+36$ (22) $x^2+18x+81$

(23) $4x^2+20x+25$ (24) $64a^2x^2-16ax+1$

(41) 公 式 4.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

二ツノ平方ノ差ノ形ニアル代數式又ハコノ形ニ改メ得ル代數式ハ和ト差ノ積ノ因數ニ分解サル。

例 次ノ各式ノ因數ヲ求メヨ。

(1) $4x^2-9y^2$ (2) $1-100x^4$

(3) $25a^{10}-36x^{36}$ (4) $(a+b)^2-4c^2$

解 (1) $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$
$\quad =(2x+3y)(2x-3y)$

(2) $1-100x^4=1^2-(10x^2)$
$\quad =(1+10x^2)(1-10x^2)$

(3) $25a^{10}-36x^{26}=(5a^5)^2-(6x^{18})^2$
$\quad =(5a^5+6x^{18})(5a^5-6x^{18})$

(4) $(a+b)^2-4c^2=(a+b)^2-(2c)^2$
$\quad =(a+b+2c)(a+b-2c)$

演 習 問 題 (26)

次ノ各代數式ノ因數分解ヲナセ。

(1) a^2-1 (2) $4-x^2$

(3) $64a^2-9b^2$ (4) $1-81a^6$

(5) $25x^4y^4-1$　　(6) $121a^2-100b^4$

(7) $a^2b^2c^2-9x^2y^2z^2$　　(8) $9a^2b^{12}-16c^{16}$

(9) $144x^{24}-25y^{10}a^{16}$　　(10) $5a-20a^3$

(11) a^4-16　　(12) $ax^2-a-2bx^2+2b$

(13) x^4+x^2-2　　(14) a^4-2a^2-8

(15) a^8-1　　(16) $a-a^5$

(17) $(a+b)^2-c^2$　　(18) $a^2-(b-c)^2$

(19) $(a+b)^2-(c-d)^2$　　(20) $(3a-2b)^2-(5a+b)^2$

(21) $a^2+2ab+b^2-c^2$　　(22) $a^2-b^2+2bc-c^2$

(23) $x^2-1-10y-25y^2$　　(24) $9a^2-4x^2+4xy-y^2$

(25) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$

(26) $100x^{20}-9y^8$　　(27) x^4-x^2-12

(28) c^4-81　　(29) $1-100x^4y^4$

(30) $9x^2-6x+1-a^2+2ay-y^2$

(42) 公式 5.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

立方ノ和ニアリテハ第一因數ハ二數ノ和ニシテ,立方ノ差ニアリテハ第一因數ハ二數ノ差

ニシテ,第二因數ハ二數ノ平方ノ和ニ一方ハ二數ノ積ヲ減ジタルモノ,他ノ方ハ二數ノ積ヲ加ヘタルモノヲ採レバヨシ。

例　次ノ代數式ヲ因數分解セヨ。

(1) x^3+1　　(2) a^3-8

(3) $8x^3+27y^3$　　(4) $27a^3-64b^3$

解　(1) $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$

(2) $a^3-8=a^3-2^3=(a-2)(a^2+2a+4)$

(3) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$

$=(2x+3y)\{(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2\}$

$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(4) $27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$

$=(3a-4b)\{(3a)^2+(3a)(4b)+(4b)^2\}$

$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

演習問題 (27)

次ノ代數式ノ因數分解ヲナセ。

(1) x^3-1　　(2) $54a^7+2ab^3$

(3) a^6-b^6　　(4) $1-64x^6$

(5) $a^3x^3-a^3y^3$　　(6) $(a+2)^3+a^3$

(7) $343x^3-8y^3$　　(8) $81x^4-24x$

(9) $343a^3-216b^3$　　(10) $x^{12}-1$

(43) 公式 6.

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

先ヅx^2ノ係數ヲ二ツノ因數ニ分チax, cxトシ末項ヲb, dナル二ツノ因數ニ分チ之レヲaxトcxトニ組合セ$(ax+b)(cx+d)$トシコノ括弧ヲ去リxノ係數ガ$ad+bc$トナレバヨシ。

例　$3x^2+11x+6$ノ因數分解ヲナセ。

解　3ヲ3×1トシ6ヲ2×3トスレバ

$$3x^2+11x+6=(3x+2)(x+3)$$

演習問題 (28)

次ノ代數式ノ因數分解ヲナセ。

(1) $2a^2+3a+1$　　(2) $2x^2+5x+2$

(3) $6y^2+5y+1$　　(4) $9x^2-6x+1$

(5) $2x^2-x-1$　　(6) $8y^2+10y+3$

(7) $24x^2-2x-15$　　(8) $14x^2-37x+5$

(9) $12a^2-ab-20b^2$　　(10) $16x^4+10ax^2-75a^2$

(44) 公式 7. 及 8.

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

上ノ公式ハ右邊ノ掛ケ算ヲ試ミルコトニヨリテ其結果ノ正シキヲ知ル。

又コノ第一式ハ次ノ如キ證明法ニヨルモ可ナリ。

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

演習問題 (29)

次ノ各式ノ因數分解ヲナセ。

(1) x^4+x^2+1　　(2) $a^4+4a^2b^2+16b^4$

(3) $x^4+9x^2y^2+81y^4$　　(4) x^8+x^4+1

(5) $8x^3+27y^3+z^3-18xyz$

(6) $a^3+b^3+3ab-1$　　(7) $8x^3+y^3+z^3-6xyz$

(8) $x^3-8y^3-27z^3-18xyz$

(9) $x^6+x^3y^3+y^6$　　(10) a^3-1-c^3-3ac

第　五　章

最大公約數及最小公倍數

(45) 二ツノ代數式ノ何レヲモ整除シ得ル代數式ヲコノ二ツノ代數式ノ公約數ト稱ス。

例ヘバa^3b^2トa^2b^2cナル二ツノ代數式アルトキab, a^2b, ab^2, a^2b^2等ノ代數式ハ何レモコノ與ヘラレタル二代數式ノ各々ヲ整除シ得ルコト明カナルヲ以テab, a^2b, ab^2, a^2b^2等ヲa^3b^2トa^2b^3cトノ公約數ト稱ス。

二ツノ代數式ノ公約數ノ内冪數ノ最大ナルモノヲ**最大公約數**ト稱ス。

例ヘバ上ノ例ニ於テ公約數ab, a^2b, ab^2, a^2b^2等ノ内ニテa^2b^2ガ其冪數ノ最大ナルモノナルヲ以テ之ヲa^3b^2トa^2b^3cトノ最大公約數ト稱ス。

最大公約數ハ$G. C. M.$ニテ略記サル,例ヘバ上ノ例ニ於テ$G. C. M. = a^2b^2$ナリ。

(46) (法則) 二ツノ代數式ノ最大公約數ヲ求ムルニハ各式ニ共通セル因數ヲ取リ冪數ハ最小ナルモノヲ取レバヨシ,但シ數係數アルトキハソノ二數ノ最大公約數ヲ取リ之レヲ係數トシテ附記スレバヨシ。

例 1.　$6a^5b^4x$ト$9a^2b^5y^2$トノ最大公約數ヲ求メヨ

解　$G. C. M. = 3a^2b^2$

例 2.　$5(a+b)^2(x-y)^3$ト$10(a+b)^4(x-y)^2$トノ最大公約數ヲ求メヨ。

解　$G. C. M. = 5(a+b)^2(x-y)^2$

例 3.　$7a^4x$, $14a^6x^3$, $21a^5x^4$ノ最大公約數ヲ求メヨ。

解　$G. C. M. = 7a^4x$

演　習　問　題 (30)

次ノ各組ノ代數式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1)　$3a^2b$, $6ab^2$　　(2)　$8a^2b^2$, $12ab^3$

(3)　$4abcx$, $6bcy$　　(4)　$2a^3b^4c$, $4a^4b^2$

(5)　$10a^4x^5$, $15a^7x^3$　　(6)　$12a^4b^3x$, $18a^2b^5y^2$

(7)　$3a^3b^2c^5$, $6a^4b^3c^2$, $12a^2b^3c^3$

(8)　$x(x-1)$, $(x-1)^2$　　(9)　$a(a+1)$, $a(a+2)$

(10)　$a(a+1)$, $(a+1)(a+2)$

(11)　$5(a+x)^2$, $10(a+x)(a-x)$

(12) $10a^3(a-2b)^2,\ 5a^2(a-2b)^3$

(13) $6(x+y)^2(x-y)^3,\ 9(x-y)^5$

(47) (法則) 多項式ノ最大公約數ヲ求ムルニハ各多項式ノ因數分解ヲナシ,次ニソノ最大公約數ヲ求ムルモノトス。

例 1. a^2+4a+3 ト a^2+5a+4 トノ最大公約數ヲ求メヨ。

解 $a^2+4a+3=(a+1)(a+3)$

$a^2+5a+4=(a+1)(a+4)$

$\therefore$ $G.C.M.=a+1$

例 2. x^3-5x^2-6x ト x^3-x ト $x^4+2x^3+x^2$ トノ最大公約數ヲ求メヨ。

解 $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$

$=x(x-6)(x+1)$

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

$x^4+2x^3+x^2=x^2(x^2+2x+1)=x^2(x+1)^2$

$\therefore$ $G.C.M.=x(x+1)$

演習問題 (31)

次ノ各代數式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1) $a^2+2a,\ a^2+3a+2$　(2) $x^2+3x+2,\ x^2+5x+6$

(3) $a^2-3a+2,\ a^2+2a-3$　(4) $a^2-1,\ a^2+2a+1$

(5) $a^2-4a+4,\ a^2-4$　(6) $x^3-16x,\ x^3-8x^2+16x$

(7) $(a+b)^2-c^2,\ a^2-(b+c)^2$

(8) $x^3+7x^2+12x,\ x^4+6x^3+9x^2$

(9) $a^2-ab-6b^2,\ a^2+4ab+4b^2,\ a^3-4ab^2$

(10) $x^2-a^2,\ x^3-a^3,\ x^4-a^4$

(11) $a^2-b^2-ac+bc,\ a^2+b^2+2ab-ac-bc,\ a^2+b^2-c^2+2ab$

(12) $a^2-b^2-2bc-c^2,\ a^2-b^2+2ac+c^2,\ a^2+2ab+b^2-c^2$

最小公倍數

(48) 二ツ又ハ二ツ以上ノ代數式ニテ整除シ得ル代數式ヲ最初ノ代數式ノ公倍數ト稱ス

例ヘバ a^6b^7 ハ a^4b^3 又ハ a^2b^4 ニテ整除シ得ラルルヲ以テ a^6b^7 ハ a^4b^3 ト a^2b^4 トノ公倍數ナリ。

二ツ又ハ二ツ以上ノ代數式ノ公倍數ノ內ニテ次數ノ最小ナルモノヲ最小公倍數ト稱ス。

例ヘバ a^6b^3 ト a^4b^4 トノ公倍數ハ a^6b^7, a^5b^5 等數多アル內 a^4b^4 ガ次數ノ最小ナルモノナリ,故ニ a^4b^4

ハa^4b^3, a^2b^3ノ最小公倍數ナリ。

最小公倍數ハ*L. C. M.*ニテ略記サル。

(49) (法則) 二ツノ代數式ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ先ヅ各式ニ共通セル因數ヲ取リ羃數ハ最大ナルモノヲ採リ兩式ニ共通セザルモノ全部ヲ取リ次ニ數係數アレバコノ最小公倍數ヲ係數トシテ用フベシ。

例 1. $3a^2b^3c^4$ト$12a^3b^3c^5$トノ最小公倍數ヲ求メヨ。

解 $\because\ L.C.M.=12a^3b^3c^5$

例 2. x^2-3x-4ト$x-x-12$トノ最小公倍數ヲ求メヨ。

解 $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$

$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$

$\therefore\ L.C.M.=(x-4)(x+1)(x+3)$

演 習 問 題 (32)

次ノ各式ノ最小公倍數ヲ求メヨ

(1) $8a^3x^2y,\ 12a^2xy$　　(2) $8x^5y^4,\ 10x^2y^2z$

(3) $20a^8b^{10},\ 25a^6b^6c^6$　　(4) $10ab^3c^2,\ 5a^2bc^3,\ 15a^2b^2c$

(5) $(a+b)^2,\ (a+b)(a-b)$

(6) $6(x+y)^2(x-y)^3,\ 36(x-y)^5$

(7) $a^2-4a+4,\ 4(a^2-4)$

(8) $a^2+6a+9,\ a^3-9a$

(9) $x^3-12x^2+36x,\ 2x^4-18x^3+36x^2$

(10) $x^2-a^2,\ 3x^3-3a^3,\ x^4-a^4$

(11) $12y^2-y-1,\ 6y^2-5y+1$

(12) $2a^2-5a+3,\ 3a^2-a-2,\ 6a^2-5a-6$

(13) $(x+a)^2-(b+c)^2,\ (x+b)^2-(c+a)^2$

$(x+c)^2-(a+b)^2$

(14) $a^3b^2(x^3y^2-y^5),\ 2^2b^3(x^4+x^3y+x^2y^2),\ a^2b^2(x^2y-xy^2)$

第六章

分　數

(50) 除法ノ運算ニ於テ被除數ヲ横線ノ上ニ除數ヲ横線ノ下ニ置キテ之ヲ表ハストキコノ商ヲ分數ト云フ,横線ノ上ニアル數ヲ分子下ニアル數ヲ分母ト稱ス。

即チ $\frac{a}{b}$ ハ $a\div b$ ト同ジ意義ヲ有ス,從ツテ分數ノ定義ヨリ。

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

ナルコト明カナリ。

法則 1. 分數ハ同ジ數ヲ分子分母ニ乘ズルモ其値ヲ變ズルコトナシ。

例ヘバ　$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$

法則 2. 分數ハ其分子分母ヲ同ジ數ニテ除スルモ其ノ値ヲ變ズルコトナシ。

例ヘバ　$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$

(51) **約分**　分數ノ分子分母ニ共通因數アルトキハコノ共通因數ニテ分子分母ヲ除スルコ

トニヨリテ之ヲ簡單ニスルコトヲ得,之ヲ分數ノ約分ト稱ス。

例 1. $\frac{77abx^3y^4}{7a^2bx^2y^2}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　分母子ヲ $7abx^2y^2$ ニテ除スレバ

$$\frac{77abx^3y^4}{7a^2bx^2y^2}=\frac{77abx^3y^4\div 7abx^2y^2}{7a^2bx^2y^2\div 7abx^2y^2}=\frac{11xy^2}{a}$$

例 2. $\frac{x^4-a^4}{a(x^2-a^2)}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　分子ヲ因數分解シ,之ヲ x^2-a^2 ニテ除スレバ

$$\frac{x^4-a^4}{a(x^2-a^2)}=\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)\div(x^2-a^2)}{a\ \ (x^2-a^2)\div(x^2-a^2)}$$

$$=\frac{x^2+a^2}{a}$$

例 3. $\frac{x^2-8xy+7y^2}{x^2-3xy-28y^2}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$$\frac{x^2-8xy+7y^2}{x^2-3xy-28y^2}=\frac{(x-y)(x-7y)}{(x+4y)(x-7y)}$$

$$=\frac{x-y}{x+4y}$$

例 4. $\frac{4-a}{a^2-16}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$$\frac{4-a}{a^2-16}=\frac{-(a-4)}{(a+4)(a-4)}=\frac{-1}{a+4}=-\frac{1}{a+4}$$

演習問題 (33)

次ノ分數ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{10x^4y^3}{15x^3y^4z^5}$ (2) $\dfrac{14abcxy}{21bc^2y}$

(3) $\dfrac{15a^4b^3c^5y^2}{20a^2b^4c^3y^3}$ (4) $\dfrac{a^2}{a^2+ab}$

(5) $\dfrac{xy}{x^2-xy}$ (6) $\dfrac{4a}{2a^2-2ab}$

(7) $\dfrac{a+c}{a^2-c^2}$ (8) $\dfrac{x^2-x}{x^3-x}$

(9) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (10) $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-11x+30}$

(11) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ (12) $\dfrac{a^2+14a+49}{a^2+3a-28}$

(13) $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$ (14) $\dfrac{a^2x+ax^2+x^3}{a^3-x^3}$

(15) $\dfrac{2a^2+3a-2}{3a^2+5a-2}$ (16) $\dfrac{4x^2+19x-5}{4x^2-16x+3}$

(17) $\dfrac{a^2+ax-ay-xy}{a^2-az+ax-xz}$ (18) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}$

(19) $\dfrac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a-c)^2-(b-d)^2}$ (20) $\dfrac{(a-b)^2-(c-d)^2}{(a-c)^2-(b-d)^2}$

(21) $\dfrac{2-x}{x^2-5x+6}$ (22) $\dfrac{3a-a^2}{a^2-2a-3}$

(52) 通分

多クノ分數ノ値ヲ變ゼズシテ等シキ分母ヲ有スル分數ニ變ズルコトヲ通分ト稱ス。

例ヘバ $\dfrac{b}{a}$ ト $\dfrac{d}{c}$ ナル異ナル分母ヲ有スル分數ヲ同分母トスルニハ各分數ノ分母分子ニ夫々 c 及 a ヲ乘スレバヨシ。

$$\frac{b}{a}=\frac{b\times c}{a\times c}=\frac{bc}{ac}$$

$$\frac{d}{c}=\frac{d\times a}{c\times a}=\frac{ad}{ac}$$

例 1. $\dfrac{x}{4a^8b}$ ト $\dfrac{y}{12a^3b^6}$ トヲ通分セヨ。

解 $$\frac{x}{4a^8b}=\frac{x\times 3b^5}{4a^8b\times 3b^5}=\frac{3b^5x}{12a^8b^6}$$

$$\frac{y}{12a^3b^6}=\frac{y\times a^5}{12a^3b^6\times a^5}=\frac{a^5y}{12a^8b^6}$$

例 2. $\dfrac{a+x}{a-x}$, $\dfrac{a-x}{a+x}$, $\dfrac{1}{a^2-x^2}$ ヲ通分セヨ。

解 $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(a+x)(a+x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2}$$

$$\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a-x)(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}$$

故ニ $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2}$, $\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}$, $\frac{1}{a^2-x^2}$ ハ求ムル分數ナリ。

演習問題 (34)

次ノ各分數ヲ通分セヨ。

(1) $\frac{2}{3x}$, $\frac{4}{5x}$, $\frac{7}{30x}$　　(2) $\frac{bc}{a^2}$, $\frac{ca}{b^2}$, $\frac{ab}{c^2}$

(3) $\frac{1}{x+1}$, $\frac{3}{2x+2}$, $\frac{5}{x^2-1}$

(4) $\frac{c}{a-b}$, $\frac{d}{b-a}$, $\frac{1}{a^2-b^2}$

(5) $\frac{x}{x^2-a^2}$, $\frac{2x}{x-a}$　　(6) $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{1-x}{1+x}$

(7) $\frac{1}{x^2-5x+6}$, $\frac{2}{x^2-4x+3}$

(8) $\frac{x+ay}{x-ay}$, $\frac{x-ay}{x+ay}$, $\frac{x^2+a^2y^2}{x^2-a^2y^2}$

(9) $\frac{ax}{x^4-a^4}$, $\frac{bx}{x^2+a^2}$, $\frac{cx}{x^2-a^2}$

(10) $\frac{3}{2x-2}$, $\frac{4}{3x-3}$, $\frac{5}{4x-4}$

(53) 分數加法及減法

同分母ヲ有スル分數ノ加減法

法則(第一)

分母相等シキ分數ヲ加フルニハソノ分數ノ分子ヲ加ヘタルモノヲ分子トシ,共通分母ヲ分母トスル分數ヲ作ルベシ,差ノトキモ同樣ナリ

例ヘバ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{a+c+d}{b}$

$$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^2}=\frac{a-b+c}{x^2}$$

異ナル分母ヲ有スル分數ノ加減法

法則(第二)

分母ガ異ナル分數ヲ加ヘ又ハ減ズルニハ先ヅ各分數ヲ通分シテ同分母トシタル後加法又ハ減法ヲ行フベシ。

例 1. $\frac{a}{x^2y}-\frac{b}{y^2z}-\frac{c}{z^2x}$ ヲ計算セヨ。

解 $$\frac{a}{x^2y}-\frac{b}{y^2z}-\frac{c}{z^2x}=\frac{ayz^2}{x^2y^2z^2}-\frac{bx^2z}{x^2y^2z^2}-\frac{cxy^2}{x^2y^2z^2}$$
$$=\frac{ayz^2-bx^2z-cxy^2}{x^2y^2z^2}$$

例 2. $\frac{5}{7x-7}+\frac{8}{6x-6}$ ヲ計算セヨ。

解 $$\frac{5}{7x-7}+\frac{8}{6x-6}=\frac{5}{7(x-1)}+\frac{8}{6(x-1)}$$

$$=\frac{30}{42(x-1)}+\frac{56}{42(x-1)}$$

$$=\frac{30+56}{42(x-1)}=\frac{86}{42(x-1)}$$

$$=\frac{43}{21(x-1)}$$

例 3. $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ヲ計算セヨ。

解 $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

$$=\frac{2a(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{2b(a+b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{2a(a-b)+2b(a+b)+a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{2a^2-2ab+2ab+2b^2+a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{3a^2+3b^2}{a^2-b^2}$$

（注意） 通分スルトキハ常ニ分母ノ最小公倍數ヲ共通分母ニスル樣ニスベシ。

演習問題 (35)

次ノ分數ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\frac{a+2}{2a}+\frac{1-a^2}{a^2}+\frac{1}{2}$ (2) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

(3) $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}$ (4) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}$

(5) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$ (6) $1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}$

(7) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$

(8) $\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{4}{x^2+2x-15}+\frac{3}{x^2+4x-5}$

(9) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$ (10) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}$

(11) $\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{ab-a^2}$ (12) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{x^2-1}$

(13) $\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

(14) $\frac{x-5}{x^2-7x+12}-\frac{2(x-4)}{x^2-8x+15}+\frac{x-3}{x^2-9x+20}$

(15) $\frac{1}{a}-\frac{2}{a+1}+\frac{1}{a+2}$

分數乘法及除法

(54) 分數乘法

（法則） 二ツノ分數 $\frac{a}{b}$ ト $\frac{c}{d}$ ヲ乘ズルニハ分子同仕,分母同仕ヲ乘ジテ分子,分母トスレバヨシ

即チ　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

例 1.　$\frac{10a^3}{7b^2c^2}\times\frac{21b^4}{c^2a}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$\frac{10a^3}{7b^2c^2}\times\frac{21b^4}{c^2a}=\frac{210a^3b^4}{7ab^2c^4}$

$$=\frac{30a^2b^2}{c^4}$$

例 2.　$\frac{x-y}{x^2+xy}\times\frac{x+y}{xy-y^2}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$\frac{x-y}{x^2+xy}\times\frac{x+y}{xy-y^2}=\frac{(x-y)}{x(x+y)}\times\frac{(x+y)}{y(x-y)}$

$$=\frac{1}{xy}$$

$\frac{a}{b}$ ノ分母分子ヲ轉倒シタル分數 $\frac{b}{a}$ ヲ初メノ分數ノ逆數ト稱ス,從ツテ a ノ逆數ハ $\frac{1}{a}$ ニシテ $\frac{1}{a}$ ノ逆數ハ a ナリ。

(55) 分數除法

(法則)　$\frac{a}{b}$ ヲ $\frac{c}{d}$ ニテ除スルニハ $\frac{c}{d}$ ノ逆數ナル $\frac{d}{c}$ ヲ $\frac{a}{b}$ ニ乘ズレバヨシ。

即チ　$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

例 1.　$\frac{5b^2}{6d}\div\frac{10b}{3d^3}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$\frac{5b^2}{6d}\div\frac{10b}{3d^3}=\frac{5b^2}{6d}\times\frac{3d^3}{10b}$

$$=\frac{bd^2}{4}$$

例 2.　$\frac{x^3+3x^2}{x+4}\div\frac{x+3}{x^2+4x}$ ヲ簡單ニセヨ。

解　$\frac{x^3+3x^2}{x+4}\div\frac{x+3}{x^2+4x}=\frac{x^3+3x^2}{x+4}\times\frac{x^2+4x}{x+3}$

$$=\frac{x^2(x+3)}{x+4}\times\frac{x(x+4)}{x+3}=x^3$$

演習問題 (36)

次ノ分數ヲ最モ簡單ナル形ニ改メヨ。

(1)　$\frac{4a^2}{b^2c^3}\times\frac{3b}{ca}\times\frac{c^2}{6ab}$　　(2)　$\frac{a^2}{xy}\times\frac{b^2}{yz}\times\frac{y^2}{ab}$

(3)　$\frac{4a}{3bc^2}\times\frac{27c}{16a^2c}\div\frac{9b^2}{2ac}$　　(4)　$\frac{1}{ax}\div\frac{1}{by}\div\frac{b}{a}$

(5)　$\frac{x^2+3x+2}{x+3}\times\frac{x+2}{x^2+4x+3}$

(6)　$\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}\times\frac{x^2-2x-8}{x^2-7x+12}$

(7) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}\times\dfrac{a^3-b^3}{ab(a+b)}$

(8) $\dfrac{x^2y+xy^2+y^3}{x^2-xy}\div\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)^2}$

(9) $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+3x-4}\div\dfrac{x^2+4x-21}{2x+8}$

(10) $\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2-x-2}\div\dfrac{2x^2-3x-5}{3x^2-7x-6}$

(11) $\dfrac{x^2-(y+z)^2}{(x+y)^2-z^2}\times\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x-y)^2-z^2}$

(12) $\dfrac{x^3+y^3}{x(x^2+y^2)}\times\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{y^2(x^2-xy+y)}\times\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$

(13) $\left(y-\dfrac{x^2}{y}\right)\times\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$

(14) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\right)\div\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

(15) $\left(a^3-\dfrac{1}{b^3}\right)\div\left(a-\dfrac{1}{b}\right)$

(16) $\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\times\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}\right)\times\dfrac{1}{a^3-b^3}$

(17) $\left(\dfrac{4}{x}+2\right)\div\left(x+\dfrac{2}{x}+3\right)$

(18) $\left(\dfrac{6}{x}+x-5\right)\div\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

(19) $\left(2x-3+\dfrac{1}{x}\right)\div\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$

(20) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\times\left(a-\dfrac{ab}{a+b}\right)\div\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

(56) 繁分數

分數ノ分子分母ニ分數ヲ含ム複雜ナル分數式ヲ繁分數ト稱ス,加減乘除ヲ適宜ニ取扱フコトニヨリテ之レヲ簡單ニスルコトヲ得ベシ。

例 1. $\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{b}{m}}{\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}}$ ヲ簡單ニセヨ。

解 $$\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{b}{m}}{\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}}=\dfrac{\dfrac{m^2-bn}{mn}}{\dfrac{an-bm}{mn}}$$

$$=\dfrac{m^2-nb}{mn}\times\dfrac{mn}{an-bm}$$

$$=\dfrac{m^2-nb}{an-bm}$$

例 2. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$ ヲ簡單ニセヨ。

解 $$\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{x}}}$$

$$=\frac{1}{x+\dfrac{x}{x^2+1}}=\frac{1}{\dfrac{x(x^2+1)+x}{x^2+1}}$$

$$=\frac{x^2+1}{x(x^2+1)+x}=\frac{x^2+1}{x^3+2x}$$

演習問題 (37)

次ノ繁分數ヲ最モ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{\dfrac{6}{x}+x-5}{1-\dfrac{2}{x}}$　　(2) $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

(3) $\dfrac{\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}}{\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}}$　　(4) $\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{4-x}}}$

(5) $\dfrac{a+b+\dfrac{b^2}{a}}{a+b+\dfrac{a^2}{b}}$　　(6) $\dfrac{2a}{a^2+\dfrac{1}{1\div a^2}}$

(7) $\left(\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}\right)\div\left(\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}\right)$

(8) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1+x}{1-x}}$

(9) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2+1}\times\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}\div\dfrac{2-\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$

(10) $\left\{\dfrac{a+b}{2(a-b)}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}+\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\right\}\div\dfrac{2b}{a-b}$

(57) 分數方程式

分數ノ分母ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ分數方程式ト稱ス,茲ニハ分母ヲ拂ヒ簡單ニシタル後一次方程式ニ歸スルコトヲ得ル分數方程式ヲノミ考ヘントス。

例 1. $\dfrac{3x-1}{4}-2\dfrac{x+1}{x-3}=2-\dfrac{3-6x}{8}$ ヲ解ケ。

解 $\dfrac{3x-1}{4}-2\dfrac{x+1}{x-3}=2-\dfrac{3-6x}{8}$

分母ノ最小公倍數$8(x-3)$ヲ各項ニ乘ズレバ

$$2(3x-1)(x-3)-2\times8(x+1)=2\times8(x-3)$$
$$-(3-6x)(x-3)$$
$$6x^2-20x+6-16x-16=16x-48-21x+9+6x^2$$
$$31x=29$$
$$\therefore\quad x=\frac{29}{31}$$

例 2. $\frac{4x}{x+1}-\frac{x}{x-2}=3$ ヲ解ケ。

解 $\frac{4x}{x+1}-\frac{x}{x-2}=3$

分母ノ最小公倍數 $(x+1)(x-2)$ ヲ乘ズレバ

$$4x(x-2)-x(x+1)=3(x+1)(x-2)$$

$$4x^2-8x-x^2-x=3x^2-3x-6$$

$$-6x=-6$$

$$\therefore \quad x=1$$

例 3. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{y-3}{y+3}=2,\ \frac{x-3}{2x+3}+\frac{y-3}{2y+3}=1$ ヲ解ケ

解 分母ヲ拂ヘバ

$$(x+3)(y+3)+(y-3)(x-3)=2(x-3)(y+3)$$

$$(x-3)(2y+3)+(y-3)(2x+3)=(2x+3)(2y+3)$$

括孤ヲ去リ簡單ニスレバ。

$$x-y=6,\ x+y=-3$$

故ニ $x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{9}{2}$ ヲ得。

演 習 問 題 (38)

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2x-1}$ (2) $\frac{2}{x+1}=\frac{3}{9-x}$

(3) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=-2$

(4) $\frac{7-6x}{3x-2}=\frac{4x-3}{3-2x}$ (5) $\frac{3x-2}{3x+4}=\frac{4x-5}{4x+1}$

(6) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

(7) $\frac{x}{x-7}-\frac{x+7}{x}=\frac{49}{x}$

(8) $\frac{x+1}{x+4}+\frac{x+4}{x-5}+\frac{x-5}{x+1}=3$

(9) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2,\ \frac{4}{x}-\frac{6}{y}=0$

(10) $\frac{4x+5y}{20}+\frac{4x-2y}{8}=x-\frac{3}{2},\ \frac{x+2}{y+3}=\frac{7}{10}$

第　七　章

(58) 二次方程式

二數ノ積ガ零ナル爲ニハ其因數ノ何レカガ零ナルコトヲ必要トス。

例ヘバ　$xy=0$ ナル方程式ヲ滿足スル爲メニハ x 又ハ y ハ0ナルコトヲ要ス,何トナレバ一因數ガ0ナレバ xy ハ0トナルヲ以テナリ。

例 1.　$(x-6)(x+2)=0$ ヲ解ケ。

解　二因數ノ積ガ0ナルヲ以テ

$$x-6=0 \quad 又ハ \quad x+2=0$$

ナルコトヲ必要トス。

$$x-6=0 \quad ヨリ \quad x=6$$

$$x+2=0 \quad ヨリ \quad x=-2$$

依リテ根ハ　$x=6$　又ハ　$x=-2$　ナリ

例 2.　$(x-1)(x-2)(x-3)=0$ ヲ解ケ。

解　三ツノ因數ノ積ガ0ナル爲メニハ

$x-1=0$ カ、$x-2=0$ カ, $x-3=0$ ナリ

即チ　$x=1$ 又ハ $x=2$ 又ハ $x=3$ ナリ。

依リテ根ハ　$x=1$, $x=2$, $x=3$ ナリ。

(59) 方程式中ニ含マル、未知數ノ次數ノ最大ナルモノガ2ナルトキ,之ヲ**二次方程式**ト云フ

例ヘバ　$3x^2-5x+1=0$, $x^2-8=0$ ノ如キハ二次方程式ナリ。

二次方程式ニ於テ x ノ項ヲ含マザル

$$ax^2+b=0$$

ノ如キ形ヲ有スルモノヲ**純二次方程式**ト稱ス。

又　$ax^2+bx+c=0$ ナル形ヲ有スルモノ即チ x^2 ノ項,x ノ項,已知數ヨリナルトキ,之ヲ**完全二次方程式**ト稱ス。

(60) 純二次方程式ノ解法

(第一法)　已知數ヲ右邊ニ移項シ,x^2 ノ係數ニテ除シ之ヲ開平スレバ根ヲ得。

例 1.　$5x^2-20=0$ ヲ解ケ。

解　$5x^2-20=0$

$$5x^2=20$$

$$x^2=4$$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

（注意）　代數學ニ於テハ算術ノ開平ノトキト異ナリ一數a^2ヲ開平スレバ$\pm a$ナル二數ヲ得，之レ$+a$ヲ平方シテモ$-a$ヲ平方シテモ共ニa^2ヲ得ルヲ以テナリ。

例 2.　$4x^2-24=0$ ヲ解ケ。

解
$$4x^2-24=0$$
$$4x^2=24$$
$$x^2=6$$
$$\therefore\ x=\pm\sqrt{6}$$

例 3.　$3(x^2-4)=2(x^2-6)$ ヲ解ケ。

解
$$3(x^2-4)=2(x^2-6)$$
$$3x^2-12=2x^2-12$$
$$3x^2-2x^2=-12+12$$
$$x^2=0$$
$\therefore\ x=0$　即チ二根共0ナリ。

（第二法）　方程式ノ全項ヲ左邊ニ移シ，之レニ因數分解ヲナシ，各因數ヲ0ト置キテ根ヲ求ム

例 1.　$4(x^2-1)=3x^2+12$ ヲ解ケ。

解
$$4(x^2-1)=3x^2+12$$
$$4x^2-4=3x^2+12$$

$$4x^2-3x^2-4-12=0$$
$$x^2-16=0$$
$$(x+4)(x-4)=0$$
$$x+4=0\qquad\therefore\ x=-4$$
$$x-4=0\qquad\therefore\ x=+4$$

例 2.　$3(x^2-1)=x^2-15$ ヲ解ケ。

解
$$3(x^2-1)=x^2-15$$
$$3x^2-3=x^2-15$$
$$3x^2-x^2=-15+3$$
$$2x^2=-12$$
$$x^2=-6$$
$$x=\pm\sqrt{-6}$$

コノ例ノ如ク平方根ノ中ガ負數ナル如キ數ヲ虛數ト云ヒ，斯ノ如キ根ヲ虛根ト稱ス。

（61）完全二次方程式ノ解法

因數分解ニヨル場合

例 1.　$x^2-6x=0$ ヲ解ケ。

解　$x^2-6x=0,\quad x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $x-6=0\quad\therefore\ x=6$

例 2.　$x^2-6x+8=0$ ヲ解ケ。

解　$x^2-6x+8=0$　　$(x-2)(x-4)=0$

$x-2=0$　$\therefore$　$x=2$

$x-4=0$　$\therefore$　$x=4$

演 習 問 題 (39)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1)　$x^2-7x=0$　　(2)　$5x^2-25x=0$

(3)　$6x^2-2x=8(x^2+12x)$

(4)　$x^2-7x+12=0$　　(5)　$x^2-12x+20=0$

(6)　$x^2+8x+15=0$　　(7)　$x^2-x-156=0$

(8)　$22+3x=\frac{1}{2}(x+3)-23$

(9)　$7(x^2-1)-(x+3)(x-3)=56$

(10)　$5(x^2+3)-(x-5)(x+5)=76$

(62) 一般解法

二次方程式ノ一般ノ形ハ次ノ如シ

$$ax^2+bx+c=0$$

今aニテ各項ヲ割レバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

初メノ二項ヲ完全ノ平方式ナラシムルニハxノ係數ノ半分ノ平方ヲ加フレバヨシ。

コノ手段ヲ用ヒテ總テノ二次方程式ヲ解クコトヲ得ベシ,以下例ニヨリテ之ヲ說明セン。

例 1.　$x^2+2x=35$ ヲ解ケ。

解　$x^2+2x=35$　移項スレバ

$$x^2+2x-35=0$$

xノ係數2ノ半分ノ平方$\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$ヲ加減スレバ

$$x^2+2x+1-1-35=0$$

$$(x+1)^2-36=0$$

$$(x+1)^2-6^2=0$$

$$(x+1+6)(x+1-6)=0$$

$$(x+7)(x-5)=0$$

$x+7=0$　$\therefore$　$x=-7$

$x-5=0$　$\therefore$　$x=5$

例 2.　$x^2-3x+2=0$ ヲ解ケ。

解　$x^2-3x+2=0$

xノ係數ノ半分ノ平方$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ヲ加減スレバ

$$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \qquad \therefore \quad x=1$$

$$x-2=0 \qquad \therefore \quad x=2$$

例 3.　$3x^2+11x=20$ ヲ解ケ。

解　$3x^2+11x=20$　移項スレバ

$$3x^2+11x-20=0$$

x^2 ノ係數3ニテ各項ヲ割レバ

$$x^2+\frac{11}{3}x-\frac{20}{3}=0$$

x ノ係數 $\frac{11}{3}$ ノ半分ノ平方 $\left(\frac{11}{6}\right)^2$ ヲ加減スレバ

$$x^2+\frac{11}{3}x+\left(\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{11}{6}\right)^2-\frac{20}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{11}{6}\right)^2-\frac{121}{36}-\frac{20}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{11}{6}\right)^2-\frac{361}{36}=0$$

$$\left(x+\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{19}{6}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{11}{6}+\frac{19}{6}\right)\left(x+\frac{11}{6}-\frac{19}{6}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{30}{6}\right)\left(x-\frac{8}{6}\right)=0$$

$$(x+5)\left(x-\frac{4}{3}\right)=0$$

$$x+5=0 \qquad \therefore \quad x=-5$$

$$x-\frac{4}{3}=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{4}{3}$$

例 4.　$x^2-4x+2=0$ ヲ解ケ。

解　$x^2-4x+2=0$

x ノ係數ノ半分ノ平方 $\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$ ヲ加減スレバ

$$x^2-4x+4-4+2=0$$

$$(x-2)^2-2=0$$

2ハ $(\sqrt{2})^2$ ニ等シキヲ以テ

$$(x-2)^2-(\sqrt{2})^2=0$$

$$(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0$$

$$x-2+\sqrt{2}=0 \qquad \therefore \quad x=2-\sqrt{2}$$

$$x-2-\sqrt{2}=0 \qquad \therefore \quad x=2+\sqrt{2}$$

例 5. $x^2+2ax=b^2+2ab$ ヲ解ケ。

解 $x^2+2ax=b^2+2ab$ 移項スレバ

$$x^2+2ax-b^2-2ab=0$$

x ノ係數ノ半分ノ平方 $\left(\frac{2a}{2}\right)^2=a^2$ ヲ加減スレバ

$$x^2+2ax+a^2-a^2-b^2-2ab=0$$

$$(x+a)^2-(a+b)^2=0$$

$$(x+a+a+b)(x+a-a-b)=0$$

$$(x+2a+b)(x-b)=0$$

$$x+2a+b=0 \qquad \therefore \quad x=-2a-b$$

$$x-b=0 \qquad \therefore \quad x=b$$

演 習 問 題 (40)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $2x^2-3x+1=0$	(2) $3x^2-7x+2=0$
(3) $8x^2-6x+1=0$	(4) $6x^2-7x+2=0$
(5) $6x^2+17x+12=0$	(6) $x^2+8x+12=0$
(7) $x^2-6x-16=0$	(8) $x^2+x-72=0$
(9) $2x^2+13x+20=0$	(10) $12x^2-7x-12=0$
(11) $x^2+ax-bx-ab=0$	(12) $x^2+2ac=c^2+2ax$

(63) $ax^2+bx+c=0$ ノ解法

$ax^2+bx+c=0$ ノ各項ヲ a ニテ除スレバ.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

x ノ係數ノ半分ノ平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ヲ加減スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

b^2-4ac ハ $(\sqrt{b^2-4ac})^2$ ト相等シキヲ以テ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

コノ二根ヲ次ノ如ク併記ス。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例 1. $3x^2-2x-2=0$ ヲ解ケ。

解 $a=3,\ b=-2,\ c=-2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{28}}{6}$$

例 2. $5x^2-4x+2=0$ ヲ解ケ。

解 $a=5,\ b=-4,\ c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times5\times2}}{2\times5}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-40}}{10}=\frac{4\pm\sqrt{-24}}{10}$$

演 習 問 題 (41)

次ノ方程式ヲ公式ヲ用ヒテ解ケ。

(1) $7x^2-3x+4=0$　　(2) $5x^2+6x+3=0$

(3) $3x^2-4x-7=0$　　(4) $7(x^2-2x)=3(x-2)$

(5) $(x-3)(x-6)=8$　　(6) $4x^2-2(x-2)=0$

(7) $11x^2-12x-13=0$　　(8) $\frac{2}{3}(x^2-2x)=\frac{4}{5}(5x-6)$

(9) $x^2+x+1=0$　　(10) $5x^2+x+1=0$

(64) 無理方程式

根號ノ中ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ無理方程式ト稱ス。

例ヘバ　$\sqrt{3x^2+6}-2=3x$

$\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=3$

ノ如キハ無理方程式ナリ。

(法則)　根號ヲ有スル項ノ一ツヲ左邊ニ移シ他ノ項ハ總テ右邊ニ置キ之レヲ平方又ハ立方シテ根號ヲ取リ去ルモノトス。一回ニシテ全部ヲ取リ去ルコト能ハザルトキハ殘レル根號ヲ含ム式ノ一項ヲ左邊ニ移シ他ノ項ハ

前ノ如ク右邊ニ移シテ後根號ヲ取リテ同ジ方法ヲ繰返スモノトス。

求メタル根ハ驗算シテ適合スルモノノミヲ取リ,根號ハ十ノモノノミヲ採用スル約束ヲ守ルモノトス。

例 1. $\sqrt{x^2-9}+x=9$ ヲ解ケ。

解 $\sqrt{x^2-9}+x=9$ 移項スレバ

$\sqrt{x^2-9}=9-x$ 平方スレバ

$x^2-9=81-18x+x^2$

$18x=90$

$\therefore\ x=5$

(驗算) $x=5$ ヲ原方程式ノ左邊ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{25-9}+5=\sqrt{16}+5=9$

トナリ,右邊ト相等シクナルヲ以テ $x=5$ ハ根ナリ。

例 2. $x-2+3\sqrt{x-2}=0$ ヲ解ケ。

解 $x-2+3\sqrt{x-2}=0$ 移項スレバ

$3\sqrt{x-2}=2-x$ 平方スレバ

$9(x-2)=4-4x+x^2$

$9x-18=4-4x+x^2$

$x^2-13x+22=0$

$(x-2)(x-11)=0$

$x-2=0 \quad \therefore\ x=2$

$x-11=0 \quad \therefore\ x=11$

(驗算) $x=2$ ヲ原方程式中ニ代入スレバ

左邊$=2-2+3\sqrt{2-2}=0$

トナリ,右邊ト相等シクナルヲ以テ $x=2$ ハ根ナリ

$x=11$ ヲ原方程式中ニ代入スレバ。

左邊$=11-2+3\sqrt{11-2}$

$=9+3\sqrt{9}=18$

トナリ右邊ト相等シカラザルヲ以テ $x=11$ ハ根ニアラズ。

例 3. $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ ヲ解ケ。

解 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ 移項スレバ

$\sqrt{2x+8}=2+2\sqrt{x+5}$ 平方スレバ

$2x+8=4+4(x+5)+8\sqrt{x+5}$ 移項スレバ

$-8\sqrt{x+5}=2x+16$ 2ニテ割レバ

$-4\sqrt{x+5}=x+8$ 平方スレバ

$$16(x+5)=x^2+16x+64$$

$$x^2=16$$

$$\therefore \quad x=\pm 4$$

(驗算)　$x=4$ ヲ原方程式中ニ代入スレバ

$$\text{左邊}=\sqrt{2\times4+8}-2\sqrt{4+5}$$

$$=\sqrt{16}-2\sqrt{9}=4-6=-2$$

トナリ右邊ト相等シクナラザルヲ以テ $x=4$ ハ根ニアラズ。

$x=-4$ ヲ原方程式中ニ代入スレバ

$$\text{左邊}=\sqrt{2\times(-4)+8}-2\sqrt{-4+5}$$

$$=-2$$

トナリ右邊ト相等シクナラザルヲ以テ $x=-4$ ハ根ニアラズ.故ニ根ナシ。

(注意)　無理方程式ヲ解キテ得タル x ノ値ハ上ノ例ニ示ス如ク原方程式ニ滿足セザル場合アルヲ以テ驗算ヲ必要トシ,之ニ適セザルモノハ根ニアラズトシテ捨テ,テ可ナルコトヲ忘ルベカラズ。

演 習 問 題 (42)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1)　$\sqrt{2x+15}=7$　　(2)　$\sqrt{4x+5}=5$

(3)　$6+\sqrt{5x+6}=2x$　　(4)　$x+\sqrt{5x+10}=8$

(5)　$3+\sqrt{x^2-5x+1}=x$　　(6)　$\sqrt{x+15}=\sqrt{x}-15$

(7)　$6+\sqrt{x-1}=3$

(8)　$3x-4\sqrt{x-7}=2(x+2)$

(9)　$(x-3)(x-4)+\sqrt{x^2-7x+15}=9$

(10)　$5\sqrt{3x+4}-3\sqrt{5x+1}=7$

(65) 二次方程式ノ根ト係數トノ關係

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α,β トスレバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ナルコトハ一般解法ノ處ニテ述ベタリ。

今 $\alpha+\beta$ ト $\alpha\beta$ トノ値ヲ別々ニ計算スレバ次ノ如シ。

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\ -b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{ca^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{c}{a}$$

之ヨリ次ノ公式ヲ得

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \beta\alpha=\frac{c}{a}$$

之ヲ二次方程式ノ根ト係數ノ關係ト稱ス。

(法則)　二根ノ和ハxノ係數ヲx^2ノ係數ニテ除シタル商ノ符號ヲ變ジタルモノナリ。

二根ノ積ハ已知項ヲx^2ノ係數ニテ除シタル商ニ等シ。

例 1.　$5x^2-6x-3=0$ ノ二根ノ和ト積ヲ求メヨ

解　$$\alpha+\beta=-\frac{-6}{5}=\frac{6}{5}$$

$$\alpha\beta=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$$

例 2.　$2x^2-3x+1=0$ ノ根ノ平方ノ和ヲ求メヨ

解　$2x^2-3x+1=0$ ノ二根ヲα,βトスレバ

$$\alpha+\beta=\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=\frac{9}{4}-1$$

$$=\frac{5}{4}$$

例 3.　$3x^2+4x-2=0$ ノ根ノ差ノ平方ヲ求メヨ

解　$3x^2+4x-2=0$ ノ二根ヲα,βトスレバ

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{40}{9}$$

例 4.　$4x^2-x+2=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。

$\alpha+\beta=\frac{1}{4}$,　$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

解　$(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)=2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2$

$$=2(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\alpha\beta$$

$$=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$$

$$=2\times\frac{1}{16}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5}{8}$$

演習問題 (43)

(1)　$x^2+mx+48=0$ ノ一根ガ6ナルトキ他ノ根及 m ノ値ヲ求メヨ。

(2)　$x^2-3x+2=0$ ノ二根ノ差ノ平方ヲ求メヨ。

(3)　$x^2+5x+4=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ノ値ヲ求メヨ。

(4)　$2x^2-x+2=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $(3\alpha-\beta)(\alpha-3\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。

(5)　$2x^2+7x-3=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。

(6)　$x^2-5x+6=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $\alpha^3+\beta^3$ ノ値ヲ求メヨ。

(7)　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ ノ値ヲ求メヨ。

(8)　$x^2+ax+b=0$ ノ二根ノ差ガ $x^2+px+q=0$ ノ二根ノ差ニ等シキトキハ

$$a^2-4b=p^2-4q$$

ナルコトヲ證明セヨ。

(9)　$x^2+px+q=0$ ノ一根ガ他ノ根ノ二倍ナレバ $9q=2p^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

(10)　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシ

$$\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5$$

ヲ a, b, c ノ項ニテ表セ。

(66) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ性質

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

コノα,βノ値ハ$\sqrt{b^2-4ac}$ノ根號内ノ數値ノ關係ニヨリテ種々ノ場合アリ。

（Ⅰ）　$b^2-4ac>0$ナル場合

根號ノ中ノ符號ガ正ナルヲ以テ$\sqrt{b^2-4ac}$ハ正數即チ實數ナルヲ以テα及βノ値ハ共ニ實數トナル,且ツαトβトノ數値ハ相異ナルヲ以テ

二根ハ異ナル實根ヲ有ス。

（Ⅱ）　$b^2-4ac=0$ナル場合

根號ノ中ガ0トナルヲ以テ$\sqrt{b^2-4ac}$ハ0トナリ,α及βハ共ニ$-\frac{b}{2a}$トナルヲ以テ

相等シキ實根ヲ有ス。

（Ⅲ）　$b^2-4ac<0$ナル場合

根號ノ中ガ負數トナルヲ以テ

二ツノ異ナル虚根ヲ有ス。

之ヨリ次ノ三ツノ重要ナル法則ヲ得。

法則（第一）

$ax^2+bx+c=0$ノ二根ガ實數ナル爲メニハ

$$b^2-4ac>0 \text{ 又ハ } b^2-4ac=0$$

ナルコトヲ要ス。

法則（第二）

$ax^2+bx+c=0$ノ二根ガ實數ナル等根ヲ有スル爲メニハ

$$b^2-4ac=0$$

ナルコトヲ要ス。

法則（第三）

$ax^2+bx+c=0$ノ二根ガ虚數ナル爲メニハ

$$b^2-4ac<0$$

ナルコトヲ要ス。

b^2-4acヲ$ax^2+bx+c=0$ノ**判別式**ト稱ス。

例　$5x^2-2x+a=0$ノ二根ガ相等シキ爲メニハaノ値如何。

解　$5x^2-2x+a=0$ガ等根ヲ有スルタメニハ

$$b^2-4ac=0$$

故ニ　$(-2)^2-4\times5\times a=0$

$4-20a=0$

$\therefore\quad a=\frac{1}{5}$

(67) 二次三項式ニ關スル重要ナル不等式

例 1. x^2-5x+6 ナル二次三項式ガ正數ヲ表ハス爲メニxニ如何ナル制限アルカ。

解 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

故ニ $(x-2)(x-3)>0$

ニ滿足スルxノ制限ヲ求ムルバヨシ。

此場合ニxガ2ヨリ小ナルカ3ヨリ大ナルコトヲ要ス,換言スレバ2ト3トノ間ノ數ナルコトヲ得ズ,何トナレバxガ2ヨリ小ニシテ3ヨリ大ナルトキハ

$$(x-2)(x-3)$$

ノ値ハ正數トナルヲ以テナリ。

例 2. x^2-x-12 ナル二次三項式ガ負數ヲ表ハス爲メニハxニ如何ナル制限アルカ。

解 $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$

$$(x+3)(x-4)<0$$

ニ滿足スル爲メニハxハ-3ト$+4$トノ間ノ數ナルコトヲ要ス,何トナレバ-3ヨリ小ナル數ハ$(x+3)$モ$(x-4)$モ共ニ負トナスヲ以テ

$$(x+3)(x-4)>0$$

トナルヲ以テナリ。

同樣ニxガ$+4$ヨリ大ナルトキハ$(x+3)$モ$(x-4)$モ共ニ正トナルヲ以テ

$$(x+3)(x-4)>0$$

故ニxハ-3ト4トノ間ノ數ナルコトヲ要ス。

演 習 問 題 (44)

(1) $9x^2-6x+1=0$ ハ等根ヲ有スルコトヲ證明セヨ

(2) $mx^2+(m-4)x+m-4=0$ ガ等根ヲ有スル爲メニハmノ値如何。

(3) $x^2+10x+6=0$ ノ根ノ性質ヲ述ベヨ。

(4) $2x^2-11x+6=0$ ノ二根ハ實根ナルカ虛根ナルカ

(5) $(2-4m)x^2+(7-10m)x+5-8m=0$ ガ等根ヲ有スル爲メニハmハ如何ナル値ヲ取ルベキカ。

(6) $3x^2-4x+2a=0$ ガ虛根ヲ有スル爲メニハaノ値如何。

(7) $4x^2-5mx+6=0$ ガ實根ヲ有スル爲メニハmノ値如何。

(8) $2(m-1)x^2+(5m-3)x+(4m-3)=0$ ガ等根ヲ有スル爲メニハ m ノ値如何。

(9) $5x^2-5x+1=0$ ノ判別式ノ値如何。

(10) $7mx^2-2x+1=0$ ガ等根ヲ有スルトキノ m ノ値ヲ計算セヨ。

(68) 與ヘラレタル數ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト。

a, b ヲ二根トスル二次方程式ヲ作ルコト。

根ハ $x=a$, $x=b$ ニ相當スルヲ以テ

$$(x-a)(x-b)=0$$

ナル二次方程式ヲ作レバヨシ。

括弧ヲ去レバ

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

之求ムル方程式ナリ。

(法則)　與ヘラレタル二數 a, b ヲ根トスル方程式ヲ作ルニハ第一項ハ x^2, 第二項 x ノ係數ハ a, b ノ和ノ符號ヲ變ジタルモノヲ採リ第三項ハ a, b ノ積ヲ取レバヨシ。

例 1. 5 ト -4 ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

解　$a=5$, $b=-4$　ナルヲ以テ

$a+b=5-4=1$

$ab=5(-4)=-20$

求ムル方程式ハ

$$x^2-x-20=0$$

ナリ。

例 2. $2m$ ト $3m$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

解　$a=2m$, $b=3m$　ナルヲ以テ

$a+b=2m+3m=5m$

$ab=(2m)(3m)=6m^2$

故ニ求ムル方程式ハ

$$x^2-5mx+6m^2=0$$

ナリ。

例 3. $x^2+7x+9=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ ト $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$ トヲ根トスル方程式ヲ作レ

解　$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=9$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}$$

依リテ $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{(-7)^2}{9}=\frac{49}{9}$

求ムル方程式ハ

$$x^2-\frac{49}{9}x+\frac{49}{9}=0$$

即 $9x^2-49x+49=0$

ナリ。

演 習 問 題 (45)

次ノ與ヘラレタル二數ヲ根トスル方程式ヲ作レ

(1) 6 ト -6　　(2) -4 ト -7

(3) $\frac{1}{2}$ ト $\frac{1}{3}$　　(4) 9 ト 8

(5) -3 ト $\frac{1}{2}$

(6) $2x^2-5x+3=0$ ノ二根ヲ α,β トシ $\frac{\alpha}{\beta}$ ト $\frac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トスル方程式ヲ求メヨ。

(7) $-3m$ ト $2n$ トヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

(8) $ax^2-bx+a=0$ ノ二根ヲ α,β トシ $\alpha-1$ ト $\beta-1$ トヲ二根トスル二次方程式ヲ作レ。

(9) $2x^2-5x+4=0$ ノ二根ヲ α,β トシ $\alpha+6$ 及 $\beta+6$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ。

(10) $x^2+rx+s=0$ ノ根ヲ α,β トスレバ $4x^2+2rx+s=0$ ノ二根ハ $\frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}\beta$ ナリ。

(69) 二次方程式應用問題

(注意) 一次方程式應用問題ノ解法ニ準ジ,問題ノ意味ヲ了解シテ,未知數ト已知數トノ關係ヲ方程式ニテ表ハシ,之ヲ解キ根ヲ求メ,最後ニ根ガ題意ニ適合スルヤ否ヤヲ驗算スルモノトス。

例 1. 一數アリソノ二分ノ一ニソノ四分ノ一ヲ乘ズルトキハ $112\frac{1}{2}$ トナルト云フ,コノ數ヲ求メヨ。

解　求ムル數ヲ x トスレバ

$$\frac{1}{2}x\times\frac{1}{4}x=112\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}x^2=\frac{225}{2}$$

$$x^2=225\times4=900$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{900}=\pm30$$

$+30$ノミヲ取リ求ムル數ハ30ナリ。

驗算　$\frac{1}{2}\times30\times\frac{1}{4}\times30=\frac{900}{8}=112\frac{1}{2}$

例 2.　矩形アリ周圍ノ長サ80間ニシテソノ面積396坪ナリト云フ,長サ及幅各如何。

解　幅ヲx間トスレバ長サハ$\frac{80}{2}-x=40-x$間ナリ。

故ニ次ノ方程式ヲ得。

$$(40-x)x=396$$

$$x^2-40x+396=0$$

$$(x-18)(x-22)=0$$

$$x-18=0\qquad\therefore\quad x=18$$

$$x-22=0\qquad\therefore\quad x=22$$

之ヨリ長サハ$40-18=22$間又ハ$40-22=18$間ナリ何レヲ長サトスルモ同ジ結果トナルヲ以テ求ムル根ハ18間及22間ナリ。

驗算　略ス。

例 3.　旅人アリ七里ノ道ヲ旅行セントスルニ1里ヲ行キタル後其速力1時間毎ニ1里ヲ增セシヲ以テ30分早ク目的地ニ到着セリト云フ其時間ヲ求ム。

解　一時間ノ速力ヲx里トスレバ

$$\frac{1}{x}+\frac{7-1}{x+1}=\frac{7}{x}-\frac{1}{2}$$

$$2(x+1)+12x=7(x+1)\times2-x(x+1)$$

$$x^2+x-12=0$$

$$(x-3)(x+4)=0$$

$$x-3=0\qquad\therefore\quad x=3$$

$$x+4=0\qquad\therefore\quad x=-4$$

故ニ求ムル時間ハ$\frac{1}{x}+\frac{7-1}{x+1}=\frac{1}{3}+\frac{6}{4}=1\frac{5}{6}$時間

(注意)　xハ正數ナルベキヲ以テ$x=-4$ハ之ヲ捨ツ。

驗算　略ス。

演　習　問　題　(46)

(1)　二數アリ其一ハ他ノ三倍ニシテ二數ノ積

ハ243ナリト云フコノ二數ヲ求メヨ。

(2) 會費18圓ヲ全會員ニ割リ當ツル積リナリシニ會員二人欠席シタルヲ以テ出席會員ハ各自ノ負擔額30錢ヅツ多カリシト云フ,全會員數ヲ求メヨ。

(3) 靜水ニテ1時間4里ノ割リニテ舟ヲ漕グ水夫ガ12里ノ流レヲ上下スルニ8時間ヲ要セシト云フ,流水ノ速サ一時間幾里ナルカ。

(4) 卵12個ニツキ2錢下落スルトキハ70錢ニテ1個多ク買ヒ得ベシト云フ,12個ノ原價如何。

(5) 縱50間横34間ノ矩形ノ土地ノ周圍ニ溝アリ,面積540坪ナリト云フ溝ノ幅幾間ナルカ。

(6) 大人1人子供12人共ニ働キテ40時間ニ完成スベキ仕事アリ,之ヲ大人3人子供1人ニテ6日間ニ成シ得ルト云フ,大人1人ニテ何日ニテ出來上ルカ。

(7) 二位ノ數アリ,其數字ノ積ノ13倍ハ其數ニ等シク又十位ノ數ハ一位ノ數ヨリ2小ナリト云フコノ數ヲ求メヨ。

(8) 二數アリ大數ノ五分ノ三ハ小數ニ等シク

二數ノ平方ノ差ハ16ナリト云フ,二數各如何。

(9) 正方形ナル二ツノ地所アリ其一邊ノ差2間ナリ,今各地ニ方一尺ノ石ヲ敷カバ敷石ノ數ハ2120枚ヲ要スト云フ,兩地ノ一邊ノ長サ如何。

(10) 父子ノ年ノ和100ニシテ,二人ノ年ノ積ノ十分ノ一ハ父ノ年ヨリ180多シト云フ,父子各幾年ナルカ。

(70) 高次方程式

三次以上ノ方程式ノ解法ハ初等代數學ニテハ論セザルコトヽナリ居ルモ,特ニ二次方程式ニ準ジ得ラルルモノ及容易ニ因數分解ヲナシウル高次方程式ハ直ニソノ根ヲ求ムルコトヲ得。

例1. $x^4-2x^2-8=0$ ヲ解ケ。

解 $x^2=y$ トスレバ $x^4=y^2$ トナルヲ以テコノ値ヲ原方程式中ニ代入スレバ

$y^2-2y-8=0$

$(y+2)(y-4)=0$

$y+2=0,3 \quad \therefore \quad y=-2,$

$y-4=0 \quad \therefore \quad y=4$

之ニxノ値ヲ代入スレバ

$$x^2=-2,\quad \therefore\ x=\pm\sqrt{-2}$$

$$x^2=4\quad \therefore\ x=\pm 2$$

例 2. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$ ヲ解ケ。

解 $\dfrac{x^2}{x+1}=y$ ト置ケバ $\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{1}{y}$ トナルヲ以テ原式ハ次ノ如ク變形スルコトヲ得

$$y+\frac{1}{y}=2$$

$$y^2+1=2y$$

$$y^2-2y+1=0$$

$$(y-1)^2=0$$

$$y-1=0$$

$$\therefore\ y=1$$

依リテ

$$\frac{x^2}{x+1}=1$$

$$x^2=x+1$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

例 3. $(x^2-4x)^2-17(x^2-4x)-84=0$ ヲ解ケ。

解 $x^2-4x=y$ ト置ケバ

$$y^2-17y-84=0$$

$$(y-21)(y+4)=0$$

$$y-21=0,\ y+4=0$$

y ヲ x^2-4x ニテ置キ換フレバ

$$x^2-4x-21=0,\ x^2-4x+4=0$$

$$(x+3)(x-7)=0,\ (x-2)^2=0$$

$$x+3=0,\quad \therefore\ x=-3$$

$$x-2=0,\quad \therefore\ x=2$$

$$x-7=0,\quad \therefore\ x=7$$

依リテ求ムル値ハ 2, −3, 7 ナリ。

演 習 問 題 (47)

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $x^3-5x^2+4x=0$　　(2) $x^3-6x^2+9x=0$

(3) $3x^3+5x^2=0$　　(4) $x^3-2=x-2x^2$

(5) $x^4-5x^2+4=0$　　(6) $x^4-6x^2+8=0$

(7) $x^2+\dfrac{36}{x^2}=13$　　(8) $\dfrac{x^2-1}{3}+\dfrac{1}{x^2}=1$

(9) $(x^2+2x)^2-15(x^2+2x)=0$

(10) $\dfrac{x^2}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{x^2}=2$

(71) 二次聯立方程式

例 1. $2x-y=3,\ x^2+6xy=16$ ヲ解ケ。

解　$2x-y=3\cdots\cdots(1)$　　$x^2+6xy=16\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ $y=2x-3$ ヲ得, 之ヲ(2)中ノ y ニ代入スレバ

$$x^2+6x(2x-3)=16$$

$$13x^2-18x-16=0$$

$$(x-2)(13x+8)=0$$

依リテ　$x-2=0$　$\therefore$　$x=2$

$13x+8=0$　$\therefore$　$x=-\dfrac{8}{13}$

コノ値ヲ $y=2x-3$ 中ニ代入スレバ

$$y=2\times2-3=1$$

$$y=2\times\left(-\frac{8}{13}\right)-3=-\frac{55}{13}$$

故ニ求ムル根ハ

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\dfrac{8}{13}\\y=-\dfrac{55}{13}\end{cases}$$

ナリ。

例 2. $x+y=8,\ xy=15$ ヲ解ケ。

解　$x+y=8\cdots\cdots(1)$　　$xy=15\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ $x=8-y$ ヲ得,之ヲ(2)中ニ代入スレバ

$$(8-y)y=15$$

$$8y-y^2=15$$

$$y^2-8y+15=0$$

$$(y-3)(y-5)=0$$

$y-3=0$　$\therefore$　$y=3$

$y-5=0$　$\therefore$　$y=5$

コノ値ヲ $x=8-y$ 中ニ代入スレバ

$$x=8-3=5$$

$$x=8-5=3$$

依リテ求ムル根ハ

$$\begin{matrix}x=5\\y=3\end{matrix}\ \text{及}\ \begin{matrix}x=3\\y=5\end{matrix}$$

ナリ。

例 3. $x^2+2xy+y^2=36,\ x^2-2xy+y^2=4$ ヲ解ケ。

解 $x^2+2xy+y^2=36\cdots\cdots(1)$

$x^2-2xy+y^2=4\ \cdots\cdots(2)$

(2)ヲ9倍スレバ $9x^2-18xy+9y^2=36$

(1)ヨリ $x^2+2xy+y^2=36$

相減ズレバ

$$8x^2-20xy+8y^2=0$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0$$

$$(2x-y)(x-2y)=0$$

$$2x-y=0,\ x-2y=0$$

依リテコノ各一次方程式ト與ヘラレタル二次方程式ノ一ツトヲ組合セテ解ケバヨシ

$$\left.\begin{array}{r}2x-y=0\\x^2+2xy+y^2=36\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r}x-2y=0\\x^2+2xy+y^2=36\end{array}\right\}$$

(I) $2x-y=0\cdots\cdots(1)$, $x^2+2xy+y^2=36\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ $y=2x$ ヲ得,之ヲ(2)中ニ代入スレバ

$$x^2+2x(2x)+(2x)^2=36$$

$$9x^2=36$$

$$x^2=4$$

$$\therefore\ x=\pm2$$

$$y=\pm4$$

(II) $x-2y=0\cdots\cdots(1)$ $x^2+2xy+y^2=36\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ $x=2y$ ヲ得,之ヲ(2)中ニ代入スレバ

$$(2y)^2+2(2y)y+y^2=36$$

$$9y^2=36$$

$$y^2=4$$

$$y=\pm2$$

$$x=\pm4$$

故ニ求ムル根ハ $x=\pm2,\ y=\pm4;\ x=\pm4,\ y=\pm2$ ナリ。

演 習 問 題 (48)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $x+y=13,\ xy=36$

(2) $2x+y=6,\ 3y^2-xy=20$

(3) $3x-y-2=0,\ 2x^2-y^2+8=0$

(4) $x^2+y^2=29,\ xy=10$

(5) $x^2+xy-40=0,\ y^2-2xy+21=0$

(6) $x-y=1,\ xy=12$

(7) $x^2+y^2=17,\ 4x+y=15$

(8) $x^2+2xy+y^2=100,\ xy=21$

(9) $3x^2-y^2=23,\ y+x=5$

(10) $x+y=4,\ x^2y^2+2xy-15=0$

第　八　章

(72) 冪數及根數

定理　m, n ヲ正ノ整數トスレバ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

證明　$a^m = aaaa \cdots\cdots m$ 個ノ積

$a^n = aaaa \cdots\cdots n$ 個ノ積

故ニ　$a^m \times a^n = (aaa \cdots\cdots m$ 個ノ積$)(aaa \cdots\cdots n$ 個ノ積$)$

$= aaaa \cdots\cdots (m+n)$ 個ノ積

$= a^{m+n}$

定理　m, n ヲ正ノ整數トシ m ヲ n ヨリ大トスレバ

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

證明　$a^m = aaaa \cdots\cdots m$ 個ノ積

$a^n = aaaa \cdots\cdots n$ 個ノ積

故ニ　$\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{aaaa \cdots\cdots m \text{ 個ノ積}}{aaaa \cdots\cdots n \text{ 個ノ積}}$

$= aaa \cdots\cdots (m-n)$ 個ノ積

$= a^{m-n}$

系　m ガ n ヨリ小ナルトキハ

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}}$$

定理　m, n ヲ正ノ整數トスレバ

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

證明　$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \cdots\cdots n$ 個ノ積

$= a^{m+m+m+m} \cdots\cdots n$ 個ノ和

$= a^{mn}$

系 1.　$(ab)^m = a^m b^m$

系 2.　$(a^x b^y c^z \cdots\cdots)^m = a^{mx} b^{my} c^{mz} \cdots\cdots$

系 3.　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

例 1.　$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$

例 2.　$(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = (-a)^2(-a)$

$= a^2(-a) = -a^3$

例 3.　$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)(-a) = a^4$

例 4.　$(-a)^5 = (-a)^4(-a) = a^4(-a) = -a^5$

例 5.　$(-a)^{2n} = +a^{2n}$

例 6.　$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

(注意)　負數ノ偶數冪ハ正ニシテ奇數冪ハ負ナリ

演　習　問　題　(49)

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1)　$a^{7}\times a^{3}$	(2)　$4a^{5}\times(3a^{6})$
(3)　$(-3a)^{5}$	(4)　$(-2a)^{2}\times(-3a^{2})^{3}$
(5)　$(3a^{2})^{5}\div(3a^{2})^{2}$	(6)　$4a^{3}b^{6}\div 2a^{2}b^{4}$
(7)　$(a^{2}b^{4}c^{5})^{3}$	(8)　$\left(\dfrac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{3}$
(9)　$(a^{2}b^{3})^{4}$	(10)　$(-2a^{3}bc^{2})^{3}$

(73) 一般ナル指數法則

m,nガ正ノ整數ナルトキハ

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

$$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$$

ナル公式ガ成立スルコトヲ述ベタルガm,nハ正ノ整數ニ限ラズ負數,分數,小數ニ論ナク常ニコノ法則ハ成立スルモノナリ。

例 1.　$a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{4}}$

例 2.　$a^{5}\times a^{-3}=a^{5-3}=a^{2}$

例 3.　$a^{7}\div a^{9}=a^{7-9}=a^{-2}$

又　$a^{7}\div a^{9}=\dfrac{a^{7}}{a^{9}}=\dfrac{1}{a^{2}}$

之ヨリ　$a^{-2}=\dfrac{1}{a^{2}}$ナル關係式ヲ得。

一般ニ

$$a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}$$

a^{0}ノ意義

$a^{0}\times a^{m}=a^{0+m}=a^{m}$ 兩邊ヲa^{m}ニテ割レバ

$$a^{0}=\frac{a^{m}}{a^{m}}=1$$

演　習　問　題　(50)

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1)　$a^{-\frac{4}{5}}\times a$	(2)　$a\times a^{-\frac{2}{5}}$
(3)　$\{(a^{-2})^{2}\}^{\frac{2}{3}}$	(4)　$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{2}{3}}$
(5)　$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{2}$	(6)　$a^{5}\times a^{-3}\times a^{-2}$
(7)　$a^{2}b^{10}c^{5}\div a^{3}b^{5}c^{7}$	(8)　$(a^{3}b^{-2})\div(a^{-4}b^{5})$
(9)　$(a^{2}y\times ay^{2})^{\frac{1}{3}}$	(10)　$(a^{2}b)^{\frac{1}{2}}\times(a^{3}b^{\frac{1}{4}})\div(a^{2}b^{3})$

(74) 多項式ノ乘法及除法

例 1.　$(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{l} x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\ (\times \\ \hline x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \\ \qquad -x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y \\ \hline x \qquad\qquad -y \end{array}$$

例 2. $(x^3-y^3)\div(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}})$ ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{r|l} x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\,) & x^3 \qquad\qquad -y^3\ (x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}} \\ & x^3-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} \\ \hline & \qquad x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}-y^3 \\ & \qquad x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}-y^3 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

演　習　問　題　(51)

次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

(1) $(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+1)$

(2) $(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)$

(3) $(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$

(4) $(x^{n}+x^{\frac{n}{2}}+1)(x^{-n}+x^{-\frac{n}{2}}+1)$

(5) $(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})$

(6) $(x^{\frac{3n}{2}}-y^{\frac{3n}{2}})\div(x^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}})$

(7) $(y^2+by+b^2)\div(y-b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b)$

(8) $x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}+1=0$ ヲ解ケ。

(9) $x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4$ ヲ解ケ。

(10) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-6=0$ ヲ解ケ。

(75) 根數

精密ニ開キ切レザル數ヲ根數又ハ不盡數ト稱ス。

例ヘバ　$\sqrt{5}, \sqrt[3]{120}$ 等ノ如シ。

$3a$ ト $2a$ トハ同類項ト稱シタリ,之ト同樣ニシテ $3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}$ ノ如キハ之レヲ相似根數ト稱ス

任意ノ數ヲ根數ニ改メ及根數ヲ變形スルコト

例 1. $b=\sqrt{b^2}=\sqrt[3]{(b^2)^3}=\sqrt[3]{b^6}$

例 2. $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$

例 3. $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\sqrt{2}=\sqrt{9}\sqrt{2}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{18}$

例 4. $3\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{5}$

$$=\sqrt[3]{27\times5}=\sqrt[3]{135}$$

例 5. $\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

例 6. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

例 7. $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{3^3\times2}+\sqrt[3]{4^3\times2}$

$$=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4^3}\times\sqrt[3]{2}$$

$=3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}$

$=(3+4)\sqrt[3]{2}$

$=7\sqrt[3]{2}$

異ナル二根數ヲ相似根數ニ變形スルコト。

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$$

ナルヲ以テ相似根數ヲ作ルコトヲ得。

例　$\sqrt{5}$ ト $\sqrt[3]{3}$ トヲ相似根數トセヨ

$$\sqrt{5}=\sqrt[3]{(\sqrt{5})^3}=\sqrt[3]{\sqrt{5^3}}=\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt{(\sqrt[3]{3})^2}=\sqrt{\sqrt[3]{3^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[6]{9}$$

相似根數ノ乘除法

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

例 1.　$\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{5\times10}=\sqrt{5\times5\times2}$

$=5\sqrt{2}$

例 2.　$\sqrt{7}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{7^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{343}\times\sqrt[6]{9}$

$=\sqrt[6]{343\times9}=\sqrt[6]{3087}$

例 3.　$\sqrt[3]{5}\div\sqrt{3}=\sqrt[6]{5^2}\div\sqrt[6]{3^3}$

$=\sqrt[6]{25}\div\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{\dfrac{25}{27}}$

例 4.　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ ヲ計算セヨ。

解　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}$

$+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{2}$

$=3+\sqrt{6}+2\sqrt{6}+4$

$=7+3\sqrt{6}$

例 5.　$(4\sqrt{7}-2\sqrt{3})(3\sqrt{7}+5\sqrt{3})$ ヲ計算セヨ。

解

$$\begin{array}{rrr}
4\sqrt{7} & -2\sqrt{3} & \\
3\sqrt{7} & +5\sqrt{3} & \\
\hline
12\times7 & -6\sqrt{21} & \\
 & +20\sqrt{21} & -10\times3 \\
\hline
84 & +14\sqrt{21} & -30
\end{array}$$

$=54+14\sqrt{21}$

演習問題 (52)

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1)　$\sqrt{50}+\sqrt{98}$　　(2)　$2\sqrt{28}-\sqrt{63}$

(3)　$3\sqrt{12}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

(4)　$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}$　　(5)　$\sqrt{18}\div\sqrt{50}$

(6)　$\sqrt{63}\div\sqrt{112}$　　(7)　$(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$

(8)　$(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(4\sqrt{5}+3\sqrt{3})$

(9)　$\sqrt{6-\sqrt{11}}\times\sqrt{6+\sqrt{11}}$

(10)　$\sqrt{\sqrt{15}+8}\times\sqrt{8-\sqrt{15}}$

分數ノ有理化

分數ノ分母ニアル根數ヲ根號ヲ含マザル數ニ變スルコトヲ分數ヲ有理化スト稱ス。

例 1. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ ヲ有理化セヨ。

解 $$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

例 2. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$ ヲ有理化セヨ。

解 $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)}{5-4}$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)$$

例 3. $\dfrac{4\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{7}-2\sqrt{3}}$ ヲ有理化セヨ。

解 $$\frac{4\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{7}-2\sqrt{3}}=\frac{(4\sqrt{7}+3\sqrt{3})(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{12\times7+9\sqrt{21}+8\sqrt{21}+6\times3}{(3\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{102+17\sqrt{21}}{9\times7-4\times3}$$

$$=\frac{102+17\sqrt{21}}{51}$$

演習問題 (53)

次ノ分數ヲ有理化セヨ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$ (4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ (6) $\dfrac{12+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}}$

(7) $\dfrac{1}{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (8) $\dfrac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

(9) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7-2\sqrt{3}}$ (10) $\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{12}}{2\sqrt{6}+\sqrt{12}}$

(76) 定理 $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ ナル等式ガ成立スル爲メニハ $a=\alpha,\ b=\beta$ ナリ。

證明 $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$

$$a-\alpha+\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$$

平方スレバ

$$(a-\alpha)^2+2(a-\alpha)\sqrt{b}+b=\beta$$

$$2(a-\alpha)\sqrt{b}=\beta-b-(a-\alpha)^2$$

左邊ハ無理式ニシテ右邊ハ有理式ナルヲ以テコノ等式ガ成立スル爲メニハ$\sqrt{b}$ノ係數ハ0ナルコトヲ要ス。

故ニ　$a-\alpha=0$

$$\beta-b-(a-\alpha)^2=0$$

從ツテ第一等式ヨリ$a=\alpha$ヲ得,之ヲ第二等式中ニ代入スレバ

$$\beta-b=0$$

$$\beta=b$$

依リテ　$a=\alpha$,　$b=\beta$　ナリ。

(77) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ナル形ノ無理式ヲ簡單ニスルコト

例 1.　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ヲ簡單ニセヨ。

解　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$トス

平方スレバ

$$3+2\sqrt{2}=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\ x+y=3,\quad 2\sqrt{xy}=2\sqrt{2}$$

$$x+y=3,\quad xy=2$$

コノ聯立方程式ヲ解ケバ。

$$\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$$

ナル二根ヲ得。

例 2.　$\sqrt{5-\sqrt{21}}$ヲ簡單ニセヨ。

解　$\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$トスレバ

$$5-\sqrt{21}=x+y-2\sqrt{xy}$$

$$x+y=5\qquad 2\sqrt{xy}=-\sqrt{21}$$

$$x+y=5\qquad 4xy=21$$

ナル聯立方程式ヲ解ケバヨシ。

$$(x+y)^2=25$$

$$(x+y)^2-4xy=25-21=4$$

$$(x-y)^2=4$$

$$x-y=2$$

之ヨリ　$x=\frac{7}{2},\ y=\frac{3}{2}$ヲ得

例 2.　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ヲ簡單ニセヨ。

解　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}$

$$=\sqrt{2^2+4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

演習問題 (54)

次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) $4-\sqrt{7}$　　(2) $12-\sqrt{80}$

(3) $16+5\sqrt{7}$　　(4) $17+12\sqrt{2}$

(5) $7-4\sqrt{3}$　　(6) $9-\sqrt{32}$

(7) $2\sqrt{10}+6\sqrt{2}$　　(8) $18+8\sqrt{2}$

(9) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$　　(10) $11-6\sqrt{2}$

第九章

比及比例

(78) 二數ノ大サノ割合ヲ比ト稱ス,第一數ヲ第二數ニテ割リタル分數ノ形又ハ二數ノ間ニ:ナル記號ヲ置キテ之ヲ表ハス。

例ヘバ　a, bナル二數ノ比ハ

$$\frac{a}{b} \quad 又ハ \quad a:b$$

ニテ表ハサル, aヲ比ノ前項, bヲ比ノ後項ト稱ス比ノ前項ト後項トヲ置キ換ヘタル比ヲ前ノ比ノ反比又ハ逆比ト稱ス。

法則　**比ノ兩項ニ同數ヲ乘スルモ其値ハ變ゼズ**

$$a:b \quad ハ \quad ma:mb$$

ト相等シ。

二ツノ比ノ前項全仕ヲ乘ジテ前項トシ後項全仕ヲ乘ジテ後項トシタル比ヲコノ二ツノ比ノ複比ト稱ス。

例ヘバ　$a:b$ト$c:d$ニ於テ$ac:bd$ヲ$a:b$ト$c:d$ノ複比ト稱ス。

$a:b$ ト $a:b$ トヨリ複比 $a^2:b^2$ ヲ作レバ之レヲ $a:b$ ノ二乘比ト稱ス

$a:b$ ト $a:b$ ト $a:b$ トヨリ $a^3:b^3$ ヲ作レバ $a:b$ ノ三乘比ト稱ス。

演　習　問　題 (55)

(1)　$5+x:6+x$ ガ $10:3$ ニ等シキ爲メニハ x ノ値如何。

(2)　$\dfrac{3x-7y}{5x+y}=5$ ナルトキ $x:y$ ヲ求メヨ。

(3)　$5x^2-2y^2=3xy$ ヨリ $x:y$ ヲ求メヨ。

(4)　$4a:7b$ ト $3b:5a$ トノ複比ヲ計算セヨ。

(5)　$4x:7y$ ノ二乘比ヲ求メヨ。

(6)　$x-3:x-7$ ガ $2:3$ ノ三乘比ニ等シキトキハ x ノ値如何。

(7)　$4x-5y:x+y$ ガ $6:5$ ニ等シキトキ $x:y$ ヲ求メヨ

(8)　二數アリ其比ハ $5:6$ ナリ,二數ノ和 121 ナルトキ二數ヲ求メヨ。

(9)　$6x^2+7xy-3y^2=0$ ヨリ $x:y$ ヲ求メヨ。

(10)　$2x:3y$ ト $15x:16y$ ノ複比ヲ作リ之ヲ簡單ニセヨ

比　　例

(79) 比例ノ定則

定義　二ツノ比ガ相等シキコトヲ示ス式ヲ比例又ハ比例式ト云フ。

比例式ヲ表ハスニハ通常次ノ二ツノ何レカヲ用フ,例ヘバ a ト b トノ比ガ c ト d トノ比ニ等シキトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{又ハ} \quad a:b=c:d$$

之ヲ a ノ b ニ對スル比ハ c ノ d ニ對スル比ニ等シト稱ス。

定義　a,b,c,d ガ比例ヲナストキ之ヲ比例ノ四ツノ項ト稱シ,a ト c トヲ比例ノ前項,b ト d トヲ比例ノ後項ト稱ス又 a ト d トヲ比例ノ外項,b ト c トヲ比例ノ中項又ハ內項ト稱ス。

定義　比例式 $a:b=c:d$ ニ於テ d ヲ a,b,c ノ第四比例項ト云フ。

比例式 $a:b=b:c$ ニ於テ c ヲ a,b ノ比例第三項ト稱シ,b ヲ a,c ノ比例中項ト稱ス。

(80) 定則

定則1. 比例式ニ於テ外項ノ積ハ内項ノ積ニ等シ。

$a:b=c:d$ ナラバ $ad=bc$ ナリ。

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ニ bd ヲ乘ズレバ

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$$

$$\therefore \quad ad=bc$$

定則2. 二數ノ比例中項ハ二數ノ積ノ平方根ニ等シ。

$a:b=b:c$ ナラバ　$b=\sqrt{ac}$

證明　定則1ニヨリ

$$b^2=ac$$

$$\therefore \quad b=\pm\sqrt{ac}$$

定則3. 二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シキトキハ初メノ二數ヲ外項トシ,後ノ二數ヲ内項トスル比例式ヲ作クルコトヲ得。

$ad=bc$ ナラバ　$a:b=c:d$ ナリ。

證明　$ad=bc$ ノ兩邊ヲ bd ニテ除スレバ

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

即チ　$a:b=c:d$ ナリ

定則4. 同ジ種類ノ四ツノ數ガ比例ヲナストキハ内項ヲ入レ代ヘテモ比例式ハ成立ス。

$a:b=c:d$ ナラバ $a:c=b:d$ ナリ。

證明　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ニ $\frac{b}{c}$ ヲ乘スレバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\therefore \quad a:c=b:d$$

(注意)　同様ニシテ外項ヲ入レ代フルモ亦内項及外項ヲ同時ニ入レ代フルモ比例式ハ成立ス。

即チ　$d:b=c:a$　　$d:c=b:a$

定則5. 四ツノ數ガ比例ヲナストキハ第二項ト第一項トノ比ハ第四項ト第三項トノ比ニ等シ。

$a:b=c:d$ ナラバ $b:a=d:c$ ナリ。

證明　$a:b=c:d$　ヨリ

$bc=ad$　ヲ得

兩邊ヲ ac ニテ除スレバ

$$\frac{bc}{ac}=\frac{ad}{ac}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$$\therefore\quad b:a=d:c$$

定則6.　四ツノ數ガ比例ヲナストキハ第一項ト第二項トノ和ト第二項トノ比ハ、第三項ト第四項トノ和ト第四項トノ比ニ等シ。

$a:b=c:d$ ナラバ

$a+b:b=c+d:d$ ナリ

證明　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ニ1ヲ加フレバ

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\therefore\quad a+b:b=c+d:d$$

（注意）　同樣ニ $a+b:a=c+d:c$ ナル比例式モ成立スルコトヲ知ル

定則7.　四ツノ數ガ比例ヲナストキハ第一項ト第二項ノ差ト第二項トノ比ハ、第三項ト第四項トノ差ト第四項トノ比ニ等シ。

$a:b=c:d$ ナラバ $a-b:b=c-d:d$

證明　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ヨリ1ヲ減ズレバ

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\therefore\quad a-b:b=c-d:d$$

（注意）　同樣ニシテ $a-b:a=c-d:c$ ナル比例式ノ成立スルコトヲ知リ得ベシ。

定則8.　四ツノ數ガ比例ヲナストキハ第一項ト第二項トノ和ト第一項ト第二項トノ差ノ比ハ第三項ト第四項トノ和ト第三項ト第四項トノ差ノ比ニ等シ。

$a:b=c:d$ ナラバ $a+b:a-b=c+d:c-d$ ナリ

證明　定則6ヨリ　$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

定則5ヨリ　$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

邊々相除スレバ

$$\frac{a+b}{a}\div\frac{a-b}{a}=\frac{c+d}{c}\div\frac{c-d}{c}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$\therefore\ a+b:a-b=c+b:c-d$ ナリ。

定則9. 多クノ比ガ相等シキトキハ各比ノ前項ノ和ト各比ノ後項ノ和トノ比ハ初メノ比ニ等シ。

$a:b=c:d=e:f=g:h$ ナラバ

$a+c+e+g:b+d+f+h=a:b$ ナリ。

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=r$ トスレバ

$$a=br,\ c=dr,\ e=fr,\ g=hr$$

邊々相加フレバ

$$a+c+e+g=br+dr+fr+hr$$
$$=(b+d+f+h)r$$

兩邊ヲ $b+d+f+h$ ニテ除スレバ

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r$$

$\therefore\ a+c+e+g:b+d+f+h=a:b$

定則10. 多クノ比例式ニ於テ同ジ項同仕ノ積ハ亦比例式ヲ成ス。

$a:b=c:d,\ e:f=g:h,\ k:l=m:n$ ナラバ

$aek:bfl=cgm:dhn$

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{e}{f}=\frac{g}{h},\ \frac{k}{l}=\frac{m}{n}$

邊々相乘ズレバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\times\frac{k}{l}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h}\times\frac{m}{n}$$

$\frac{aek}{bfl}=\frac{cgm}{dhn}$ 即 $aek:bfl=cgm:dhn$

定則11. 四ツノ數ガ比例ヲナストキハ各項ノ等シキ冪數ハ亦比例ヲナス。

$a:b=c:d$ ナラバ

$a^n:b^n=c^n:d^n$ ナリ。

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊ヲ n 乘スレバ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$$

$\therefore\ a^n:b^n=c^n:d^n$

（注意）　同様ニシテ $a:b=c:d$ ナラバ

$$a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=c^{\frac{1}{n}}:d^{\frac{1}{n}}$$

ヲ得,従ッテ $a:b=c:d$ ナラバ

$$a^2:b^2=c^2:d^2,\ a^3:b^3=c^3:d^3$$

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{c}:\sqrt{d},\ \sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}:\sqrt[3]{d}$$

コノ關係式ハ屢々利用サレルモノナリ。

定則12.　二數ノ等倍數ノ比ハソノ二數ノ比ニ等シ。

$a:b$ ヲ任意ノ二數トスレバ

$$ma:mb=a:b$$

證明　$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ ノ前ノ分數ノ分子分母ニ同數 m ヲ乘ズレバ

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$$

$\therefore\ ma:mb=a:b$ ナリ。

演習問題 (56)

(1)　$a:b=c:d$ ナレバ

$3a+4c:5a+4c=3b+4d:5b+4d$ ナルコトヲ證明セヨ

(2)　$a:b=c:d$ ナレバ

$a^2+c^2:b^2+d^2=ac:bd$ ナリ。

(3)　$a:b=c:d$ ナレバ

$a^2+b^2:a^2-b^2=c^2+d^2:c^2-d^2$ ナリ。

(4)　$a:b=b:c$ ナレバ

$a-b:b-c=b:c$ ナリ。

(5)　$a:b=b:c$ ナレバ

$a:c=a^2+b^2:b^2+c^2$ ナリ。

(6)　$2a+3b:2c+3d=3a-4b:3c-4d$ ナレバ

$a:b=c:d$ ナリ。

(7)　$10a+b:10c+d=12a+b:12c+d$ ナレバ

$a:b=c:d$ ナリ。

(8)　$a+b-2c:a-b+2c=2a+2b-c:2a-2b+c$ ナレバ

$a=0$ ナルカ $c=0$ ナリ。

(9)　$x+y:x-y=x+z:x-z$ ナレバ

$x=0$ ナルカ $y=z$ ナリ。

(10)　$a:b=c:d$ ナレバ

$a^2+c^2:b^2+d^2=\sqrt{a^4+c^4}:\sqrt{b^4+d^4}$

ナルコトヲ證明セヨ。

第　十　章

級　　數

(81) 等差級數

相隣レル二數ノ差ガ相等シキ如キ數列ヲ等差級數ト稱シ,コノ差ヲ公差ト云フ。

例ヘバ　4, 7, 10, 13,……

15, 13, 11, 9,……

$a, a+d, a+2d,$……

等ハ何レモ等差級數ニシテ公差ハ夫々3, —2, dナリ。

等差級數ハ*A.P.*ニテ略記サル

等差級數ノ一般ノ形ハ次ノ如シ。

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots$$

(82) 等差級數ノ初メヨリ第n項目ヲ求ムルコト

初項ヲa,公差ヲdトスレバ等差級數ノ定義ヨリ第n項目ハaニ$(n-1)d$ヲ加ヘタルモノニ等シ

$$l=a+(n-1)d \cdots\cdots(1)$$

(83) 等差級數ノn項ノ和ヲ求ムルコト.

(I)　初項ヲa,公差ヲd,項數ヲnトシ,n項ノ總和ヲSトスレバ定義ニヨリ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots\cdots+l$$

ナリ。

第$(n-1)$項目ハ$l-d$,第$(n-2)$項目ハ$l-2d$ナリト考ヘラルヽヲ以テ上ノ總和ノ式ヲ改ムレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

トナル,コノ式ヲ又逆ニ書キ始ムレバ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

今コノ二等式ノ各項ヲ同ジ行ニ上下ニ書キ並ブレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

邊々相加フレバ

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)$$

ヲ得,$(a+l)$ガnアルヲ以テ

$$2S=n(a+l)$$

$$\therefore\quad S=\frac{n(a+l)}{2}\cdots\cdots(2)$$

之レ初項,末項,項數ヲ知リテ總和ヲ求ムル公式ナリ。

(Ⅱ) 第n項目lハ

$$l=a+(n-1)d$$

ナル公式ニヨリテ求メ得ラルヽヲ以テ,コノ値ヲ上ノ公式中ニ代入スレバ

$$S=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}$$

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots(3)$$

之レ初項,公差,項數ヲ知リテ總和ヲ求ムル公式ナリ。

例 1. 52, 54, 56 ノ……第七項目ヲ求ム。

解 $l=a+(n-1)d$

$l=52+(7-1)\times2$

$=52+12=64$

例 2. 初項6ニシテ第十一項目ガ46ナル等差級數ノ公差ヲ求メヨ。

解 $l=a+(n-1)d$

$46=6+(11-1)d$

$40=10d$

$\therefore\ d=4$

例 3. 7, 10, 13, …… ナル等差級數ノ第12項ノ和ヲ求メヨ。

解 $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{12}{2}\{2\times7+(12-1)\times3\}$

$=282$

例 4. 等差級數ノn項ノ和ガ24ニシテ,初項ハ9ナリ,且ツ末項−6ナルトキ項數及ビ公差ヲ求メヨ。

解 $S=\frac{n(a+l)}{2}$ ヨリ

$24=\frac{n(9-6)}{2}$

$n=16$

$l=a+(n-1)d$

$-6=9+(16-1)d$

$\therefore\ d=-1$

例 5. 等差級數15, 12, 9 …… アリ何項ノ和ガ42トナルカ。

解 $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$$42=\frac{n}{2}\{2\times15+(n-1)\times(-3)\}$$

$$=\frac{n}{2}(33-3n)$$

$$3n^2-33n+84=0$$

$$n^2-11n+28=0$$

$$(n-4)(n-7)=0$$

$\therefore\quad n=4$　又ハ　$n=7$

例 6.　等差級數アリ第八項ハ50ニシテ,第二十一項ハ115ナリト云フ.第五十項ヲ求メヨ

解　初項ヲaトシ,公差ヲdトスレバ

$$a+7d=50$$

$$a+20d=115$$

之ヲ解ケバ　$d=5,\ a=15$　ヲ得

$\therefore$　第五十項　$=15+49\times5=260$

(84)　**定義**　a,b,cガ等差級數ヲナストキbヲa,cノ等差中項ト稱ス。

與ヘラレタル二數ノ等差中項ヲ求ムルコト。

a,bノ等差中項ヲAトスレバ

$$b-A=A-a$$

$$A=\frac{a+b}{2}$$

例　320ト360トノ等差中項如何

$$A=\frac{320+360}{2}=340$$

演 習 問 題 (57)

(1)　4, 8, 12 ……ナル級數ノ第6項ヲ求メヨ。

(2)　3, 1, —1, ……ナル級數ノ第13項ヲ求メヨ。

(3)　15, 10, 5 ……ナル級數ノ初メヨリ11項ノ和ヲ求メヨ。

(4)　等差級數アリ第二項ハ65ニシテ,第五項ハ56ナリト云フ,コノ級數ヲ求メヨ。

(5)　$a+b$ト$a-b$トノ等差中項如何。

(6)　等差級數アリ,項數11ニテ末項ハ45ナリ,コノ級數ノ總和ハ275ナリト云フ,初項及公差ヲ求メヨ。

(7)　等差級數アリ第七項ハ5ニシテ第十四項ハ—9ナリト云フ,初項ヲ求メヨ。

(8)　—8, —7, —6, —5……ノ幾項ノ和ガ42トナルカ

(9)　$\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$ ……ノ何項ノ和ガ0トナルカ。

(10)　$87+85+83$ ……ノn項ノ和ガ$3+5+7$ ……ノn項ノ和ト相等シト云フ,nヲ求メヨ。

(85) 等比級數

定義　級數ノ任意ノ一項ヲ其前ノ項ニテ除シタル商ガ一定ナルトキハ,之ヲ等比級數又ハ幾何級數ト稱ス,等比級數ハ G. P. ニテ略記サル。

例ヘバ　10, 20, 40……ニ於テ

$$\frac{20}{10}=2,\ \frac{40}{20}=2,\cdots\cdots$$

ナルヲ以テ等比級數ナリ。

コノ商ヲ公比ト稱ス。

初項ヲaトシ,公比ヲrトスレバ等比級數ノ一般ノ形式ハ次ノ如シ。

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\cdots\cdots$$

(86) 等比級數ノ第n項ヲ求ムルコト。

一般ノ形

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\cdots\cdots$$

ヨリ第n項ヲlトスレバ

$$l=ar^{n-1}$$

例 1.　4, 8, 16 ……ニ於テ第6項ヲ求メヨ。

解　$r=\frac{8}{4}=2,\ a=4$

$$l=ar^{n-1}=4\times2^{6-1}$$

$$=4\times32=128$$

例 2.　等比級數アリ,初項ハ18ニシテ,第四項ハ$\frac{2}{3}$ナリト云フ,公比ヲ求メヨ。

解　$\frac{2}{3}=18r^3$

$$r^3=\frac{1}{27}$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{3}$$

例 3.　等比級數ノ第三項ガ40ニシテ第五項ハ160ナリト云フ,コノ級數ヲ求メヨ。

解　初項ヲa,公比ヲrトスレバ

$$ar^2=40$$

$$ar^4=160$$

$$\therefore\quad r^2=160\div40=4$$

$$\therefore\quad r=\pm2$$

$$a=40\div4=10$$

求ムル級數ハ

$10,\ \pm20,\ 40,\ \pm80,\ 160,\cdots\cdots$ ナリ

例 4. 5, 10, 20 ……ナル等比級數ノ第何項ガ320トナルカ。

解 $320=5\times2^{n-1}$

$2^{n-1}=64=2^6$

$n-1=6$

$\therefore\ n=7$

(87) **定義** 三數 a, b, c ガ等比級數ヲナストキ b ヲ a, c ノ等比中項ト稱ス。

$$r=\frac{b}{a},\ r=\frac{c}{b}$$

ナルヲ以テ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$

$b^2=ac$

$b=\pm\sqrt{ac}$

例 32ト18トノ等比中項ヲ求メヨ。

$b=\pm\sqrt{32\times18}=\pm\sqrt{24\times24}$

$=\pm24$

演習問題 (58)

(1) 1, 2, 4 ……ノ第十項ヲ求メヨ。

(2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1$ ノ第十項ヲ求メヨ。

(3) $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$ ノ第十二項ヲ求メヨ。

(4) 等比級數ノ第六項ハ $\frac{5}{8}$ ニシテ，第九項ハ $\frac{5}{64}$ ナリ，初項ヲ求メヨ。

(5) 等比級數ノ第七項及第八項ハ4及-8ナリ第三項ト第四項ヲ求メヨ。

(6) 625, 125, 25 ……ノ第何項ガ $\frac{1}{625}$ トナルカ。

(7) 7ト252ノ等比中項ヲ求メヨ。

(8) a^5b^2 ト a^3b^6 トノ等比中項ヲ求メヨ。

(9) a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキハ $ad=bc$ ナルコトヲ證明セヨ。

(10) 等比級數アリ，第三項ハ4ニシテ第六項ハ $-\frac{1}{2}$ ナリ，第十項ヲ求メヨ。

(88) **等比級數ノn項ノ和ヲ求ムルコト。**

$a, ar, ar^2 \cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ S トスレバ

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$$

兩邊ニ r ヲ乘ズレバ

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots\cdots$$

邊々相減ズレバ

$$S-Sr=a-ar^n$$

$$S(1-r)=a(1-r^n)$$

$$\therefore\quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

例　$3+6+12+24+\cdots\cdots$ノ六項ノ和ヲ求メヨ

解　$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$a=3,\ r=2,\ n=6$$

$$S=\frac{3(1-2^6)}{1-2}$$

$$=\frac{-3\times63}{-1}=189$$

(89) 無限等比級數ノ和ヲ求ムルコト。

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots$$

n項ノ總和ハ

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ ナリ。

コノ分數式ノ形ヲ變ズレバ

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

コノ級數ニ於テ公比rガ1ヨリ小ナルトキハnガ段々大トナルニ從ヒテ$\frac{ar^n}{1-r}$ハ段々小トナリnガ無限ニ大トナレバ$\frac{ar^n}{1-r}$ハ0トナルヲ以テコノ場合ニハ

$$S=\frac{a}{1-r}$$

トナル,之無限等比級數ノ總和ナリ,故ニ公比ガ1ヨリ小ナル無限等比級數ノ總和ハ常ニ上ノ公式ヨリ算定セラル。

例 1.　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ノ無限項迄ノ和ヲ求メヨ

解　$$S=\frac{a}{1-r}$$

$$a=1,\ r=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

例 2.　等比級數アリ,第二項ハ-8ニシテ無限項ノ和ガ8ナルトキコノ級數ヲ求メヨ。

解　初項ヲaトシ公比ヲrトスレバ

$$S=\frac{a}{1-r}$$ ヨリ

$$18=\frac{a}{1-r}$$

$$a+18r=18$$

又 $ar=-8$

ナルヲ以テ

$$a+18r=18$$
$$ar=-8$$

ナル聯立方程式ヲ解キテa,rヲ求ムレバ

$$a=24,\ r=-\frac{1}{3}$$ ヲ得

故ニ求ムル級數ハ

$$24,\ -8,\ \frac{8}{3},\ \cdots\cdots\cdots$$

ナリ。

演習問題 (59)

(1) $6, -18, 54\cdots\cdots$ノ六項ノ和ヲ求メヨ。

(2) $0.2+0.02+0.002+\cdots\cdots$ノ無限項ノ和ヲ求メヨ

(3) 等比級數ノ第六項ハ20ニシテ第十項ハ320ナルトキコノ級數ヲ求メヨ。

(4) $12-9+6\frac{3}{4}-\cdots\cdots$ノ無限項ノ和ヲ求メヨ。

(5) 等比級數$6, \frac{1}{2}, \frac{1}{24}\cdots$ノ無限項ノ和ヲ求メヨ

(6) a, b, c, dガ等比級數ヲナサバ$a+b, b+c, c+d$モ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

(7) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$ナルトキハ$a, b, c$ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

(8) 等比級數アリ,始メヨリ第10項ノ和ハ始メヨリ五項ノ和ノ33倍ナルトキ公比ヲ計算セヨ

(9) $81+27+9+\cdots\cdots$ノ9項ノ和ヲ求メヨ。

(10) $x+2x^2+4x^3+\cdots\cdots$ノn項ノ和ヲ求メヨ。

第十一章

(90) 對數

定義　$a^x=m$ ナルトキ x ヲ a ヲ底トセル m ノ對數ト稱ス。

依リテ

$2^4=16$	ナルヲ以テ	2	ヲ底トスル	16	ノ對數ハ	4	ナリ
$4^3=64$	〃	4	〃	64	〃	3	〃
$10^2=100$	〃	10	〃	100	〃	2	〃
$10^5=100000$	〃	10	〃	100000	〃	5	〃
$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$	〃	10	〃	0.1	〃	-1	〃
$10^{-3}=\frac{1}{1000}=0.001$	〃	10	〃	0.001	〃	-3	〃

a ヲ底トスル m ノ對數ハ $log_a m$ ナル記號ヲ用キテ表ハサル

例ヘバ $a^x=m$ ナラバ　$log_a m=x$

演習問題 (60)

次ノ對數ヲ求メヨ。

(1) $log_2 4$　　(2) $log_2 8$　　(3) $log_3 9$

(4) $log_5 25$　　(5) $log_5 125$　　(6) $log_7 343$

(7) $log_{10} 100$　　(8) $log_2 32$　　(9) $log_6 \frac{1}{36}$

(10) $log_2 \frac{1}{32}$

(91)

例 1.

$$log_2 61=4$$

$$log_4 64=3$$

$$log_{10} 100=2$$

$$log_{10} 100000=5$$

$$log_{10} 0.1=-1$$

$$log_{10} 0.001=-3$$

10ヲ底トスル對數ニハ底數10ヲ省キテ書クヲ普通トス。

$log 100$ ハ $log_{10} 100$

ノコトナリ10ヲ底トスル對數ヲ常用對數ト稱ス。

演習問題 (61)

次ノ各方程式ヲ $a^x=m$ ナル形式ニ改メヨ。

(1) $log_2 8=3$　　(2) $log_3 9=2$　　(3) $log_4 64=3$

(4) $log_8 64=2$　　(5) $log_{10} 10=1$　　(6) $log_{10} 10000=4$

(7) $\log_2\frac{1}{4}=-2$　　(8) $\log_{10}0.1=-1$

(9) $\log_{10}0.001=-3$　　(10) $\log_8\frac{1}{64}=-2$

(92) 對數ノ定理

定理 1. 二數ノ積ノ對數ハ各數ノ對數ノ和ニ等シ。

$$\log_a(A\times B)=\log_a A+\log_a B$$

系 多クノ數ノ積ノ對數ハ各數ノ對數ノ和ニ等シ。

$$\log_a(A\times B\times C\cdots\cdots)=\log_a A+\log_a B+\log_a C+\cdots\cdots$$

定理 2. 二數ノ商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ。

$$\log_a(A\div B)=\log_a A-\log_a B$$

定理 3. 一數ノ乘冪ノ對數ハ一數ノ對數ニ乘冪ノ數ヲ乘ジタルモノニ等シ。

$$\log_a(A^m)=m\log_a A$$

例 1. $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ ヲ知リテ $\log 6$ ヲ求メヨ。

$$\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3$$

$$=0.3010+0.4771$$
$$=0.7781$$

例 2. $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ ヲ知リテ $\log 36$ ヲ求メヨ。

解 $\log 36=\log(4\times 9)=\log(2^2\times 3^2)$
$$=\log 2^2+\log 3^2$$
$$=2\log 2+2\log 3$$
$$=2\times 0.3010+2\times 0.4771$$
$$=0.6020+0.9542$$
$$=1.5562$$

例 3. $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ ヲ知リテ $\log 2\sqrt{3}$ ヲ求メヨ。

解 $\log 2\sqrt{3}=\log 2+\log\sqrt{3}$
$$=\log 2+\frac{1}{2}\log 3$$
$$=0.3010+\frac{1}{2}\times 0.4771$$
$$=0.3010+0.2386$$
$$=0.5396$$

演習問題 (62)

$\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ ヲ知リテ

次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

(1)　24　　(2)　54　　(3)　162

(4)　48　　(5)　$3^3\times2^2$

$log2=0.3010$, $log5=0.6990$, $log6=0.7782$ ヲ知リテ次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

(6)　30　　(7)　7.5　　(8)　180

(9)　60　　(10)　$2^3\times5^2\times6^3$

(93) 常用對數

位取ノミ異ナル數ノ對數

例ヘバ　1.5399 ト 15.399 トノ對數ヲ考フルニ

$$15.399=1.5399\times10$$

$$log15.399=log1.5399+log10$$

$$=log1.5399+1$$

ナルヲ以テ $log15.399$ ハ $log1.5399$ ヨリ1丈ケ大ナルコトヲ知ル。

依リテ　$log15.399=1+log1.5399$

又　$log2$ ト $log0.02$ トヲ考フルニ

$$log0.02=log(2\div100)$$

$$=log2-log10$$

$$=log2-2$$

$$=0.3010-2$$

$$=-1.6990$$

然ルニ常用對數ノ小數部分ハ常ニ正數トシテ表ハス約束ナルヲ以テ

$$log0.02=-1.6990$$

ハ次ノ如ク變形シテ考フ。

$$log0.02=-2+0.3010$$

ニテ表ハスモノトス,尚之レヲ次ノ如ク略記ス。

$$log0.02=\bar{2}.3010$$

$\bar{2}$ ノ頭ニアル一號ハ2ノミガ負數ナルコトヲ表ハシ小數0.3010ハ正數ナリト知ルベシ。

定義　對數ニ於テハ整數部分ヲ指標,小數部分ヲ假數ト稱ス。

10ヨリ100　迄ノ間ノ數ノ對數ハ1ヨリ大ニシテ2ヨリ小ナリ。

100ヨリ1000迄　〃　〃　2　〃　3　〃

0ヨリ0.1　迄　〃　〃　0ヨリ小ニシテ−1ヨリ大ナリ。

0.1ヨリ0.01　迄　〃　〃　−1　〃　−2　〃

0.01ヨリ0·001迄　〃　〃　−2　〃　−3　〃

以上ノ關係ヨリ指標即チ整數部分ハ直チニソノ桁數ヨリ求ムルコトヲ得。

即チ桁數ヨリ1小ナル數ガ指標ナリ。

例ヘバ　6324ノ對數ノ指標ハ

四桁ノ數ナルヲ以テ3ナリ。

同様ニシテ 63.24ノ對數ノ指標ハ1ナリ。

〃　6.3240　〃　0ナリ。

〃　0.6324　〃　—1ナリ。

〃　0.06324　〃　—2ナリ。

次ニ假數即チ小數部分ヲ定ムルニハ對數表ト稱スルモノヨリ計算ス。

對數表ニハ求メントスル數ノ對數ノ假數ノ部分ヲソノ目的ニヨリ四桁,五桁,六桁,七桁等種々精密ノ度ニ應ジテ調製セラル,本書ハ四桁ノ對數表ヲ卷末ニ附シタリ。

例ヘバ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962

コノ左端縱ノ行ト最上ノ横ノ行ノ數字ハ與ヘラレタル數ノ大サヲ比較スルニ用イラレ,他ノ數ハ皆ソノ對數ノ小數部分ヲ示セリ。

例ヘバ20ノ對數ノ小數部分ヲ求ムルニハ,左端ノ20トアルトコロヨリ右ヘ數ヘテ,0ノ下ノ數即チ3010ガ對數ナルヲ以テ指標1ヲ前置シテ

$$\log 20 = 1.3010$$

トス。

同様ニ21ノ對數ノ小數部分ヲ求ムルニハ左端ノ21ノアルトコロヨリ右ニ數ヘテ0ノ下ノ數即チ3222ヲ取リ

$$\log 21 = 1.3222$$

トス。

同様ニ22,23,24等ノ對數ノ小數部分ハ皆0ノ下ノ縱ノ行中ニアリ。

次ニ三桁ノ數200,210,220,230,240ヲ求ムルニハ上ノ20,21,22,23,24ノ對數ヲ求メ之レニ指標ヲ附記シテ

$$\log 200 = 2.3010$$

$$\log 210 = 2.3222$$

$\log 220=2.3444$

トス。

又202ノ對數ヲ求ムルニハ左端ノ20ヨリ右ニ行キ上欄ノ2ノトコロヲ下ニ行キ相會スル3054ガ求ムル數ニシテ之レニ指標2ヲ添ヘテ

$\log 201=2.3054$

トス。

又245ノ對數ヲ求ムルニハ左端ノ24ヨリ右ニ行キ上欄ノ5ノトコロヲ下ニ行キ相會スル3892ガ求ムル數ニシテ之レニ指標2ヲ添ヘ

$\log 245=2.3892$

トナル。

斯クテ三桁ノ數ノ對數ハ卷末ノ表ヨリ直チニ求ムルコトヲ得ベシ。

演習問題 (63)

次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

(1) 27　(2) 250　(3) 4800

(4) 567　(5) 638　(6) 869

(7) 9240　(8) 773　(9) 9130

(10) 344000

(94) 比例ノ法則ニヨリテ四桁ノ數ノ對數ヲ求ムルコト。

例　2237ノ對數ヲ求ムルコト。

2230ト2240トノ對數ハ223ト224ノ對數ヲ求ムルコトニヨリテ得ラル,2237ハコノ二數ノ間ノ數ナルヲ以テ223ト224トノ對數ノ差ヲ取リコノ差ニ對シテ本數ハ10ノ差アリ,然ラバ本數ニ7ノ差アルトキハ如何ト云フ比例式ヲ得ルモノトス。

$$\begin{array}{r} \log 2240=3.3502 \\ \log 2230=3.3483\ (- \\ \hline 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2237 \\ 2230\ (- \\ \hline 7 \end{array}$$

$$10:7=19:x$$

$$x=\frac{7\times 19}{10}=13.3=13$$

故ニ　$\log 2237=3.3483+0.0013$

$=3.3496$

(註) 上ノ19ノ如キ數ヲ表差ト稱ス,對數表ニ於テハ欄外ニ各數ノ表差ヲ下ニ記入セリ,而

シテ表差19ノ右ニテ上端7ノトコロヲ下ニ進ミツノ交點ハ13トナルコノ方法ニヨリテ

$\frac{7\times19}{10}$ ノ計算ノ勞ヲ省クモノトス。

（註） $log2237=3.3496$ ニ於テ 3.3496 ニ對シ 2237 ノコトヲ眞數ト稱ス。

故ニ上ノ計算ハ眞數ヨリ對數ヲ求メタルコトヽナル。

(95) 對數ヲ與ヘテ眞數ヲ求ムルコト。

例 $log x=2.3586$ ニ應ズルxヲ求ムルコト。

指標2ハ假數0.3586ヨリ求メタル眞數ノ桁數ヲ定ムルニ用キラルヽ數ナルヲ以テ,假數 0.3586 ニ相當スル對數ヲ表中ニテ捜シ出ダスモノトス,コノ時丁度コノ數ガ表中ニ表ハルヽコトハ稀ニシテ二數ノ中間ニ位スルモノナリ。

3586ハ表中ニ3579ト3598トノ間ニアル數ナルコトヲ知ルヲ以テコノ小ナル數トノ差ヲ取レバ

$$\begin{array}{r} 3586 \\ 3579 \\ \hline 7 \end{array}$$

又表中ノ隣レル二ツノ對數ノ差ヲ取レバ

$$3598-3579=19$$

トナルヲ以テ次ノ比例式アリ

$$19:7=1:x$$

$$\therefore \quad x=\frac{7}{19}=0.4$$

3579ノ眞數ハ228ナルヲ以テ3586ノ眞數ハ2284ナルコトヲ知ル。

故ニ求ムル眞數ハ指標ニヨリテ

228.4

ナルコトヲ知ル

（註） 上例ニ示シタル比例式ヲ立テヽ求ムル方法ハ最モ大切ナルヲ以テ充分理解スルコトヲ要ス。

表差ヲ用井テ眞數ヲ求ムルコト

例 1. $x=log3446$ ヨリ 2 ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{rl} log3440=3.5366 & \\ 6 \qquad 7 & (+ \\ \hline log3446=3.5373 & \end{array}$$

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	1	2	4	5	6	7	8	10	11

表ヨリ *log*344 ト *log*345 トノ差

5378−5366=12　ヲ得。

表ノ左端ノ12ノトコロノ比例部分ヲ見テ6ニ相當スル下ノ7ヲ前ノ *log*3440 ノ對數ノ下ニ書キ之ヲ加ヘテ最後ノ桁ハ四捨五入スルモノトス。

例 2.　$x=log447.6$ ヨリxヲ求メヨ。

解

$log447 = 2.6503$
　　6　　　6 (+
$log447.6 = 2.6509$

表差　10
　　0.6 (×
　　6

例 3.　$logx=2.2734$ ヨリxヲ求メヨ。

解

$logx=2.2734$
　2718……187
　16
　13………9
　　1879

∴　$x=187.9$

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	12	3	4	6	7	8	10	11	13

表差14ナルヲ以テ14ノ右ニテ16ニ最モ近キ13ノ上端ノ9ヲ187ノ後ニ添付スベシ。

例 4.　$logx=2.6978$ ヨリxヲ求メヨ。

解

$logx=2.6978$　　498
　6972 (−　　　66
　6　　　　49866

表差　=9

9) 6　(0.66
　54
　6
　54

∴　$logx=498.7$

（註）　表差9ノ項ガ表ノ本欄外ニナキ場合ニハ除法ニヨリテ加フベキ數ヲ求ムルモノトス

例 5.　$logx=-0.3452$ ヨリxヲ求メヨ。

解　$-0.3452=-1+1-0.3452$

$=\bar{1}.6548$

$logx=\bar{1}.6548$
　6542……451
　6　　　66
　　　　4517

表差=9

9) 6　(0.66
　54
　6
　54

∴　$x=0.4517$