中嶋喜一譯述

數學試驗問題解法一斑

東京　興文社藏版

此ノ書ノ原本ハ英書ナレド其ノ程度恰我小學校教員試驗ノ程度ニ等シク解說頗ル親切丁寧ナルヲ以テ教員試驗ヲ受クル人ノ參考ニモト思ヒテ譯述セリ

原本ヲ不足ナリト思ヘル所ニハ註及補ヲ加ヘ誤レルハ訂正セリ

原本ニハ千八百八十五年一月幾何學第七問ニノミ圖アリ其ノ他ハ皆譯者ノ增加セルナリ

此ノ書ノ譯述ニハ友人成瀨四男也君ヨリ少カラザル補助ヲ受ケタリ

明治廿九年六月

譯者識

符　號

幾何學問題ヲ證明スルニ當リテ適當ナル符牒ヲ用ヰルトキハ大ニ手數ト時間トヲ省キ且ツ大ニ明瞭ナルベシ

幾何學ニ於テ普通ニ用ヰラルヽ符牒ハ大略次ノ如シ

- $<$　ヨリ小ナリ
- $>$　ヨリ大ナリ
- $=$　等シ
- $\equiv$　全ク相等シ
- $\therefore$　夫故ニ
- $\because$　何トナラバ何々ナレハナリ
- $\parallel$　平行ナリ
- $\angle$　角
- $\triangle$　三角形
- ▱　平行四邊形
- ⊙　圓
- AB.CD　AB ト CD トヲ兩邊トセル矩形
- AB^2　AB ヲ一邊トセル正方形

數學試驗問題解法一斑

千八百八拾三年六月

試驗官　ジヨン[illegible]プキン氏
　　　　ベンジヤミンウヰリアムソン氏

算術及代數

(1) 一ぽんどノ二分ノ一，三分ノ一，四分ノ一及五分ノ一ヨリ一ぎにあノ六分ノ一，七分ノ一及九分ノ一ヲ減シ其ノ結果ヲ五ぽんどノ分數トシ且最簡形ニ化セ

$$10s+6s\ \ 8d+5s+4s=25s\ \ 8d$$
$$3s\ \ 6d+3s+2s\ \ 4d=\underline{8s\ \ 10d}$$
$$16s\ \ 10d \qquad 答(1)$$

而シ $16s\ 10d=202d$ 又 $£5=1200d$

由テ所求ノ分數ハ $\dfrac{202}{1200}=\dfrac{101}{600}$　答(2)

註 £ハぽんど，sハしりん，dハぺんすノ符號ナリ
又 $£1=20s$, $1s=12d$, 1ぎにあ$=21s$

(2.) $\sqrt{\dfrac{0.678\times 9.01}{0.0234}}$ ヲ最近整數ニ化セ

$$.678\times 9.01=6.10878$$
$$6.10878\div .0234=261\ 大凡$$

而シ $\sqrt{256}=16$ 又 $\sqrt{289}=17$

由テ所求ノ最近整數ハ 16 ナリ

備考　小數ヲ最簡形ニ化スルヿ（但シ乘除法ノミヲ要スル場合）ハ其簡便ナル方法ニテ成シ得ラルヽヿアリ

例 $\frac{6.25\times1.28}{3.5\times.008}\times\frac{1.4\times.032}{.3125\times.025}$ ヲ簡約セヨ

皆ヲ整數ニテ表セバ

$$\frac{625\times128\times14\times32}{35\times8\times3125\times25}$$

今分子ニ於テハ小數位八ツヲ,分母ニ於テハ小數位十一ヲ廢セリ換言スレバ分子ヲ 1,0000,0000 倍シ分母ヲ 1000,0000,0000 倍セリ由テ元ノ關係ヲ保タシメンニハ分子ヲ 1000 倍スベキヿ明ナリ由テ原分數ハ次ノ如クナル

$$\frac{625\times128\times14\times32\times1000}{35\times8\times3125\times25}$$

之ヲ割約スレバ $\left.\begin{array}{l}\frac{8192}{5}=1638\frac{2}{5}\\ \text{又ハ}\quad 1638.4\end{array}\right\}$ 答

(3.) $\frac{0.01\dot{7}4\dot{7}}{0.002\dot{4}7\dot{7}}$ ヲ最簡形ナル常分數ニ化セ

$$.01\dot{7}4\dot{7}=\frac{1747-1}{99900}=\frac{1746}{99900}$$

$$.002\dot{4}7\dot{7}=\frac{2477-2}{999000}=\frac{2475}{999000}$$

$$\frac{1746}{99900}\div\frac{2475}{999000}=\frac{1746}{99900}\times\frac{999000}{2475}$$

$$=\frac{388}{55}=7\frac{3}{55}\quad 答$$

(4.) 石炭ノ價一割下落スルトキハ十三ぽんど十しりんニテ高價ノトキヨリ二噸多ク買フヿヲ得ベシト云フ下落前一噸ノ價ヲ問フ

解一　算術

石炭ノ價一割下落セバ前ノ 9 噸ノ代ニテ 10 噸ヲ, 18 噸ノ代ニテ 20 噸ヲ買フヿヲ得ム

題意ニ依テ £13 10s ハ下落前ノ 18 噸ノ價ナルヿヲ知ル故ニ 1 噸ハ 15s ナリ

解二　代數

x ヲしりんニテ表ハサレタル下落前ノ 1 噸ノ價トス然ルトキハ前ニ買ヒ得シ噸數ハ $\frac{270}{x}$ 又 $\frac{9}{10}x$ ハ下落セシトキノ 1 噸ノ價ナリ

由テ今買ヒ得ル噸數ハ $\frac{270}{\frac{9}{10}x}=\frac{300}{x}$

題意ニ依テ $\frac{300}{x}-\frac{270}{x}=2$

$$300-270=2x$$

$x=15$　前ニ同シ

(5.) 十一ぽんど四しりんヲ三男,四女,五童,六娘ニ分チ其ノ所得ヲ一女ハ一男ヨリ四分ノ一少ク,一童ハ一男一女ノ和ノ七分ノ二,一娘ハ一男一女一童ノ和ノ五分ノ一ナラシメヨ

4,7 及 5 ノ最小公倍數ハ 140

今一男ノ所得ヲ　140　トセバ

一女ノ所得ハ　$140\times\frac{3}{4}=150$　トナリ

一童　〃　$(140+105)\times\frac{2}{7}=70$　トナリ

一娘　〃　$(140+105+70)\times\frac{1}{5}=63$　トナル

之ヲ 7 ニテ通約スレバ 20, 15, 10 及 9 ノ割合トナルベシ

由テ三男ノ所得ハ　60

四女　〃　60

五童　〃　50

六娘　〃　54

所得ノ總數ハ　224

夫故割合 1 ハ$£11.4s\div224=1s$ ニシテ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{一男ノ所得ハ} & 20s\\ \text{一女　〃} & 15s\\ \text{一童　〃} & 10s\\ \text{一娘　〃} & 9s\end{array}\right\}\text{答}$$

備考　本題ノ如キハ比例分法ノ普通ノ問題ナリサレ圧時トシハ之ト異レル施術ヲ要スルモノアリ

例 1　撰擧ニ於テ投票ノ全數ハ三千八百五十四票ニシ當撰者ノ得票ハ反對者ノヨリ二百六票多カリキト云フ各得票數ヲ問フ

先ツ當撰者ニ 206 票ヲ與ヘヨ殘票數ハ $3854-206=3648$ ナリ此内各候補者ハ $3648\div2=1824$ ヲ得而シ當撰者ハ前既ニ 206 ヲ得タリ故ニ所求ノ票數ハ 1824 及 2030 ナリ

例 2　或人遺産ノ三分ノ一ヲ妻ニ,二分ノ一ヲ男ニ與ヘ其ノ餘ヲ四女ニ等分セリ而ルニ男ノ所得ハ一女ノ所得ヨリ三百

三十ぽんど多カリキト云フ遺産ノ高如何

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ 由テ四女ニテ $\frac{1}{6}$ ヲ分取セリ即一女ノ所得ハ $\frac{1}{6}\div4=\frac{1}{24}$ ナリ

故ニ男女所得ノ差ハ全遺産ノ $\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$ 然ルニ題意ニ依テ此ノ差ハ £330 ナルコヲ知ル

由テ遺産ハ $£330\div\frac{11}{24}=£330\times\frac{24}{11}=£720$

(6.) $\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{y}-x}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ 及 $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$ ヲ最簡形ニ化セ

(a)
$$\frac{x^2+y^2}{y}-x=\frac{x^2+y^2-xy}{y}$$
$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}$$
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

夫故原式ハ

$$\frac{x^2+y^2-xy}{y}\times\frac{xy}{x-y}\times\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=x\quad\text{答(1)}$$

備考　初等代數ノ運算ニ於テ因子分括法ニ熟スルコハ最必要ノコナリ高等代數ニ於テハ猶更ノコナリ今迄之ニ注意セザ

リシ人ハ宜シク次ノ式ヲ諳記スベシ

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$$

(b) $$\frac{1}{a+\cfrac{1}{1+\cfrac{a+1}{3-a}}}=\frac{1}{a+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3-a}}}=\frac{1}{a+\cfrac{3-a}{4}}$$

$$=\frac{1}{\cfrac{3a+3}{4}}=\frac{4}{3(a+1)}$$ 答(2)

備考　算術ニテモ代數ニテモ連分數ハ初學者ニハ大ニ繁雜ヲ感セシムルモノナリ簡單ナル規則ハ"下ヨリ上ヘ運算セヨ"ト云フニアリ

例ヘバ $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$ ヲ最簡ニスルハ次ノ如クス

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4\frac{1}{5}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3\frac{5}{21}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}=1+\cfrac{1}{2\frac{21}{68}}$$

$$=1+\frac{68}{157}=1\frac{68}{157}$$

運算ノ順序ハ次ノ如シ

$$4+\frac{1}{5}=4\frac{1}{5},\quad \frac{1}{4\frac{1}{5}}=\frac{5}{21},\quad 3+\frac{5}{21}=3\frac{5}{21},$$

$$\frac{1}{3\frac{5}{21}}=\frac{21}{68},\ 2+\frac{21}{68}=2\frac{21}{68},\quad \frac{1}{2\frac{21}{68}}=\frac{68}{157}$$

是レ最初ノ運算ト同一ナリ

(7) 第三項ハ十,第七項ハ三十ナル十項ノ等差級數(算術級數ト云フ)ノ和ヲ算出セヨ

又 $1+3+9+27+\&c$ (等ト云フニ同ジ次ノ諸項ヲ畧セルナリ)ナル等比級數(幾何級數トイフ)ノ何項ノ和ガ 364 トナルベシヤ

(a) 通常ノ記法ニ從ヒ

$$a+2d=10 \cdots\cdots(1)$$
$$a+6d=30 \cdots\cdots(2)$$

由テ　$4d=20$

即　$d=5$

$\therefore$(1)ニ依テ　$a=0$

サテ $s=\{2a+(n-1)d\}\times\frac{n}{2}=45\times5$

$=225$　　答(1)

註　等差級數ハ通常次ノ如キ五ツノ符號ヲ用フ a ハ初項, d ハ通差, n ハ項數, l ハ末項, s ハ總數

備考　等差級數ニ伴隨セル三ツノ必要ナル定理アリ

(1)　一ヨリ始マル連續奇數ノ和ハ完全ナル平方數ナリ

$1+3+5+\cdots\cdots$ n 項ニ至ル級數ニ於テ $a=1,\ d=2$

n 項ノ和ハ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}$

$$=\frac{n}{2}\times 2n=n^2$$

(2)　等差級數ノ初項及末項ヨリ等距離ニアル二項ノ和ハ初末二項ノ和ニ等シ

a ヨリ第 $r+1$ 項 $=a+rd$

l　〃　$=l-rd$

上ノ二式ノ和ハ $a+l$ ナルコト明ナリ

(3)　等差級數ノ項數ガ奇數ナル時ハ初末兩項ノ和ハ中央項ノ二倍ニ等シ

m ヲ中央項トシ, p ヲ其ノ前ノ項, q ヲ其ノ後ノ項トス

$$p-m=m-q$$

由テ　$2m=p+q$

然ルニ前ノ定理ニ依テ　$p+q=a+l$

$$\therefore\quad a+l=2m$$

定理2及3ハ次例ニテ見ラルヽ如ク總和ヲ算出スル手數ヲ省クニ必要ナルコトアリ

(イ)　$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+1+1\frac{1}{6}$ ナル級數ノ第六項マデノ和ヲ求

ム茲ニ第三第四ノ兩項ハ兩端項ヨリ等距離ニアリ

而シテ　$s=\frac{n}{2}(a+l)=3(1+1\frac{1}{6})=6\frac{1}{2}$

l ヲ算出スル手數ヲ省ケリ

(ロ)　$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+1+1\frac{1}{6}$ ナル級數ノ第七項マデノ和ヲ求ム茲ニ $1\frac{1}{6}$ ハ中央項ナリ

而シテ　$s=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{7}{2}(1\frac{1}{6}\times 2)=8\frac{1}{6}$

l ヲ算出スル手數ヲ省ケリ

(b)　通常ノ記法ニ從ヒ

$s=364,\ a=1,\ r=3$ 而シテ n ヲ求ムルナリ

サテ　$s=\frac{ar^n-a}{r-1}$

即　$364=\frac{3^n-1}{3-1}$

由テ　$3^n-1=728$

$3^n=729$

$\therefore\quad n=6$　　答(2)

註　等比級數ハ通常次ノ如キ五ツノ符號ヲ用フ a ハ初項, r ハ通比, n ハ項數, l ハ末項, s ハ總數

備考　等比級數ノ最普通ナル形ノ內一ツハ循環小數ナリ

例ヘバ　$.\dot{2}\dot{3}=\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\cdots\cdots$(無究ニ至ル)

又　$.4\dot{2}\dot{3}=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{1000\times 100}$

$$+\frac{23}{1000\times 100^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$ (無究ニ至ル)

循環小數ノ價ヲ算出スル通常ノ法ヲ證ス

P ヲ不循環數字トシ且其ノ數ヲ p 個トス, Q ヲ循環ノ數字トシ且其ノ數ヲ q 個トス, s ヲ所求ノ小數ノ價トナス

然ルトキハ　$s=.PQQQ\cdots\cdots$

$$10^p s= P.QQQ\cdots\cdots$$

$$10^{p+q}s=PQ.QQQ\cdots\cdots$$

減算ニ依テ $(10^{p+q}-10^p)s=PQ-P$

由テ $$s=\frac{PQ-P}{(10^q-1)10^p}$$

今 10^q1 ヲ通常ノ數ニナストキハ q 個ノ 9 ヨリ成ル數トナル是ニ由テ次ノ規則アリ

不循環及循環ノ數字ニテ表ハス數ヨリ不循環數字ニテ表ハス數ヲ減シテ之ヲ分子トシ循環數字ノ數ダケ 9 ヲ並ベテ書キタル右ニ不循環數字ノ數ダケ 0 ヲ附記シテ分母トスベシ

例 $.01\dot{6}\dot{3}=\dfrac{9}{550}$ ナルコヲ證セヨ

$s=.01\dot{6}\dot{3}$ トセバ

$$100s=1.\dot{6}\dot{3}$$

$$10000s=163.\dot{6}\dot{3}$$

減算ニ依テ $9900s=162$

由テ $$s=\frac{162}{9900}=\frac{9}{550}$$

補 等比級數ニ伴隨セル二ツノ必要ナル定理アリ

(1) 等比級數ノ初項及末項ヨリ等距離ニアル二項ノ積ハ初末二項ノ積ニ等シ

a ヨリ第 $m+1$ 項 $=ar^m$

l 〃 $=\dfrac{l}{r^m}$

上ノ二式ノ積ハ $a\times l$ ナルコ明ナリ

(2) 等比級數ノ項數ガ奇數ナルトキハ初末二項ノ積ハ中央項ノ平方ニ等シ

m ヲ中央項トシ p ヲ其ノ前ノ項, q ヲ其ノ後ノ項トセバ

$$\frac{m}{p}=\frac{q}{m}$$

由テ $m^2=p\times q$

然ルニ前ノ定理ニ依テ $p\times q=a\times l$

$\therefore\ a\times l=m^2$

8. 次式ヨリ x,y,z ヲ算出セヨ

$$x-y+z=5\ \cdots\cdots(1)$$

$$3x+4y-5z=13\cdots\cdots(2)$$

$$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=14\cdots\cdots(3)$$

(1)ニ 5 ヲ乘ズ　$5x-5y+5z=25\cdots\cdots(4)$

(4)ト(2)トヲ加フ　$8x-y=38\cdots\cdots(5)$

(3)ニ 3 ヲ乘ズ　$3x+\dfrac{3}{2}y+z=42\cdots\cdots(6)$

(6)ヨリ(1)ヲ減ズ　$2x+2\dfrac{1}{2}y=37\cdots\cdots(7)$

即　$8x+10y=148$

然ルニ(5)ハ　$8x-y=38$

減算ニ依テ　$11y=110$

$$\left.\begin{array}{llr} \therefore & & y=10 \\ (5)\text{ヨリ}\ 8x-10=38 & \text{由テ} & x=6 \\ (1)\text{ヨリ}\ 6-10+z=5 & \text{由テ} & z=9 \end{array}\right\}\text{答}$$

9.　次式ノ最公高因子ヲ算出セヨ

x^4-10x^2+9

$x^4+7x^3+11x^2-7x-12$

$x^4+2x^3-16x^2-2x+15$

$$\begin{array}{r|l} x^4+7x^3+11x^2-7x-12 & x^4+2x^3-16x^2-2x+15 \\ x^4+2x^3-16x^2-2x+15 & 1 \\ \hline 5x+27\,)\ 5x^3+27x^2-5x-27 & \\ x^2-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-16x^2-2x+15 & x^2-1 \\ x^4\qquad -x^2\qquad\qquad & x^2+2x-15 \\ \hline 2x^3-15x^2-2x+15 & \\ 2x^3\qquad\ -2x\quad\ \ & \\ \hline -15x^2\qquad +15 & \\ -15x^2\qquad +15 & \end{array}$$

第二第三両式ノ最公高因子ハ x^2-1 ナリ而メ此ハ又 x^4-10x^2+9 ノ因子ナル故此ハ即所求ノ最高公因子ナリ

$5x+27$ ニテ除スル所以ハ $5x+27$ ハ通因子ニアラザルヿ明カナレバナリ

備考　最高公因子ヲ算出スルヿハ因子分括法ノ正當ノ用法ニヨリテ簡單ニセラル即本題ニ於テ

$$x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$$

サテ一ツノ代數式ガ $x=a$ トスルトキ空トナルトキハ $x-a$ ハ其ノ式ノ因子ナリト云フ定理アリ

所題ノ例ニ於テ第二第三両式ハ x ノ代リニ 3 或ハ -3 ヲ置クトキハ空トナラス然レドモ 1 若クハ -1 ヲ置クトキハ空トナルヿヲ發見スルハ容易ナリ之ニ由テ所題ノ三式ノ通因子ハ $x+1$ ト $x-1$ ナルヿヲ知ル即最高公因子ハ x^2-1 ナリ

10.　甲乙両地ノ間ニ上中下三等ノ客ヲ運送スル氣車アリ其ノ賃錢ノ比 7:5:4 ニシテ旅客ノ總數ハ 10,0000 賃錢ハ £4,9000 ナリキ次年ニハ下等ノ賃錢二割五分ヲ減セシガ下等ノ乘客五割増シ中等ノ乘客一割上等ノ乘客五分減ジ旅客ノ數 12,1000 賃錢 £4,9300 ニ増セルヿヲ發見セリ問フ初年ニ於テ各等ノ賃錢及旅客ノ數如何

x ヲ初年ノ上等乘客ノ數

y　〃　中　〃

$100000-(x+y)$　〃　下　〃

然ルトキハ　$\frac{19}{20}x$ ハ次年ノ上等乘客ノ數

$\frac{9}{10}y$　〃　中　〃

$\frac{3}{2}\{100000-(x+y)\}$　〃　下　〃　ナリ

題意ニ依テ

$$\frac{19}{20}x+\frac{9}{10}y+\frac{3}{2}\{100000-(x+y)\}=121000$$

之ニ由テ $\frac{11}{20}x+\frac{3}{5}y=29000$

即 $11x+12y=580000$ ……………(1)

サテ又 $7z$ ヲ初年ノ上等賃錢(ゑうんヲ單位トス)

$5z$ 〃 中 〃

$4z$ 〃 下 〃 トス

然ルトキハ

$$7xz+5yz+4\{100000-(x+y)\}z=980000$$

之ニ由テ $z(3x+y+400000)=980000$

即 $z=\frac{980000}{3x+y+400000}$ ……………(2)

次ニ $7z$ ハ次年ノ上等賃錢

$5z$ 〃 中 〃

$3z$ 〃 下 〃

然ルトキハ

$$(7z\times\frac{19}{20}x)+(5z\times\frac{9}{10}y)+\frac{9}{2}\{100000-(x+y)\}z=986000$$

之ニ由テ $z(\frac{43}{20}x+450000)=986000$

$$z(43x+9000000)=19720000$$

即 $z=\frac{19720000}{43x+9000000}$ ……………(3)

(2)ト(3)トヲ對照シ

$$\frac{19720000}{43x+9000000}=\frac{980000}{3x+y+400000}$$

即 $\frac{986}{43x+9000000}=\frac{49}{3x+y+400000}$

之ニ由テ $851x+986y=46600000$

(1)ハ $11x+12y=580000$

上ノ二式ヨリ

$$\left.\begin{array}{r}x=20000\\ y=30000\\ 100000-(x+y)=50000\end{array}\right\}\text{旅客ノ數}$$

而シ $z=\frac{19720000}{43x+9000000}=2$

夫故上等賃錢ハ 14s

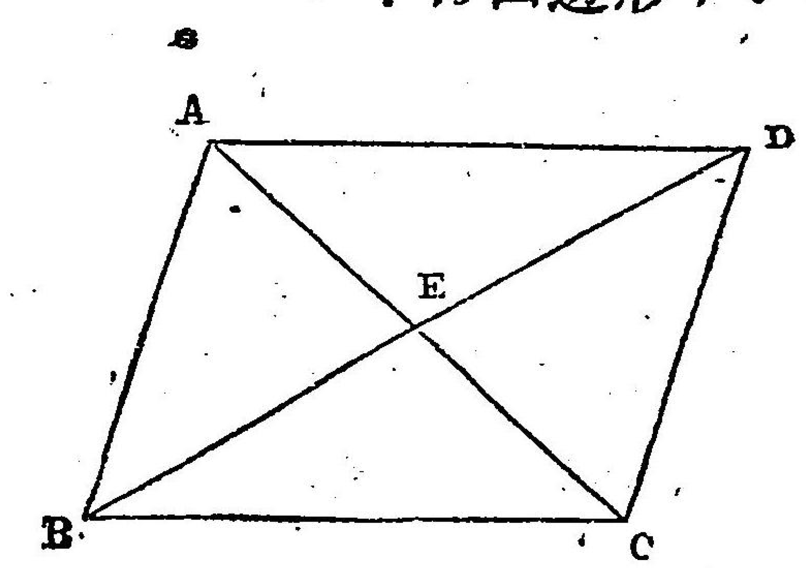
中 〃 10s

下 〃 8s

幾何

1. 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分スルコトヲ証明セヨ

ABCD ヲ平行四邊形トシ AC,BD ヲ E ニ交ル對角線トス



然ルトキハ AE ハ CE ニ,BE ハ DE ニ等シカルベシ

斯カレバ三角形 ABE,CDE ニ於テ甲ノ二角ハ夫々乙ノ二角ニ等シク邊 AB ハ CD ニ等シ（ユークリッド第一編定理 34）夫故 AE=CE 又 BE=DE(ユークリッド第一編定理 26)

註 ユークリッド第一編定理 26 ハ"兩三角形ニ於テ此ノ二

角ハ夫々彼ノ二角ニ等シク此ノ一邊ハ彼ノ之ニ對應スル一邊ニ等シキトキハ兩三角形ハ全ク相等シ而ノ對應スル邊及角ハ相等シ"

ユークリッド第一編定理34ハ"平行四邊形ニ於テ各ノ對角線ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ而ノ相對スル邊ハ相等シク相對スル角モ亦相等シ

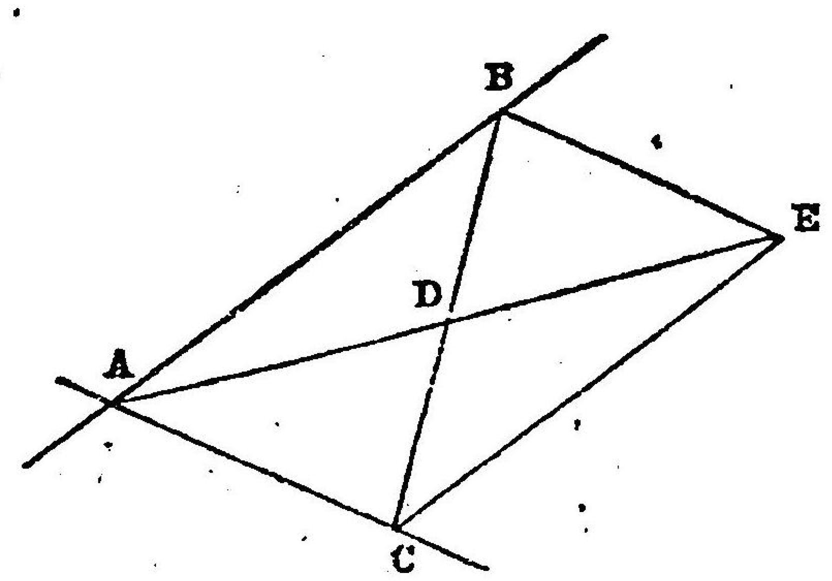
備考　此ノ定理ハ最必要ナルモノヽ一ナリ

解ヲナサムトスルニ當リテ初學者ノ困難トスル所ハ如何ナルコヨリ始ムベキカニアリ故ニ余ハ漸次之ニ付キ必要ナル條件ヲ指示セム

本題ニ於テ証明スベキコハ $AE=CE$ 及 $BE=DE$ ナルコナリ而ノ $\angle AEB=\angle CED$ ハ一見ノ明カナリ夫故三角形 AEB,CED ハ全ク相等シキコヲ証セントスル處起ル玆ニ於テカ先ツ何レノ邊何レノ角ガ相等シキト考ヘザルヲ得ズ

2.　前題或ハ他ノ補助ニヨリテ一定点ヲ通ル一直線ヲ引キ相交ル二定直線ノ間ニ夾マレタル部分ヲシテ其ノ点ニテ二等分セラルヽ如クセヨ

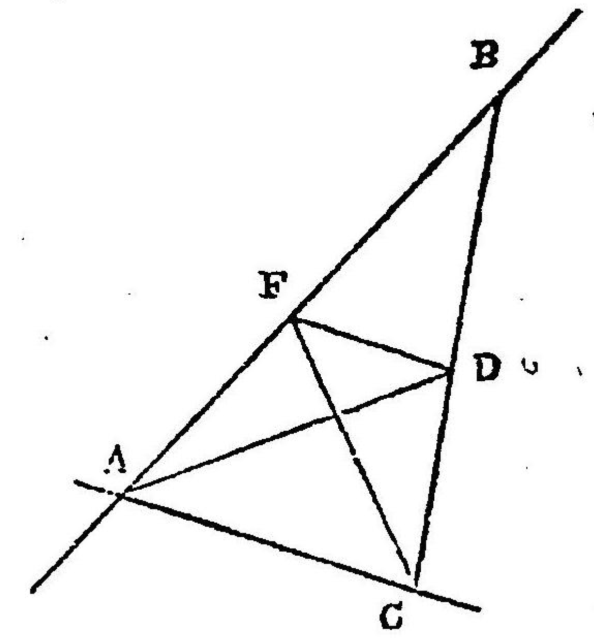
AB,AC ヲ A ニ於テ交レル二直線トシ D ヲ一定点トス



ADヲ結ヒ之ヲ引長ノ DE ヲ AD ニ等シカラシム，AE ヲ平行四邊形ノ一ツノ對角線トシ他ノ對角線ヲ見出サントス

EB,EC ヲ夫々 AC,AB ニ平行ニ引キ BC ヲ結ブ然ルトキハ前ノ定理ニヨリテ BC ハ D ヲ

通リ且 D ニテ二等分セラルヽコヲ知ル



補　本題中ニ"前題或ハ他ノ補助ニヨリテ"トアリ他ノ補助ニ依ル解ハ次ノ如シ

Dヨリ AC ニ平行ニ DF ヲ引キ AB ニ F ニ會セシメ AF ニ等シク FB ヲ取リ B ヨリ D ヲ通リテ直線ヲ引キ AC ニ C ニ會セシム

BDC ハ所求ノ直線ナリ

AD, CF ヲ結ブ　$\triangle ADF=\triangle CFD$　(1.38)

$\triangle ADF=\triangle BDF$　(∵等底同高)

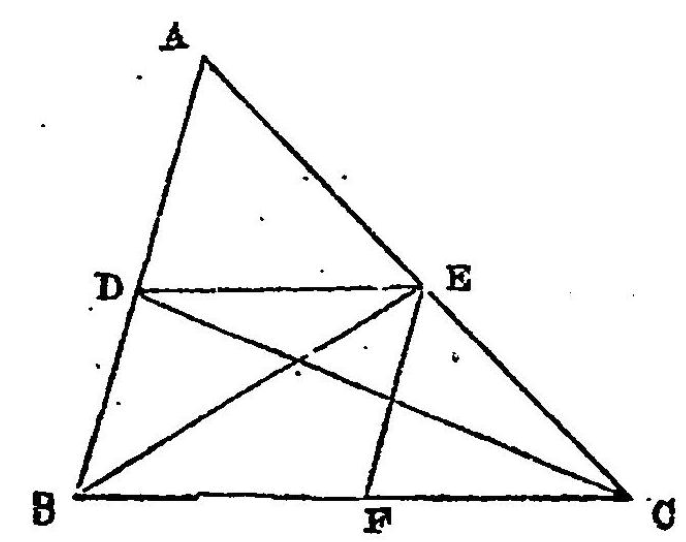
$\therefore\ \triangle CFD=\triangle BDF$

$\therefore\ BD=DC$　(∵同高等積)

註　(1.38)ハユークリッド第一編定理三十八ト云フコヲ表ハス符號ナリ以下之ニ倣フ

(1.38)ハ"等底上同平行線間ニアル兩三角形ハ相等シ"

備考　此ノ問題ノ解ハ甚大切ナル定理ヲ暗示ス此定理ハ相似三角形ノ理ニ依テ容易ニ証明セラルヽモノナレ圧能ク用ヰラルヽ定理ナルヲ以テ玆ニ掲ク



"三角形ノ二邊ノ中点ヲ結ブ線ハ底ニ平行ナリ而ノ底ノ半分ナリ"

三角形 ABC ノ二邊 AB,AC ハ直線 DE ニテ二等分セラルヽモノトス

然ルトキハ DE ハ BC ニ平行ナルベシ

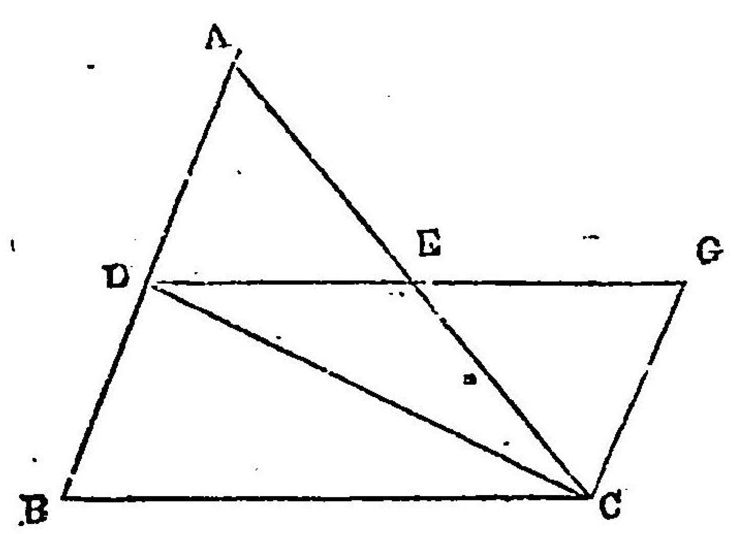
CD,BE ヲ結ブ(1.38)ニ依テ三角形AED,BED ハ相等シ又三角形AED,CDE ハ相等シ夫故三角形 BE

D ハ三角形CDE ニ等シ而ソ両形ハ同底上ニアリ故ニ同平行線間ニアリ

又 DE ハ BC ノ半分ナルベシ

BC ヲ F ニテ二等分シ EF ヲ結ブ DE ノ BC ニ平行ナルヿハ今証シタリ而ソ之ト同理ニテ EF ハ AB ニ平行ナリ由テ BDEF ハ平行四邊形ナリ之ニ由テ DE ハ BF 即 $\frac{1}{2}$BC ニ等シ

補 此ノ定理ハ又次ノ如クニ証明スルヿヲ得

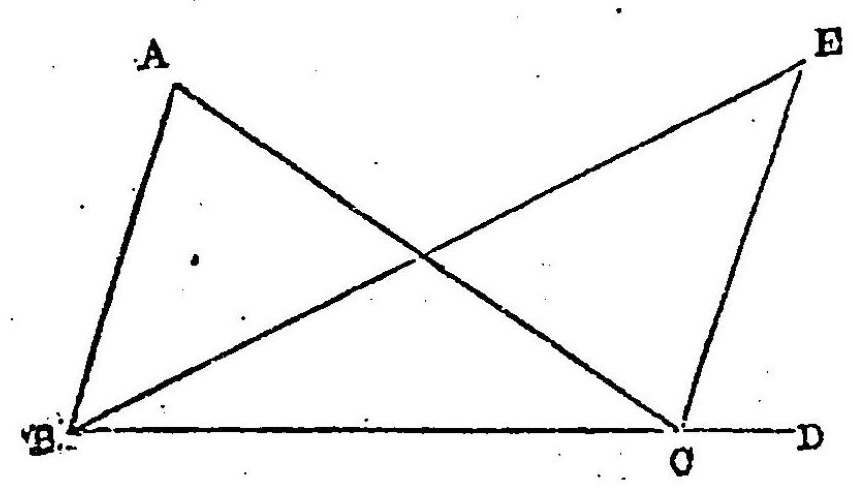


C ヨリ AB ト平行ニ CG ヲ引キ DE ノ引長線ト G ニ交ハラシメ CD ヲ結ブ

E ハ CA ノ中点ニシ AD ハ CG ニ平行ナリ之ニ由テ前ノ（補）ノ如ク DE=EG

又 △AED,△CEG ハ二邊ト夾角相等シ由テ AD=CG 然ルニ AD=BD 故ニ CG=BD 之ニ由テ四邊形 BDGC ハ一双ノ對邊BD,CG ガ平行ニシテ且相等シキガ故ニ平行四邊形ナリ由テ DG=BC 然ルニ DE=$\frac{1}{2}$DG 故ニ DE=$\frac{1}{2}$BC

3. 三角形ノ底ノ一端ニ於ケル内角ノ二等分線ト他端ニ於ケル外角ノ二等分線トノ作ル角ハ頂角ノ半分ニ等シキヿヲ證セヨ



ABC ヲ三角形トス,BC ヲ D 迄延長ス直線 BE ニテ角 ABC ヲ,CE ニテ角 ACD ヲ二等分シ両等分線ヲ E ニ會セシム然ルトキハ角BEC ハ角 BAC ノ

半分ナルベシ

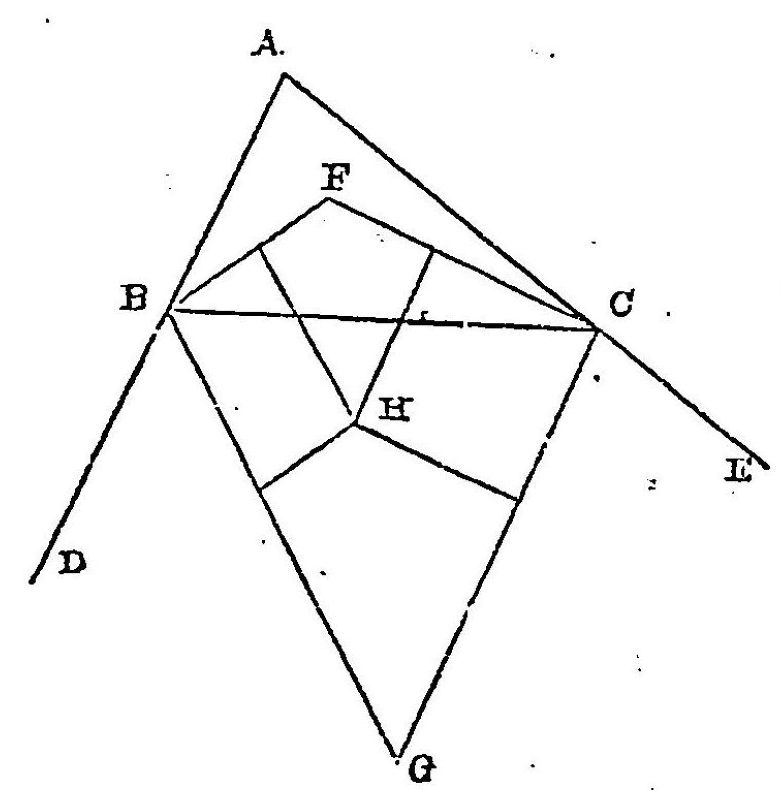
何トナラバ　$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)$

又 $\angle DCE=\angle CBE+\angle BEC=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle BEC$

夫故 $\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle BEC$

夫故　$\angle BEC=\frac{1}{2}\angle BAC$

備考 此ノ定理ヲ証明スルニ當リテ余ハ三角形ノ内角及外角ノ二等分線ハ面白キ性質ヲ考付キタリ面白ク且有益ナルモノナレバ下ニ記ス



ABC ヲ一ツノ三角形トス AB, AC ヲ D 及 E ニ延長ス今∠ABC, ∠ACB ヲ二等分スル直線ガ F ニ會スルトキハ F ハ三邊 AB,BC,AC ニ切スル圓ノ中心ナリ

又 ∠CBD,∠BCE ヲ二等分スル直線ガ G ニ會スルトキハ G ハ BD, BC,CE ニ切スル圓（通常傍切圓ト稱ス）ノ中心ナリ

又四点 B,F,C,G ヲ通ル圓ヲ畫クヿヲ得何トナラバ

$\angle CBF=\frac{1}{2}\angle ABC$

$\angle CBG=\frac{1}{2}\angle CBD$ ナリ

從テ ∠FBG ハ直角ナリ(I.13)又 ∠FCG モ直角ナリ即四邊形 BFCG ハ對角ノ和二直角ニ等シ夫故外切圓ヲ畫クヿヲ得

註 (I.13)ハ"一ツノ直線ガ他ノ直線ト會ソ其ノ一側ニ作ル角ハ合セテ二直角ニ等シ"

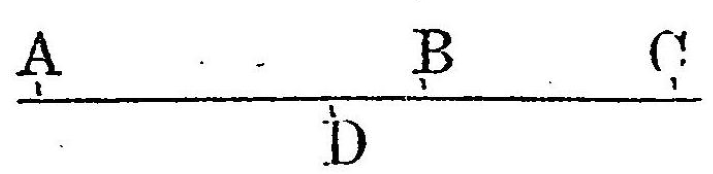
今又 BF,CF ヲ直角ニ二等分スル直線ガ H ニ於テ相會スル

トキハHハ三角形BFCノ外切圓ノ中心ナリ又BG,CGヲ直角ニ二等分スル直線ノ相會スル点ハ三角形BGCノ外切圓ノ中心ナリ之ニ由テ四線BF,CF,BG,CGヲ二等分シ各分点ヨリ垂線ヲ引クトキハ此ノ四垂線ハ同一点ニ相會スルヿヲ知ル

三角形ノ三內角ノ二等分線モ各邊ノ中央ヨリ立ツル垂線モ夫々同一点ニ會スルヿヲ証スルハ學者ノヨキ練習ナリ

4. 任意二線ノ上ノ正方形ノ和ハ其和半ノ上ノ正方形ノ二倍ト差半ノ上ノ正方形ノ二倍トノ和ニ等シキヿヲ證明セヨ

AB,BCヲ二線トス両線ヲBニ於テ接續セシメテ一直線ヲナサシム，ACヲDニテ二等分ス



然ルトキハ(II.9)ニ依テ

$$AB^2+BC^2=2(AD^2+BD^2)$$

然ルニ　$AD=\frac{1}{2}(AB+BC)$

又　$BD+BC=AB-BD$

由テ　$BD=\frac{1}{2}(AB-BC)$

夫故本題ノ如シ

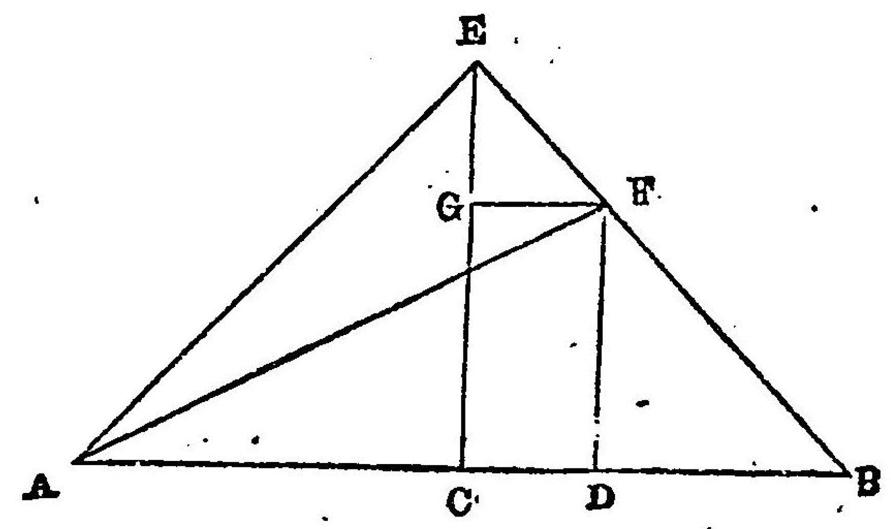
註 (II.9)ハ"一直線ヲ任意ノ点ニテ內分シ又ハ外分スルトキハ各分ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ線ノ半分ノ上ノ正方形ト分点ト線ノ中点トノ間ナル部分ノ上ノ正方形トノ和ノ二倍ニ等シ"

直線ヲABトシCヲ其ノ中点トス任意ノ点D或ハD′ニテABヲ內分或ハ外分ス

然ルトキハAD,BDノ上ノ正方形ノ和ハAC,CDノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シク或ハAD′,BD′ノ上ノ正方形ノ和ハAC,CD′

ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ

第一　內分ノ場合



CヨリABニ垂線CEヲ作リ之ヲACニ等シカラシメAE,BEヲ結ブ又DヨリABニ垂線DFヲ作リBEトFニ會セシメFヨリABニ平行ニFGヲ引キCEトGニ會セシメ更ニAFヲ結ブ

然ルトキハ∠AEB及∠EGFハ直角ナルヿ又GE=GF=CD及DF=DBナルヿハ容易ニ証明シ得ベシ

然ルトキハ　$AD^2+BD^2=AD^2+DF^2$

$$=AF^2$$

$$=AE^2+EF^2$$

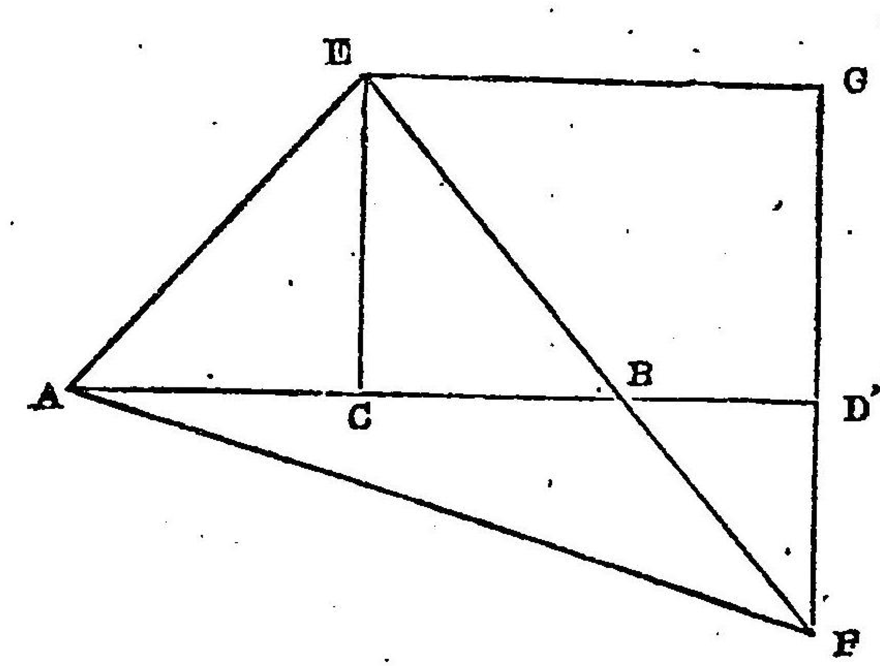
然ルニ　$AE^2=AC^2+CE^2=2AC^2$

又　$EF^2=GE^2+GF^2=2CD^2$

$\therefore$　$AD^2+BD^2=2AC^2+2CD^2$

$$=2(AC^2+CD^2)$$

第二　外分ノ場合



D′ヲ通リAD′ニ垂線FD′ヲ作リEBノ延長トFニ,EヨリABト平行ニ引ケル直線EGトGニ會セシム

∠EGFガ直角ナルヿ又GE=GF=CD′及D′B=D′Fナル

ヿハ容易ニ証明シ得ベシ

然ルトキハ　$AD'^2+BD'^2=AD'^2+D'F^2$

$=AF^2$

$=AE^2+EF^2$

然ルニ　$AE^2=2AC^2$

又　$EF^2=2CD'^2$

$\therefore$　$AD'^2+BD'^2=2AC^2+2CD'^2$

$=2(AC^2+CD'^2)$

備考　本定理ハ容易ニ代數ニテ証明サル

何トナラバ　$AB^2+BC^2=(AD+BD)^2+(CD-BD)^2$

$=AD^2+BD^2+2AD.BD+CD^2+BD^2-2CD.BD$

而シ　$AD=CD$

$\therefore$ $AB^2+BC^2=2AD^2+2BD^2$

$=2(AD^2+BD^2)$

5. 三角形ノ底邊及其ノ二邊上ノ正方形ノ和ヲ題セリ其ノ頂点ノ軌跡ヲ見出セ且ツ如何ナル場合ニ軌道ナキカヲ記セ

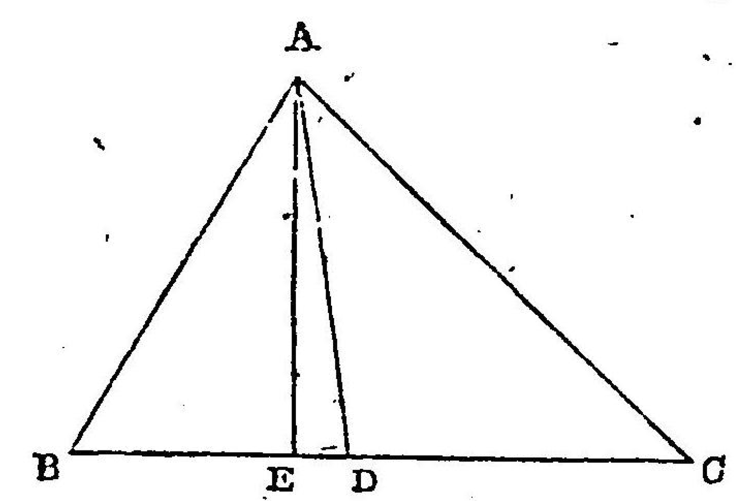
備考1　若干ノ点(而モ其等ノ点バカリ)ガ或ル幾何學上ノ要件ニ適スルトキハ此等總テノ点ヲ通ル線ヲ其ノ要件ニ適スル点ノ軌跡ト稱ス

例ヘバ一定点ヨリ一定ノ距離ニアル点ノ軌跡ハ其ノ点ヲ中心トシ其ノ半徑ハ所題ノ距離ニ等シキ圓周ナルヿ明ナリ

又定直線ヨリ定距離ニアル点ノ軌跡ハ之ニ平行ナル他ノ直線ナルヿ明ナリ

備考2　本題ハ次ノ定理ニ依テ証明セラルヽモノナリ三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ底ノ半分及頂点ト底ノ中点トヲ

結ブ線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ



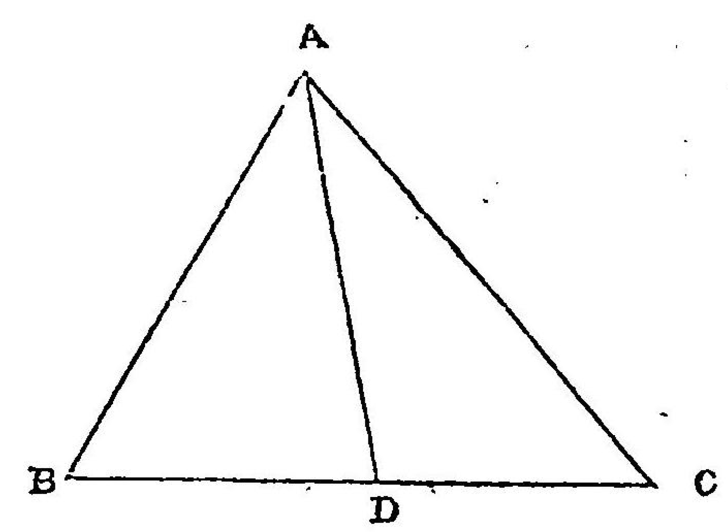
ABC ヲ一ツノ三角形トス,BC ヲ D ニテ二等分シ AD ヲ結ブ, ADC ヲ鈍角ト仮定ス, A ヨリ BC ニ垂線 AE ヲ下ス,

AB ノ上ノ正方形ハ BD, AD ノ上ノ正方形ノ和ヨリ少キヿ BD,DE ノ矩形ノ二倍ナリ, AC ノ上ノ正方形ハ CD,AD ノ上ノ正方形ノ和ヨリ多キヿ CD,DE ノ矩形ノ二倍ナリ

夫故 AB,AC ノ上ノ正方形ノ和ハ BD,AD ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ

本題ノ解ハ次ノ如シ

ABC ヲ一ツノ三角形トス BC ヲ D ニテ二等分シ AD ヲ結ブ, AB,AC ノ上ノ正方形ノ和ハ BD,AD ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ



然ルニ AB,AC ノ上ノ正方形ノ和ハ一定量ナリ而シ BD (即$\frac{1}{2}$BC) ノ上ノ正方形モ亦一定量ナリ從テ AD ノ上ノ正方形モ亦一定量ナラザルヲ得ズ即其ノ長サハ一定量ナリ

夫故所求ノ軌跡ハ D ヲ中心トスル圓周ナリ

AB,AC ノ上ノ正方形ノ和ガ BC ノ半分ノ上ノ正方形ヨリ大ナラザルトキハ所求ノ軌跡ヲ得ル能ハズ

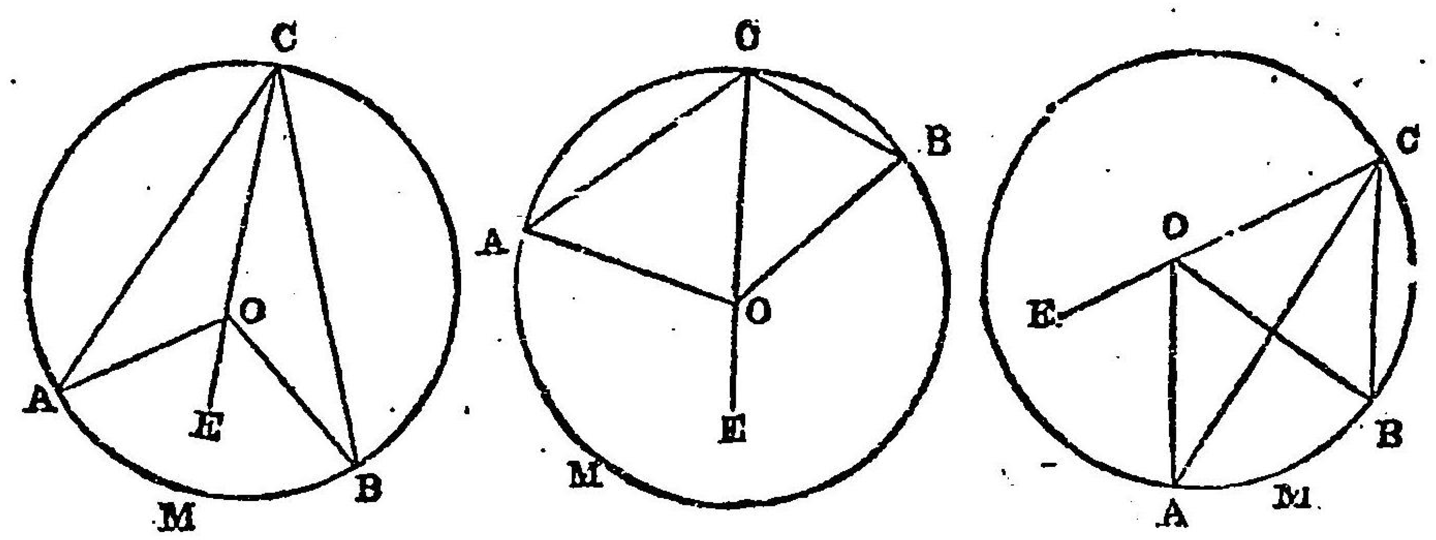
6. 圓ノ中心角ハ同シ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ二倍ナルヿヲ

證セ(III.20)

註　本題ノ證明ハ次ノ如シ

圓周ヲABCトシOヲ其ノ中心トス圓周上ニ任意ニ弧ヲ取リ他ノ弧ノ上ニ任意ニC点ヲ設ケOA,OB及AC,BCヲ結ブ又CヨリOヲ通リ直線COEヲ引ク

第一圖　第二圖　第三圖



△OCA,△OCBハ二等邊三角形ナリ故ニ∠AOE=2∠ACO, ∠BOE=2∠BCO之ニ由テ

第一第二圖ノ塲合ハ

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOE + \angle BOE\\ &= 2\angle ACO + 2\angle BCO\\ &= 2(\angle ACO + \angle BCO)\\ &= 2\angle ACB\end{aligned}$$

第三圖ノ塲合ハ

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle BOE - \angle AOE\\ &= 2\angle BCO - 2\angle ACO\\ &= 2(\angle BCO - \angle ACO)\\ &= 2\angle ACB\end{aligned}$$

備考　此ノ證明ニ於テユークリッドハ二條ノ大切ナル假定ヲナセリ

若シmハxノ二倍nハyノ二倍ナルトキハ

第一　m,nノ和ハx,yノ和ノ二倍ナリ

第二　m,nノ差ハx,yノ差ノ二倍ナリ

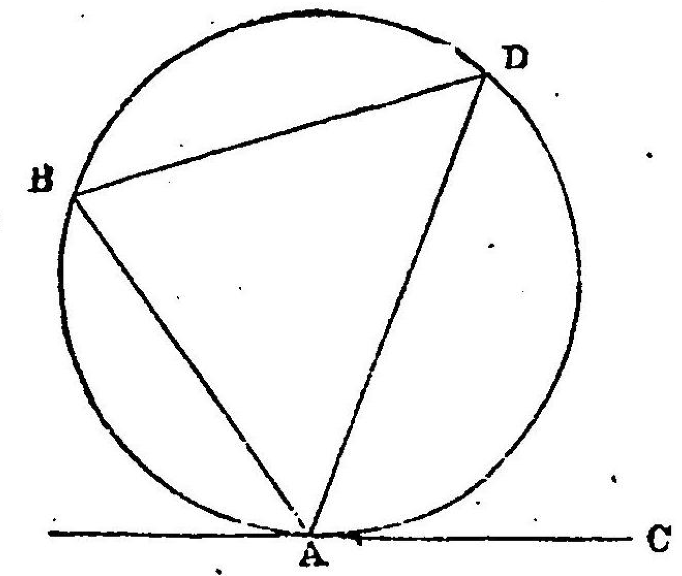
ト云フヿ是ナリ

此ノ事實ハ第五卷ニ至ルマデ証明セラレズ

註　(V.12)ハ"若干ノ比若シ互ニ等シケレバ其各ハ各前項ノ和ト後項ノ和トノ比ニ等シ"

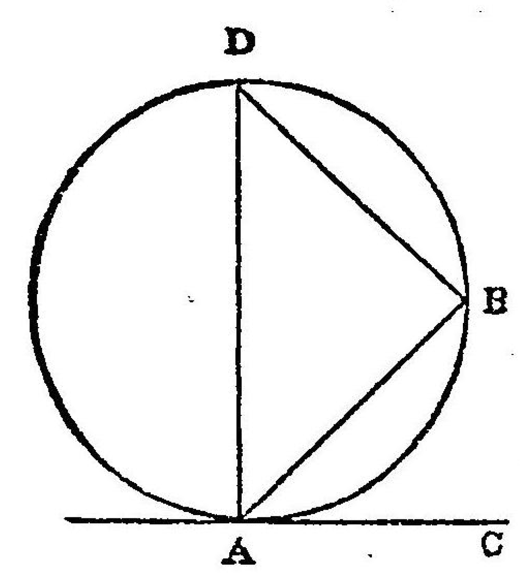
7. ABハ任意ノ弧ニシテACハAニ於ケル切線ナルトキハ∠BACヲ二等分スル直線ハ孤ヲモ二等分ス

ABDヲ一ツノ圓トシADヲ角BACヲ二等分スル線ニシテ圓周トDニ交ルモノトスBDヲ結ブ



然ルトキハ∠CAD=∠ABD(III.32)然ルニ∠CAD=∠BAD故ニ∠ABD=∠BAD故ニ此ノ二角ノ立ツ所ノ弧AD,BDハ相等シ

註　(III.32)圓ニ切スル直線ヲ引キ其ノ切点ヨリ弦ヲ引クトキハ切線ト弦トニテ作ル角ハ隣弓形ニ於ケル角ニ等シ



圓周ヲABD,切線ヲAC,弦ヲABトス直徑ADヲ作リBDヲ結ブ

ADハ直徑ナルガ故ニ∠ABDハ直角ナリ又∠CADモ直角ナリ(圓ノ直徑ハ其ノ端ニ於ケル切線ト直角ヲナストテ云フ定理アリ)

然ルトキハ∠ADB,∠BACハ各∠BADノ餘

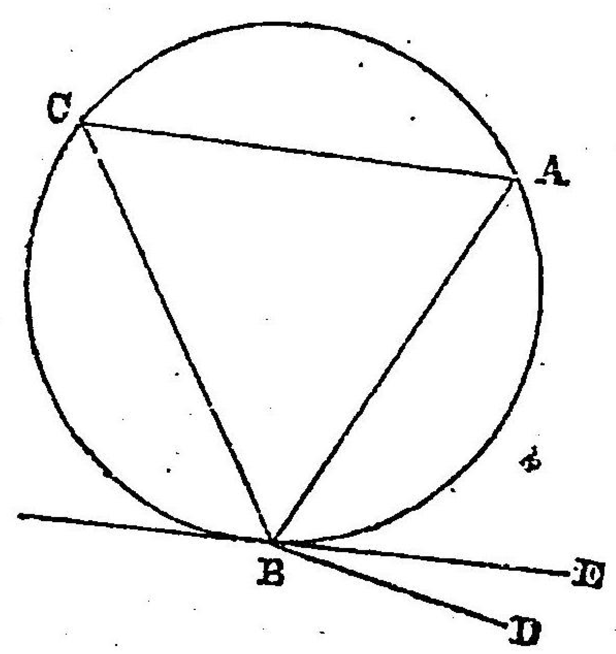
角ナルベシ之ニ由テ $\angle BAC=\angle ADB$

備考 (III.32)ノ逆ヲ記サン

一直線ガ圓ト會セル片其ノ會点ヨリ弦ヲ引キ直線ト弦トノ夾ム角ガ隣弓形ニ含マルヽ角ト等シキ片ハ其ノ直線ハ切線ナリ

ABC ヲ一ツノ圓トシ DB ヲ之ニ會スル直線トシ BA ヲ弦トス角 DBA ガ隣ノ弓形 ACB ニ含マルヽ角ニ等シキ片ハ DB ハ切線ナリ

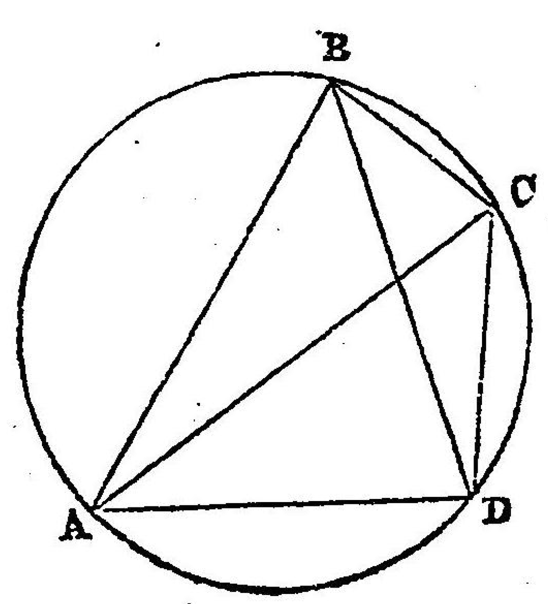
若シ然ラズバ B ヨリ切線 BE ヲ引カン然ル片ハ(III.32ニ依テ $\angle ABE$ ハ弓形 BCA 内ノ角ニ等シ,サレバ $\angle EBA$ ハ $\angle DBA$ ニ等シカラザルベカラズ是不合宜ナリ之ニ由テ DB ハ圓ニ切ス



8. 圓ニ内切セル四邊形ノ相對スル角ノ和ハ二直角ニ等シキヿヲ證明セヨ(III.22)

註 本題ノ證明ハ次ノ如シ

ABCD ヲ圓 ABCD ニ内切スル四邊形トス



AC,BD ヲ結ブ

$\angle BAD+\angle ABD+\angle ADB=$二直角

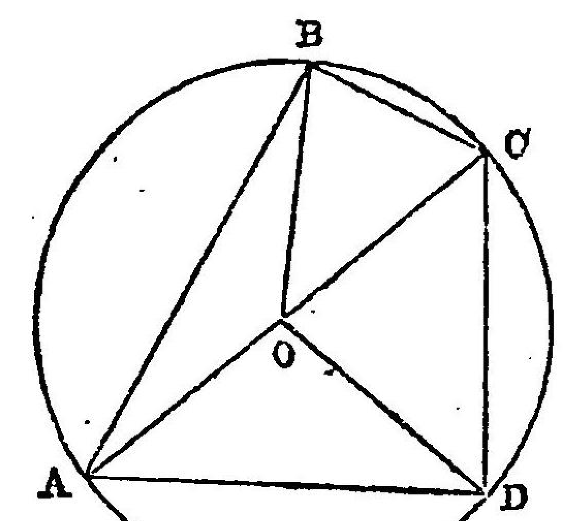
然ルニ

$\angle ABD+\angle ADB=\angle ACD+\angle ACB$

$=\angle BCD$

$\therefore\ \angle BAD+\angle BCD=$二直角

別證



圓ノ中心ヲ O トシ OA, OB, OC, OD ヲ結ブ四ツノ三角形 AOB, BOC, COD, DOA ハ各二等邊三角形ナリ

由テ $\angle OAB=\angle OBA$

$\angle OAD=\angle ODA$

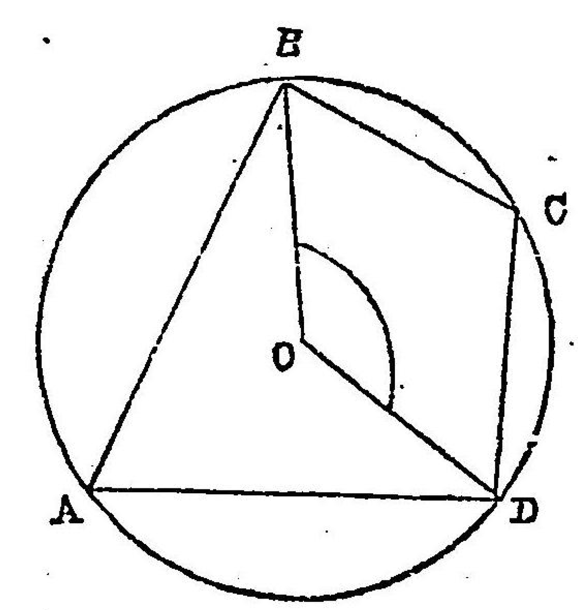
$\therefore\ \angle BAD=\angle OBA+\angle ODA$

同樣ニ $\angle BCD=\angle OBC+\angle ODC$

之ニ由テ $\angle BAD+\angle BCD=\angle ABC+\angle ADC$

夫故各ノ和ハ二直角ニ等シ

別證



OB,OD ヲ結ブ $\angle BOD$ ハ(弧ヲ以テ示スモノ)劣角ト假定ス

然ル片ハ

$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$ 劣角

$\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD$ 優角

之ニ由テ $\angle BAD+\angle BCD=\frac{1}{2}$(劣角 BOD＋優角 BOD)

然ルニ 劣角 BOD＋優角 BOD＝四直角

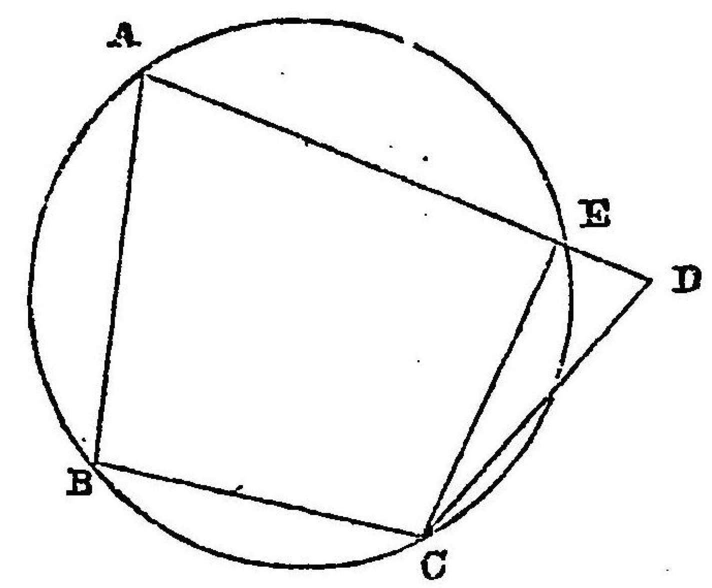
夫故 $\angle BAD+\angle BCD=\frac{1}{2}$(四直角)

＝二直角

備考 此ノ逆ハ甚大切ナルモノニシテ既ニ 3 ノ備考中ニ記シタリ即四邊形ノ對角ガ互ニ補角(合セテ二直角ヲナス)ナル片ハ之ニ外切スル圓ヲ畫クヿヲ得

ABCD ヲ一ツノ四邊形トシ A,B,C ヲ通ル圓ヲ畫ク此ノ圓ハ D ヲ通ルベシ若シ然ラズバ AD 或ハ其ノ延長部ト E ニ交ルナ

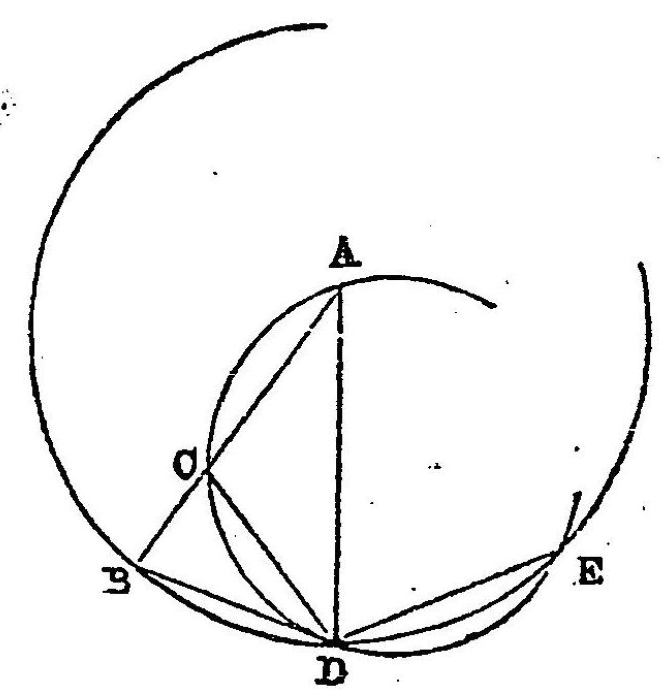
ラン CE ヲ結ブ



然ルトキハ $\angle ABC+\angle AEC=$ 二直角
然ルニ　$\angle ABC+\angle ADC=$ 二直角
之ニ由テ　$\angle AEC=\angle ADC$
之レ不應有ノコトナリ
夫故圓周 ABC ハ D ヲ通ル
即四邊形 ABCD ニ外切圓ヲ畫クヲ得

9. 底角ノ各ガ頂角ノ二倍ナル二等邊三角形ヲ畫ケ (IV. 10)

註　本題ノ作圖ハ次ノ如シ



任意ノ直線 AB ヲ取リ之ヲ C ニテ二分シ $AB,BC=AC^2$ トナラシメ A ヲ中心トシ AB ヲ半徑トシテ圓 BDE ヲ畫キ AC ニ等シキ弦 BD ヲ作リ AD ヲ結ブ

然ルトキハ BAD ハ所求ノ二等邊三角形ナルベシ

CD ヲ結ビ圓周 ACD ヲ畫ク然ルトキハ

$$AB.BC=AC^2$$

而シテ　$AC=BD$

∴　$AB.BC=BD^2$

之ニ由テ BD ハ圓周 ACD ニ切ス然レバ

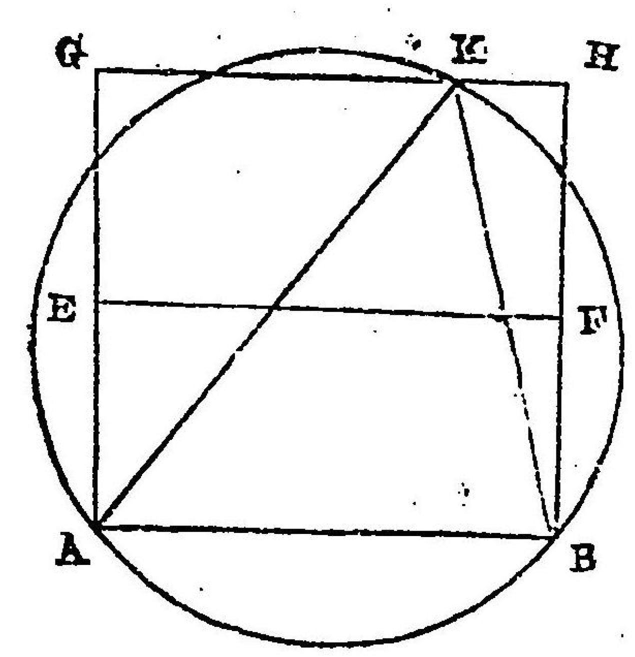
$$\angle BDC=\angle BAD$$

由テ　$\angle BDC+\angle ADC=\angle BAD+\angle ADC$
即　$\angle ADB=\angle BCD$
然ルニ　$\angle ADB=\angle ABD$
∴　$\angle ABD=\angle BCD$
由テ　$BD=CD$
從テ　$AC=CD$
∴　$\angle BAD=\angle ADC$

之ニ由テ二等邊三角形 BAD ノ底角 ADB ハ頂角 A ノ二倍ナリ

備考　此ノ三角形ノ頂角ハ二直角ノ五分ノ一ニ等シキガ故ニ之ヲ二等分スルコトニ由テ直角ヲ五等分スルコトヲ得

10. 底邊,面積,頂角ヲ題セリ以テ三角形ヲ畫ケ



AB ヲ底トシ C ヲ面積トシ D ヲ角トス

AB 上ニ C ニ等シキ矩形 AEFB ヲ畫キ AE ヲ延長シ EG=AE ナラシメ G ヨリ AB ニ平行ニ GH ヲ引キ BF ノ延長ト H ニ會セシム AB 上ニ D ニ等シキ角ヲ含ムベキ弓形ヲ畫ク此弓形ハ通常 GH ト二點ニテ交ル K ヲ其ノ點ノ一ツトス AK,BK ヲ結ブ AKB ハ所要ノ三角形ナリ

何トナラバ底ハ AB ナリ,面積ハ $\frac{1}{2}AGHB=AEFB=C$ ナリ

通常本問ニ應ズル四個ノ三角形アリ AB ノ兩傍ニ二ツ宛アリ弓形ガ GH ニ切スル場合ニ於テハ一ツ宛ナリ交リモセズ切シモセザルトキハ所要ノ三角形ハ成立セズ

千八百八拾四年一月

試驗官　ジヨンホプキン氏
　　　　ベンジヤミンウィルヤムソン氏

算術及代數

1. 42.36068 ヲ .0236068 ニテ乘ジ小數第六位マテ正シク算出セヨ

又一ふーとガーめーとるノ .3048 ナラバ八きろめーとるハ殆ンド五まゐるナルコヲ證明セヨ

(a) 普通ノ運算ニテ 1.000000 ナル答ヲ得

乘數ノ何レノ數字ヨリ始ムルモ各乘積ノ數字ヲ其ノ適當ノ位置ダニ置カバ毫モ不都合ナキヲ以テ左ノ數字ヨリ始メ大ニ手數ヲ省クコヲ得ルコ次ノ如シ

```
  42.36068
 .0236068
 8472136
 1270820.
  254164. .
    2541. . . .
     338. . . . .
 .9999999=1 殆
```

茲ノ2ハ $\frac{2}{100}$ ナリ夫故2ヲ乘ジテ小數点ヲ二位右ニ移ス次ニ3ヲ乘ズルトキハ前ヨリ一位右ニ下リタル處ヨリ始ム逐テ之ニ倣フ

備考　$\sqrt{5}=2.236068$

$\therefore$　$10\sqrt{5}=22.36068$

由テ　$42.36068=20+10\sqrt{5}$

$=10(\sqrt{5}+2)$

又　$.0236068=(\sqrt{5}-2)\div10$

今　$10(\sqrt{5}+2)\times(\sqrt{5}-2)\div10=5-4$

$=1$

注意　$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{5}$ ノ値ハ常ニ必要ナルモノナルガ故ニ諳記シ置クベシ

$$\begin{cases}\sqrt{2}=1.41421356\\ \sqrt{3}=1.7320508\\ \sqrt{5}=2.236068\end{cases}$$

註　1やーど　$=3$　ふーと

1まゐる　$=1760$　やーど

1きろめーとる　$=1000$　めーとる

(b)　1ふーと$=.3048$めーとる

$\therefore$　1やーど$=.9144$めーとる

而シ　5まゐる$=.9144\times1760\times5$

$=8046.72$めーとる

$=8.04672$きろめーとる

或ハ　.3048めーとる$=1$ふーと

即　.0003048きろめーとる$=1$ふーと

夫故　8きろめーとる$=\frac{8}{.0003048}$ふーと

$=\frac{80000000}{3048}$ふーと

$=\frac{80000000}{3048\times5280}$まゐる

$=4.9$ まゐる

2. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ ヲ小數第六位マデ算出セヨ

$$\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}=\frac{2.645751}{7}$$

$$=.377964$$

備考　分數ノ分母ガ無根數ナルトキハ必ス之ヲ除去スベシ之ヲ分母ヲ有限數ニナスト云フ

若シ分母ガ本題ノ如ク單一ナル平方根ナルトキハ其ノ無根數ヲ分母子ニ乘スベシ

例ヘバ　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　$\sqrt{3}$ ヲ乘ズ

若シ又分母ガ二數ノ(1)和或ハ(2)差（二數トモ無根數ナルトキモ一數ノミ無根數ナルトキモ）ヨリナルトキハ其ノ二數ノ(1)差或ハ(2)和ヲ母分子ニ乘スベシ即$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ノ施術ヲナスベシ

例ヘバ　$\dfrac{3}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{3(\sqrt{5}-2)}{5-4}$

此ハ容易ニ小數トナスベシ

又　$\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{8+4\sqrt{5}}{5-1}=2+\sqrt{5}$

分母ノ兩數ガ無根數ナルモ方法ハ變ルヿナシ

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}-3+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$$

分母ノ無根數ヲ除去スルトキハ運算ノ簡短ナルノミナラズ精密ノ度ニ於テモ利益アリ

此ノ外有限數ニナシ得ル處ノ無根數分母ノ數多ノ例アレドモ其等ハ餘リ繁密ナルモノコソ本書ニハ揭クル能ハス

3. 千三百二拾五ぽんどヲ年單利四分ニテ借リ二ヶ年間ニ濟還セントス何圓ツヽ拂フベシヤ

x ヲ初年ノ終リニ返スベキ元金トス，$1325-x$ ハ次年ノ終リニ返スベキ元金ナリ

サテ初年ニハ利金$\dfrac{4}{100}x$ヲ拂フベク次年ニハ $\dfrac{8}{100}(1325-x)$ ヲ拂フベシ由テ

$$x+\frac{4}{100}x=(1325-x)+\frac{8}{100}(1325-x)$$

夫ヨリ　$x=675$

是ニ由テ初年ノ終ニ拂フベキ總金ハ

$$£675+£675\times\frac{4}{100}=£702$$

$$£650+£650\times\frac{8}{100}=£702$$

4. 四百四拾二ぽんど拾五しりんノ手形現價三百八拾五ぽんどナリ，有効年數如何但シ年單利四分二分ノ一ナリ

本問ハ（三百八拾五ぽんどハ年單利四分二分ノ一ニテ幾年間ニ四百四拾二ぽんど拾五しりんトナルヤ）ト云フニ同シ

今 £385 ノ年利 $4\frac{1}{2}$ 分ニテ一ヶ年間ノ利子ハ

$$£385\times\frac{4\frac{1}{2}}{100}=£17\ 6s\ 6d$$

單比例ニ由テ　　　　　　　　　　　　　　答

£17 6s 6d : £57 15s : : 1年 : $3\frac{1}{3}$年……

備考　單利法ノ諸術ハ規則ニテモアルカノ如ク誰モ粗畧ニ學ビ置クガ如シ依テ余ハ茲ニ其ノ大畧ヲ述ブルノ必要ナルヿヲ感ズ

利息計算ニ於テ考フベキモノ四件アリ元金,利割,時間,利息(又ハ總金)是ナリ此ノ内三件ヲ知ルトキハ他ノ一件ヲ知ルヿヲ得今順ヲ追フテ說カン

第一　元金,時間,利割ヲ知リテ利息ヲ求ムルヿ

規則　元金ニ年數ヲ乘シ其積ニ利割ヲ乘ズベシ

コレハ誰モ能ク知ルヿニテ說明ニモ及ブマジ

注意　總金ヲ知ラント欲スルトキハ元金ト利息トヲ加フベシ

第二　元金,時間,利息ヲ知リテ利割ヲ求ムルヿ

規則　利息ヲ年數ニテ除シ一ヶ年ノ利息ヲ得然ル後ハ單比例ニテ算出スベシ

元金 : £100 : : 一ヶ間ノ利息 : 利割

例　何程ノ利割ニテ三ヶ年間ニ六百二拾五ぽんど拾二しりん六ぺんすノ利息ガ六拾二ぽんど拾一しりん三ぺんすナルヤ

$\pounds 62\ 11s\ 3d \div 3 = \pounds 20\ 17s\ 1d$ 一ヶ年ノ利息

此ノ後ノ問題ハ"£625 12s 6d ノ利息ガ £20 17s 1d ナルトキハ £100 ノ利息ハ如何"ト云フニアリ

此ハ上ノ規則ニ由テ解スルヿヲ得

$$\pounds 625\ 12s\ 6d : \pounds 100 :: \pounds 20\ 17s\ 1d : x$$

$$\pounds 625\ 12s\ 6d = 150150d$$

$$\pounds 20\ \ 17s\ 1d = 5005d$$

$$x = \frac{5005 \times 100}{150150} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}\text{分}$$

此ノ場合ニ於テ第一項及第三項ヲ同一單位ノ數トナス(本問ニテハぺんすノ數ニナセリ)ヲ利益アリトス而ソ第二項ハ動カスベカラズソハ常ニ £100 ナリ

注意　利息ノ代リニ總金ヲ知レルトキハ先ツ其ノ中ヨリ元金ヲ減ジテ利息ヲ出シ然ル後前ノ如クスベシ

第三　元金利割及利息ヲ知リテ時間ヲ求ムルヿ

規則　元金ト利割トヲ以テ一ヶ年間ノ利息ヲ出シ然ル後ハ單比例ニテ算出スベシ

一ヶ年間ノ利息 : 所題ノ利息 : : 一ヶ年 : x

例　何年間ニテ九百四拾七ぽんど五しりんハ年利五分ニテ百十八ぽんど八しりん一ぺんそ二分ノ一ノ利息ヲ生ズヤ

5分ニテ £947 5s ノ一ヶ年間ノ利息ハ

$$\pounds 947\ 5s \times \frac{5}{100} = \pounds 47\ 7s\ 3d$$

此ノ後ノ問題ハ"一ヶ年間ニ £47 7s 3d ノ利息ヲ生スル元金ハ何年間ニ £118 8s $1\frac{1}{2}d$ ヲ生ズヤ"ト云フニアリ

規則ニ依テ

$$\pounds 47\ 7s\ 3d : \pounds 118\ 8s\ 1\tfrac{1}{2}d :: 1\text{年} : x\text{年}$$

$$\pounds 47\ \ 7s\ \ 3d = 11367d$$

$$\pounds 118\ \ 8s\ \ 1\tfrac{1}{2}d = 28417.5d$$

$$284175 \div 11367 = 2\tfrac{1}{2}$$ 二年半

注意　利息ノ代リニ總金ヲ知レルトキハ先ツ之ヨリ元金ヲ減ジテ利息ヲ求メ後前ノ如クスベシ

第四　利割,時間,及利息(又ハ總金)ヲ知リテ元金ヲ求ムルヿ

規則　既知ノ利割ヲ以テ已知年數間ニ於ケル £100 ノ利息(又ハ總金)ヲ出シ然ル後ハ單比例ニテ算出スベシ

算出セル利息(又ハ總金)ニ所題ノ利息(又ハ總金)::

$$\pounds 100 : x$$

例 1　何程ノ元金ハ三分八分ノ一ニテ四ケ年ニ六拾三ぽんど三しりん四ぺんす四分ノ一ノ利息ヲ生ズヤ

$$\pounds 100 \text{ ノ利息} = 3\tfrac{1}{8} \times 4 = 12\tfrac{1}{2}$$

今問題ハ "£100 ハ £$12\frac{1}{2}$ ノ利息ヲ生ス何程ノ元金ガ £63 $3s$ $4\frac{1}{2}d$ ノ利息ヲ生ズヤ" トナレリ

規則ニ從ヒ

$$\pounds 12\tfrac{1}{2} : \pounds 63\ 3s\ 4\tfrac{1}{4}d :: \pounds 100 : x$$

$$\frac{\pounds 63\ 3s\ 4\frac{1}{4}d \times 100}{12\frac{1}{2}} = \pounds 505\ 6s\ 10d \qquad \text{答}$$

例 2　三分八分ノ一ニテ四ケ年間ニ五百六拾八ぽんど拾しりん二ぺんす四分ノ一トナルベキ元金ヲ問フ

玆ニ £568 $10s$ $2\frac{1}{2}d$ ハ總金ナリ故ニ處置ヲ變スベシ

$$\pounds 100 \text{ ノ利息} = 3\tfrac{1}{8} \times 4 = 12\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \pounds 100 \text{ ノ總金} = \pounds 112\tfrac{1}{2}$$

$$\pounds 112\tfrac{1}{2} : \pounds 568\ 10s\ 2\tfrac{1}{4}d :: \pounds 100 : x$$

$$\frac{\pounds 568\ 10s\ 2\frac{1}{4}d \times 100}{112\frac{1}{2}} = \pounds 505\ 6s\ 10d \qquad \text{答}$$

眞割引ハ唯第四ノ場合ノミニ限レリ何トナラハ某利割ニテ若干年後ニ達スベキ總金ノ現價ヲ求ムルコハ同一ノ利割ニテ同一年間ニ同一ノ總金ニ達スベキ元金ヲ求ムルト異ナルコナケレバナリ

5.　英貨二拾ぽんどヲ一そべれーんニ付二拾五奇零二ふらんノ割合ニテ佛貨ト易ヘ此佛貨ヲ二拾ふらんニ付拾五しりん九ぺんすノ割合ニ再ヒ英貨ニ易フルトキハ損益如何

$$\pounds 20 \text{ ノ價} = 25.2 \times 20 = 504 \text{ ふらん}$$

$$\text{今} \qquad 20 \text{ ふらん} = 15s\ 9d = 189d$$

$$\text{故ニ} \qquad 1 \text{ ふらん} = \frac{189d}{20}$$

$$\text{而シ} \qquad 504 \text{ ふらん} = \frac{189 \times 504}{20} d$$

$$= 4762\tfrac{4}{5}d$$

$$= \pounds 19\ 16s\ 10\tfrac{4}{5}d$$

夫故　$3s$ $1\frac{1}{5}d$ ノ損ナリ

註　金貨一ぽんどヲ一そべれーんト云フ

備考　交易ノ猶一層復雜ナルモノハ連鎖法ニテ解クベシ近頃ノ算術書ノ著者ハ此ノ法ヲ殆無用視スルカノ如ク見ユレ𪜈此ノ法ハ比例ノ理ニ基ケルモノニテ實用ニ便利ニシテ此ノ法ニ依ラザルトキハ甚煩勞ナル施術ヲ要スベキ復雜ナル問題ヲモ此ノ法ニテハ容易ニ解クコヲ得次ニ簡單ナル例ヲ擧ケテ此ヲ說カン

例　二個ノ梨ハ三個ノ桃ニ等シク二拾五個ノ桃ハ四個ノ林檎ニ等シク拾五個ノ林檎ハ六個ノれもんニ等シク三個ノれもんハ拾四個ノ蕪菁ニ等シク百個ノ蕪菁ハ二ぶつしえるノ馬鈴薯ニ等シ若シ馬鈴薯一がろんノ價ヲ二ぺんすトセハ五百個ノ梨ノ價如何

所求ノぺんすノ數=500 梨

2 梨 $=3$ 桃
25 桃 $=4$ 林檎
15 林檎 $=6$ れもん
3 れもん $=14$ 蕪菁
100 蕪菁 $=16$ がろん馬鈴薯
1 がろん馬鈴薯 $=2$ ぺんす

第一ニ所求ノ數或ハ x ト記スベシ第二ニ此ノ未知數ニ相等スル梨ノ數ヲ記スベシ然ル後問題ノ文中梨ニ關係スルモノヲ求メ第二列ニ(2梨=3桃)ト記スベシ次ニ桃ニ關スルモノヲ求メ第三列ニ(25桃=4林檎)ト記スベシ追ヒテ斯ノ如クシテ凡テノ關係ヲカキ盡スベシ然ルトキハ最初ト最終ト同種ノ數量ヲ以テ終ルモノナリ所求ノ數ハ右行ノ數ノ連乘積ヲ左行ノ數ノ連乘積ニテ除シタルモノナリ故ニ右行ノ數ヲ分子トシ左行ノ數ヲ分母トメ對約スベシ

$$x=\frac{500\times3\times4\times6\times14\times16\times2}{2\times25\times15\times3\times100}$$
$$=71\frac{17}{25}d$$
$$=5s\ 11\frac{17}{25}d$$

註 1 ぶつしえる=8がろん

此ノ理ハ下ノ記載ニ由テ明瞭ナリ

所求ノぺんす

=500個ノ梨

=500個ノ $\frac{3}{2}$ ノ桃

$=\left(500\text{個}ノ\frac{3}{2}\right)ノ\frac{4}{25}$ ノ林檎

$=\left(500\text{個}ノ\frac{3}{2}ノ\frac{4}{25}\right)ノ\frac{6}{15}$ ノれもん

$=\left(500\text{個}ノ\frac{3}{2}ノ\frac{4}{25}ノ\frac{6}{15}\right)ノ\frac{14}{3}$ ノ蕪菁

$=\left(500\text{個}ノ\frac{3}{2}ノ\frac{4}{25}ノ\frac{6}{15}ノ\frac{14}{3}\right)ノ\frac{16}{100}$ がろんノ馬鈴薯

$=\left(500\text{個}ノ\frac{3}{2}ノ\frac{4}{25}ノ\frac{6}{15}ノ\frac{14}{3}ノ\frac{16}{100}\right)$ ノ2倍ノぺんす

6. 次ノ二式ノ乘積ニ於ケル x^4 ノ係數ヲ見出セ

$$1-2x+4x^2-8x^3+16x^4$$
$$1+2x+4x^2+8x^3+16x^4$$

且ツ $1-2x+4x^2$ ニテ 1 ヲ除シ x^4 ニ至ル迄ノ商ヲ算出セヨ

(a) 所求ノ係數ハ次ノ係數ノ和ナリ

$1\times16x^4$	$8x^3\times-2x$
$2x\times-8x^3$	$16x\times1$
$4x^2\times4x^2$	

即 $16-16+16-16+16=16$ 答

(b)
$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-2x+4x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1-2x+4x^2} & 1+2x-8x^3-16x^4 \cdots\cdots \text{答} \\
\quad 2x-4x^2 & \\
\quad \underline{2x-4x^2+8x^3} & \\
\qquad\qquad -8x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{-8x^3+16x^4-32x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad -16x^4+32x^5 &
\end{array}$$

$$\frac{-16x^4+32x^5-64x^6}{64x^6}$$

7. 材木アリ長拾六ひーと幅二ひーと二分ノ一厚八いんちニシテ重千二百八拾ぽんどナリ同質ノ材木幅三ひーと四分ノ一厚六いんち二分ノ一ノ重二千二拾八ぽんどノモノアリ長ヲ問フ

通常ノ復比例ニテ

$$\left\{\begin{array}{ll} 3\tfrac{1}{4} & : 2\tfrac{1}{2} \\ 6\tfrac{1}{2} & : 8 \qquad :: \quad 16 : x \\ 1280 & : 2028 \end{array}\right.$$

$$x=\frac{16\times2\tfrac{1}{2}\times8\times2028}{3\tfrac{1}{4}\times6\tfrac{1}{2}\times1280}$$

$$=\frac{16\times5\times8\times2028\times4\times2}{2\times13\times13\times1280}=24$$

備考　復比例ニテ解セラルヽ通常ノ問題ハ"因果法"トイフモノニ由テ一層容易ニ解セラル此ノ法ノ由テ起ル原理ハ蓋シ相似ナル二個ノ原因ガ或ル結果ヲ生シタルトキハ第一ノ結果ト第二ノ結果トノ關係ハ第一ノ原因ト第二ノ原因トノ關係ノ如クアリト云フニアリ是ニ由テ比例ノ理ニ依テ

第一原因×第二結果＝第二原因×第一結果

本題ニ於テハ材木ガ16ひーとノ長$2\frac{1}{2}$ひーとノ幅及8いんちノ厚ニ切ラレタルニヨリ其ノ結果トシ1280ぽんどノ目方アリ又他ノ材木ハ若干ノ長$3\frac{1}{4}$ひーとノ幅及$6\frac{1}{2}$いんちノ厚ニ切ラレタルニヨリ其ノ結果トシ2028ぽんどノ目方アリ

原因	結果
$16\times2\frac{1}{2}\times8$	2028
$x\times3\frac{1}{4}\times6\frac{1}{2}$	1280

然ルトキハ $x\times3\frac{1}{4}\times6\frac{1}{2}\times1280=16\times2\frac{1}{2}\times8\times2028$ ナルヿ明ナリ

故ニ　$x=\dfrac{16\times2\frac{1}{2}\times8\times2028}{3\frac{1}{4}\times6\frac{1}{2}\times1280}$ 是前ト仝シモノナリ

此ノ法ノ利益ハ"結果ハ何ナリヤ"トノ問ヲ考フレバ足ルヿナリ他ノ法ニテハ式ノ各種ニ答フベキ各種ノ問ヲ考フルヲ要ス

注意　尚後ノ1885年6月ノ10ヲ參照セヨ

8. 一ヨリ百万マデノ整數ノ和如何

此ハ $a=1$, $l=1000000$ 及 $n=1000000$ ナル等差級數ノ s ヲ求ムル問題ナリ

今 $(a+l)\times\frac{n}{2}$

$=(1+1000000)\times500000$

$=500000500000$

9. 次ノ方程式ヲ解ケ

I　$\frac{x-1}{4}-\frac{19-2x}{5}+\frac{x-5}{6}-\frac{3}{10}(x+3)=3$

II　$\left\{\begin{array}{l}\frac{2x}{3}-\frac{3y}{4}=2\\[4pt] \frac{5x}{6}-\frac{7y}{8}=4\end{array}\right.$

(1)　60ヲ乘スルトキハ

$$15x-15-228+24x+10x-50-18x-54=180$$
$$31x=527$$
$$x=17$$

備考　一次方程式ハ一根ヨリ多クヲ有セザルヿヲ証セヨ

一次方程式ハ其ノ未知量ヲ方程式ノ一方ニ既知量ヲ他ノ一方ニ集ムルヿニ由テ次ノ形トナスヿヲ得

$$mx=n$$

今此ノ方程式ニ二根 a 及 b アルヿヲ得ントセン

然ルトキハ $ma=n$ 又 $mb-n$

之ヲ減シテ $m(a-b)=o$

即チ $m=o$ ナルカ $a-b=o$ ナルカナリサレド何レニシテモ仮定ニ反セリ

故ニ一根ヨリ多クヲ有スルヿナシ.

(II)　第一式ヲ 12 ニテ,第二式ヲ 24 ニテ乗シ

$$8x-9y=24 \cdots\cdots(1)$$
$$20x-21y=96 \cdots\cdots(2)$$

即

$$40x-45y=120$$
$$40x-42y=192 \cdots\cdots(3)$$
$$-3y=-72$$
$$y=24$$

(I)ヨリ　$8x-216=24$

$$x=30$$

備考　茲ニ交代法トイフヲ記サン此ノ法モ要用ナル一法ナリ

第一式ヨリ　$8x=24+9y$

夫ヨリ　$40x=120+45y$

此ノ價ヲ(3)式中 $40x$ ノ代ニ置クトキハ

$$120+45y-42y=192$$

由テ　$y=24$

然ルトキハ　$x=30$

10. Aハろんどんヨリらぐびーニ向テ,Bハらぐびーヨリろんどんニ向テ同時ニ出立セリ両都ノ距離ハ八百四拾二まゐるナリ両人途中ニテ邂逅セシ後Aハ九時間ニテらぐびーニ着シBハ拾六時間ニテろんどんニ着セリ各ガ旅行セシ時間及速度ノ割合ヲ問フ但速度ハ始終同様ナリトス

x ヲ両人ノ邂逅マデニ費セシ時間数トシ y ヲAノ一時間ノ歩速ヲ表ハスまゐるノ数トシ z ヲBノ一時間ノ歩速ヲ表ハスまゐるノ数トス

Aノ旅行時間 $=x+9$　$\therefore$　$(x+9)y=842 \cdots\cdots(1)$

B　〃　$=x+16$　$\therefore$　$(x+16)z=842 \cdots\cdots(2)$

又AハBガ x 時間ニテ旅行セシ處ヲ 9 時間ニテ旅行セシガ故ニ $xz=9y$

BハAガ x 時間ニテ旅行セシ處ヲ 16 時間ニテ旅行セシガ故ニ　$xy=16z$

由テ　$x^2yz=144yz$

夫ヨリ　$x^2=144$　$\therefore$　$x=12$

(1)ヨリ　$21y=842$　$\therefore$　$y=40\frac{2}{21}$

(2)ヨリ　$28z=842$　$\therefore$　$z=30\frac{1}{14}$

而シテAノ旅行時間 $=x+9=12+9=21$

　　B　　”　　$=x+16=12+16=28$

備考　此ノ問題ハヨクアル列車通過ノ問題ヲ憶ヒ起サシム暫ク之カ爲ニ一考セン

1. 平行セル軌道ニ於テ後ヨリ來タル速キ滊車ガ前ナル遲キ滊車ニ追ヒ付キテヨリ之ヲ超ユルマデニ速キ滊車ヨリ多ク進ム距離ハ兩滊車ノ長ノ和ニ等シ

2. 平行ナル軌道ニ於テ兩滊車ガ相遇ヒテ通リ過クルマデ兩滊車ニテ進ム距離ハ兩滊車ノ長ノ和ニ等シ

例1. 毎時四拾一まゐるヲ走ル所ノ長四百三拾一ひーとノ通常車アリ平行軌道ニアル貨車ニ追ヒ付ケリ貨車ハ長七百拾三ひーとニテ毎時二拾八まゐるヲ走ル問フ甲車ハ何時間ニテ乙車ヲ超スヤ

通常車ハ毎時13(41−28)まゐるヅヽ貨車ニ近寄ルガ故ニ何時間ニテ1144(431+713)ひーとヲ追ヒ付クカヲ求ムレバ可ナリ

單比例ニ依テ其ノ時間ハ精密ニ1分間ナルコトヲ知ル

註　1まゐる=5280ふーと

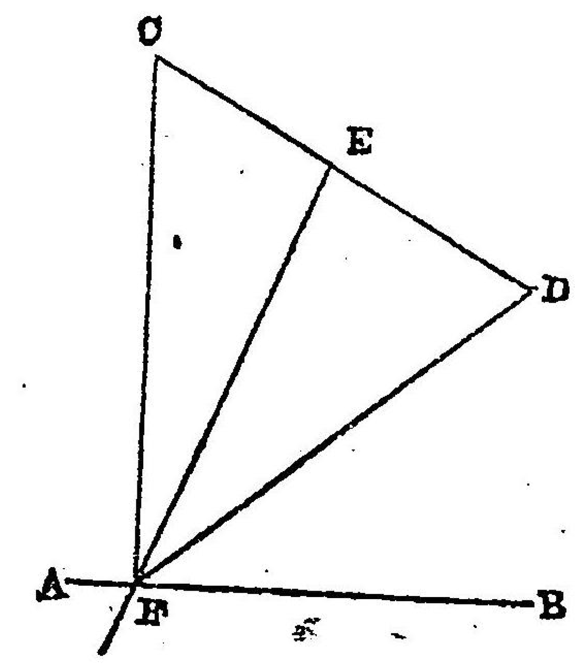
例2. 前ニ於テ兩車ハ平行ナル軌道ニ於テ相逢ヘリトセバ何時間ニテ通リ過クヤ

茲ニ兩車ニテ一時間ニ進ム距離ハ69まゐるナルガ故ニ何時間ニテ1144ひーとヲ進ムカヲ考フレバ可ナリ此ノ時間ハ$11\frac{7}{23}$秒ナルコトハ容易ニ算出セラルベシ

幾何

1. 一定直線中ニ二定点ヨリ等距離ナル点ヲ見出セ

ABヲ定直線トシC,Dヲ定点トス,C,Dヲ結ビEニテ二等分シCDニ直角ニEFヲ引キABトFニ交ラシム然ルトキハFハ所要ノ点ナリ



CF,DFヲ結ブ然ルトキハDE,EFハ夫々CE,EFニ等シク角DEFハ角CEFニ等シ故ニ(1.4)ニ依テCF=DF

註　(1.4)ハ"一ツノ三角形ノ二邊及其ノ夾角ガ夫々他ノ三角形ノ二邊及夾角ニ等シキトキハ兩三角形ハ全ク相等シク等角ハ等邊ニ對ス"

備考　此作圖法ハ点カABノ同シ側ニ在ルモ反對ノ側ニアルモ合宜ナリ併シナガラ二ツノ大切ナル場合ヲ論ズベシ

(a)　CDハABニ垂線ニシテABハCDノ中点Eヲ通ルトキハAB中ノ何レノ点モC及Dヨリ等距離ニアリ

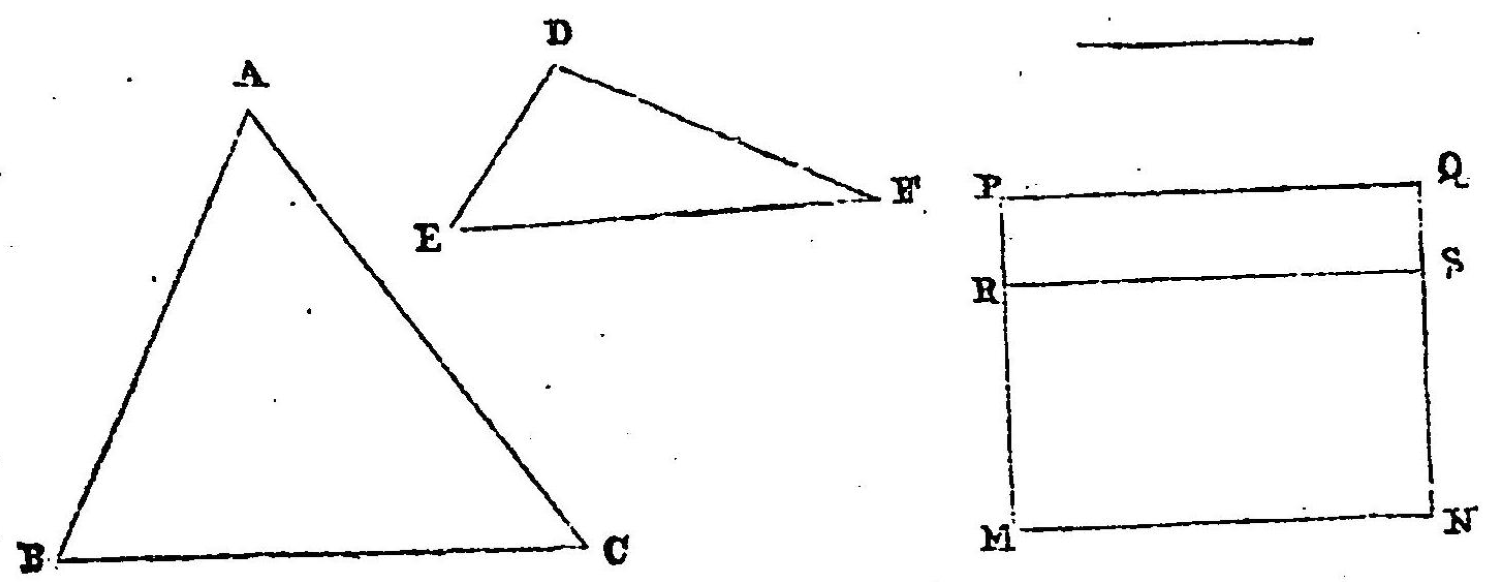
(b)　CDハABニ垂線ニシテABハCDノ中点ヲ通ラザルトキハAB中ニハC及Dヨリ等距離ニアル点アルコトナシ

注意　本問ノ作圖法及上ノ論ハ次ノ事實ニ基ケリ曰ク二等邊三角形ノ頂点ヨリ底ニ直角ニ引カレタル直線ハ頂角及底邊ヲ二等分ス

2. 一定線上ニ二定三角形ノ差ニ等シキ矩形ヲ書ケ

ABC,DEFヲ定三角形トシMNヲ定直線トス

兩三角形ノ中ABCヲ大ナリトス,MN上ニABCニ等シキ矩



形MPQNヲ畫キPQ上ニMNノ方ニDEFニ等シキ矩形PRSQヲ畫ク

QPMハ直角,QPRモ直角且ツPRハPMト合シQSハQNト合ス

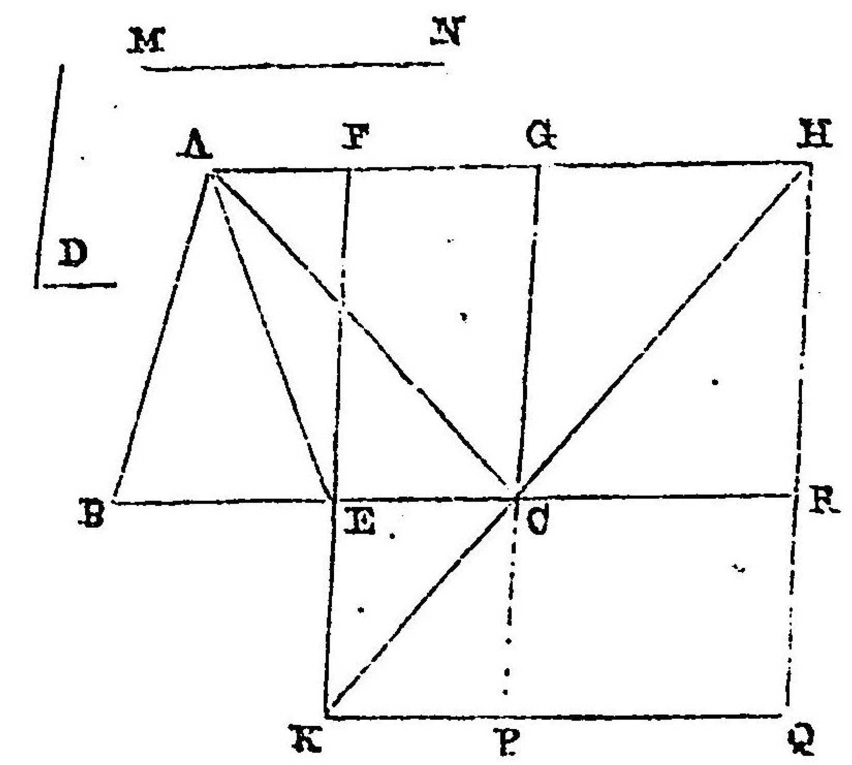
又RS及MNハ何レモPQト平行ナル故ニ互ニ平行ナリ由テRMNSハMN上ニ畫カレタル矩形ナリ而メABCトDEFトノ差ニ等シ何トナラハMPQNトPRSQトノ差ナレバナリ

備考1　定三角形ニ等シキ矩形ヲ畫ケ

(1.44)ニ由テ定三角形ニ等シク且ツ角ガ直角ナル平四邊形ヲ畫ク然ルトキハ平行四邊形ノ一角カ直角ナルカ故ニ他ノ角モ直角ナリ夫故矩形ナリ

註　(1.44)既知直線ヲ邊一トシ既知一角ヲ有シ定三角形ト等積ナル平行四邊形ヲ畫クヿ

MNヲ既知直線,∠Dヲ既知角,ABCヲ定三角形トシMN上ニABCト等積ニシテ一角ハ∠Dニ等シキ平行四邊形ヲ作リBCノ中点ヲEトシEヲ通リFEKヲ引キ∠CEFヲ∠Dニ等シカラシメAヨリBCト平行ニAFGHヲ引キFEKトFニ會セシム



FHヲEC,MNノ和ニ等シカラシメCヲ通リHCKヲ作リFEKトKニ會セシメKヨリBCト平行ニKPQヲ引クCヲ通リFEKト平行ニGCPヲ引キAFGHトGニ,KPQトPニ會セシメHヨリFEKト平行ニHRQヲ引キECノ延長トRニ,KPQトQニ會セシム

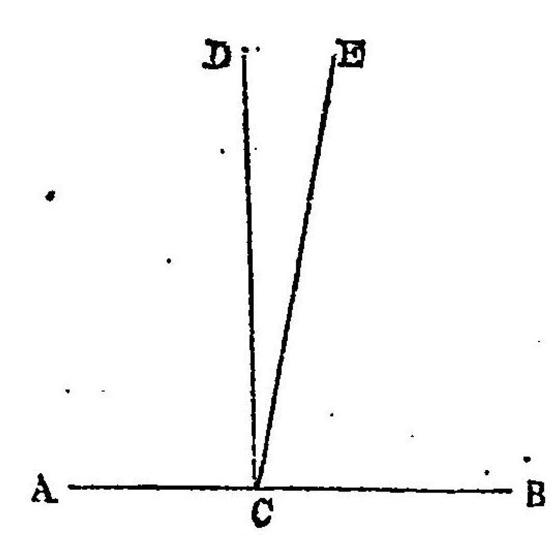
然ルトキハCPQRハ所要ノ平行四邊形ナルベシ

AEヲ作レハ三角形ABC及平行四邊形FECGハ各三角形AECノ二倍ナルガ故ニ相等シ

平行四邊形CPQRハ平行四邊形FECGト等積ナリ而シテPQ=GH=MN又∠CPQ=∠FEC=∠D

夫故CPQRハ所要ノ平行四邊形ナリ

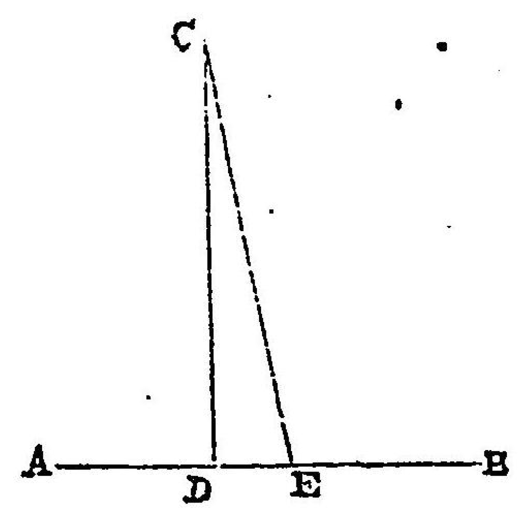
備考2. 此ノ畫法ノ證ニ於テ同一点ヨリ同一直線ニ直角ナル二直線ヲ引クトキハソノ二線ハ相合スベシト云フヿヲ仮定セリユークリッドノ書ニ此ノ証ナキヲ以テ玆ニ證スベシ



ABヲ任意直線トス同一点CヨリABニ直角ナル二線アル能ハス

第一　CヲAB中ノ一点トス若シアリ得ルコトアリトセバCD及CEノ各ヲAニ直角ナルモノトセン

BCD 及 BCE ハ各直角ナルガ故ニ相等シカラザルベカラス是レ小ナルモノト大ナルモノト等シト云フニ同シ豈カヽル理アランヤ



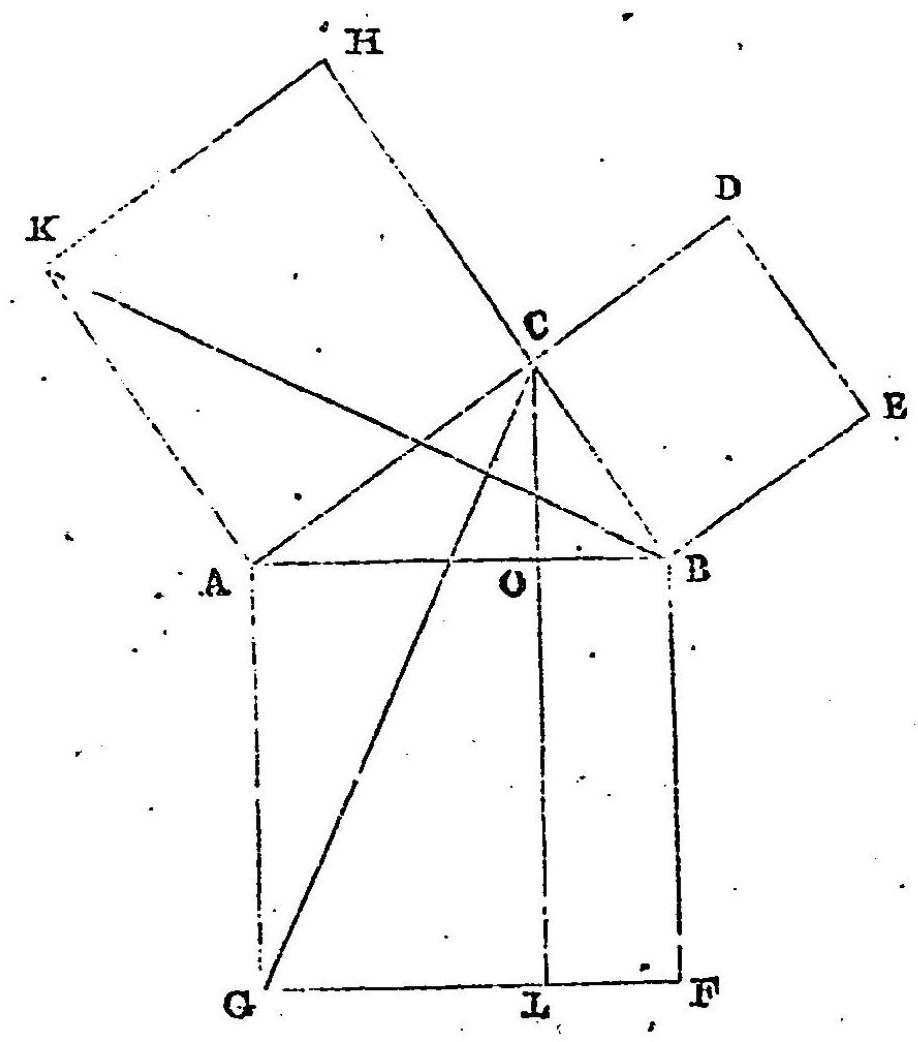
第二 C ヲ AB 外ノ一点トス若シアリ得ルコナリトセバ CD 及 CE ノ各ヲ AB ニ直角ナルモノトセン

CDE 及 CED ハ各直角ナルガ故ニ三角形ノ二角ニテ二直角トナル是不合宜ナ

3. 直角三角形ニ於テハ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ(I.47)

註 (I.47)ノ証明ハ次ノ如シ

直角三角形ヲ ABC トス斜邊 AB 上ノ正方形ハ AC,BC 上ノ正方形ノ和ニ等シ



AB,BC,AC 上ニ正方形 ABFG, BCDE, ACHK ヲ畫ク∠ACB,∠ACH,∠BCD ハ皆直角ナルガ故ニ BCH 及 ACD ハ一直線ヲナス

C ヨリ AG ト平行ニ COL ヲ引キ AB ト O ニ,GF ト L ニ會セシメ BK,CG ヲ結プ

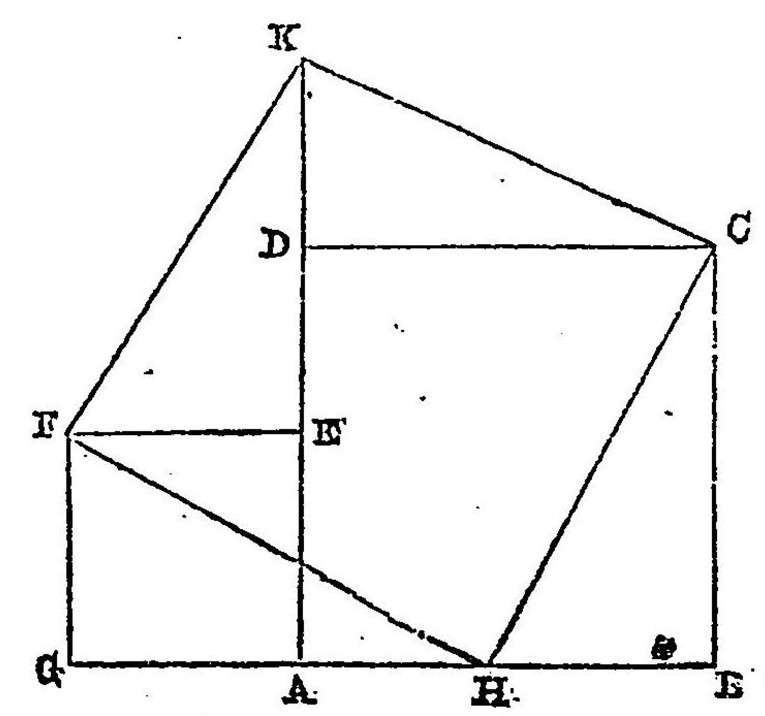
兩三角形 BAK,GAC ニ於テ AB=AG,AK=AC 而メ∠BAK,∠GAC ハイヅレモ∠B

AC ト直角トノ和ニシ相等シ之ニ由テ両三角形ハ相積ナリ然ルニ正方形 ACHK ハ三角形 BAK ノ二倍ニ等シ何トナラバ底 AK ヲ共有シテ平行線 AK,BH ノ間ニアレバナリ同様ニ矩形 AOLG ハ三角形 GAC ノ二倍ニ等シ之ニ由テ正方形 ACHK ト矩形 AOLG ト等積ナリ同様ニ正方形 BCDE ト矩形 BOLF ト等積ナリ

故ニ正方形 ACHK,BCDE ノ和ハ正方形 ABFG ニ等シ

備考 ユークリツドニアル証明ノ外多クノ証明ガ此ノ大切ナル定理ニ與ヘラレタリ此等ノ内ノ一ツノ面白キ証明アリ此ノ証明ハ二ツノ正方形ヲ若干片ニ切リ離シ之ヲ並ベテ第三ノ正方形ヲ作ルモノナリ

ABCD,AEFG ヲ兩正方形トシ其ノ AB ト BG トヲ一直線ニ置キ GH ヲ AB ニ等シクシ AE ヲ K マテ延長シテ EK ヲ AB ニ等シクシ FH,HC,CK,KF ヲ結ブ



三角形 FGH, HBC, CDK,KEF ノ全ク相等シキコハ容易ニ証明セラル

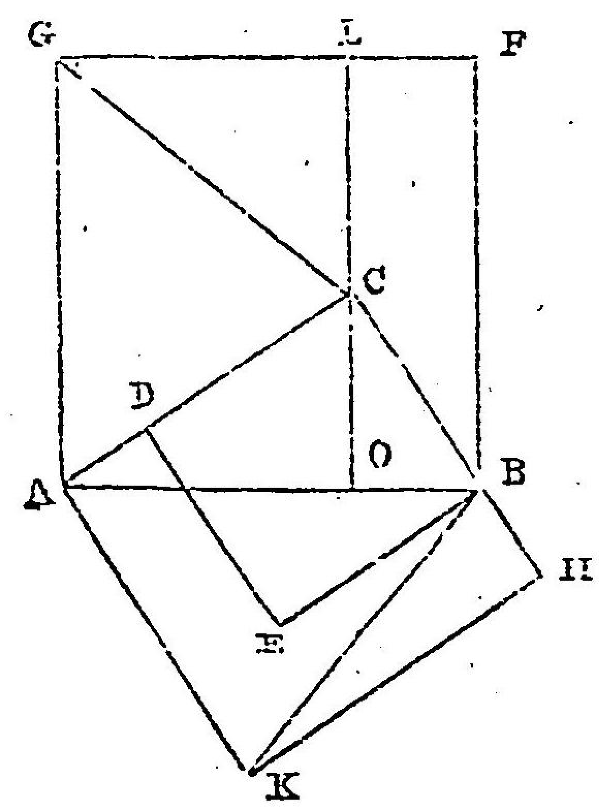
サテ FGH, HBC ハ KEF,CDK ニ等シキガ故ニ各々 EFHCD ヲ加フルキハ二ツノ正角形 AEFG,ABCD ノ和ハ四邊形 FHCK ニ等シ

FHCK ハ等邊ナリ而メ兩直角三角形 FGH, HBC ガ相等シキガ故ニ∠GFH=∠BHC ナリ由テ∠GHF ト∠BHC トノ和ハ直角ナリ然レバ∠FHC モ亦直角ナルベシ又∠HCK,∠CKF,

∠KFH ノ直角ナルヿモ容易ニ證明スルヿヲ得ベシ之ニ由テ FHCK ハ正方形ナリ

夫故ニ HC 上ノ正方形ハ AB, AG 上ノ正方形ノ和ニ等シ斯カルガ故ニ直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シ

補1 本題ハ直角三角形ノ三邊上ノ正方形ヲ反對ノ側ニ畫キテ証明シ得ルヿ次ノ如シ



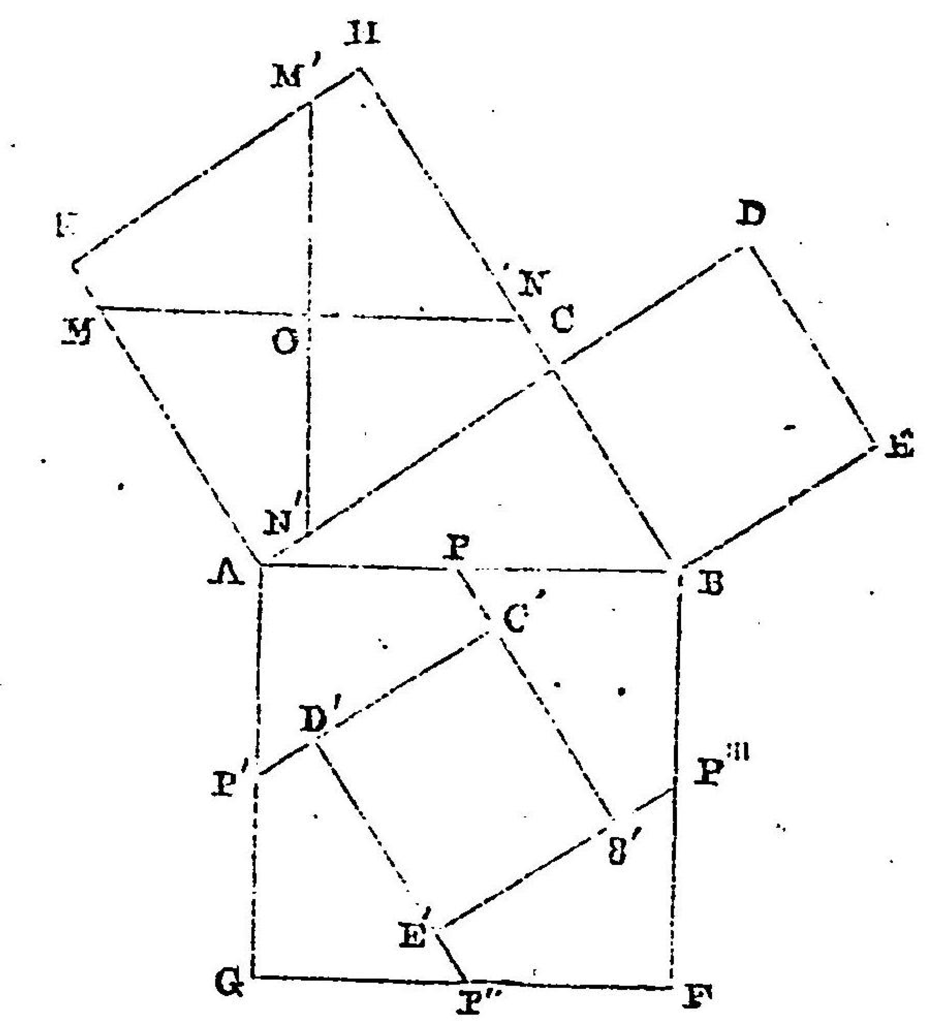
CG,BK ヲ結ブ而三角形 CAG,KAB ニ於テ AC=AK,AG=AB, ニシテ∠CAG, ∠BAK ハ各直角ヨリ∠BAC ヲ減シタルモノニテ相等シ由テ此兩三角形ハ等積ナリ然ルニ C ヲ通リ GA ニ平行ニ LCO ヲ引キ FG, AB ト L, O ニ會セシムレバ矩形 AL ハ三角形 CAG ノ二倍ニ〆正方形 AH ハ三角形 BKA ノ二倍ナリ之ニ由テ矩角 AL ハ正方形 AH ニ等シ同様ニ矩形 BL ハ正方形 BD ニ等シ

故ニ正方形 AH, BD ノ和ハ正方形 AF ニ等シ

補2 次ノ如クニテモ證明シ得ラル

正方形 AH ノ角線ノ交點 O ヲ通リ AB, AG ニ平行ニ MON, M'ON' ヲ引キ四邊ト M,N,M',N', ニ會セシメ又正方形ノ AF ノ各邊ノ中點 P,P',P'',P''' ヨリ AC,BC ニ平行ニ P'C', P'''E', PB', P''D' ヲ引キ互ニ B',C',D',E' ニ會セシム

O ハ角線ノ交點ナルガ故ニ兩角線 AH,CK ヲ作レバ OM=ON=OM'=ON' ハ容易ニ證明シ得ラル, ABNM ハ平行

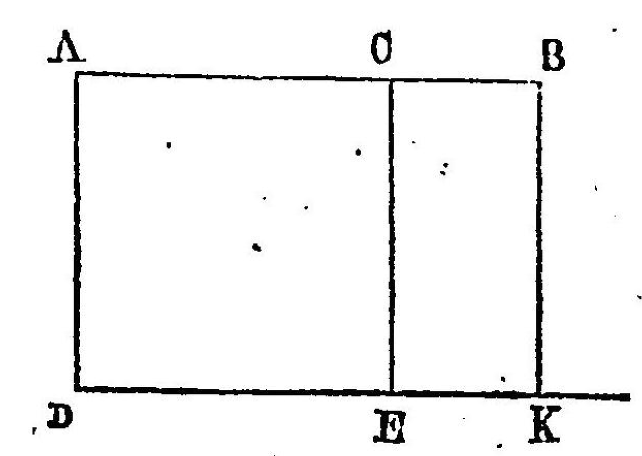


四邊形ナルガ故ニ MN=AB 由テ ON=AP=AP'=ON 又 MN ハ AB ニ M'N' ハ AG ニ平行シ BH ハ PB' ニ, AC ハ P'C' ニ平行ナルガ故ニ ∠MNB=∠APB', ∠M'N'C =∠AP'C' ナリ由テ四邊形 ONCN' ハ四邊形 APC'P' ニ等シ同様ニ四邊形 OH, OK, OA ハ四邊形 GD',FE',BB' ニ等シ

四邊形 OC ハ AC' ニ, OA ハ BB' ニ等シキヿニ依テ CN=C'P, (AM=B'P ナリ然ルニ AM=BN) 故ニ BC=B'C' 而シテ四邊形 B'D' ハ正方形ナルヿハ容易ニ證明シ得ラル由テ正方形 BD ハ正方形 B'D' ニ等シ

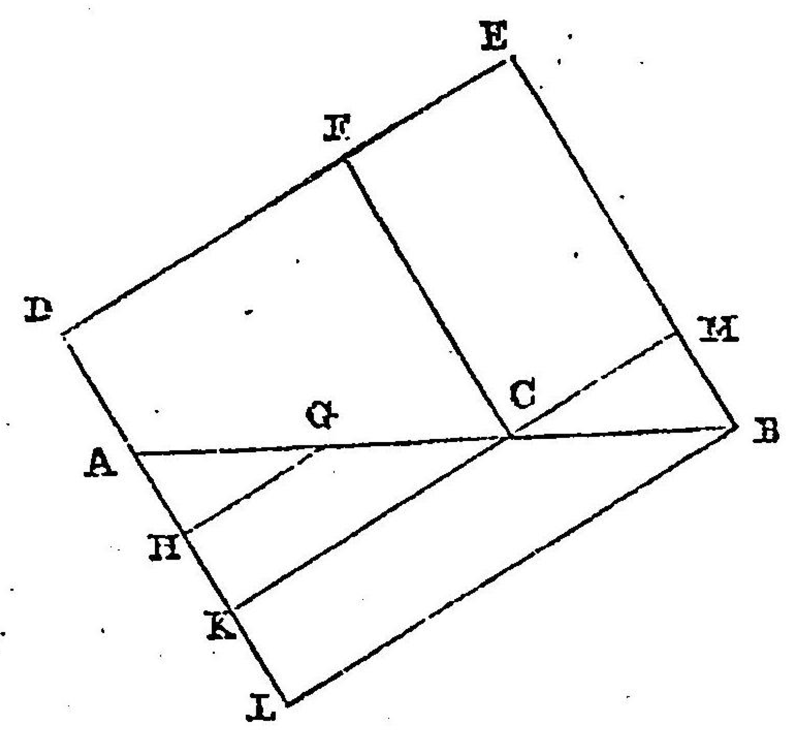
故ニ正方形 AH, BD ノ和ハ正方形 AF ニ等シ

4. 一線 AB ヲ C ニテ分チ AC=2BC ナル如クス若シ AB ノ間ヲ通ラザル一線ニ AD, BE, CF ナル三垂線ヲ引クトキハ AD+2BE ナルヿヲ証セヨ



(*a*) 直線 DFE ガ AB ニ平行ナルトキハ AD, BE, CF ハ凡テ相等シキガ故ニ本題ノ結果ヲ得ルヤ明ナリ

(*b*) DFE ガ AB ニ平行ナラザルトキハ之ヲ双方ヘ延長スルトキハ A,D ノ方ニテカ或ハ B,E ノ方ニテカ相會セザルヲ得ズ假ニ AD' ノ方



ニテ會スルモノトセン

ACノ中点G及C, BヨリDAノ延長部ニ垂線GH, CK, BLヲ引キ又KCヲ延長シBEトMニ會セシム

二ツノ直角三角形AGH, BCMニ於テ$AG=BC$, $\angle AGH=\angle BCM$故ニ$AH=BM$又$KL=BM$

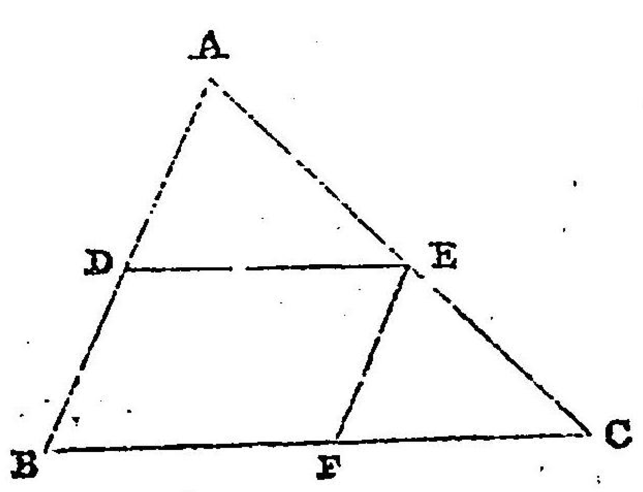
又次ノ備考ニ依テ$AH=HK$ナリ即$AH=HK=KL$

今

$$
\begin{aligned}
AD+2BE &= AD+2ME+2BM \\
&= AD+2CF+2LK \\
&= 2CF+AD+AK \\
&= 2CF+DK \\
&= 3CF
\end{aligned}
$$

備考　此ニ附錄セル証明ハ1883年6月幾何2ノ備考中ニ記セルモノニ似タルモノニシテ大切ナル定理ナリ

三角形ノ一邊ガ底ニ平行セル直線ニテ二等分セラルヽトキハ此ノ直線ハ亦他ノ邊ヲモ二等分ス



ABCヲ三角形トス, ACヲEニテ二等分シBCニ平行ニEDヲ引キABトDニ會セシム然ルトキハADハDBニ等シカルベシ

ABニ平行ニEFヲ引キBCトFニ會セシム然ルトキハ(1.26)ニ依テ$EF=AD$而シテ(1.34)ニ依テ$EF=DB$故ニ$AD=BD$ナリ

註　(1.26及1.34)ハ1883年6月幾何2ノ註ヲ見ヨ此ノ定理ハ容易ニ稍繁雑ナルモノニ擴張スルコトヲ得

三角形ノ一邊ヲ若干等分シ各分点ヨリ底ニ平行スル直線ヲ引クトキハ此等ノ直線ハ他ノ邊ヲモ前ノ邊ト同數ニ等分ス

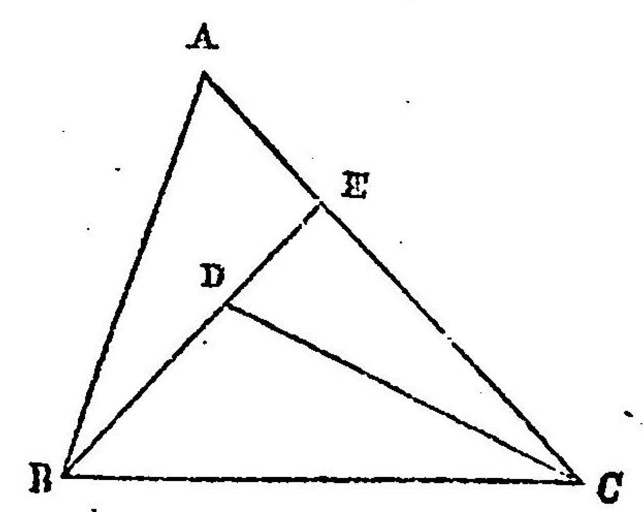
學者若シ相似形論ヲ學ババ此等ノ定理大ニ擴張セラレ甚廣大ナル應用アルヲ見ン

5.　三角形內ノ一点ト底ノ兩端トヲ結ブトキハ結ベル線ノ夾角ハ頂角ヨリ大ニシテ若シ点ガ形外ニアルトキハ結ベル線ノ夾ム角ハ如何ナル塲合ニハ頂角ヨリ大シ又如何ナル塲合ニハ頂角ヨリ小ナルヤ

(a)　ユークリッド(1.21)

註　(1.21)ハ"三角形內ノ一点ヨリ底ノ兩端ニ直線ヲ引クトキハ其和ハ二邊ノ和ヨリ小ナリ然レドモ其ノ夾ム角ハ頂角ヨリ大ナリ"

ABCヲ三角形トシ形內ノ一点DヨリBCノ兩端ヘDB, DCヲ引ケバ$DB+DC \angle AB+AC$ナリ然レドモ$\angle BDC 7 \angle A$ナリ



BDヲ延長シテACトEニ會セシム

$$BD+DE<AB+AE$$

$$CD<DE+DE$$

$$\therefore\ BD+CD+DE<AB+AE+CE+DF$$

即　$BD+CD<AB+AC$

又　$\angle BEC<\angle A$

然ルニ　$\angle BDC<\angle BEC$

$\therefore$　$\angle BDC<\angle A$

(b) 同底上ニ等頂角ヲ有スル三角形ノ頂点ノ軌跡ハ弓形ノ弧ナリ何トナラバ同シ弓形ニ合マルヽ角ハ凡テ相等シケレバナリ是ニ由テ若シDガ三角形ABCノ外接圓ノ周ノ上ニ在ルトキハ角BDCハ角Aニ等シクDガ圓周ト三角形トノ間ニ在ルトキハ角BDCハ角Aヨリ大クDガ丹外ニアレバ角BDCハ角Aヨリ小ナリ

備考 本問ノ解ニ於テDハ常ニBCノAノ方ノ側ニアルヿヲ仮定セリ若シDカ反對ノ側ニアルトキハ決論ハ次ノ如ク改メザルベカラズ

Dガ圓周上ニ在ルトキハ角RDCハ$180^0-\angle A$ニ等シク(III.22)Dガ圓周ト三角形トノ間ニ在ルトキハ角BDCハ$180^0-\angle A$ヨリ大クDガ圓外ニアレハ角BDCハ$180^0-\angle A$ヨリ小ナリ

是ニ由テBACガ直角ナルトキハ本問ノ解ハ常ニ正シキナリ若シBACガ直角ヨリ大ナルカ或ハ小ナルカノトキハ正シカラズサレドモBCノAト反對ノ側ニBACニ等シキ弓形ヲ畫クトキハ第一ノ場合ニ於テ弧BACニ對シテノDノ位置ハ新弧ニ對シテDノ位置ト同一ノ關係アリ

若シDガABノ如キ同一直線中ニアルトキハ一層繁雑ナルモノトナル要スルニ今ノ處ニテハDノ精密ナル位置ハ定メラレズ

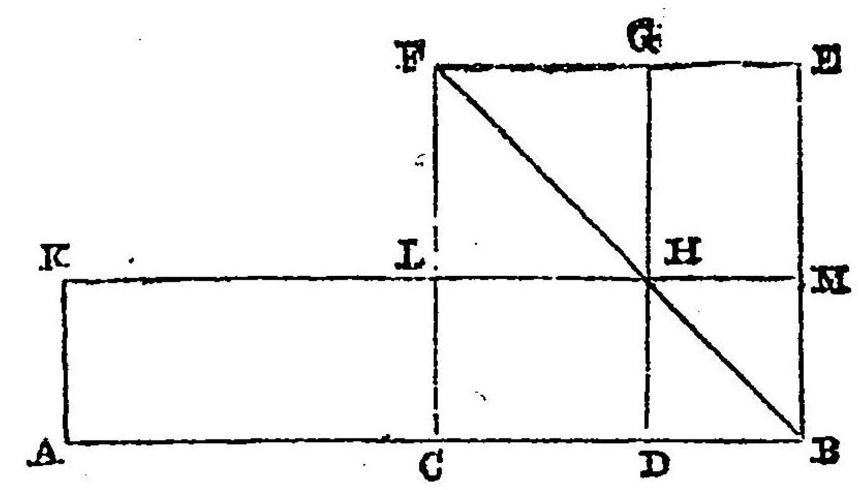
註 (II.22)ハ1883年6月幾何8ニ同シ

6. 任意ノ二直線上ニ畫カレタル正方形ノ差ハ其ノ二線ノ和ト差トノ矩形ニ等シキヿヲ證セヨ

直線ABヲCニテ等分シDニテ差分ス然ルトキハ(II.5)ニ依テCB,CD上ノ正方形ノ差ハCB,CDノ和即ADトCB,CDノ差

即BDトノ矩形ニ等シ

註 (II.5)ハ"一直線ABヲCニテ等分シDニテ差分スルトキハAD,BDノ矩形トCD上ノ正方形トノ和ハ半線即BC上ノ正方形ニ等シ



CB上ニ正方形CEヲ畫キBFヲ結ブ,DヨリCFト平行ニDHGヲ引キBFトHニ,EFトGニ會セシメ又Hヲ通リABト平行ニMHLKヲ引キBEトMニ,CFトLニ,AヨリCFニ平行ニ引ケルAKトKニ會セシム

然ルトキハ　矩形CK=矩形CM

然ルニ　矩形CM=矩形DE

由テ　矩形CK=矩形DE

又LH=CDナルガ故ニ正方形LGハCD上ノ正方形ニ等シク

DH=BDナルガ故ニ矩形DKハAD.BDノ矩形ニ等シ

∴　矩形AD.BD+CD上ノ正方形

=矩形DK+正方形LG

=矩形DL+矩形DE+正方形LG

=正方形CE

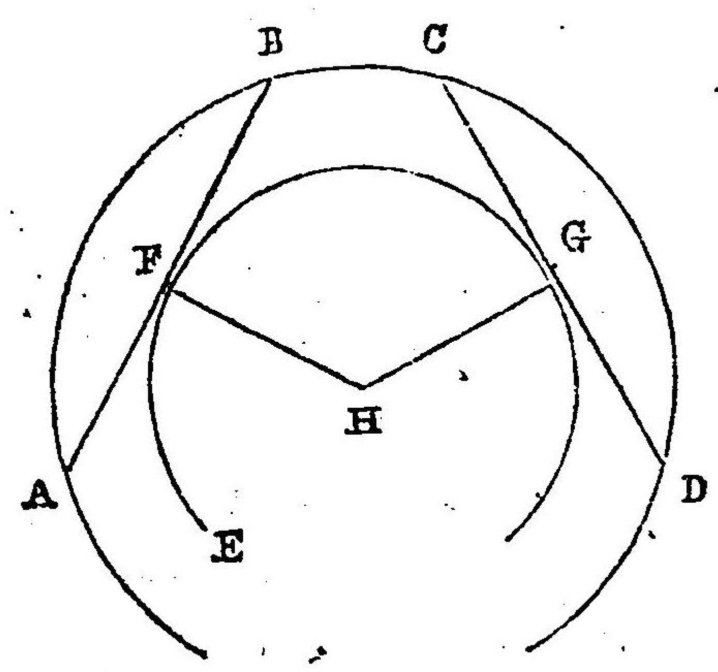
=BC上ノ正方形

備考 本題ハ(II.5)ノ系ナリ之ニ相當スル代數式ハ次ノ如シ

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

7. 同心圓ニ切スル圓ノ弦ハ凡テ等長ナリ

ABCD,EFG ヲ中心 H ヲ共有スル同心圓ナリトス,AB,CD ヲ夫々 F 及 G ニテ圓周 EFG ニ切スル圓周 ABCD ノ二弦トス．



HF, HG ヲ結ブ此ノ二線ハ AB,CD ニ垂線ナリ(III.18)而ソ HF,HG ハ相等シ即 AB,CD ハ圓心ヨリ等距離ニアルヲ以テ等長ナリ(III.14)

註 (III.18)ハ"一直線ガ圓ニ切スルトキハ其切点ニ引ク半徑ハ切線ニ垂直ナリ"

(III.14)ハ"一圓ニ於テ相等シキ弦ハ中心ヨリ相等シキ距離ニアリ逆ニ中心ヨリ相等シキ距離ニアル弦ハ相等シ"

備考 同心圓トハ同シ点ヲ中心トスル諸圓ナリ

同心圓ハ全ク相合スルカ又ハ少シモ相會ハス

兩同心圓ノ半徑相等シキトキハ一圓周中ノ諸点モ他ノ圓周中ノ諸点モ皆同中心ヨリ等距離ニアリ而ソ半徑ガ相等シカラザルトキハ一圓周中ノ何レノ點モ他圓周中ノ何レノ點トモ中心ヨリ等距離ナルモノナシ

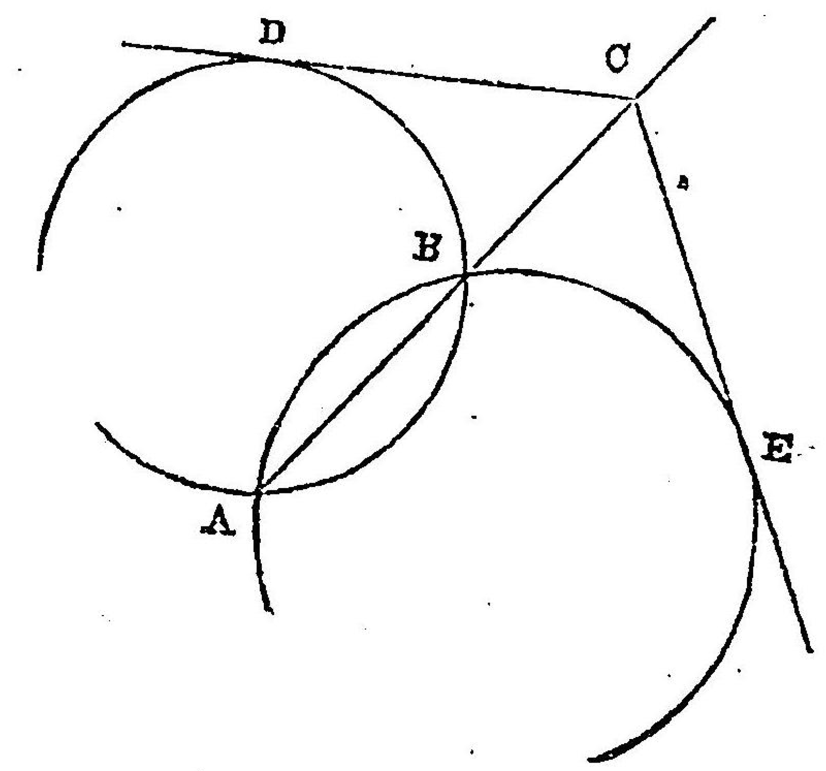
(III.5及III.6) ハ直ニ此ノ定理ヨリ従出スルモノナリ

註 (III.5)ハ"二圓周互ニ任意ノ點ニ於テ交ルトキハ此ノ二圓ハ同心ナル能ハズ"

(III.6)ハ"一圓若シ他ノ圓ニ任意ノ點ニ於テ内切スルトキハ此ノ二圓ハ同心ナル能ハス

8. 兩交圓ノ公弦ノ延長部ノ中ニアル任意ノ一點ヨリ兩圓ニ引ケル切線ハ相等シキコトヲ証セヨ相交ハラザル兩圓ニ就テ

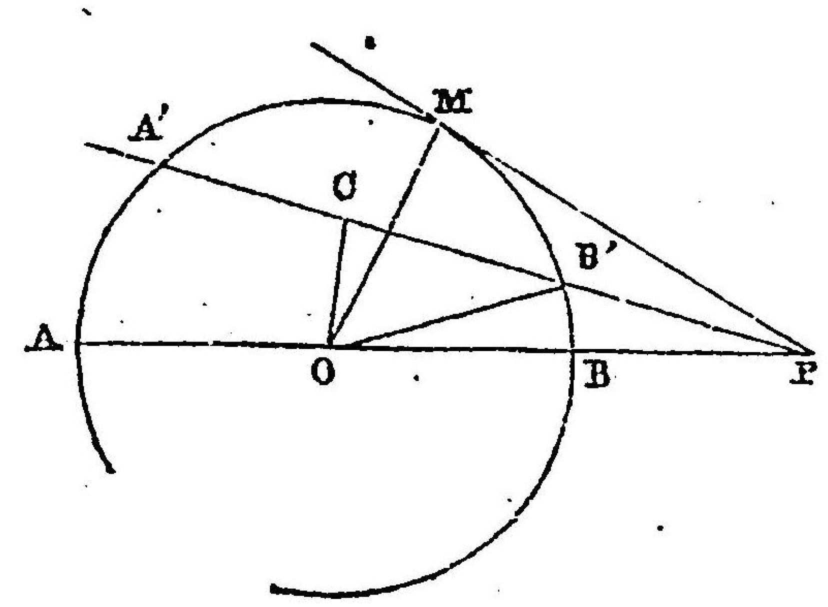
同様ノ性質アリ之ヲ記シ且ツ証セヨ



(a) 兩圓ノ交點ヲ A, B トス A,B ヲ結ヒ其ノ延長部ノ中ニ随意ニ C 點ヲ撰ミ C ヨリ兩圓ニ切線 CD,CE ヲ引ク

サテ $CD^2=CE^2=CA.CB$(III.36)夫故 CE=CD

註 (III.36)ハ"圓外ノ任意ノ一点ヨリ圓ニ切線及割線ヲ引クトキハ全割線ト其ノ圓外ノ部分トノ矩形ハ切線ノ上ノ正方形ニ等シ



圓周ヲ AMB トシ圓外ノ任意ノ点ヲ P トシ P ヨリ切線 PM 及任意ニ割線ヲ引ケ

第一 割線カ圓ノ中心 O ヲ通ルトキ

割線ト圓周トノ交点ヲ B, A トシ OM ヲ作ル然ルトキハ OM ., PM ニ垂線ナルカ故ニ三角形 POM ハ直角三角形ナリ之ニ由テ

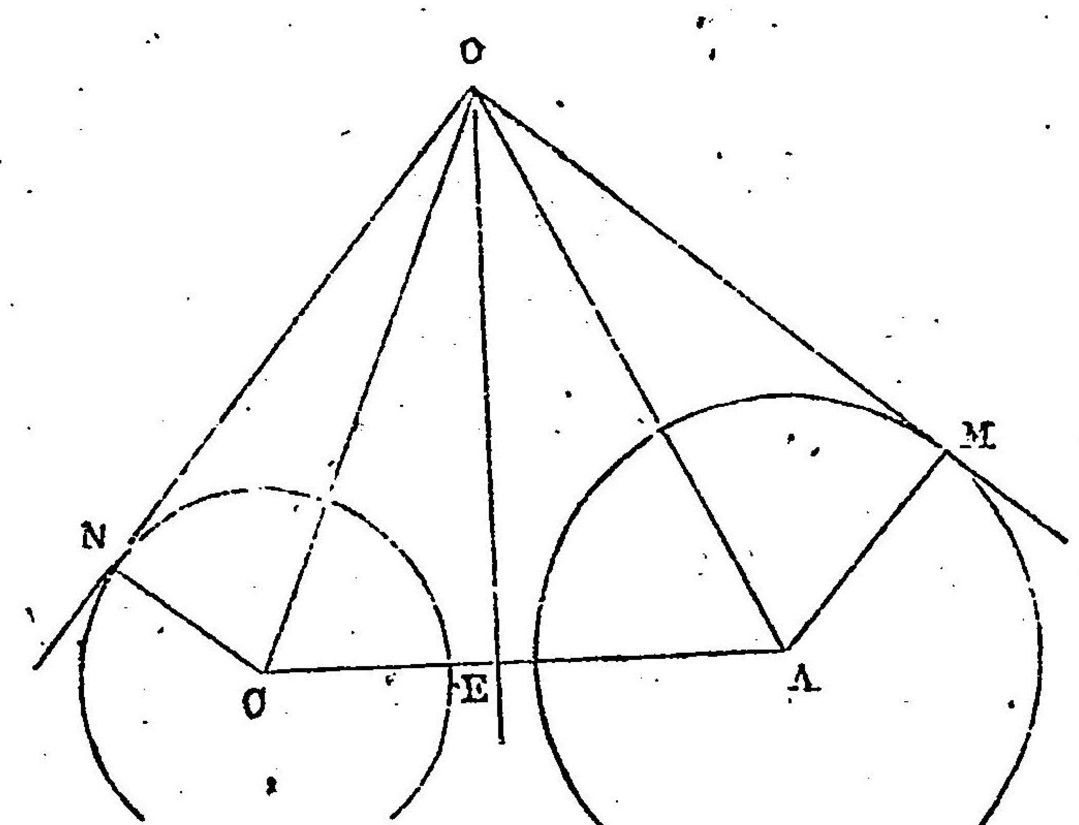
$$PA.PB=(PO+OA).(PO-OA)$$
$$=PO^2-OA^2 \text{(6 ヲ見ヨ)}$$
$$=PO^2-OM^2$$
$$=PM^2$$

第二 中心 O ヲ通ラザル任意割線ヲ引クトキ

割線ト圓周トノ交點ヲB',A'トシOヨリ$PB'A'$ヘ垂線OCヲ引キ又OB'ヲ結ブ然ルトキハCハ$B'A'$ノ中點ナリ之ニ由テ

$$
\begin{aligned}
PA'.PB' &= (PC+CA').(PC-CA') \\
&= PC^2-CA'^2 \\
&= (PO^2-OC^2)-(OB'^2-OC^2) \\
&= PO^2-OB'^2 \\
&= PO^2-OM^2 \\
&= PM^2
\end{aligned}
$$

(*b*) 相交ラザル兩圓ノ中心ヲACトス



兩圓ノ中心ヲ結ブ直線ACヲEニテ二分シAE^2-CE^2ヲ兩半徑ノ平方ノ差ニ等シカラシム(此ノ法ハ次ノ補ニ示ス) Eヲ通リACニ垂線EOヲ引ケバEO中ノ任意ノ點ヨリ兩圓ヘ引ケル切線ハ相等シ

EO中ノ任意ノ點ヲOトシ兩圓ヘ引ケル切線ヲOM,ONトシAM及CNヲ結ビ又OA,OCヲ結ブ而シテAMガCNヨリ大ナリト假定シAEヲCEヨリ大ナラシム然ルトキハ

$$OA^2=AE^2+OE^2$$
$$OC^2=CE^2+OE^2$$

又 $$OA^2=AM^2+OM^2$$

$$OC^2=CN^2+ON^2$$

是ニ由テ

$$
\begin{aligned}
OM^2-ON^2 &= (OA^2-AM^2)-(OC^2-CN^2) \\
&= (AE^2+OE^2-AM^2)-(CE^2+OE^2-CN^2) \\
&= (AE^2-CE^2)-(AM^2-CN^2)
\end{aligned}
$$

然ルニ $AE^2-CE^2=AM^2-CN^2$

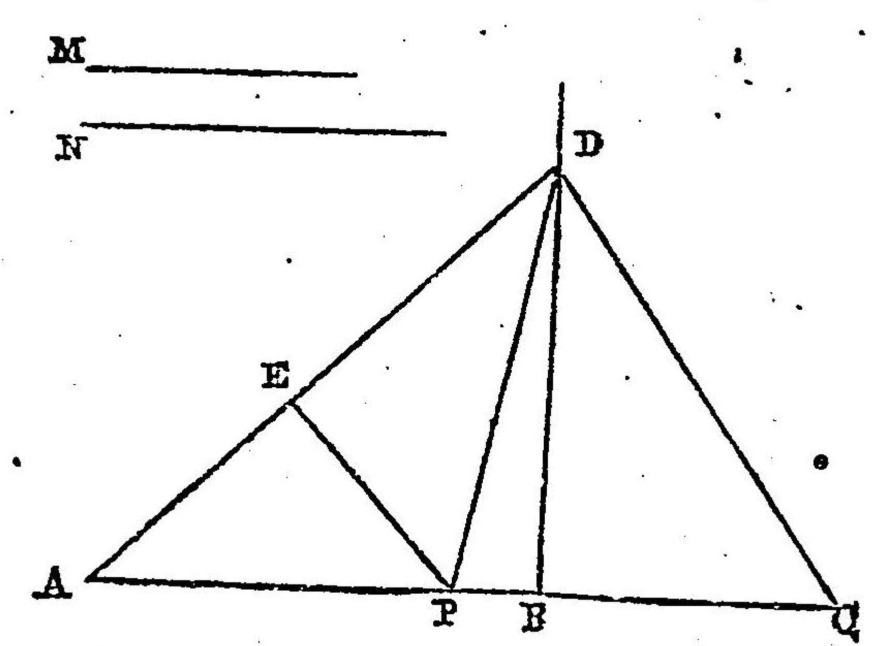
夫故 $OM^2-ON^2=0$

即 $OM=ON$

上ニ說明セル性質ハ兩圓ガ交レルト否トニ論ナク誠ナリ何トナラバ本問(*a*)ノ場合ニ於テM,Nヲ兩圓ノ中心トシMN,MA,NA,MC,NCヲ結ブ然ルトキハMNハABニ垂線ナルガ故ニMC^2,NC^2ノ差ハMA^2,NA^2ノ差ニ等シキヿ明ナレバナリ

補 一定線ヲ二分シ其ノ各分ノ上ノ正方形ノ差ヲメ他ノ兩定線ノ上ノ正方形ノ差ニ等シカラシメヨ

一定線ヲABトシ他ノ兩定線ヲM,Nトス,ABヲ兩分シ其ノ各分ノ上ノ正方形ノ差ヲシテM,Nノ上ノ正方形ノ差ニ等シカラシムルヿヲ求ム



ABヲ延長シ若シMガNヨリ小ナレバ$BC=M$ナラシメBヲ通リABニ垂線BDヲ引キCヲ中心トシNニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キBDトDニ會セシメAD,CDヲ結ブ,ADノ中點ヲEトシEヲ通リADニ垂線EPヲ引キABトPニ會セシム,Pハ所

要ノ分點ナリ

DP ヲ結ブ然ル𪜈ハ PA＝PD ナルガ故ニ

$$\begin{aligned}PA^2-PB^2&=PD^2-PB^2\\&=BD^2\\&=CD^2-CB^2\\&=N^2-M^2\end{aligned}$$

本題ニ於テ BD 若シ AB ニ等シケレバ P 點ハ B 點ニ合ス然ル𪜈ハ $AB^2=N^2-M^2$
又若シ BD ガ AB ヨリ大ナレバ P 點ハ AB ノ延長部ノ上ニアリ然ル𪜈ハ AB ハ P 點ニ於テ $AP^2-BP^2=N^2-M^2$ ノ如ク外分セラル

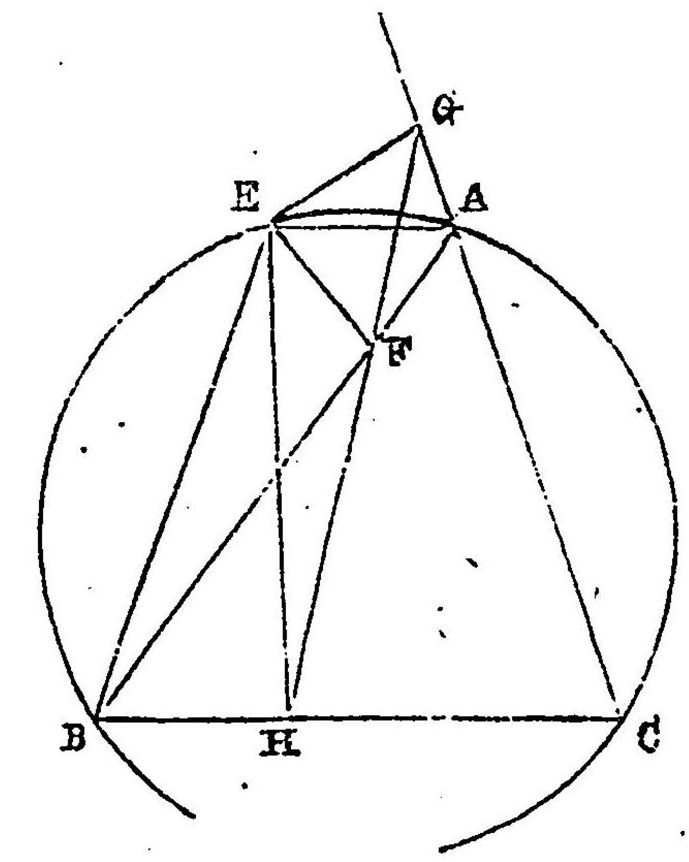
備考　此ノ解法ハ如何ニカ考ヘタル
先ツ本問ノ事實アリト假定シ逆戻シニ考ヘシナリ即若シ OM ト ON トガ相等シキ𪜈ハ其ノ上ノ正方形モ亦等シカルベシ夫故 OA,OC ノ上ノ正方形ノ差ハ AM,CN ノ上ノ正方形ノ差ニ等シキヤ明ナリ然ルニ OA,OC ノ上ノ正方形ノ差ハ AE,CE ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ是ニ由テ解答ヲ得タリ

余ハ此ノ証明ヲナスニ際シテ圖ラズモ肝要ナル事實ヲ証明シタリ即

二邊ノ上ノ正方形ノ差常量ナル三角形ノ頂點ノ軌距ハ底ニ垂線ナル直線ナリ

9. 三角形ノ外切圓ノ周中ナル任意ノ點ヨリ三角形ノ各邊ニ引ケル垂線ノ足ハ同一直線中ニ在リ

ABC ヲ外切圓ヲ畫ケル三角形トス,AB弧中ニ任意ニ一點E ヲ撰ミ E ヨリ AB, BC, AC 又ハ其ノ延長部ヘ垂線 EF,EH,EG



ヲ下ス,FG,FH ヲ結バヾ GFH ハ一直線ナルベシ

EA,EB ヲ結ブ然ル𪜈ハ

$\angle EAC+\angle EBC=$二直角

而シテ $\angle EFB$, $\angle EHB$ ハ各直角ナルガ故ニ EB ヲ直徑トスル圓ハ H,F ヲ通ルベシ夫故

$\angle EFH+\angle EBC=$二直角

由テ　$\angle EAC=\angle EFH$

又 $\angle EFA$,$\angle EGA$ ハ各直角ナルガ故ニ其ノ和ハ二直角ナリ由テ圓周 AFEG ヲ畫クヿヲ得夫故

$\angle EAG=\angle EFG$

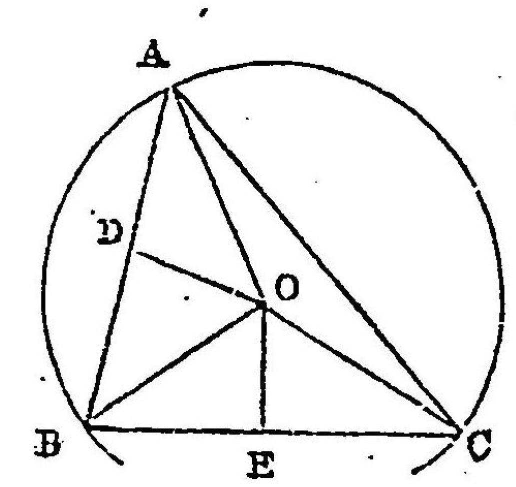
然ルニ　$\angle EAG+\angle EAC=$二直角

∴　$\angle EFG+\angle EFH=$二直角

之ニ由テ GFH ハ一直線ナリ

備考　玆ニ採用セル方法即其点ニ出來タル角ガ二直角ニ等シキヿヲ示ス方法ハ一直線ガ某點ヲ通ルヿヲ證明スル普通ノ方法ナリ

10. 三定點ヲ通ル圓ヲ畫ク方法如何



三點ヲ結バヾ(IV.5)ニ同シモノトナル

註　(IV.5)ハ"三角形ニ外切圓ヲ畫ク法"ニシテ其ノ方法ハ次ノ如シ

三角形ヲ ABC トシ AB,BC ノ中點ヲ D,E トシ D,E ヲ通リ AB,BC ニ垂線 DO, EO ヲ引キ其ノ交點ヲ O トス,OA,OB,OC

ヲ結ブ然ルトキハ OA=OB=OC ナルヿハ容易ニ證明シ得ラル之ニ由テ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トナス圓ハ A,B,C ヲ通ルベシ即チ三角形 ABC ニ外切スル圓周ナリ

備考　切線ノミヲ論ズル書物少カラズ普通ナル問題ハ次ノ如シ

點,線,圓ノ中ニ就テ何ニテモ三個アルトキ既知ノ點ヲ通リ既知ノ線或ハ圓ニ切スル圓ヲ畫ク問題ニ十個ノ塲合アリ

1. 三點
2. 三線
3. 二點及一線
4. 二線及一點
5. 二點及一圓
6. 二圓及一線
7. 二圓及一點
8. 二線及一圓
9. 一點,一線及一圓
10. 三圓

線ノ位置ノ異ナルヨリ起ル變化ハ甚多シ 9 及 10 ノ塲合ノミニテモ一小冊ヲナスニ足ル

千八百八拾四年六月

試驗官　教授,統計官　マスターオフ,アーツ　グリーンヒル氏
　　　　學士會院會員　マスターオフ,アーツ　ベンジヤミンウィリヤム氏

算術及代數

1. 1.231056 ヲ .81231056 ニテ乘シ小數第七位マデ正シク算出セヨ

通常ノ乘法又ハ畧乘法ニ依テ(1884 年 1 月算1)所要ノ積ハ .9999999 ナルヿヲ知ル

備考　$\sqrt{17}=4.1231056$ 等

$$1.231056=10(\sqrt{17}-4)$$

$$.81231056=\frac{\sqrt{17}+4}{10}$$

$$1.231056\times.81231056=10(\sqrt{17}-4)\times\frac{\sqrt{17}+4}{10}$$
$$=(\sqrt{17}-4)\times(\sqrt{17}+4)$$
$$=17-16$$
$$=1$$

縱ヒ試驗官ハ之ヲ發見スルヿヲ受驗者ニ望マズトモ

2. $\frac{1}{\sqrt{8}}$ ノ數位ヲ小數第七位マテ算出セヨ

$$\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{4}\times1.41421357$$
$$=.3535534 \text{ 殆}$$

備考　不盡小數ヲ小數若干位マテ算出スルニハ常ニ所要ノ

數位ヨリ一位多ク算スベシ而メ最后ノ數字ガ5以上ナル片ハ上位ニ1ヲ加ヘ4以下ナル片ハ切リ捨ツベシ之ヲ四捨五入スト云フ

例ヘバ本問ノ塲合ニ於テハ .3535533 ヨリハ .3535534 ニ近キヿ明ナリ

3. 年利三分四分ノ三ニテ七千四百六拾六ぽんど拾三しりん四ぺんすノ三ヶ年間ノ單利息ト複利息トノ差ヲ算出セヨ

單利 $£7466\frac{2}{3}\times .03\frac{3}{4}\times 3$

$$=\frac{22400\times 15\times 3}{3\times 4\times 100}=£840$$

複利 $.03\frac{3}{4}=\frac{15}{400}=\frac{3}{80}$

$\frac{3}{80}$	£7466 13s 4d	第一年元金
	280	〃 利金
$\frac{3}{80}$	7746 13 4	第二年元金
	290 10	〃 利金
$\frac{3}{80}$	8037 3 4	第三年元金
	301 7 $10\frac{1}{2}$	〃 利金
	8338 11 $2\frac{1}{2}$	總金
	7466 13 4	
	871 17 $10\frac{1}{2}$	複利
	840	

差 = £31 17s $10\frac{1}{2}d$............... 答

4. 千六百四拾ぽんどヲ借リ每年等額ヲ返シ二ヶ年間ニ皆

濟セントス每年ノ返金高ヲ問フ但シ年利五分ノ複利ヲ附ス

初年ノ終ニ拂フベキ元金ヲxトス

初年ノ利息ハ $\frac{x}{20}$

元金殘高ハ $1640-x$

二年目ノ元利ハ $(1640-x)\times\left(1+\frac{1}{20}\right)^2$

夫故 $x+\frac{x}{20}=(1640-x)\times\frac{441}{400}$

之ニ由テ $x=840$

初年ニ拂フベキ總金$=£840+£42$

次年 〃 $=£800+£82$

依テ每年ノ返金ハ£882ナリ

備考 復利法ニ於テPヲ元金トシrヲ一年間£1ノ利息トシnヲ年數トスル片ハ

初年ノ終ニ於ケルPノ元利$=P(1+r)$

二年 〃 $=P(1+r)^2$

以下做之

n年ノ終ニ於ケルPノ利息$=P\{(1+r)^n-1\}$

通常Rヲ以テ一年間£1ノ元利ヲ表ハス

故ニ $R=1+r$

由テ 總金$=P\ ^n$

利金$=P(R^n-1)$

此ノ方程式ニ依テ式中ニアル任意ノ一量ハ自餘ノ項ニテ表ハサルヽヿ明ナリ

5. $3x^3+x^2y-22xy^2-24y^3$ ニ $3x^3+11x^2y-2xy^2-24y^3$ ヲ乘シ其ノ積ヲ $9x^3+18x^2y-16xy^2-32y^3$ ニテ除セ

$$3x^3+x^2y-22xy^2-24y^3$$
$$3x^3+11x^2y-2xy^2-24y^3$$
$$9x^6+3x^5y-66x^4y^2-72x^3y^3$$
$$33x^5y+11x^4y^2-242x^3y^3-264x^2y^4$$
$$-6x^4y^2-2x^3y^3+44x^2y^4+48xy^5$$
$$-72x^3y^3-24x^2y^4+528xy^5+576y^6$$
$$9x^6+36x^5y-61x^4y^2-388x^3y^3-244x^2y^4+576xy^5+576y^6$$

$$9x^3+18x^2y-16xy^2-32y^3$$
$$x^3+2x^2y-9xy^2-18y^3$$ ……………………答

$$9x^6+36x^5y-61x^4y^2-388x^3y^3-244x^2y^4+576xy^5+576y^6$$
$$9x^6+18x^5y-16x^4y^2-32x^3y^3$$
$$18x^5y-45x^4y^2-356x^3y^3-244x^2y^4$$
$$18x^5y+36x^4y^2-32x^3y^3-64x^2y^4$$
$$-81x^4y^2-324x^3y^3-180x^2y^4+576xy^5$$
$$-81x^4y^2-162x^3y^3+144x^2y^4+288xy^5$$
$$-162x^3y^3-324x^2y^4+288xy^5+576y^6$$
$$-162x^3y^3-324x^2y^4+288xy^5+576y^6$$

備考 1. 拙著(原著者)"代數學因子分括法"ヲ學ベル者ハ本問ニ遇フモ毫モ困難ヲ感セザルベシ

$3x^3+x^2y-22xy^2-24y^3$ ハ $x=3y$ 又ハ $x=-2y$ ノ𪜈空トナル由テ(1883年6月代數9)其ノ因子ハ

$$(x-3y)(x+2y)(3x+4y)$$

又 $3x^3+11x^2y-2xy^2-24y^3$ ハ $x=-3y$ 又ハ $x=-2y$ ノ𪜈空トナル

由テ其ノ因子ハ

$$(x+3y)(x+2y)(3x-4y)$$

又 $9x^3+18x^2y-16xy^2-32y^3$

$$=9x^2(x+2y)-16y^2(x+2y)$$
$$=(9x^2-16y^2)(x+2y)$$
$$=(3x+4y)(3x-4y)(x+2y)$$

斯カレバ

$$\frac{(x-3y)(x+2y)(3x+4y)(x+3y)(x+2y)(3x-4y)}{(3x-4y)(3x+4y)(x+2y)}$$
$$=(x-3y)(x+3y)(x+2y)$$
$$=(x^2-9y^2)(x+2y)$$
$$=x^3+2x^2y-9xy^2-18y^3$$ 前ニ同シ

備考 2. 乘除法ハ唯係數ノミヲ用ヒテ大ニ簡畧ニセラル

3+1−22−24
3+11−2−24
9+3−66−72
33+11−242−264
− 6− 2+44+48
− 72−24+528+576
9+36−61−388−244+576+576 | 9+18−16−32
1+ 2− 9−18
9+18−16−32
18−45−356−244
18+36− 32− 64
−81−324−180+576
−81−162+144+288
−162−324+288+576

$$\underline{-162-324+288+576}$$

答　$x^3+2x^2y-9xy^2-18y^3$

備考　3.　ホルナー氏ノ湊合除法ト云フモノモ亦屢用ヰラルサレド誤リナク之ヲ用ヰル爲ニ充分練習スルヲ要ス

今本題ニ由テ此ノ法ヲ説明セントス

$9x^6+36x^5-61x^4-388x^8-244x^2+576x+576$ ヲ $9x^3+18x^2-16x-32$ ニテ除セ（y ヲ省キタル所以ハ説明ヲ簡畧ニセンガ爲メナリ而シテ y ヲ省クモ算法ニ影響セザレハナリ）

D ヲ實トス Q ヲ商トス

然ルトキハ　　$D=Q(9x^3+18x^2-16x-32)$

是ニ由テ　$9x^3Q=D-Q(18x^2-16x-32)$

此結果ヨリ Q ヲ求メ得

$$\begin{array}{r|l}
9x^3 & 9x^6+36x^5-61x^4-388x^3-244x^2+576x+576 \\
-18x^2 & \quad -18x^5-36x^4+162x^3+324x^2 \\
+16x & \qquad\quad -16x^4+32x^3-144x^2-288x \\
+32 & \qquad\qquad\qquad 32x^3+64x^2-288x-576 \\
\hline
\end{array}$$

商$=x^3+2x^2-9x-18$

縦線ノ左ニ第一項ノ外凡テノ項ノ符號ヲ變シタル法ヲ置ク同右ニ實ヲ置ク商ノ第一項 x^3 ヲ求メテ横線ノ下ニ實ノ首項ノ下ニ置キ之ヲ $-18x^2$, $16x$ 及 32 ニ乘シ其ノ積ナル $-18x^5$, $16x^4$ 及 $32x^3$ ヲ雁行狀ニ同類項ノ下ニ置ク

次ニ $36x^5$, $-18x^5$ トノ和 $18x^5$ ヲ法ノ首項 $9x^3$ ニテ除シ商ノ第二項 $2x^2$ ヲ求メ實ノ第二項ノ下ニ置キ之ヲ法ノ第二項以下ニ乘シ其ノ積ヲ雁行狀ニ置クヿ前ノ如シ

第三商ヲ求ムルニハ實ノ第三項ト其ノ下ナル諸項ヲ加ヘテ即

$-61x^4$, $-36x^4$ 及 $16x^4$ ノ和ヲ求メテ之ヲ法ノ首項 $9x^3$ ニテ除ス而シテ之ヲ法ノ第二項以下ニ乘シ雁行狀ニ記スヿ前ノ如シ

第四商以下ヲ求ムルモ前ト異ナルヿナシ

實ノ第五項以下用ヰラレザル各行ノ和皆空トナルヲ以テ殘數ナキヿ明ナリ

上ノ運算ハ係數ノミヲ用ヰテモ行フヿヲ得但シ x ノ某方乘ノ欠ケタル處ニハ 0 ヲ充ツベシ

$$\begin{array}{r|l}
9 & 9+36-61-388-244+576+576 \\
-18 & \quad -18-36+162+324 \\
+16 & \qquad\quad 16+32-144-288 \\
+32 & \qquad\qquad\quad 32+64-288+576 \\
\hline
\end{array}$$

$1+2-9-18$

答　$x^3+2x^2-9x-18$

6.　次式ヲ簡單ニセヨ

1.　$\dfrac{x-2y}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{x-2y}+\dfrac{8xy}{x^2-4y^2}$

2.　$\left(1-\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{12}{x-2}\right)\left(1+\dfrac{6}{x+1}-\dfrac{12}{x+2}\right)$

(1)　$\dfrac{x-2y}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{x-2y}+\dfrac{8xy}{x^2-4y^2}$

$$=\frac{x^2-4xy+4y^2+x^2+4xy+4y^2+8xy}{x^4-4y^2}$$

$$=\frac{2x^2+8xy+8y^4}{x^2-4y^2}$$

$$=\frac{2(x+2y)(x+2y)}{(x+2y)(x-2y)}$$

$$=\frac{2(x+2y)}{x-2y}$$

(2) $$1-\frac{6}{x-1}+\frac{12}{x-2}=\frac{x^2-3x+2-6x+12+12x-12}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2+3x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

又 $$1+\frac{6}{x+1}-\frac{12}{x+2}=\frac{x^2+3x+2+6x+12-12x-12}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$$

是ニ由テ $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}=1$

7. 一ヨリ百万ニ至ル凡テノ奇數ノ和如何

本問ハ $a=1,\ l=999999$ 及 $n=500000$ ナル等差級數ノ和ヲ求ムルニアリ

今 $$S=(a+l)\times\frac{n}{2}$$

$$=1000000\times250000$$

$$=250000000000$$

8. 等比級數若干項ノ和ヲ算出スル法如何又通比一ヨリ小ニシテ項數無究ニ増加スル𬼀和ノ極限如何

a ヲ初項トシ r ヲ通比トシ n ヲ項數トシ s ヲ和トス

$$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

$$rs=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n$$

由テ $rs-s=ar^n-a$

$$s=\frac{ar^n-a}{r-1}$$ 答(1)

次ニ r ヲ一ヨリ小ナルモノトセハ

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

今 r ハ 1 ヨリ小ナルガ故ニ r^2 ハ猶更 1 ヨリ小ナリ r^3 倘一層小ナリ夫故 n ヲ極メテ大クスル𬼀ハ r^n ハ極メテ小ナリ而シテ n ガ無究大トナレハ r^n ハ殆ンド何等ノ値モナキモノトナル

由テ極限ハ $$s=\frac{a}{1-r}$$ 答(2)

備考 無究級數ノ極限トハ級數ガ次第ニ之ニ近寄ルベキ數ニシテ級數ト其ノ數トノ差ヲ何程ニテモ少クスルヿヲ得然レ𪜈決シテ之ニ超過セシムルヿ能ハス

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots n$ 項ニ至ル級數ノ極限ヲ $s=\frac{a}{1-r}$ ナル式ニテ求ムル𬼀ハ 2 ナリ

サテ二項ノ和ハ $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$

三 〃 $1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=2-\frac{1}{4}$

四 〃 $1\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}=2-\frac{1}{8}$

五 〃 $1\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=1\frac{15}{16}=2-\frac{1}{16}$

以下倣之

如斯シテ和ハ次第ニ 2 ニ近寄ル而シテ和ト 2 トノ差ハ何程ニテモ少クスルコヲ得サレ𪜈決シテ 2 ヨリ大クスルコヲ得ズ

極限ノ好列ハ .9 ニシテ其ノ極限ハ 1 ナリ

9. 次ノ方程式ヲ説ケ

1. $\frac{3x+5}{4}+\frac{x+1}{x-7}-\frac{1}{2}=\frac{9x+7}{12}+\frac{2x-8}{2x-16}+\frac{1}{6}$

2. $\sqrt{(x+a)}+\sqrt{(x+b)}=\sqrt{c}$

3. $\begin{cases} 8x-7y=15 \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{7}y=2 \end{cases}$

(1) $\frac{3x+5}{4}-\frac{1}{2}-\frac{9x+7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{x-4}{x-8}-\frac{x+1}{x-7}$

$$\frac{9x+15-6-9x-7-2}{12}=\frac{x^2-11x+28-x^2+7x+8}{(x-8)(x-7)}$$

$$0=\frac{-4x+36}{(x-8)(x-7)}$$

是ニ由テ　　$-4x+36=0$

$$x=9$$

備考　方程式ノ解法ハ無數ナリ今一元方程式ノ解法二三ヲ附記スベシ,x ノ次數高キモノニ至テハ甚大ノ勞力ヲ要スルハ勿論ナリ

(a) $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}=\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$

各分母ヲ以テ其ノ分子ヲ除セバ

$$4-\frac{1}{x-4}+5+\frac{2}{2x-3}=4-\frac{2}{2x-7}+5+\frac{1}{x-1}$$

整數ハ消滅ス故ニ

$$\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-7}$$

$$\frac{2x-8-2x+3}{(2x-3)(x-4)}=\frac{2x-7-2x+2}{(x-1)(2x-7)}$$

即　$\frac{-5}{2x^2-11x+12}=\frac{-5}{2x^2-9x+7}$

故ニ　$2x^2-11x+12=2x^2-9x+7$

是ニ由テ　　$x=2\frac{1}{2}$

(b) $.3x+.2-.125x=1.75x-1.375$

各項ヲ通觀スルニ小數最多位ナルモノハ第三位マデナリ依テ各項ノ小數點ヲ三位ダケ右ニ移ス換言スレハ各項ヲ1000倍ス

$$300x+200-125x=1750x-1375$$

$$1575x=1575$$

$$x=1$$

(c) $\frac{5x^2+x-3}{5x-4}=\frac{7x^2-3x-9}{7x-10}$

即　$x+\frac{5x-3}{5x-4}=x+\frac{7x-9}{7x-10}$

即　$\frac{5x-3}{5x-4}=\frac{7x-9}{7x-10}$

由テ　$1+\frac{1}{5x-4}=1+\frac{1}{7x-10}$

由テ $5x-4=7x-10$

$$x=3$$

(d) $$\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}=\frac{\sqrt{ax}-b}{a}-c$$

$$\sqrt{ax}-b=\frac{\sqrt{ax}-b}{a}-c$$

$$\left(\sqrt{ax}-b\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)=-c$$

由テ $$\sqrt{ax}-b=\frac{ac}{1-a}$$

$$\sqrt{ax}=b+\frac{ac}{1-a}$$

$$ax=\left(b+\frac{ac}{1-a}\right)^2$$

$$x=\frac{1}{a}\left(b+\frac{ac}{1-a}\right)^2$$

(e) $$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\{(1+x)^{\frac{1}{2}}+1\}^2}=3$$

$$\frac{x}{2}-2=\frac{x^2}{2\{(1+x)^{\frac{1}{2}}+1\}^2}$$

$$=\frac{x^2\{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\}^2}{2x^2}$$ 分母子ニ$\{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\}^2$ヲ乘ズ

即 $x-4=\{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\}^2$

$$=(1+x)-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+1$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=3$$

$$1+x=9$$

$$x=8$$

後ニ 1886年1月代數 9 ノ備考ニ至ラハ比例ノ理ヲ應用シ分數方程式ヲ簡畧ニスル法ヲ說ケルヲ見ン

(2) $$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{c}$$

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{c}=-\sqrt{x+b}$$

平方シ $x+a-2\sqrt{c(x+a)}+c=x+b$

由テ $2\sqrt{c(x+a)}=a-b+c$

平方シ $4cx+4ac=(a-b+c)^2$

$$x=\frac{(a-b+c)^2-4ac}{4c}$$

(3) 第二方程式ニ 64 ヲ乘ズレバ

$$8x+9\frac{1}{7}y=128$$

然ルニ $8x-7y=15$

減シテ $16\frac{1}{7}y=113$

$$y=7$$

第一式ニ依リ $x=8$

10. 或人金若干ヲ預ケントスルニ九拾六ニ付三個二分ノ一ノ利息ナルトキハ八拾八ニ付三個ノ利息ノトキヨリ五ぽんど多クノ歲入ヲ得ルコヲ發見セリ預ケントスル金高ヲ問フ

(a) 算術

或人ガ £96×88 ヲ積ムト假定ス

第一 £96 ノ利息＝£$3\frac{1}{2}$

∴ £96×88 〃 ＝£$3\frac{1}{2}$×88＝308

第二　£88 ノ利息＝£3

∴　£88×96　〃　＝£3×96＝288

差　＝20

サテ單比例ニ依テ

$$£20:£5::£96\times88:x$$

$$x=£2112 \quad \text{答}$$

(b) 代數

x ヲ積金高トス

$$\text{第一ノ利息}=\frac{x\times3\frac{1}{2}}{96}=\frac{7x}{192}$$

$$\text{第二}\quad〃\quad=\frac{x\times3}{88}=\frac{3x}{88}$$

$$\therefore\ \frac{7x}{192}-\frac{3x}{88}=5$$

$$x=2112$$

備考　株劵ニ關シテハ學ブヿノ正シカラザルヨリ計算ノ際甚シキ誤謬ニ陷ルヿアリ元來株劵ニ關スル問題ハタトヒ復雜ナルモノニモセヨ數條ノ原則ニ屬スルモノナレバ之ダニ充分了解スルトキハ甚シキ困難ヲ感スルヿナカランソ余ハ諸君ニ勸告ス某教科書ニ就キ定義ト説明トヲ讀ミタルトキハ雜題ニ移ル前先ツ次ノ諸問ニ習熟スベキヿヲ

第一　直接賣却

株劵ノ價九割二分四分ノ一ナルトキ七百二拾五ぱんどノ株劵ヲ何程ニ賣ルベシヤ

£100 ノ株劵ニ拂フベキ金＝£92¼

$$£725\quad〃\quad=\frac{92\frac{1}{4}\times725}{100}$$

$$=£668\ 16s\ 3d \quad \text{答}$$

第二　直接買収

八百二拾八ぱんど拾五之りんニテ九割七分二分ノ一ノ價ナル株劵何程ヲ買ヒ得ンヤ

£97½ ニテ買ヒ得ル株劵＝£100

$$£828\frac{3}{4}\quad〃\quad=\frac{100\times828\frac{3}{4}}{97\frac{1}{2}}$$

$$=£850$$

第三　仲買人ニ依テ賣却スルモノ

五百五拾ぱんどニテ手數料八分ノ一分ヲ拂ヒ九割二分二分ノ一ノ價ナル株劵ヲ賣ラバ實収何程ナリヤ

£100 ノ株劵ヨリノ實収＝£92⅜

$$£550\quad〃\quad=\frac{92\frac{3}{8}\times550}{100}$$

$$=£508\ 1s\ 3d \quad \text{答}$$

第四　仲買人ニ依テ買収スルモノ

六百四拾八ぱんど七之りん六ぺんすニテ手數料八分ノ一分ヲ拂ヒ九割二分二分ノ一ノ價ナル株劵何程ヲ買ヒ得ンヤ

手數料 $.00\frac{1}{8}$ ヲ拂フガ故ニ仲買人ニ渡スベキ金ハ

$$.92\frac{1}{2}+.00\frac{1}{8}=.92\frac{5}{8}$$

然ルトキハ

$£92\frac{5}{8}$ ニテ買ヒ得ル株劵＝£100

$£648\frac{3}{8}$ 〃 $=\frac{100\times648\frac{3}{8}}{92\frac{5}{8}}$

$=£700$ 答

第五　預金ヨリノ歳入

百拾二個二分ノ一ニ付三個二分ノ一ノ利息ニテ五百貳拾五ぽんどノ預金ヨリ得ラルベキ歳入如何

$£112\frac{1}{2}$ 預金ヨリ得ル利金$=£3\frac{1}{2}$

$£525$ 〃 $=\frac{3\frac{1}{2}\times525}{112\frac{1}{2}}$

$=£16\ 6s\ 8d$ 答

第六　預金ヨリ得ル割合

九拾六個四分ノ一ニ付三個二分ノ一ノ利息ノ預金ハ何割ナリヤ

是レ前題ノ一種ニ過キザルノミ

$£96\frac{1}{4}$ ノ預金ヨリ得ル利$=£3\frac{1}{2}$

$£100$ 〃 $=\frac{3\frac{1}{2}\times100}{96\frac{1}{4}}$

$=3\frac{7}{11}$ 答

第七　若干ノ歳入ヲ生スル爲ニ預クベキ金高

八拾四個八分ノ三ニ付三個ノ利息ニテ何程ヲ預ケバ年々百九拾五ぽんど拾五しりんノ收入アリヤ但シ手數料八分ノ一分

$£3$ ヲ生スル爲ニ預クベキ金高$=84\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$

$=£84\frac{1}{2}$

$£195\frac{3}{4}$ 〃 $=\frac{84\frac{1}{2}\times195\frac{3}{4}}{3}$

$=£5513\ 12s\ 6d$ 答

第八　預金ノ比較

九拾八個二分ノ一ニ付三個二分ノ一ノ利息ト九拾一個四分ノ一ニ付三個四分ノ一ノ利息トノ孰レニ預ケルカ利益アリヤ

何方ニモ $£98\frac{1}{2}\times91\frac{1}{4}$ ヲ預ケタルモノト假定ス

第一 $£98\frac{1}{2}$ ヲ預クルヨリ得ル利息$=£3\frac{1}{2}$

$£98\frac{1}{2}\times91\frac{1}{4}$ 〃 $=£3\frac{1}{2}\times91\frac{1}{4}$

$=£319\frac{3}{8}$

第二 $£91\frac{1}{4}$ 〃 $=£3\frac{1}{4}$

$£91\frac{1}{4}\times98\frac{1}{2}$ 〃 $=£3\frac{1}{4}\times98\frac{1}{2}$

$=£320\frac{1}{8}$

從テ $3\frac{1}{4}$ ノ方ニ預クルヲ利トス

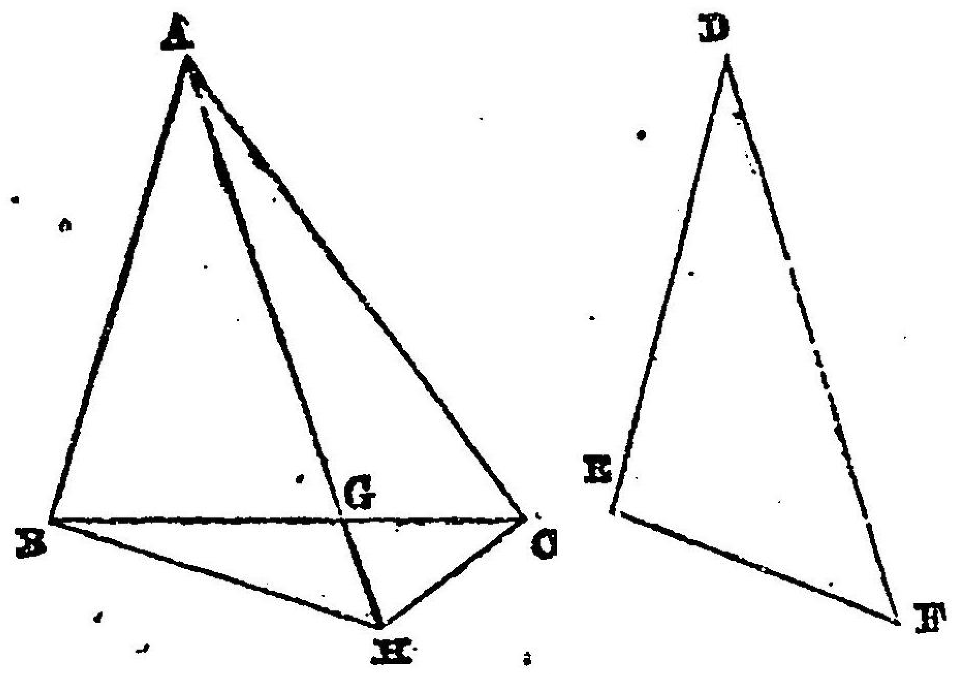
注意　若干ノ株金ヨリ生スル收入ヲ見出スルハ銀行ノ金ノ利子ヲ見出スト同シコナリ配當金ハ株劵ノ額面價ニ付テ拂ハルヽモノニシテ市價如何ニ關スルモノニアラザレバナリ

幾　何

1. 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク其ノ二邊ノ間ニ夾ム角ガ等シカラザル片ハ大角ヲ有スル三角形ノ底ハ他ノ底ヨリ大ナリ(1.24)

註　(I.24)ノ證明ハ次ノ如シ

二ツノ三角形ヲ ABC.DEF トシ AB ハ DE ニ, AC ハ DF ニ等シク角 BAC ハ角 EDF ヨリ大ナリトス然ル片ハ BC ハ EF ヨリ大ナルベシ



三角形ABC ニ於テAB ハ AC ヨリ小ナリトシ A ヨリ AG ヲ引キ角BAG ヲ角 EDF ニ等シカラシムレバAG ハ AC ヨリ小ナリ由テ AG ヲ延長シテ AH ヲAC 或ハ DF ニ等シカラシメ CH,BH ヲ結ブ

兩三角形BAH,EDF ハ二邊ト其ノ夾角相等シ之ニ由テ BH ハ EF ニ等シ

又AH ハ AC ニ等シ故ニ角AHC,ACH ハ相等シ

之ニ由テ角AHC ハ角 BCH ヨリ大ナリ故ニ角BHC ハ猶更 BCH ヨリ大ナリ然ルトキハ三角形BHC ニ於テ大ナル角BHC ニ對スル邊即BC ハ小ナル角 BCH ニ對スル邊即 BH ヨリ大ナリ

之ニ由テ BC ハEF ヨリ大ナリ

補 CH ヲ結ブコトナシ証明シ得ベシ即次ノ如シ

$$BG+GH>BH$$
$$AG+GC>AC$$

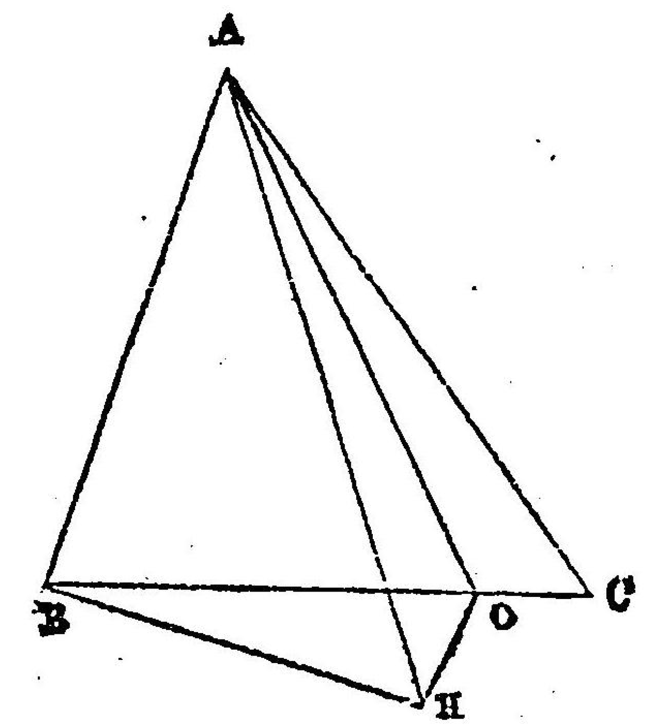
故ニ $BC+AH>BH+AC$

然ルニ $AH=AC$

故ニ $BC>BH$

又角HAC ヲ二等分スル線ヲ引キテ証明シ得ルコト次ノ如シ

角HAC ヲ二等分スル線ヲ AO トシ BC トノ會點ヲO トス OH ヲ結ブ



兩三角形AOH,AOC ハ二邊ト夾角相等シ故ニ OH=OC 然ルニBO+OH ハ BHヨリ大ナリ之ニ由テ BC ハ BHヨリ大ナリ

備考 "二邊DE,DF ノ中 DE ハ DF ヨリ大ナラズ" トイフ語ガナキトキハ此ノ問題ニ三ツノ場合アリ

(1) HガBC ト重ルトキハ BH ハ BC ヨリ短キハ勿論ナリ

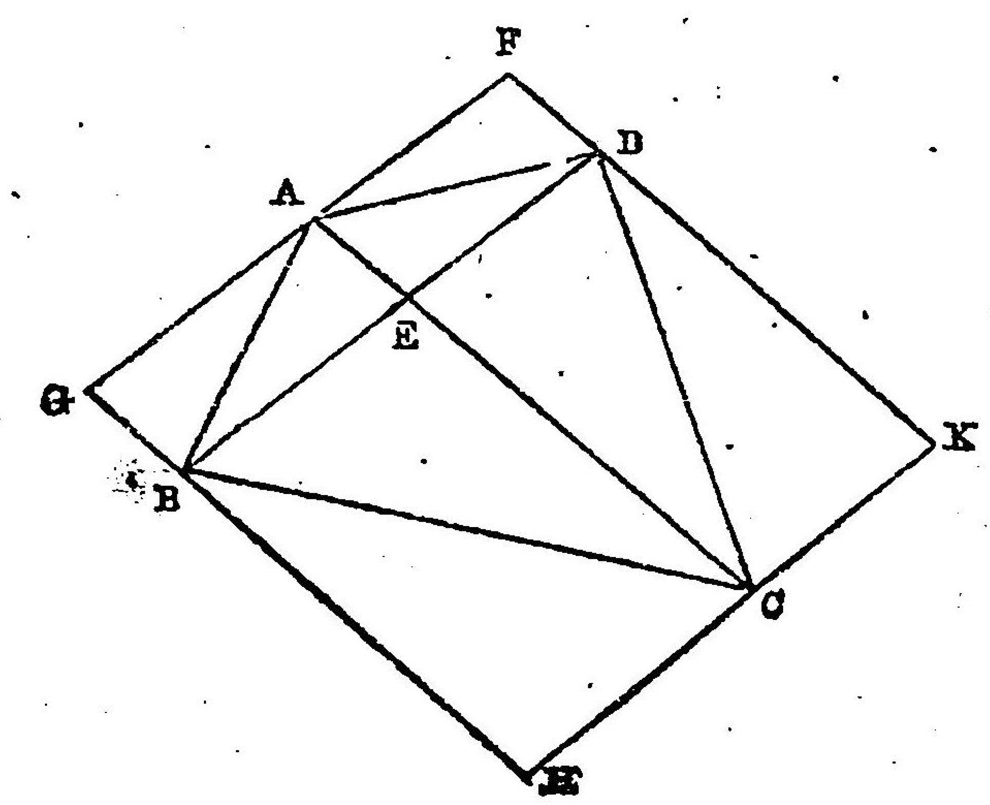
(2) H ガBC ノ A ト同シ側ニアルトキハ三角形ABHハ三角形ABC ノ内ニアリ何トナラハ角BAH ハ角 BAC ヨリ小ナレハナリ故ニ(1.21)ニ依テ

$$AH+BH<AC+BC$$

然ルニ $AH=AC$

故ニ $BH<BC$

註 (1.21)ハ1884年1月幾何5ヲ見ヨ



(3) H ガBC ノ A ト反對ノ側ニアルトキハ本問ニ於テ證明セル場合ナリ

2. 四邊形ノ各角點ヨリ其ノ對角線ニ平行ナル直線ヲ引キ平行四邊形ヲ作ルトキハ之ハ元形ノ二倍ナルコトヲ證セヨ

ABCD ヲ四邊形トシ A

C,BD ハ其ノ對角線ニシテ E ニ交ハルモノトス A,B,C,D ノ各ヲ通リ夫々 AC,BD ニ平行ナル直線ヲ引キ F,G,H,K ニ會セシム然ルトキハ FGHK ハ ABCD ノ二倍ナルベシ

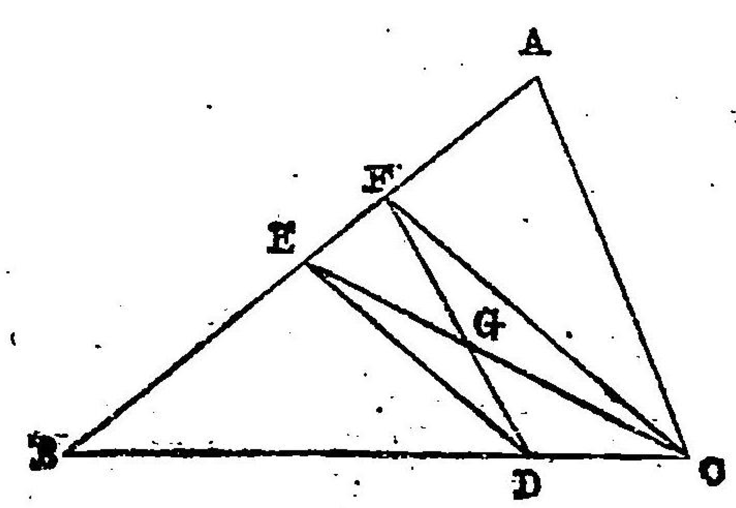
平行四邊形 FE ハ三角形 AED ノ二倍(I.34)
〃 GE ハ 〃 AEB ノ二倍
〃 HE ハ 〃 BEC ノ二倍
〃 KE ハ 〃 CED ノ二倍

之ニ由テ平行四邊形 FGHK ハ四邊形 ABCD ノ二倍ナリ

註 (I.34)ハ1883年6月幾何1ヲ見ヨ

3. 三角形ノ邊中ノ一點ヨリ其ノ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ク

ABC ヲ三角形トシ D ヲ BC 中ノ定點トス, AB ヲ E ニテ二等分シ CE, DE ヲ結ブ C ヲ通シテ DE ニ平行ニ CF ヲ引キ AB ト F ニ會セシメ DF ヲ結ブ,DF ハ ABC ヲ二等分スベシ



(I.37)ニ依テ三角形CDF ト三角形 CEF トヨリ共通ノ三角形 CGF ヲ除去スレバ三角形 CGD,EGF ハ相等シ各ニ四邊形 BDGE ヲ加フレバ三角形 BCE,BDF ハ相等シ然ルニ三角形 BCE ハ三角形 ABC ノ半ナリ由テ三角形 BDF モ三角形 ABC ノ半ナリ

註 (I.37) ハ"等底ニシテ同平行線間ニアル三角形ハ等積ナリ"

備考 此ノ作圖ニ於テハ CD ハ DB ヨリ小ナルモノト仮定セリ若シ CD ガ DB ト等シキトキハ AD ヲ結ベバ可ナリ若シ C

D ガ DB ヨリ大ナルトキハ F ハ AC 中ニアルベシ夫故始メ AB ノ代リニ AC ヲ二等分シ前ノ如クス

"如何ニセハ可ナリヤ"學者ノ問

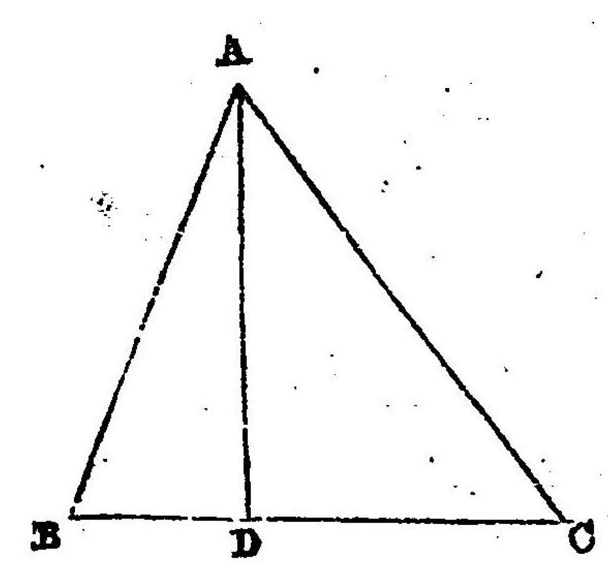
"圖ハ成レリトセヨ而シテ如何ナル要件アリヤヲ考ヘヨコハ幾何學ノ作圖題ヲ解スル普通ノ方法ナリ"

試ニ之ヲ行ハン, DF ハ ABC ヲ二等分トセンサテ我等ハ頂点ト底ノ中点トヲ結フ線ハ三角形ヲ二等分スルコトヲ知レリ夫故ニ AB ヲ E ニ於テ二等分シ CE ヲ結ブ而シテ DF トノ交点ニ G ト記ス

サレハ三角形 CEB ト DFB ト等シキコト明ナリ而シテBDGE ハ共通ナリ夫故 CGD, GEF ハ相等シ斯クナリ得ル為ニ必要ナル條件ハ何ゾ, CF,DE ヲ結ババ互ニ平行ナルコトハ容易ニ知ラレン是ニ由テ畫法ヲ得タリ

4. 任意ノ三角形ニ於テ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ其ノ角ヲ夾ム邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト其等ノ邊ノ一ツト其邊上ニアル他ノ邊ノ正射影トノ作ル矩形ノ二倍ニ等シ(II.13)

註 本題ノ證明ハ次ノ如シ



三角形ヲ ABC トシ角 C ヲ鋭角トス, A ヨリ垂線 AD ヲ下セバ AB 上ノ正方形ハ AC,BC 上ノ正方形ノ和ヨリ少キコト BC,CD ノ包ム矩形二倍ニ等シカルベシ

$BC^2+CD^2=BD^2+2BC.CD$ (II.7)

然ルニ $BD^2=AB^2-AD^2$

$$CD^2=AC^2-AD^2$$

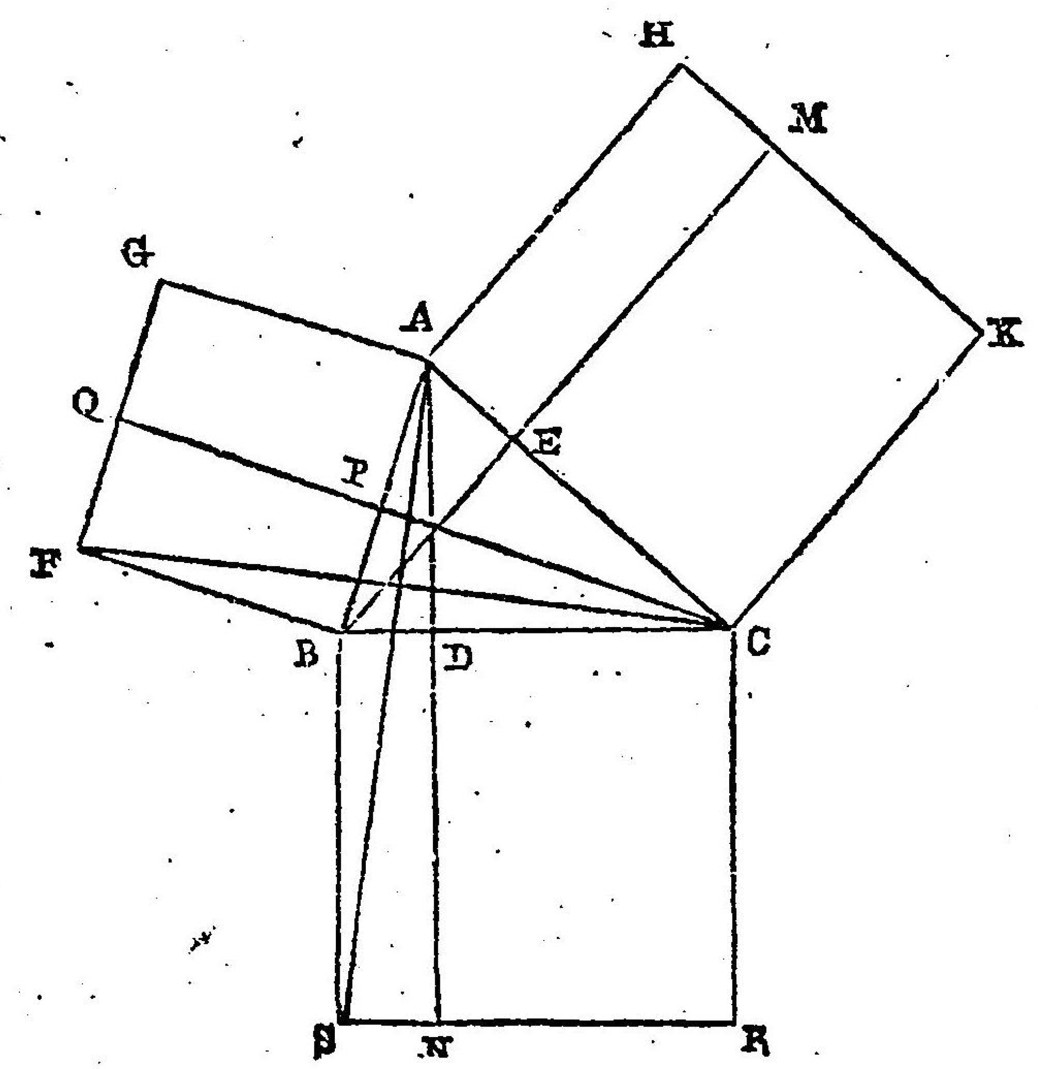
故ニ $BC^2+AC^2-AD^2=AB^2-AD^2+2BC.CD$

即 $BC^2+AC^2=AB^2+2BC.CD$

之ニ由テ $AB^2=AC^2+BC^2-2BC.CD$

補 (II.7)ハ"一線ヲ兩分シ全線ト一分線トノ上ノ正方形ノ和ハ他ノ分線ノ上ノ正方形ヨリ大ナルコ全線ト前ニ云ヘル分線トノ包ム矩形ノ二倍ナリ"

或ハ又次ノ如クニ證明シ得ラル



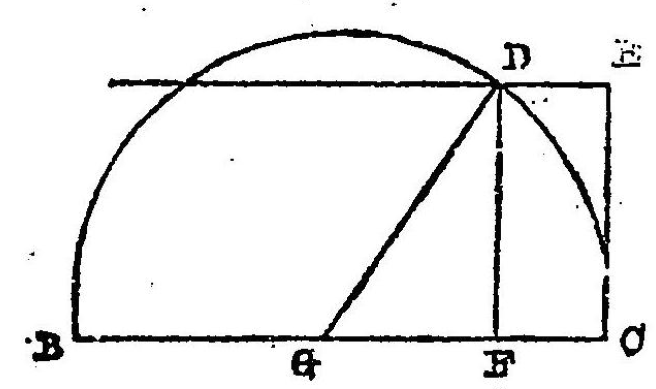
三邊上ニ正方形AF,AK,BRヲ畫キA,B,Cヨリ各對邊ヘ垂線AD,BE,CPヲ引キ引長ノ正方形ノ邊トN,M,Qニ會セシム又AS,CFヲ結ブ

三角形 ABS, FBCハ二邊ト夾角相等シ由テ等積ナリ然ルニ矩形PFハ三角FBCノ二倍ニメ矩形DSハ三角形ABSノ二倍ナリ之ニ由テ矩形PF,DSハ相等シ同様ニ矩形PG,EHハ相等シ故ニ正方形AFハ正方形BR,AKノ和ヨリ少キコ矩形DR, EKノ和ナリ，然ルニ矩形DR,EKハ相等シ故ニ其ノ和ハ矩形DRノ二倍ナリ 而シテ矩形DRハBC, CDノ包ム矩形ニ等シ之ニ由テ

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC.CD$$

5. 邊ノ和ト面積トヲ題セラレテ矩形ヲ畫ク法如何，不成立ノ場合アリヤ

Aヲ既知ノ面積トシBCヲ既知ノ邊ノ和トス



BC上ニ半圓BDCヲ畫キAニ等シキ正方形ヲ作リBCニ垂直ニCEヲ引キ正方形ノ一邊ト等シカラシムEヲ通シテBCニ平行ニEDヲ作リ圓周トDニ會セシメDヨリBCヘ垂線DFヲ引ク然ルトキハBF.FCハ所要ノ矩形ナリ

BCヲGニテ二等分シGDヲ結ブ然ルトキハ(II.5)ニ依テ

$$BF.FC+GF^2=GC^2=GD^2=GF^2+FD^2$$

故ニ $BF.FC=FD^2=CE^2=A$

而メ $BF+FC=BC$

此ノ作圖ハ若シ既知ノ面積カBCノ半分ノ上ノ正方形ヨリ大ナルトキハ不成立ナリ何トナラバEDハ圓周ト會セザルベキカ故ニ

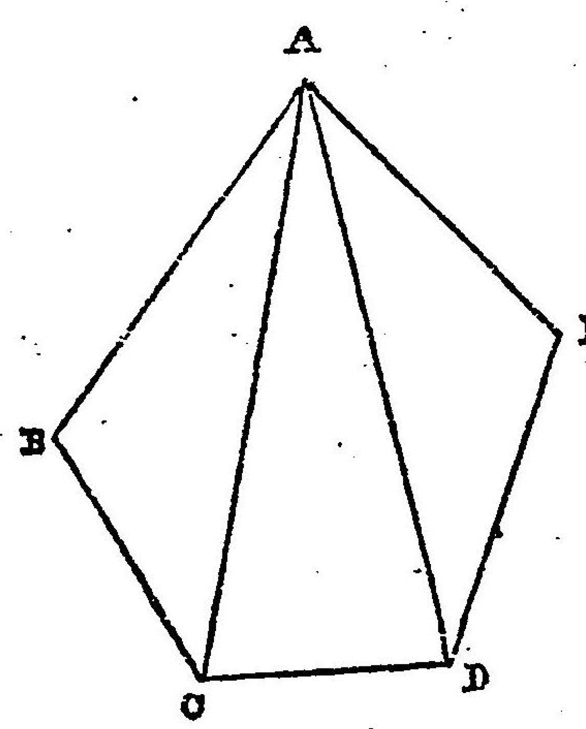
備考 此ノ作圖法ハ(II.14)ヨリ出ヅAガBCノ半分ノ上ノ正方形ヨリ大ナルトキハ此ノ作圖法ハ不成立ナリト云フハ(II.5)ヨリ推論セリ

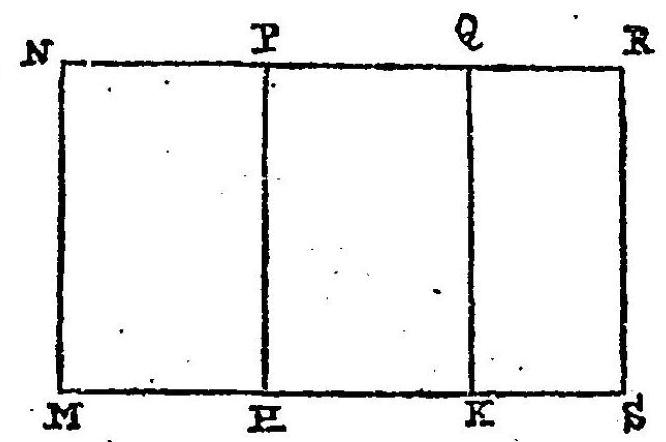
註 (II.5)ハ千八百八拾四年一月幾何6ノ註ヲ見ヨ

(II.14)ハ"既知直線形ニ等シキ正方形ヲ畫クコ"

此ノ作圖法ヲ説明スル前ニ必要ナル作圖法アリ即"既知直線形ト等積ニメ既知直線ヲ一邊トセル矩形ヲ畫クコ"之レナリ今此ノ法ヲ次ニ説明セム

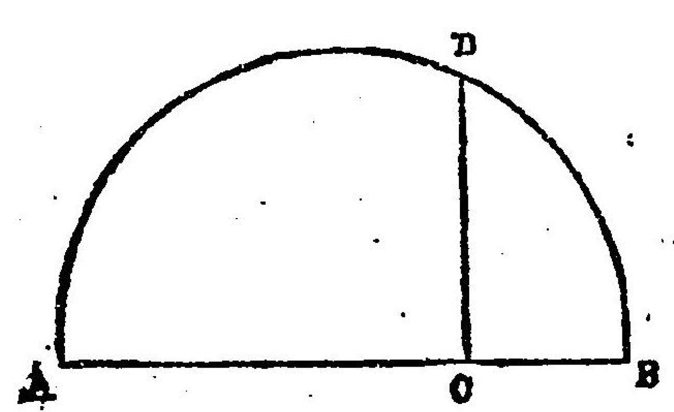
既知直線形ヲ五邊形ＡＢＣＤＥトシ既知直線ヲMNトス,角線AC,ADヲ作リ三角形ABCト等積ナル矩形MPヲMN上ニ畫ク(千八百八拾四年一月幾何2註)同法ニヨリテPH上ニ矩形HQヲ三角形ACDニ等シク作リ又QK上ニ矩形KRヲ三角形ADEニ等シカラシム然ルトキハ∠PHM, ∠HPN, ∠PHK等ハ各直角ナルカ故ニMHKS,NPQRハ一直線ヲナス故ニMRハ矩形ニシテ一邊MNヲ有スルモノナリ





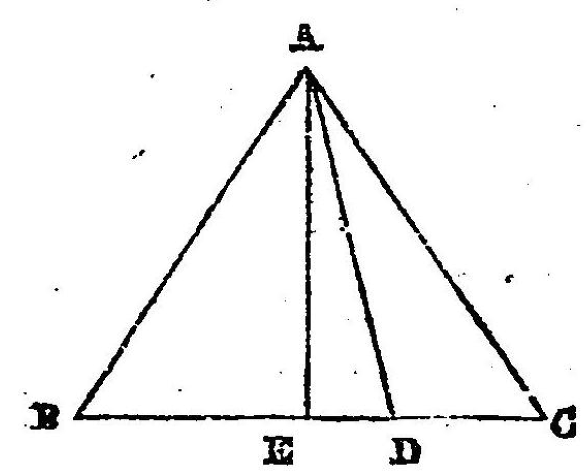
而シテMP=△ABC,HQ=△ACD,KR=△ADE故ニMR=ABCDEナリ

サテ本定理ノ作圖法ハ次ノ如シ



直線ACBヲシテAC=MS, CB=MNナラシメAB上ニ半圓ADBヲ畫キCヨリABニ垂線ニCDヲ引キ圓周トDニ會セシム然ルトキハCDハ矩形MRニ等シキ正方形ノ一邊ナリ即直線形ABCDEニ等シキ正方形ノ一邊ナリ

6. 二等邊三角形ABCノ底邊BC中ニ一點Dヲ選ミBD,DCノ矩形ハAC及ヒADノ上ノ正方形ノ差ニ等シキコヲ證セヨ



BCニ垂線ニAEヲ引ケBCハEニ於テ二等分セラル

$BD.DC+ED^2=EC^2$ (II.5)

即 $BD.DC=EC^2-ED^2$

今 $AC^2=AE^2+EC^2$ (I.47)

又 $AD^2=AE^2+ED^2$

是ニ由テ $AC^2-AD^2=EC^2-ED^2=BD.DC$

註 (II.5)ハ千八百八拾四年一月幾何6ヲ(I.47)ハ千八百八拾四年一月幾何3ヲ見ヨ

備考 二等邊三角形ノ頂角ヨリ底ニ垂線ヲ引クトキハ此ノ線ハ底邊及ヒ頂角ヲ二等分ス

ABCヲ二等邊三角形トシAEヲ垂線トス(前圖)然ルトキハ三角形ABE,ACEニ於テ二角ABE,AEBハ夫々ACE,AECニ等シク一邊AEハ共通ナリ是ニ由テBEハECニ等シク角BAEハ角CAEニ等シ

學者宜シク次ノ性質ヲ証スベシ

二等邊三角形ノ頂點ト底ノ中點トヲ結ブ直線ハ頂角ヲ二等分シ且底ト直角ニ交ハル

二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル線ハ底ヲ直角ニ二等分ス

頂角ヨリ底ニ引ケル直線ガ底ヲ直角ニ二等分スルトキハ其ノ三角形ハ二等邊ナリ

三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ガ底ヲモ二等分スルトキハ其ノ三角形ハ二等邊ナリ

7. 既知直線上ニ既知角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫ク法如何(III.33)

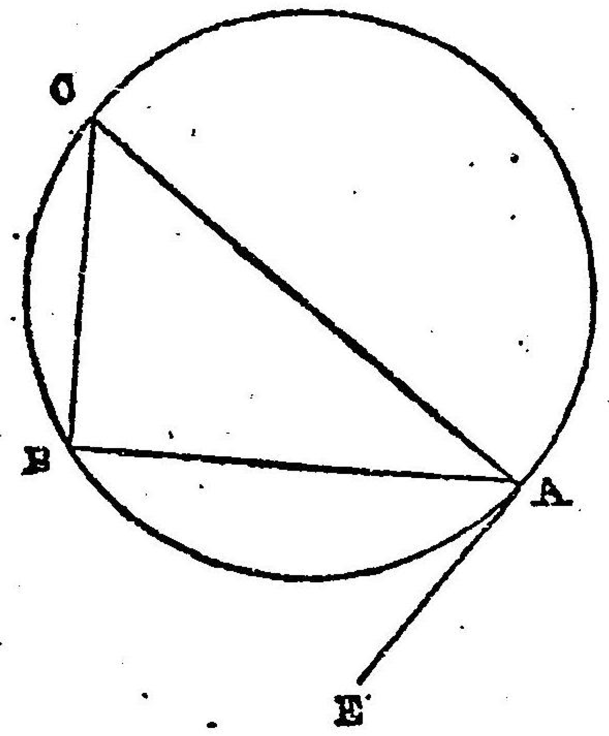
註　本題ノ證明ハ次ノ如シ

既知直線ヲ AB, 既知角ヲ X トス, AB 上ニ X ヲ含ム弓形ヲ畫クヿヲ求ム

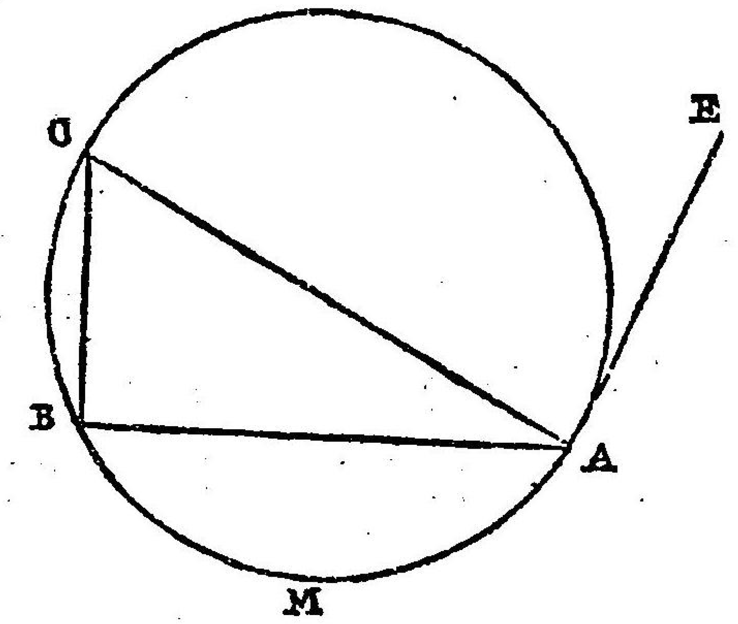
X 若シ直角ナルトキハ既知直線 AB 上ニ半圓ヲ畫クトキハコレ所要ノ弓形ナリ何トナラバ半圓内ニ於ケル角ハ直角ナレバナリ

X 若シ直角ナラザルトキハ X ニ等シキ角 BAE ヲ作リ AE ニ垂線 AC ヲ作リ AB ニ垂線 BC ヲ作リ AC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ク

第一圖



第二圖



AC ヲ直徑トセル圓ハ B ヲ通ル又 AE ニ切ス何トナラバ角 CAE ハ直角ナレバナリ故ニ角 ACB ハ角 BAE ニ等シ然ルニ角 BAE ハ X ニ等シ之ニ由テ ABC ハ所要ノ弓形ナリ(第一圖)

X 鈍角ナルトキハ所要ノ弓形ハ ABM ナリ(第二圖)

備考　此問題ニヨリテ底, 頂角, 高(從テ面積)ヲ知リテ三角形ヲ畫クヿヲ得

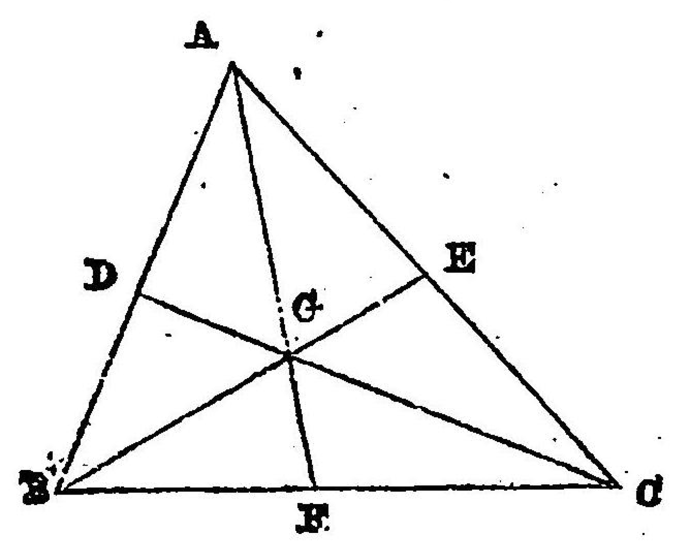
8. 底ノ位置, 大サ及ヒ頂角ノ大サヲ知リテ内接圓ノ中心ノ軌跡ヲ見出セ

内接圓ノ中心ハ兩底角ヲ二等分スル線ヲ引キ相會セシムル

ヿニテ知ラル何トナラバ本題ニ於テ頂角ハ定大ナル故兩底角ノ和モ定大ナリ從テ其ノ半分モ定大ナリ夫故兩折半線ニテ作レル角モ定大ナリ故ニ所要ノ軌跡ハ既知底上ニ畫カルヽ弓形ノ弧ナリ(III.21及23)

註　(III.21)ハ"同弓形ニ於ケル角ハ相等シ"(III.23)ハ"公弦ノ同側ニ在ル相等シキ弓形ハ相合スベシ"

9. 三角形ノ各頂ヨリ對邊ノ中點ヘ引ケル三直線ハ同一點ヲ通リ且互ニ三分ノ一ヅヽ切リ取ラル



ABC ヲ三角形トス, AB ヲ D, AC ヲ E, BC ヲ F ニテ二等分ス BE, CD ヲ結ヒ G ニ交ラシム AG 及 GF ヲ結ブ

$\triangle ABE = \triangle CBE$

又　$\triangle AGE = \triangle CGE$ (I.38)

故ニ　$\triangle BGA = \triangle BGC$

同理ニテ　$\triangle CGA = \triangle BGC$

由テ　$\triangle CGA = \triangle BGA$　然ルニ　$\triangle BGF = \triangle CGF$

由テ　$\triangle BGA + \triangle BGF = \frac{1}{2}\triangle ABC$

是ヲ以テ G ハ A, F ヲ結ブ線中ニアラザルベカラズ

又三角形 AGD, GDB, BGF ハ相等シキカ故ニ AGB ハ GBF ノ二倍ナリ夫故 AG ヲ H ニテ二等分シ BH ヲ結ブヿニヨリテ AG ハ GF ノ二倍ナルヿヲ證スルヿヲ得即 GF ハ AF ノ三分ノ一ナリ同樣ニ GD, GE ハ CD, BE ノ三分ノ一ナリ

註　(I.38)ハ千八百八拾三年六月幾何2ヲ見ヨ

注意　此定理ハ相似形ヲ用ヰテ容易ニ證明スルヿヲ得ソノ爲ニハユークリッド第六卷ノ智識ヲ要ス

註 ユークリッド第六巻ハ比例ナリ

備考 1. 三角形ノ各角ヲ二等分スル線ハ一點ニ會ス

ABC ヲ三角形トス角 ABC,ACB, ヲ BD,CD ニテ二等分シ D ニ會セシム AD ヲ結バハ角 BAC ノ二等分線ナルベシ

DE ヲ BC ニ,DF ヲ AB ニ及 DG ヲ AC ニ直角ニ引ク(IV.4)ニ依テ DE,DF,DG ノ相等シキコトヲ證スルコトヲ得然ルトキハ三角形 AFD,AGD ニ於テ

$$AD^2=AF^2+FD^2=AG^2+GD^2$$

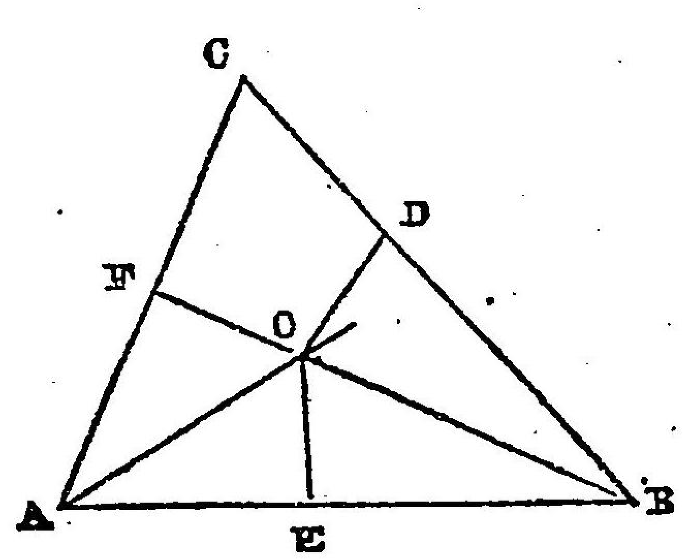
故ニ　$AF^2=AG^2$

而シテ　$AF=AG$

(I.4)ニ依テ　$\angle FAD=\angle GAD$

註 (IV.4)ハ"既知三角形ニ內切スル圓ヲ畫クコト"ナリ而シテ此ノ證明ハ次ノ如シ

既知三角形ヲ ABC トス角 A,B ヲ AO,BO 線ニテ等分スルトキハ其ノ交點 O ハ所要ノ圓ノ中心ナルベシ

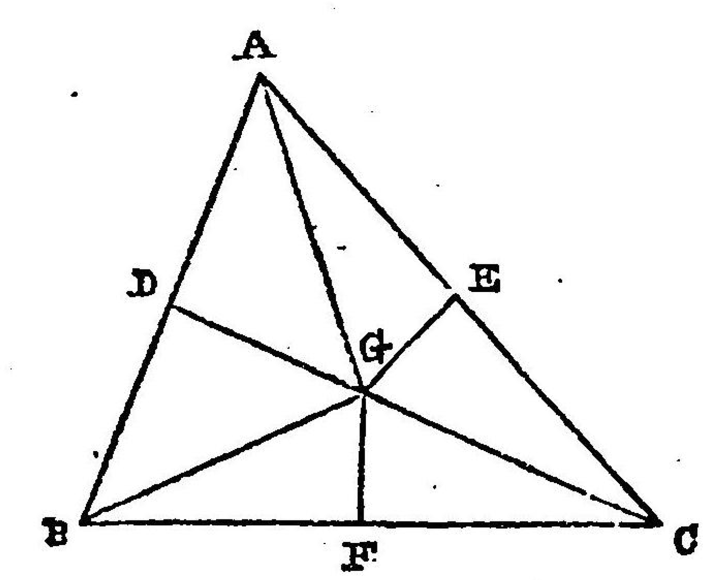


O ヨリ三角形ノ各邊上ニ垂線 OD,OE,OF ヲ引ク兩三角形 OAE, OAF ニ於テ角 OAE ハ角 OAF ニ等シク角 OEA,OFA ハ各全角ナルユヘ相等シ而シテ OA ハ兩形ニ通ス之ニ由テ OE ハ OF ニ等シ同樣ニ OE ハ OD ニ等シ即 OD,OE,OF ハ相等シ由テ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トシテ畫ク圓ハ D,F ヲ通ル且ツ角 OEA, OFA, ODB ハ直角ナルカ故ニ此圓ハ三角形ノ三邊ニ切ス即チ內切圓ナリ

(I.4)ハ千八百八拾四年一月幾何 1 ヲ見ヨ

備考 2. 三角形ノ各邊ノ中點ヨリ各邊ニ垂線ニ立ツル線ハ同一點ニ會ス

ABC ヲ三角形トス AB ヲ D,AC ヲ E,BC ヲ F ニテ二等分ス AB,AC ニ垂直ニ DG,EG ヲ引キ G ニ會セシム GF ヲ結ブ然ルトキハ GF ハ BC ニ垂直ナリ

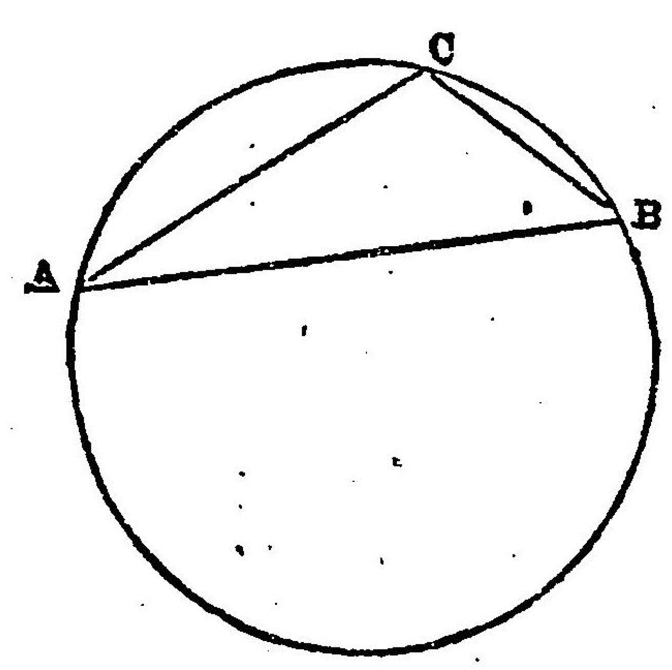


GA,GB,GC ヲ結ブニ此ノ三線ハ相等シ(IV.5)然ルトキハ三角形 BFG, CFG ニ於テ BF, BG ハ夫々 CF, CG ニ等シク FG ハ兩形ニ通ズ故ニ角 BFG,CFG ハ相等シ而シテ各直角ナリ

註 (IV.5)ハ千八百八拾四年一月幾何 10 ヲ見ヨ

10. 圓ヲ二ツノ弓形ニ分チ其ノ一ツニ含マルヽ角ガ他ノ弓形ニ含マルヽ角ノ九倍ナル如クセヨ且ツ之ガ證明ヲモ與ヘヨ

底角ノ各ガ頂角ノ二倍ナル三角形ヲ畫ク(IV.10)頂角ヲ二等分シ其ノ一ヲ x トス



サテ三角形ノ三角ノ和ハ二直角ニ等シク頂角ハ二直角ノ五分ノ一ナルガ故ニ x ハ二直角ノ十分ノ一ナルベシ

次ニ ABC ヲ所題ノ圓トス ABC 中ニ任意一弦 AB ヲ畫キ A ニ於テ x ニ等シキ角 BAC ヲ作ル BC ヲ結ブ BC

ハ望ミノ如ク圓ヲ分ツ

BC弧中ニ任意ニ一點Dヲ撰ミBD, CDヲ結ブ然ルトキハA BDCハ圓ニ內切スル四邊形ナルガ故ニ角BAC, BDCノ和ハ二直角ニ等シ然ルニ角BACハ二直角ノ十分ノ一ナリ故ニ角BDCハ二直角ノ十分ノ九ナリ之ニ由テ弓形BDC內ノ角ハ弓形BAC內ノ角ノ九倍ナルコトヲ知ル

註 (IV.10)ハ千八百八拾三年六月幾何9ヲ見ヨ

千八百八拾五年一月

試驗官 グリーンヒル氏
ベンヂヤミンウィルヤムソン氏

算術及代數

1. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$ ヲ $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$ ノ分數トシテ表ハセ且ツ $.\dot{0}\dot{6}$ ぎにあヲぽんどノ小數ニ化セ

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{40+48-45}{60}=\frac{43}{60}$$

$$\frac{2}{9}+\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{70+189-90}{315}=\frac{169}{315}$$

$$\frac{\frac{43}{60}}{\frac{169}{315}}=\frac{43}{60}\times\frac{315}{169}=\frac{903}{676}=1\frac{227}{676}\ \text{答(1)}$$

$$\frac{.\dot{0}\dot{6}\times21}{20}=\frac{1.\dot{2}\dot{7}}{20}=.06\dot{3}\qquad\text{答(2)}$$

註 1ぎにあは21しりん

2. 地球ノ周圍ハ四千万めーとるニシテ一めーとるハ三十九・三七〇七九いんちナリ地球ノ直徑ハ幾まいるナリヤ但シ圓ノ周ト直徑トノ比ハ355:113ト定ム

周圍$=40000000$めーとる

$=40000000\times39.37079$ いんち

$$=\frac{40000000\times39.37079}{36\times1760}\quad まいる$$

$$\therefore\quad 直徑=\frac{40000000\times39.37079\times113}{36\times1760\times355}$$

$=7912$ まいる(畧)

註 1やーどハ36いんち, 1まいるハ1760やーど

備考 本問ハ連鎖法ニテ解クコヲ得

まいる	$x=1$	直徑
直徑	$355=113$	周圍
周圍	$1=40000000$	めーとる
めーとる	$1=39.37079$	いんち
いんち	$36\times1760=1$	まいる

$$\therefore\quad x=\frac{113\times40000000\times39.37079}{355\times36\times1760}$$

$=7912$ (略)

3. $x=\dfrac{3.14159}{3600}$ ナルトキ x^2 及 x^3 ノ價ヲ小數第六位マデ算出セヨ

$$\frac{3.14159}{3600}=\frac{.0314159}{36}=.0008726\ldots\ldots$$

玆ニ x^2 ノ價ハ初ノ6位ノ0ナルコ明ナリ夫故唯8ヲ二乘セバ可ナリ

$x^2=.0000006\ldots\ldots=.000001$

同理ニテ $x^3=.000000\ldots\ldots$

4. 毎一はんどれつどうゑーとニ付二ぽんど三しりん一ぺんす二分ノ一ニメ毎梱一はんどれつどうゑーと一こーたー二

十一ぽんどノ綿六百五拾九梱ノ價如何

$1cwt\ 49\ lbs=1\frac{49}{112}cwt=1\frac{7}{16}cwt$

$£2\ 3s\ 1\frac{1}{2}d=43\frac{1}{8}s$

是ニ由テしりんニテノ價

$=659\times1\frac{7}{16}\times43\frac{1}{8}$

$=40852\frac{109}{128}$

$=£2042\ 12s\ 10\frac{17}{32}d$ 答

註 cwt ハはんどれつどうゑーと, qrs ハこーたー, lbs ハぽんどの符號

又 $1cwt=4qrs\ 1qrs=28\ lbs$

備考 本問ハ又次ノ如ク解スルコヲ得

(1) $1cwt\ 1qr\ 21\ lbs$ ヲ659倍シ

$1cwt : 1cwt\ qr\ 21\ lbs\times659 :: £2\ \ 3s\ 1\frac{1}{2}d : x$ 或ハ

(2) 先ヅ $1cwt\ 1qr\ 21lbs$ ノ價ヲ見出シ其ノ結果ヲ659倍ス

第二法ハ本文ノ解ノ如ク算セリ故ニ其ノ全キ運算ヲ下ニ示ス

cwt	qrs	lbs		$£$	s	d
1	0	0		2	3	$1\frac{1}{2}$
0	1	0	$1\ cwt$ ノ $\frac{1}{4}$	0	10	$9\frac{3}{8}$

0	0	14	1 *qrs* ノ $\frac{1}{2}$	0	5	$4\frac{11}{16}$	
0	0	7	14 *lbs* ノ $\frac{1}{2}$	0	2	$8\frac{11}{32}$	
1	1	21		3	1	$11\frac{29}{32}$	
						659	

£2042 12*s* $10\frac{7}{32}d$ 答

5. 三万四千九百六拾七ト十一分ノ二ノ平方根ヲ小數第四位マデ算出セヨ

$$\frac{2}{11}=.\dot{1}\dot{8}$$

	$34967.\dot{1}\dot{8}$ | 186.9	
	1	
	249	3738/35571/951
28	224	33642
	2567	19298
366	2196	18690
	37118	608
3729	33561	
	35571	

∴ 186.9951

備考　千八百八拾四年六月算術２ノ備考ヲ見ヨ且ツ下文ヲ讀メ

平方根ノ數字ノ數ガ所要ノ數字ノ數ノ過半數トナルトキハ其

ノ餘ハ除法ニテ算出スベシ

Nヲ某數トシ其ノ平方根ノ數字ノ數ハ $2n+1$ 個アリトス

a ヲ初メノ $n+1$ 個ノ數字アル數トス x ヲ次ノ n 個ノ數字アル數トス

然ルトキハ　$\sqrt{N}=a+x$

$$N=a^2+2ax+x^2$$

夫故ニ　$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}$

今 x ハ n 個ノ數字ヲ有ス故ニ x^2 ハ多クモ $2n$ 個ノ數字ヲ有ス而メ a ハ $n+1$ ノ數字ヲ有ス故ニ $2a$ ハ少クモ $2n+1$ 個ノ數字ヲ有ス由テ $\frac{x^2}{2a}$ ハ１ヨリ小ナルコ明ナリ

而メ　$\frac{n-a^2}{2a}=x+1$ 以内ノ數　換言スレハ $n+1$ 個ノ數字ヲ算出セル後ノ殘數 $n-a^2$ ヲ $2a$ ニテ除スルトキハ１以内ノ誤差ヲ有スル n 個ノ數字ヲ有スル商ヲ得

6. 次式ヲ最簡形ニ化セ

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)+(a-bc)(b-ca)(c-ab)}{1-abc}$$

$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=1-a^2-b^2-c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2c^2$

$(a-bc)(b-ca)(c-ab)=abc-b^2c^2-a^2c^2+abc^3-a^2b^2$
$\qquad+ab^3c+a^3bc-a^2b^2c^2$

是ニ由テ分子　$=1-a^2-b^2-c^2+2abc-abc+a^3bc+ab^3c$
$\qquad+abc^3-2a^2b^2c^2$
$\qquad=(1-a^2-b^2-c^2+2abc)(1-abc)$

夫故全式 $=1-a^2-b^2-c^2+2abc$

備考　此ノ結果ハ通常除法ニ由テ得ラルヽヿハ勿論ナリ他ノ法方ハ此式ヨリ推考セラル

$$(1-x)(1-y)(1-z)=1-(x+y+z)+(xy+xz+yz)-xyz$$

由テ $(1-a^2)(1-b^2)(1-a^2)=1-(a^2+b^2+c^2)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^2b^2c^2$

而ソ $(a-bc)(b-ca)(c-ab)=a\left(1-\dfrac{bc}{a}\right)b\left(1-\dfrac{ca}{b}\right)c\left(1-\dfrac{ab}{c}\right)$

$$=abc\left\{1-\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+(c^2+b^2+a^2)-abc\right\}$$

$$=abc\left\{1-\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}+(a^2+b^2+c^2)-abc\right\}$$

$$=abc-(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)+abc\{(a^2+b^2+c^2)-abc\}$$

由テ 分子$=(1+abc-2a^2b^2c^2)-(a^2+b^2+c^2)(1-abc)$

$$=(1+2abc-a^2-b^2-c^2)(1-abc)$$

夫故 全式$=1-a^2-b^2-c^2+2abc$

7. A ト B トニテハ二十四時間 A ト C ニテハ三十時間 B ト C トニテハ四十時間ニテ或ル業ヲ成シ遂クベシ各別ニセバ幾時ヲ要スヤ

A,B ハ一時間ニ一業ノ $\dfrac{1}{24}$ ヲナス

A,C 〃 $\dfrac{1}{30}$ 〃

B,C 〃 $\dfrac{1}{40}$ 〃

夫故 B ト C トノ一時間ノ仕事ノ差ハ

$$\frac{1}{24}-\frac{1}{30}=\frac{1}{120}$$

而ソ B ト C トニテハ一時間ニ一業ノ $\dfrac{1}{40}$ ヲナス

夫故 B ノ如キ人二人ニテハ一時間ニ一業ノ

$$\frac{1}{120}+\frac{1}{40}=\frac{1}{30} \text{ ヲナス}$$

故ニ B ハ一時間ニ一業ノ $\dfrac{1}{60}$ ヲナス

夫ヨリ C 〃 $\dfrac{1}{120}$ 〃

A 〃 $\dfrac{1}{40}$ 〃

故ニ B ハ 60 時間ニ一業ヲナス

C ハ 120 〃

A ハ 40 〃

備考　代數ニテハ

x, y, z ヲ夫々 A, B, C ノ一業ヲナシ遂クル時間トセバ $\dfrac{1}{x}$ ノ $\dfrac{1}{y}$ ノ $\dfrac{1}{z}$ ハ各一時間ノ業ナリ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{40}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) ト (2) トヨリ $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{120}$

然ルニ $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{40}$

加ヘテ $\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{30}$ $\quad\therefore\quad y=60$

減ジテ $\dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{60}$ $\quad\therefore\quad z=120$

由テ(1)ヨリ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{40}$ $\quad\therefore\quad x=40$

8. 次ノ方程式ヲ解ケ

$$2x+4y+3z=0 \ldots\ldots(1)$$
$$x-2y-z=20 \ldots\ldots(2)$$
$$3x+2y-z=32 \ldots\ldots(3)$$

$$2x+4y+3z=0 \ldots\ldots(1)$$
$$2x-4y-2z=40 \ldots\ldots(2) \text{ ヨリ}$$
$$8y+5z=-40 \ldots\ldots(4)$$

又
$$3x+2y-z=32 \ldots\ldots(3)$$
$$3x-6y-3z=60 \ldots\ldots(2) \text{ ヨリ}$$
$$8y+2z=-28 \ldots\ldots(5)$$
$$8y+5z=-40 \ldots\ldots(4)$$
$$3z=-12 \qquad \therefore \quad z=-4$$

(4)ヨリ $8y-20=-40$ $\quad\therefore\quad y=-2\frac{1}{2}$

(2)ヨリ $x+5+4=20$ $\quad\therefore\quad x=11$

或ハ

(1)ト(2)トヲ加ヘテ $3x+2y+2z=20$

然ルニ(3)ヨリ
$$3x+27-z=32$$
$$3z=-12$$

9. 九十ヲ四分シ第一ニ二ヲ加ヘタルモノト第二ヨリ二ヲ減ジタルモノト第三ニ二ヲ乗シタルモノト第四ヲ二ニテ除シタルモノト相等シカルベカラシメヨ

xヲ等數トス然ルトキハ $x-2, x+2, \dfrac{x}{2}$ 及 $2x$ ハ所要ノ諸部分ナルベシ

故ニ $x-2+x+2+\dfrac{x}{2}+2x=90$

即 $4\dfrac{1}{2}x=90$

$$x=20$$

故ニ諸部分ハ 18, 22, 10, 40 ナリ

10. 次ノ級數ノ和如何

(1) $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots\ldots+2^nx^n$

(2) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+nx^{n-1}$

(1)ハ等比級數ニシテ $a=1, r=2x$ 及 n(頂數)$=n+1$

是ニ由テ $s=\dfrac{2^{n+1}x^{n+1}-1}{2x-1}$

(2) $s=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+nx^{n-1}$
$$xs=\quad x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$
$$(1-x)s=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}-nx^n$$

然ルニ $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots n$頂マデ$=\dfrac{x^n-1}{x-1}$

夫故 $(x-1)s=nx^n-\dfrac{x^n-1}{x-1}$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x-1}$$

$$s=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

備考　級數ノ和ヲ求ムルコハ其用廣ク且大切ナルモノニテ高等數學ノ大部ヲ占ム單ニ等差級數及等比級數ノミニ由ルモ尚次ノ如キ面白キ結果ヲ得

(1)　$1+4+9+16+\cdots\cdots n$ 項マデノ和ヲ求メヨ

級數 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots n$ 項ニ至ルトス

今 $$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$

上ノ方程式ノ凡テヲ加フルトキハ

$$n^3=3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-3(1+2+\cdots\cdots+n)+n$$
$$=3s-\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

即 $$3s=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n$$

$$\therefore\quad s=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2)　$1+8+27+64+\cdots\cdots n$ 項マデノ和ヲ求ム

級數 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots n$ 項ニ至ル＝s トス

今 $$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$$
$$(n-1)^4-(n-2)^4=4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^4+4.1-1$$

上ノ方程式ノ凡テヲ加フレバ

$$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^4)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n$$
$$=4s-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n$$

即 $$4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$
$$=n^4+2n^3+n^2$$
$$=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore\quad s=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad or\quad \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(3)　$1-5+9-13+\cdots\cdots n$ 項マデノ和ヲ求ム

第一ト第二トニテ -4

第三ト第四トニテ -4

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是ニ由テ n ガ偶數ナルトキハ和$=\frac{n}{2}\times-4=-2n$

n ガ奇數カ〃　和$=\left(\frac{n-1}{2}\times-4\right)+4n-3$

$$=2n-1$$

(4) $1.2+2.3+3.4+4.5+\cdots\cdots n$項マデノ和ヲ求ム

$$和=(1+1)+(2+4)+(3+9)+\cdots\cdots$$
$$=(1+2+3+\cdots\cdots)+(1^2+2^2+3^2\cdots\cdots)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1}{6}$$
$$=n(n+1)\left\{\frac{1}{2}+\frac{2n+1}{6}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(5) $3+33+333+\cdots\cdots n$項ニ至ル和ヲ求ム

$$3=\frac{3(10-1)}{10-1}$$
$$33=\frac{3(10^2-1)}{10-1}$$
$$333=\frac{3(10^3-1)}{10-1}$$

等

是ニ由テ $s=\frac{3}{9}(10+10^2+10^3+\cdots\cdots+10^n)-\frac{3}{9}n$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{1}{3}n$$
$$=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$$

(6) $\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4-\frac{1}{4}\right)^2+\left(8-\frac{1}{8}\right)^2+\cdots\cdots n$項マデノ和ヲ求ム

$$s=\left(2^2-2+\frac{1}{2^2}\right)+\left(2^4-2+\frac{1}{2^4}\right)+\left(2^6-2+\frac{1}{2^6}\right)+\cdots\cdots$$
$$=(2^2+2^4+2^6+\cdots\cdots)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots\right)-2n$$
$$=\frac{2^2(2^{2n}-1)}{(2^2-1)}+\frac{\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{2^2}-1}-2n$$
$$=\frac{2^2}{3}(2^{2n}-1)+\frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n}}-2n$$
$$=(2^{2n}-1)\left(\frac{2^2}{3}+\frac{1}{3.2^{2n}}\right)-2n$$
$$=\frac{(2^{2n}-1)(2^{2n+2}+1)}{3.2^{2n}}-2n$$

(7) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots n$項マデノ和ヲ求ム

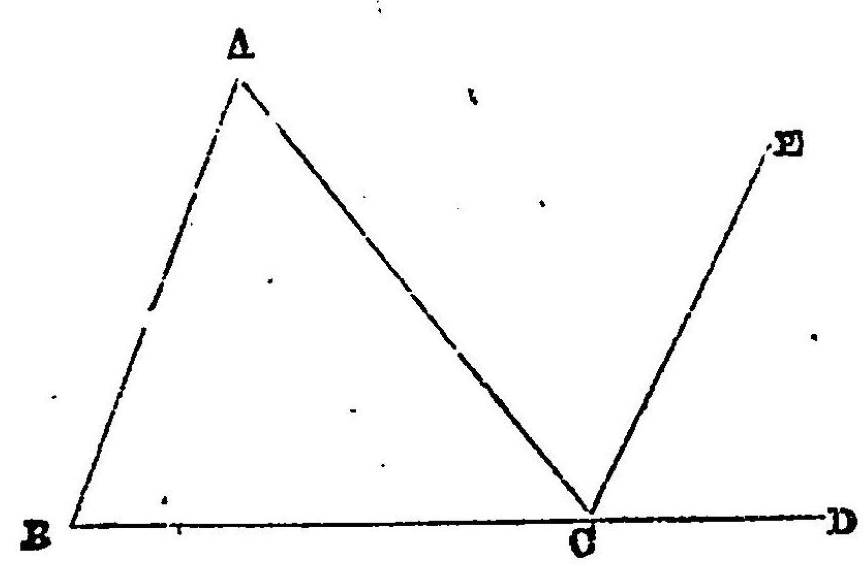
$$s=\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+\cdots\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{1.2}+\frac{3}{2.3}+\frac{4}{3.4}+\cdots\cdots\right)-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{3.4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}$$

此等ノ例ハ何程ニテモ増スヿヲ得而〆方程式ノ解法ト同ジク殆無數ナリ

幾　何

1. 任意三角形ニ於テ一外角ハ兩內對角ノ和ニ等シキコヲ證セヨ(1.32ノ一部)

此定理ノ證明ハ次ノ如シ



三角形ヲABCトス一邊BCヲDニ延長セハ外角ACDハ兩內對角CAB, ABCノ和ニ等シ

ABト平行ニCEヲ引ク然ルトキハ角ACEハ角CABニ角DCEハ角ABCニ等シ(1.29)故ニ角ACDハ角CAB, ABCノ和ニ等シ

補(1.29)ハ"一直線二平行線ニ交ルトキハ(甲)內錯角ハ互ニ相等シ(乙)同位角ハ互ニ相等シク(丙)同傍內角ノ和ハ二直角ニ等シ

備考　此命題ノ次ノ系說ハ甚大切ナルモノナリ

(1)　任意ノ三角形ハ唯一ツノ直角若クハ鈍角ヲ有スルコヲ得

(2)　任意ノ三角形ハ一角直角ナルトキハ他ハ銳角ナリ

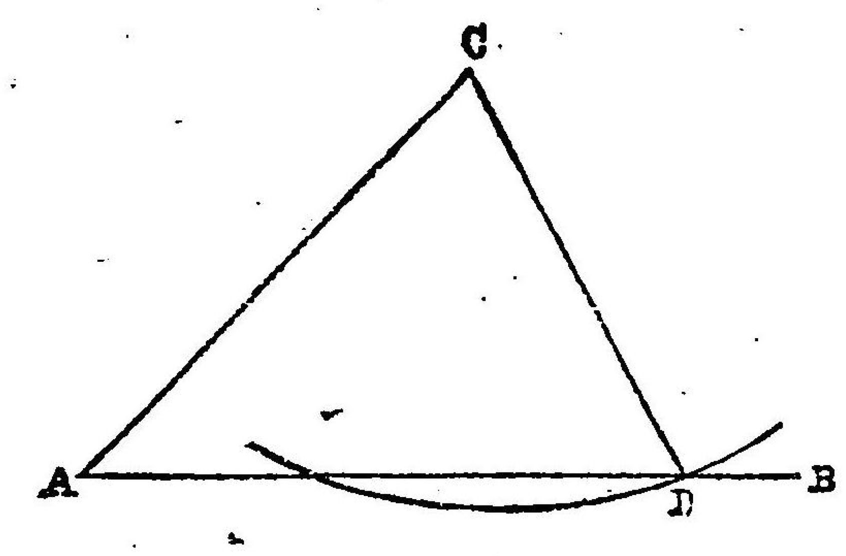
(3)　二等邊直角三角形ニ於テ各底角ハ二分ノ一直角ナリ

(4)　等邊三角形ノ各角ハ三分ノ二直角ナリ

(5)　三角形ノ二角ノ和ガ他ノ三角形ノ二角ノ和ニ等シキトキハ第三角ハ相等シ

2. 二邊ト其ノ一邊ニ對スル角ヲ知リテ三角形ヲ畫クノ法如何又問フ如何ナル場合ニハ不定ナリヤ

直線ABヲ引キA點ニ於テ既知角ニ等シキ角BACヲ作リCAヲ既知一邊(既知角ニ對セサル)ニ等シクスCヲ中心トシ



他ノ既知一邊ニ等シキCDヲ半徑トシ弧ヲ畫キABト交ラシムCト点交トヲ結ブ

今CDガCヨリABニ下セル垂線ヨリ短キトキハ弧ハABト交ラザルベシ而シテ三角形ハ成立セズ

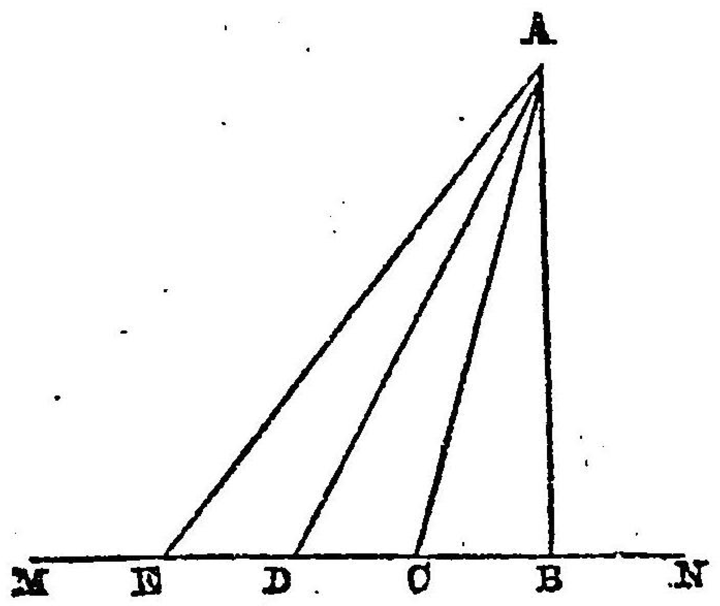
又CDガ垂線ニ等シキトキハABハ弧ニ切ス而シテ三角形ハ直角三角形ナリ

又CDガ垂線ヨリ大ナルトキハ弧ハABト二点ニテ交ルベシ而シテ其ノ交点ガCAノ同一ノ側ニ在ルトキハ題意ニ合スル二個ノ三角形ヲ得

又CDガ垂線及CAヨリ大ナルトキハ弧ハAB及同線ノ延長部トCAノ両側ニ於テ交ルベシ而シテ唯一ツノ三角形ノミ要件ニ適ス

備考　一点ヨリ一直線ニ引ケル諸直線ノ中垂線ハ最モ短ク而シテ其ノ餘ノ線ノ中垂線ニ近キモノハ遠キモノヨリ短シ

Aヲ直線MN外ノ一点トスAヨリMNニ垂線ニABヲ引キ其他AC.AD.AEヲ引ク然ルトキハABハ此等諸線中最短ナルベク ABニ近キACハADヨリ短クAEハADヨリ長カルベシ



何トナラバ三角形 ABD ニ於テ角 ABD ハ直角ナルガ故ニ外角 ADE ハ鈍角ナリ(1.32)是ニ由テ ADB ハ鋭角ナリ AED ハ尚更鋭角ナリ然ルニ ADE ハ鈍角ナリ故ニ AE ハ AD ヨリ長シ(1.19)同樣ニ AD ハ AC ヨリ長キコトヲ證スルヲ得又 ABC ハ直角 ACB ハ鋭角ナルガ故ニ AC ハ AB ヨリ長シ

此定理ノ助ケニ由テ次ノコトヲ示シ得

同一ノ点ヨリ一直線ニ二條ノ相等シキ直線ヲ引クコトヲ得而シテ兩相等線ハ垂線ノ兩側ニアリ

註(1.32)ハ"任意三角形ニ於テ一邊ヲ延長シテ作ル所ノ外角ハ兩內對角ノ和ニ等シ三內角ノ和ハ二直角ニ等シ"(1.19)ハ"三角形ノ二角相等シカラサルトキハ其ノ大角ニ對スル邊ハ小角ニ對スル邊ヨリ大ナリ"

3. 直角三角形ニ於テ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ(1.47)

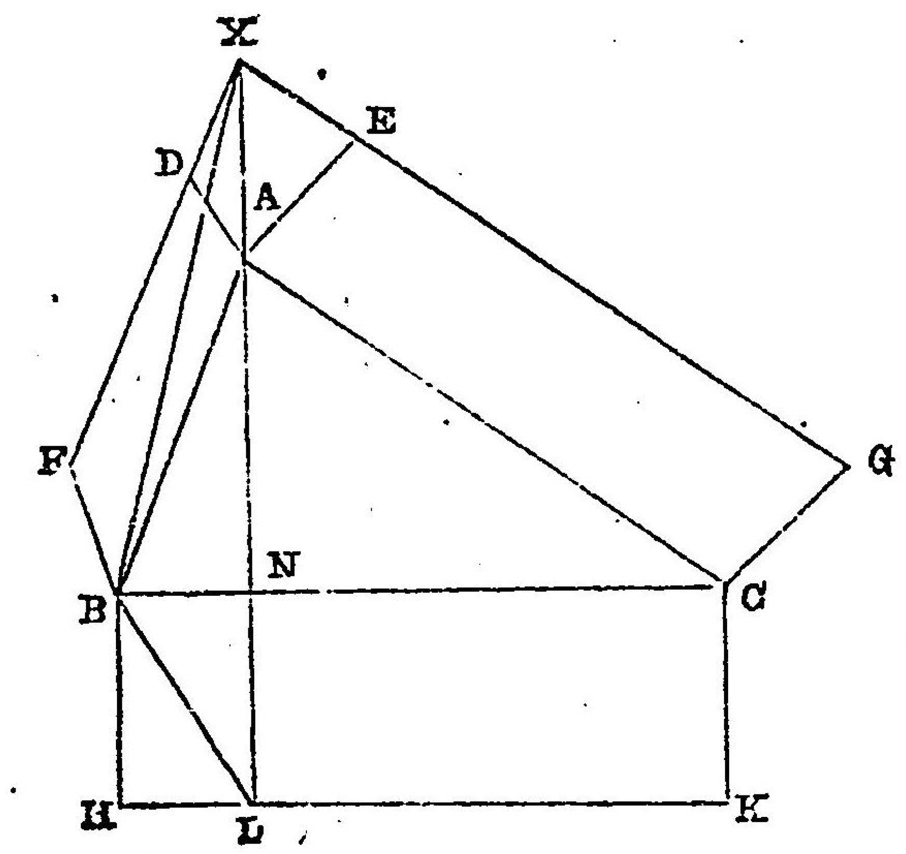
備考 千八百八拾四年一月幾何 3 ノ備考及次ヲ見ヨユークリッドハ第六卷命題 31 ニ至テ此命題ノ普通ナルモノヲ揭ケタリ

次ノ命題ハ本題ニヨリ猶一層廣濶ナルモノナリ

任意ノ三角形ニ於テ角 A ヲ夾ム邊 AB.AC ノ上ニ平行四邊形ヲ書キ AB.AC ニ平行セル邊ヲ延長シテ X ニ會セシメ AX ヲ結ビ AX ニ平行ニ且ツ之ニ等シキ邊ヲ有スル平行四邊形ヲ BC 上ニ書クトキハ BC 上ノ平行四邊形ハ他ノ邊上ノ平行四邊

形ノ和ニ等シ

題意ノ如ク作圖ス ABFD ハ AB 上ノ平行四邊形 ACGE ハ AC 上ノ平行四邊形又 BHKC ハ BC 上ノ平行四邊形トス, XA ヲ延長シテ BC ニ N ニ, HK ニ L ニ會セシメ XB, BL ヲ結ブ



今三角形 BAX, BNL ハ等底 AX, NL ヲ有シ且ツ等高ナル故相等シ然ルニ平行四邊形 AF ハ三角形 BAX ノ二倍又平行四邊形 HN ハ三角形 BNL ノ二倍ナリ由テ平行四邊形 AF, HN ハ相等シ同樣ニ平行四邊形 CE, KN ハ相等シ是ニ由テ BC 上ノ平行四邊形ハ AB, AC 上ノ平行四邊形ノ和ニ等シ

4. 二直線ノ和ト差トノ矩形ハ其ノ二線ノ上ノ正方形ノ差ニ等シキコトヲ證セヨ

備考 千八百八拾四年一月幾何 6 及其ノ備考ヲ見ヨ

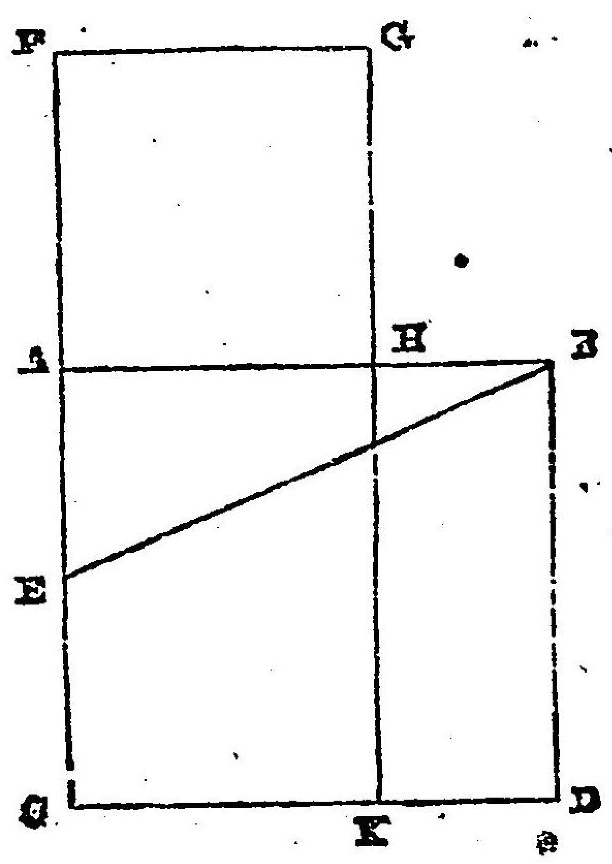
5. 一直線ヲ二分シ其ノ一部分ト全線トノ矩形ガ他ノ一部分ノ上ノ正方形ニ等シカルベカラシメヨ

備考 1. 此ハ一線ヲ中外比例ニ分ツニ同シ即(VI.30)ニ同シ全線ト其ノ一部分トノ上ノ正方形ノ和ハ他ノ部分ノ上ノ正方形ノ三倍ナルコトヲ容易ニ示スコトヲ得

補 本題ノ作圖ハ次ノ如シ

既知ノ有限直線 AB ヲ H ニ於テ二分シ AB, HB ノ矩形ヲシテ AH 上ノ正方形ニ等シカラシムルコトヲ求ム

AB上ニ正方形 AD ヲ畫キ AC ノ中點トBヲ結ビ EA ヲ延長シテ EF ヲ EB ニ等シカラシメ AF 上ニ正方形 AH ヲ畫クトキハ H ハ所要ノ點ナリ



GH ヲ延長シテ CD ト K ニ交ハラシム, E ハ AC ノ中點ナルガ故ニ

$CF.AF+AE^2=EF^2$ (II.6)

然ルニ　$EF^2=EB^2$

$=AE^2+AB^2$

故ニ

$CF.AF+AE^2=AE^2+AB^2$

由テ　$CF.AF=AB^2$

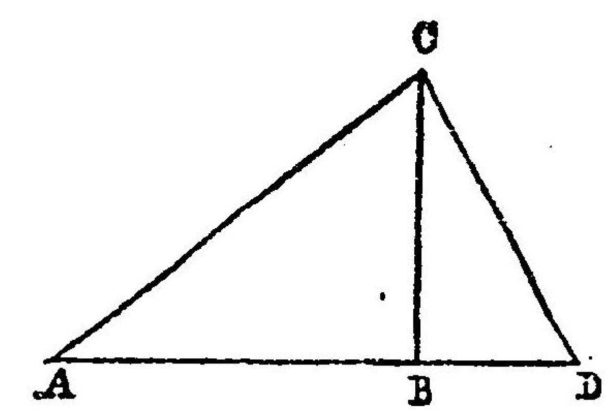
而シテ AF=FG ナルガ故ニ矩形 CG ハ正方形 CB ニ等シ之ニ由テ矩形BK ハ正方形 GA ニ等シ即チ AB.BH ノ矩形ハ AH ノ上ノ正方形ニ等シ

今 $AB{\cdot}BH=AH^2$ ヨリ AB : AH :: AH : BH ヲ得即 (VI.30) ナリ

又上ノ證明中 (II.6) ハ "一線ヲ二等分シ又之ヲ任意ノ點ニテ外分スルトキハ二ツノ部分ノ矩形ト半線上ノ正方形トノ和ハ中點ト外分點トノ間ノ線ノ上ニ作レル正方形ニ等シ"

備考2. 一線ヲ延長シテ元線ト延長部トノ矩形ヲ他ノ既知線上ノ方形ニ等シカルベカラシメヨ

AB ト X トヲ二既知線トス AB ニ直角ニ BC ヲ引キ BC ヲ X ニ等シカラシメ AC ヲ結ビ AC ニ直角ニ CD ヲ引キ AB ノ延長ト D ニ會セシム然ルトキハ矩形 AB·BD ハ X 上ノ正方形ニ



等シカルベシ

$AD^2=AB^2+BD^2+2AB.BD$

$AD^2=AC^2+CD^2$

$=(AB^2+BC^2)+(BD^2+BC^2)$

$=AB^2+BD^2+2BC^2$

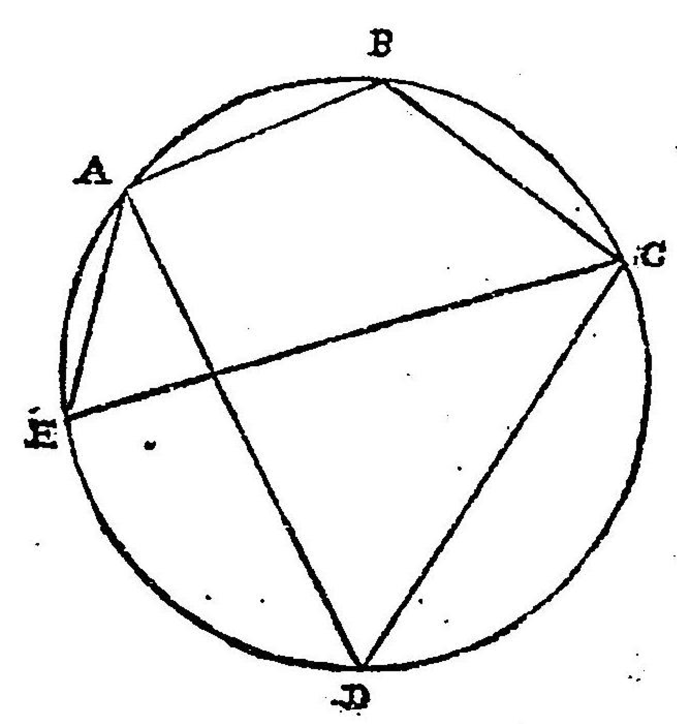
由テ　$2AB.BC=2BC^2$

故ニ　$AB.BD=X^2$

6. 四邊形ノ對角ノ一對ガ他ノ一對ニ等シカラサルトキハ之ニ外接スル圓ヲ畫クヿ能ハサルヿヲ證セヨ

四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ナリ今對角ノ一對ノ和ガ他ノ一對ノ和ヨリ大ナルトキハ其大ナル方ノ一對ノ和ハ二直角ヨリ大ナリ

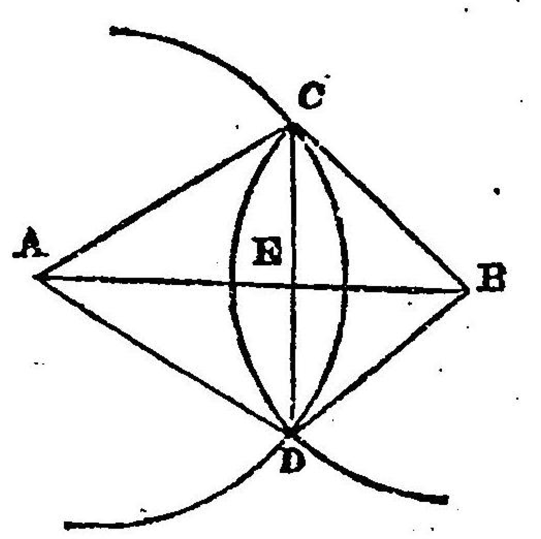
四邊形 ABCD ニ於テ、ABC, ADC ナル一對ノ對角ノ和二直角ヨリ大ナルモノトセン ABCD ニ外接圓ヲ畫クヿ能ハス



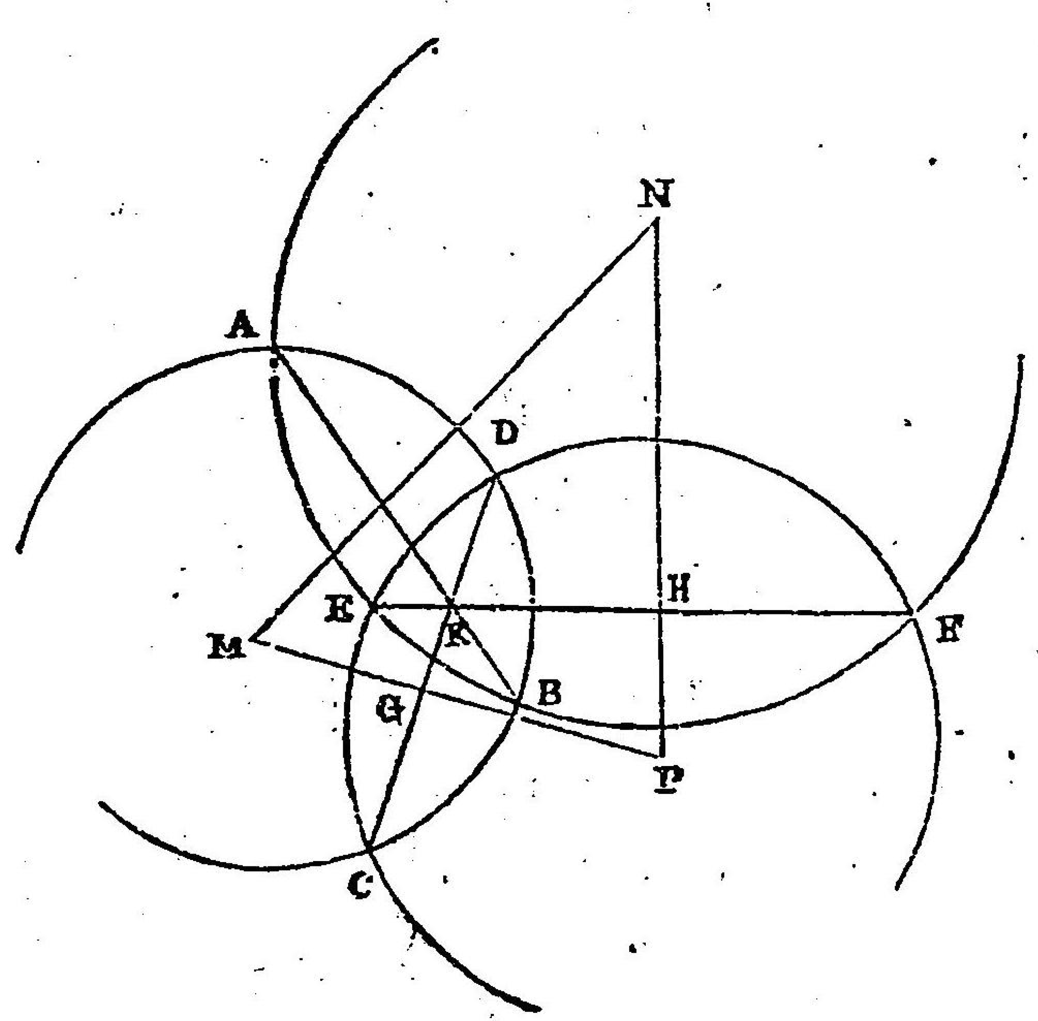
假ニ畫キ得ルモノトシ弧 AD 中ニ點 E ヲ撰ミ AE,EC ヲ結ヘバ ABCE ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ故ニ角 ABC, AEC ノ和ハ二直角ニ等シ然ルニ角 ABC,ADC ノ和ハ二直角ヨリ大ナリ夫故角 ABC,ADC ノ和ハ角 ABC, AEC ノ和ヨリ大ナリ從テ角 ADC ハ角 AEC ヨリ大ナラザルベカラス然ルニ此ノ兩角ハ同弓形內ニアリ是レ不合宜ナリ夫故 ABCD ニハ外切圓ヲ畫クヿ能ハズ

7. 相交ル三圓ノ二圓宛共有スル弦ハ同一點ニ會ス

コレハ次ノ定理ヲ用ヰテ證明スルコトヲ得
"兩圓相交ルトキハ兩圓心ヲ結ブ線ハ共通ノ弦ヲ直角ニ二等分ス"
二圓ノ中心ヲA,BトシDノ交點ヲC,DトスAB,CDヲ結ビEニ交ラシム

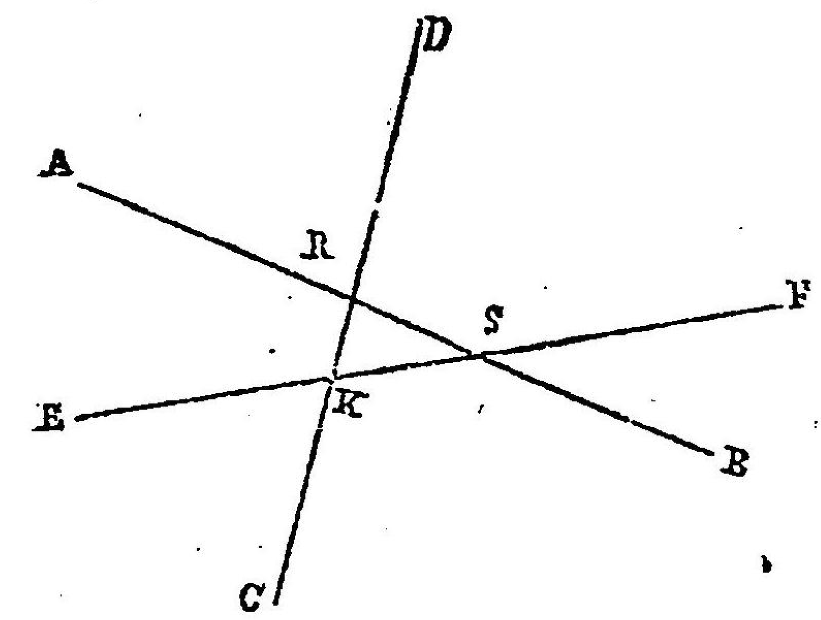


AB ハ CD ヲ直角ニ二等分スベシ
AC, AD, BC, BD ヲ結ブ三角形 CAB, DAB ニ於テ CA,AB ハ夫々 DA,AB ニ等シ底 CB ハ DB ニ等シ故ニ角 CAB ハ角 DAB ニ等シ(1.8)然ルトキハ三角形 CAE, DAE ニ於テ CA,AE ハ夫々 DA,AF ニ等シ而シテ角 CAE ハ角 DAE ニ等シ故ニ CE ハ DE ニ等シク角 CEA ハ角 DEA ニ等シ
次ニ本題ヲ証セン



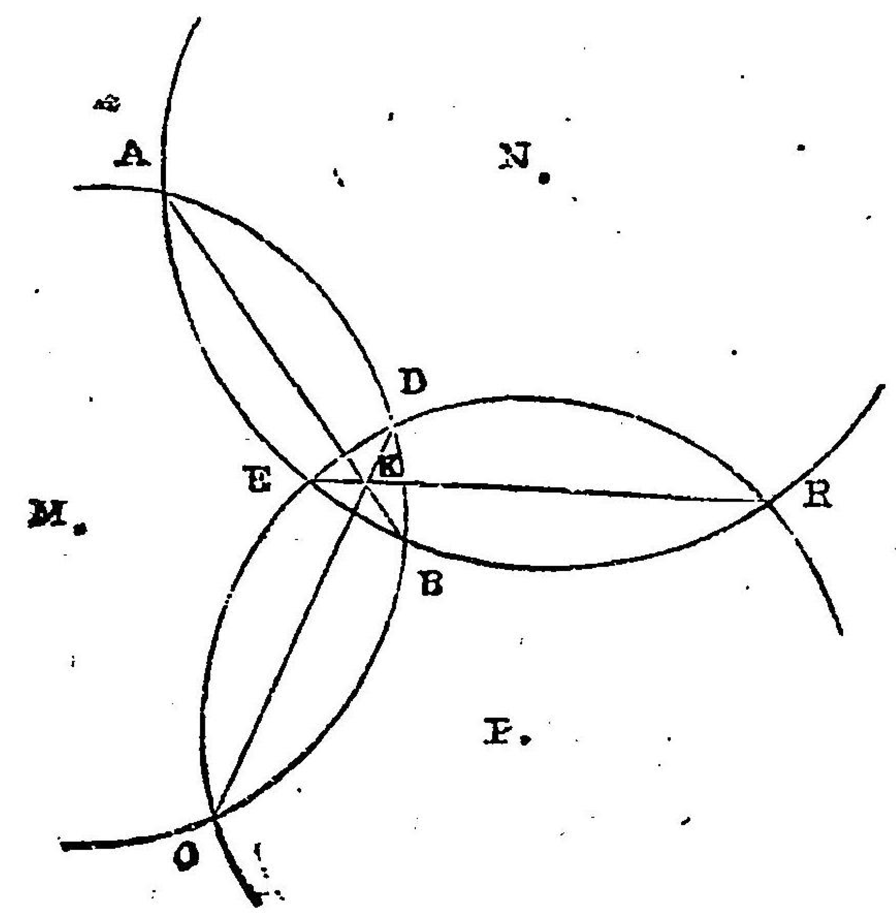
中心 M, N, P ナル三圓ガ互ニ A,B,C,D, E,F, ニ交ルトス AB, CD, EF, MN,NP,PM, ヲ結ブ MP,CD, ハ G ニテ, NP,EF ハ H ニテ, CD,EF ハ K ニテ交ル
今角 KGP,KHP ハ直角ナル故角 GKH ト角 GPH トノ和ハ

二直角ニ等シ即角 P 及 CD ト EF トノ夾ム角トノ和ハ二直角ニ等シ同様ニ角 M ト AB, CD ニテ夾ム角トノ和ハ二直角ニ等シク角 N ト AB, EF ニテ夾ム角ノ和ハ二直角ニ等シ夫故角 M,N,P 及共通弦ニテ夾角ノ和ハ六直角ニ等シ然ルニ角 M,N,P ノ和ハ二直角ニ等シ夫故共通弦ニテ夾ム角ノ和ハ四直角ニ等シ夫故凡テ同一點ニ會ス
註 (1.8)ハ"一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形ノ三邊ニ等シケレバ兩三角形ハ全ク相等シ而シテ等邊ニ對スル角ハ相等シ"



補 上ノ證明ハ誤リナラム何トナラバ AB, CD, EF ガ次ノ圖ノ如ク交ハルモ亦角 ARC, CKF, ASF ノ和ハ四直角ナレバナリ

次ニ正シキ解ヲ示ス

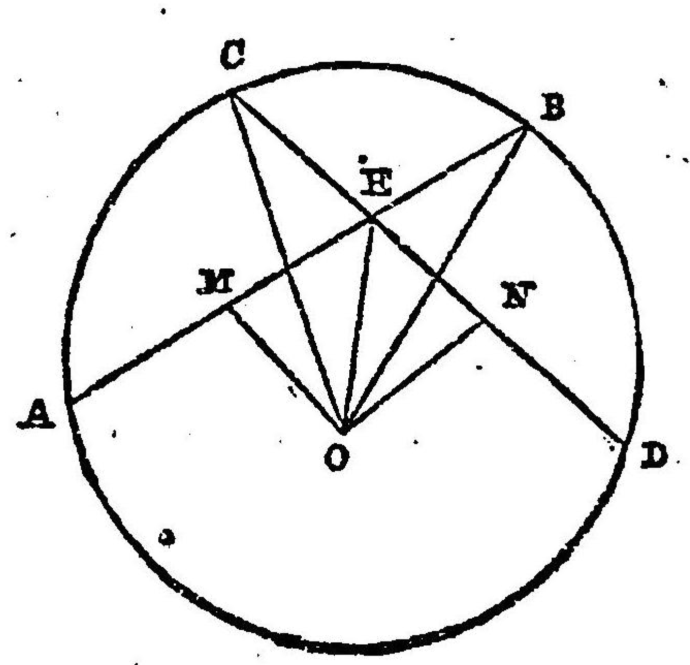


共通弦 AB, CD ノ交點ヲ K トシ E ヨリ K ヲ過キテ EKR ヲ引キ中心 N ナル圓周ト R ニ會スルモノトセム(中心 P ナル圓周ト會スルモノトナスモ同様ナリ)然ルトキハ矩形 AK, BK ハ矩形 CK, DK ニ等シク矩形 AK. BK ハ矩形 EK, RK ニ等シ

(III.35) 然レハ矩形CK.DKハ矩形EK,RKニ等シ故ニRハ中心Pナル圓周上ニアラザルベカラズ(III.35ノ逆)然ルニ兩圓周ノ交點ハ二點ヨリ多カラズ之ニ由テEヨリKヲ過グル直線ハFヲ過グ即チ共通弦EFハ又Kヲ過グ

(III.35)ハ"圓周ニ於テ兩弦相交ルトキハ其各分ノ包ム矩形ハ相等シ"

圓周ニ於テ相交ル兩弦ヲAB,CDトシ其ノ交點ヲEトス中心Oヨリ兩弦ヘ垂線OM,ONヲ引キOE,OB,OCヲ結ブ



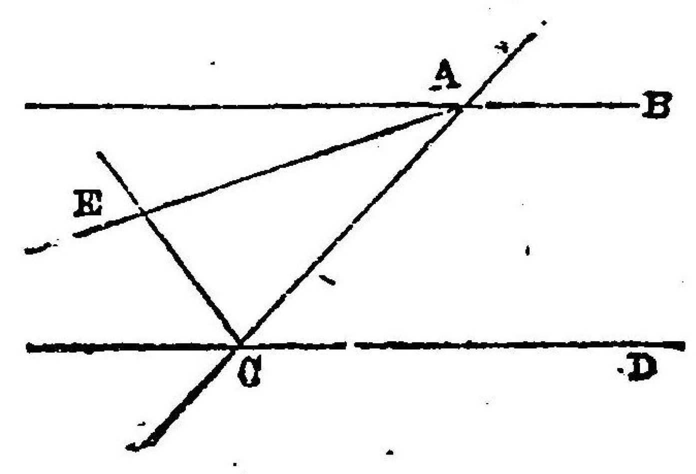
$$AE.BE=(BM+EM).(BM-EM)$$
$$=BM^2-EM^2$$
$$=OB^2-OE^2$$

又 $CE,DE=(CN+EN).(CN-EN)$
$$=CN^2-EN^2$$
$$=OC^2-OE^2$$

然ルニ $OB=OC$

故ニ $AE.BE=CE,DE$

8. 三定直線ヨリ等距離ニアル凡テノ點ヲ見出セ

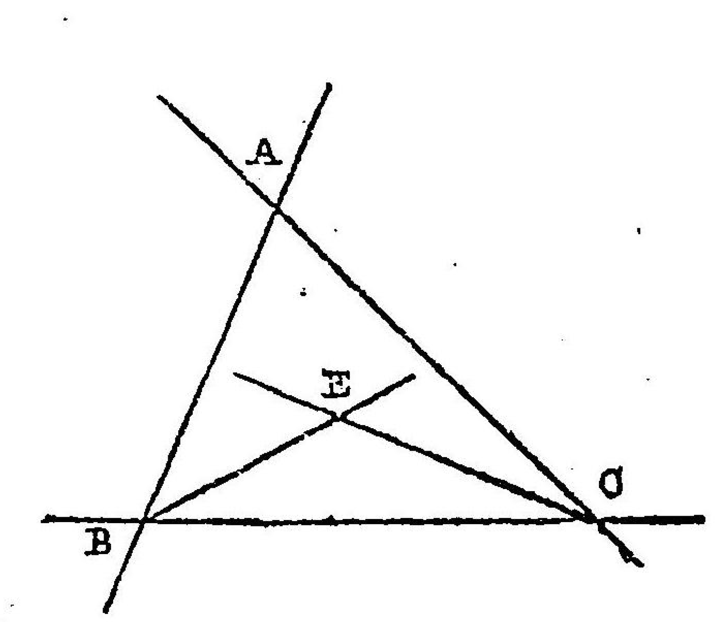


(イ) 三線平行セルトキハ所求ノ點ナシ

(ロ) AB, CDノ二線ハ平行ニシテ第三線ハ之トA及Cニテ交ルトス

角A及Cヲ二等分スル線AE, CEヲ引キEニ會セシム

(ハ) 三線共ニ平行セザルトキハ相會シテ三角形ヲ作ラン之ヲABCト名ツケム

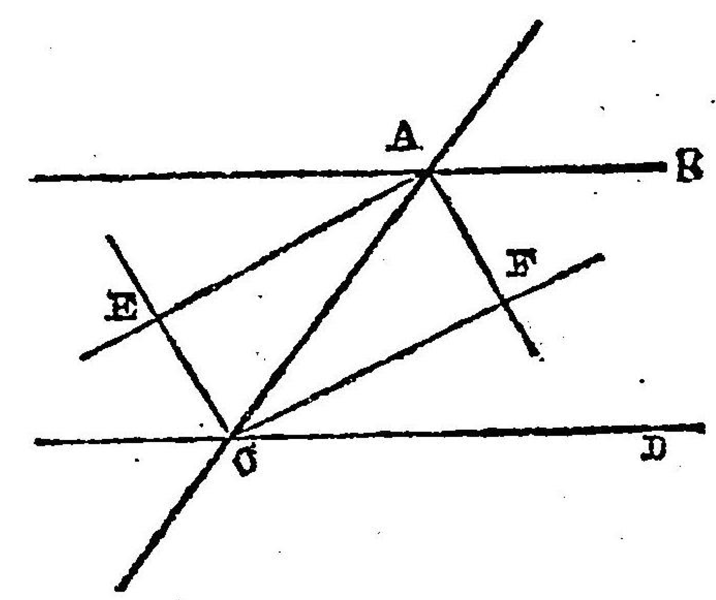


前ノ如ク角A及Cヲ二等分スル直線BE, CEヲ引キEニ會セシム

(ロ)及(ハ)ノ場合ニ於テ点Eハ三線ヨリ等距離ニ在リ(IV·4)

註 (IV·4)ハ千八百八十四年六月幾何9備考1ヲ見ヨ

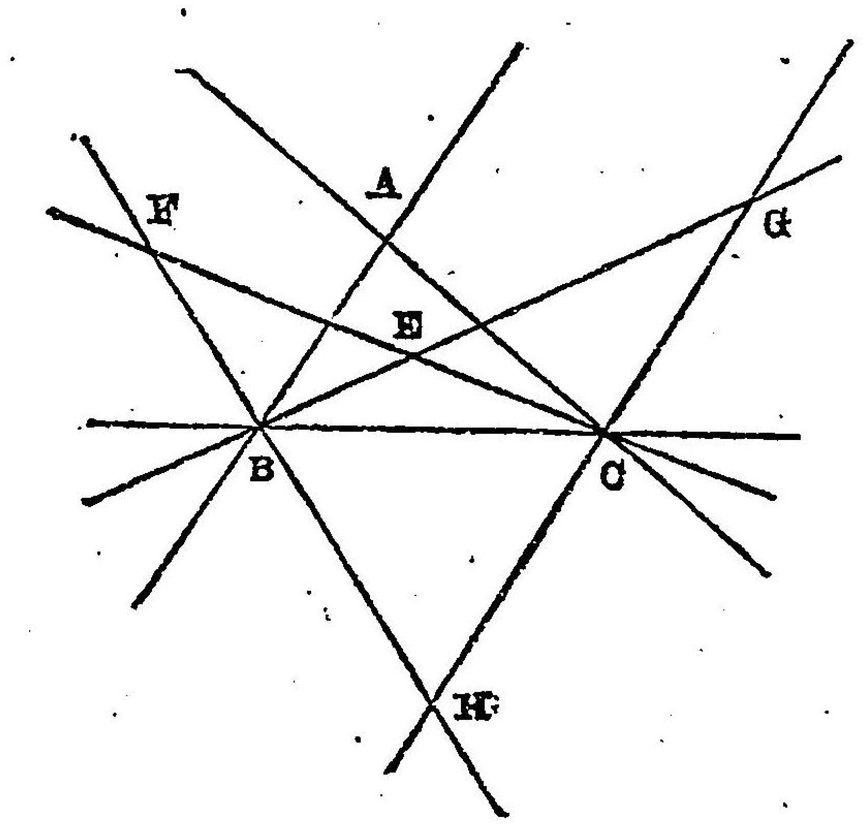
補 三線ヨリ等離距ノ点ハ(ロ)ノ場合ニ於テハ二点ヲ得(ハ)ノ場合ニ於テハ四点ヲ得次ニ之ヲ證ス



(ロ)ノ場合

AB, ACノナス二ノ角ヲ二等分スル直線トCD, ACノナス二ツノ角ヲ二等分スル直線トE,Fニ於テ會スルモノトス然ルトキハE,Fハ三線ヨリ等離距ナリ(IV.4)

(ハ)ノ場合

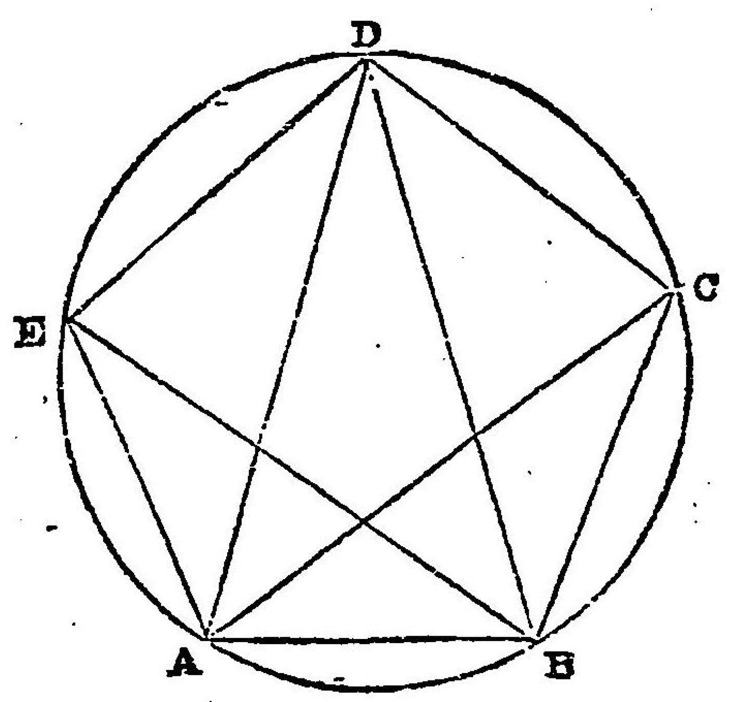


AB, BCノナス二ツノ角ヲ二等分スル直線トCB, ACノナス二ツノ角ヲ二等分スル直線トE, F, G, Hニ於テ會スルモノトス然ルトキハE, F, G, Hハ三線ヨリ等離距ナリ(IV.4)

AB, ACノナス二ツノ角ヲ二等分スル直線ハF, G及E, Hヲ過グ

9. 圓內ニ正五角形ヲ書ケ(IV. 11)

補　本題ノ作圖ハ次ノ如シ



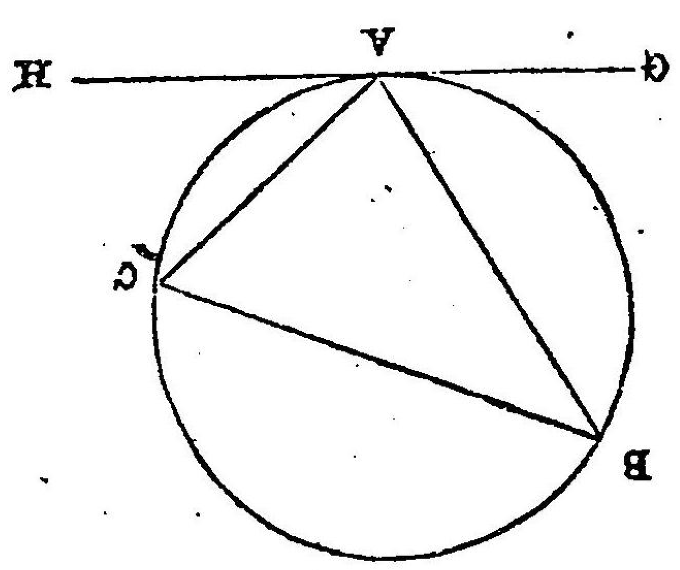
二等邊三角形ノ底角ハ頂角ノ二倍ナルモノヲ作リ(IV. 10)而ノ既知圓內ニコレト等角ナル三角形ABDヲ書キ(IV.2)兩底角DAB, DBAヲ二等分シテAC, BHヲ引キ圓周トC, Eニ會セシメBC, CD, DE, EAヲ結ブ然ルトキハABCDEハ正五角形ナリ

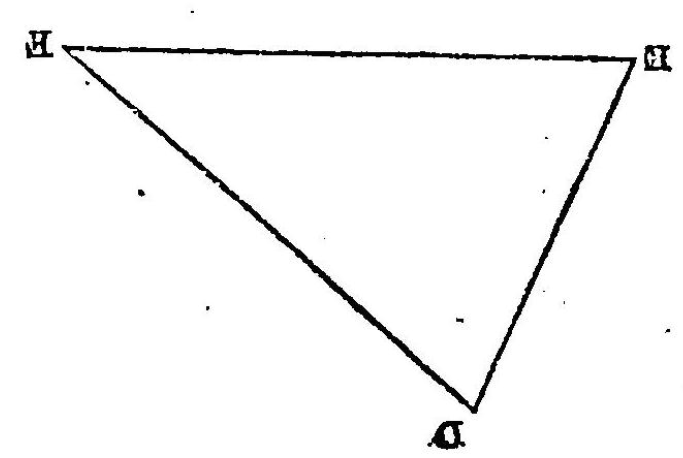
角DAB, DBAハ各角ADBノ二倍ナルガ故ニ角ADB, DAC, CAB, DBE, EBAハ相等シ由テAB, BC, CD, DE, EAハ相等シ而シテ弧BCDE, CDEA等ハ相等シキガ故ニ角EAB, ABC等ハ相等シ之ニ由テABCDEハ正五角形ナリ

(IV-10)ハ千八百八拾四年一月幾何9註ヲ見ヨ

(IV.2)ハ"既知圓內ニ既知三角形ト等角ナル三角形ヲ書クコト"ナリ此ノ作圖ハ次ノ如シ

既知圓ヲABC, 知既三角形ヲDEFトナス





圓周上任意ノ点Aニ於テ切線GAHヲ引キAヨリ弦ACヲ引

キ角HACヲ角Fニ等シカラシメ又弦ABヲ引キ角GABヲ角Eニ等シカラシメBCヲ結ブ

然ルトキハ　$\angle ABC = \angle HAC = \angle F$

$\angle ACB = \angle GAB = \angle E$

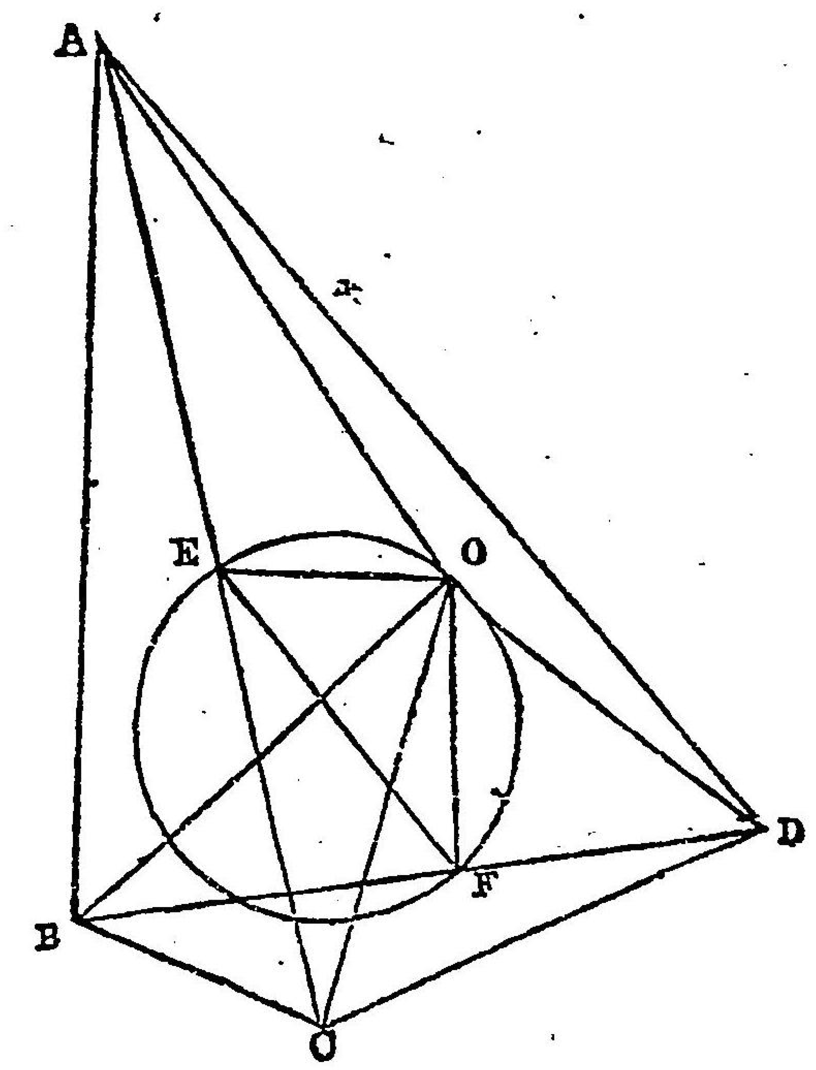
而シテ二ツノ三角形ニ於テ二角夫々相等シケレバ第三ノ角モ亦相等シ即$\angle BAC = \angle D$

之ニ由テ三角形ABC, DEFハ等角形ナリ

備考　ABCDEガ正五角形ナルトキBDハAEニ平行ナルコトヲ證セ

角BDA, DAEハ等弧BA, DE上ニ立ツ故ニ彼等ハ互ニ相等シカリ而ノ此ノ二角ハ錯角ナリ夫故AEハBDニ平行ナリ

10. 四定點ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ和ガ常量ナルベキ樣ニ動ク點ノ軌跡ヲ見出セ此ノ常量ノ最小値ハ如何



前ニ千八百八拾三年六月幾何5ノ備考ニ掲ケタル定理"三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ底ノ半分ノ上ノ正方形ト頂點ト底ノ中點ヲ結ブ線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ"ヲ用ヰテ證セン

四定點ヲA, B, C, Dトナス

軌跡中ノ一點ヲOトシAB, BC, CD, DA, OA, OB, OC, OD, AC, BDヲ結ブ

ACヲE, BDヲFニテ二等分シOF, OE, EFヲ結ブ

$$20\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\end{matrix}\right\}\begin{matrix}2\text{..................}17s\text{ ノモノ}\\2\text{..................}18s\text{ ノモノ}\\3+2\text{.............}22s\text{ ノモノ}\end{matrix}$$

種々ノ酒ノ價ヲ縦ニ記シ平均價ヨリ低キモノト高キモノトヲ曲線ニテ結ビ付ク即17及18ハ平均20ヨリ小ナル故之ヲ20ヨリ大ナル22ト結ビ付ク

混合スベキモノト平均ノモノトノ差ヲ反對ノ列ニ記ス即22ト20トノ差ヲ17ノ右ニ,17ト20トノ差ヲ22ノ右ニ又22ト20トノ差ヲ18ノ右ニ,18ト20トノ差ヲ22ノ右ニ記ス

22ノモノハ17ノモノト混スルﾄｷ3又18ノモノト混スルﾄｷ2ノ割合故合セテ5ノ割合トナル

由テ17sノモノ2,18sノモノ2,22sノモノ5ノ割合ニ混ズレハ可ナリ

此ノ如ク運算スル理由如何トイフニ次ノ如シ

平均價ヨリ低キモノト高キモノヲ結合シ其等ノ差ヲ交錯シテ記スﾄｷハ損益相償フベキ割合ヲ得例ヘバ17sノモノヲ20sニ賣ルﾄｷハ1がろんニ付3sノ利アリ又22sノモノヲ20sニ賣ルﾄｷハ1がろんニ付2sノ損アリ故ニ17sノヲ2(22−20)22sノヲ3(20−17)ノ割合ニ混スルﾄｷハ17sノニテ6sヲ利シ22sノニテ6sヲ損ス即損益相償フガ如シ18sノト22sノト混スルモ之ト同様ナリ

(2) 金工アリ十七十八二十二及二十四がらつとノ金ヲ混メ二十一がらつとノ合金ヲ作ラントス混スベキ割合如何

本問ヨリハ種々ノ結果ヲ得元來本問ハ代數學ノ不定方程式ニ當ルモノナレハ數種ノ結果ヲ得ルコ當然ノ理ナリ

(イ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}3\\1\\3\\4\end{matrix}$$
答
17ノモノ3, 18ノモノ1
22ノモノ3 24ノモノ4

(ロ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\1\\4+3\\4\end{matrix}$$
答
17ノモノ4 18ノモノ1
22ノモノ7 24ノモノ4

(ハ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\3\\4\\4+3\end{matrix}$$
答
17ノモノ4 18ノモノ3
22ノモノ4 24ノモノ7

(ニ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1\\1+3\\4+3\\3\end{matrix}$$
答
17ノモノ1 13ノモノ4
22ノモノ7. 24ノモノ3

(ホ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}3\\1+3\\3\\4+3\end{matrix}$$
答
17ノモノ3 18ノモノ4
22ノモノ3 24ノモノ7

(ヘ) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\1+3\\4+3\\4+3\end{matrix}$$
答
17ノモノ4 13ノモノ4
22ノモノ7 24ノモノ7

(ト) $$21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1\\3\\4\\3\end{matrix}$$
答
17ノモノ1 18ノモノ3
22ノモノ4 24ノモノ3

一々運算シテ平均ヲ求ムルﾄｷハ此等ノ七答ハ皆正シキヲ見ン

今　　$OA^2+OC^2=2(AE^2+EO^2)$

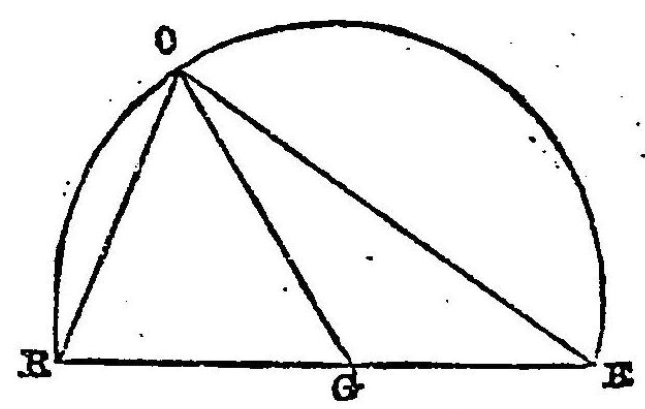
$OB^2+OD^2=2(BF^2+FO^2)$

而シテ $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$ ハ常量ナルガ故ニ $AE^2+EO^2+BF^2+FO^2$ モ常量ナリ

然ルニ AE^2+BF^2 ハ常量ナリ故ニ EO^2+FO^2 モ常量ナリ

殘ル所ハ二邊 EO, FO ノ上ノ正方形ノ和ガ常量ナルベキ三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルニ在リコレハ ABCD ノ對角線ノ中點ヲ結ブ所ノ線 EF ヲ直徑トスル圓周ナリ

備考1. 三角形 EOF ニ於テ OE, OF ノ上ノ正方形ノ和ヲ常量ナリトス，O ハ EF ノ中點ヲ中心トスル圓周ノ上ニアラン



EF ヲ G ニテ二等分シ OG ヲ結ブ

$OE^2+OF^2=2(EG^2+OG^2)$

然ルニ OE^2+OF^2 ハ常量ナリ又 EG^2 モ常量ナリ

故ニ OG^2 モ常量ナリ即定理ヲ證明セリ

OA, OB, OC, OD ノ上ノ正方形ノ和ナル常量ハ軌跡ナル圓周ノ直徑ガ最小ナル時即E トF ト合スル時ニ在リコノ事ハ ABCD ノ對角線ガ互ニ二等分スル時ニアリ即平行四邊形ナル時ニ在リ此ノ場合ニ於テハ對角線ノ交點トナル

備考2. 平行四邊形ノ對角線ノ互ニ二等分スルコハ既ニ千八百八拾三年六月幾何1ニ於テ證セリ

此ノ定理ハ菱形正方形ニモ適當スルモノニシテ此ノ場合ニ於テハ兩對角線ハ互ニ二等分スルノミナラズ亦互ニ直角ニ交ル讀者宜シク之ガ證明ヲ試ムベシ

千八百八拾五年六月

試驗官　グリーンヒル氏
　　　　ベンジヤミンウィリヤムソン氏

算術及代數

1. 商人アリ一はんどれつとうゑーとニ付五ぽんど十五しりんニテコヒーヲ，一はんどれつとうゑーとニ付二ぽんど十二しりん六ぺんすニテチコリーヲ買ヒチコリー四，コヒー七ノ割合ニ混ジタリ一はんどれつとうゑーとニ付何程ニ賣ラバ二割ノ益アリヤ

	£	s	d	
チコリー 4 *cwt* ノ價 =	10	10	0	
コヒー 7 〃 =	40	5	0	
	50	15	0	
2割即 $\frac{1}{5}$ ヲ加フ	10	3	0	
混物 11 *cwt* ノ賣價	60	18	0	
〃 1 〃	5	10	$8\frac{8}{11}$	答

備考　此ハ平均法ノ一例ナリ混合法ハ之ヲ排斥スル人アリト雖或種類ノ問題ヲ說クニハ最簡便ナルモノナリ次ニ數例ヲ擧ケム

(1) 商人アリ一がろんニ付十七しりん十八しりん及二十二しりんの酒ヲ混ジ一がろんニ付二十しりんノ酒ヲ作ラントス混合ノ割合如何

$$20\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\end{matrix}\right\}\begin{matrix}2\ldots\ldots 17s\ \text{ノモノ}\\2\ldots\ldots 18s\ \text{ノモノ}\\3+2\ldots\ldots 22s\ \text{ノモノ}\end{matrix}$$

種々ノ酒ノ價ヲ縱ニ記シ平均價ヨリ低キモノト高キモノトヲ曲線ニテ結ビ付ク即17及18ハ平均20ヨリ小ナル故之ヲ20ヨリ大ナル22ト結ヒ付ク

混合スベキモノト平均ノモノトノ差ヲ反對ノ列ニ記ス即22ト20トノ差ヲ17ノ右ニ,17ト20トノ差ヲ22ノ右ニ又22ト20トノ差ヲ18ノ右ニ,18ト20トノ差ヲ22ノ右ニ記ス

22ノモノハ17ノモノト混スル片3又18ノモノト混スル片2ノ割合故合セテ5ノ割合トナル

由テ17sノモノ2,18sノモノ2,22sノモノ5ノ割合ニ混ズレハ可ナリ

此ノ如ク運算スル理由如何トイフニ次ノ如シ

平均價ヨリ低キモノト高キモノヲ結合シ其等ノ差ヲ交錯シテ記ス片ハ損益相償フベキ割合ヲ得例ヘハ17sノモノヲ20sニ賣ル片ハ1がろんニ付3sノ利アリ又22sノモノヲ20sニ賣ル片ハ1がろんニ付2sノ損アリ故ニ17sノヲ2(22—20)22sノヲ3(20—17)ノ割合ニ混スル片ハ17sノニテ6sヲ利シ22sノニテ6sヲ損ス即損益相償フガ如シ18sノト22sノト混スルモ之ト同樣ナリ

(2) 金工アリ十七十八二十二及二十四がらつとノ金ヲ混シ二十一がらつとノ合金ヲ作ラントス混スベキ割合如何

本問ヨリハ種々ノ結果ヲ得元來本問ハ代數學ノ不定方程式ニ當ルモノナレハ數種ノ結果ヲ得ルコ當然ノ理ナリ

(イ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}3\\1\\3\\4\end{matrix}$

答
17ノモノ3,　18ノモノ1
22ノモノ3　24ノモノ4

(ロ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\1\\4+3\\4\end{matrix}$

答
17ノモノ4　18ノモノ1
22ノモノ7　24ノモノ4

(ハ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\3\\4\\4+3\end{matrix}$

答
17ノモノ4　18ノモノ3
22ノモノ4　24ノモノ7

(ニ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1\\1+3\\4+3\\3\end{matrix}$

答
17ノモノ1　13ノモノ4
22ノモノ7.　24ノモノ3

(ホ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}3\\1+3\\3\\4+3\end{matrix}$

答
17ノモノ3　18ノモノ4
22ノモノ3　24ノモノ7

(ヘ) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1+3\\1+3\\4+3\\4+3\end{matrix}$

答
17ノモノ4　13ノモノ4
22ノモノ7　24ノモノ7

(ト) $21\left\{\begin{matrix}17\\18\\22\\24\end{matrix}\right\}\begin{matrix}1\\3\\4\\3\end{matrix}$

答
17ノモノ1　18ノモノ3
22ノモノ4　24ノモノ3

一々運算シテ平均ヲ求ムル片ハ此等ノ七答ハ皆正シキヲ見シ

(3) 商人アリ一ぽんどニ付キ四ぺんす六ぺんす九ぺんす十一ぺんすノ乾葡萄ヲ混シテ一ぽんどニ付八ぺんすノモノ二百四十ぽんどヲ得ントス何程ヅヽ混スベシヤ

$$8\left\{\begin{array}{l}4\\6\\9\\11\end{array}\right.\left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\}\begin{array}{l}3\\1\\2\\4\end{array}$$

今　$3+1+2+4=10$

夫故　$4d$ ノモノハ　$240\times\frac{3}{10}=72$

$6d$　〃　$240\times\frac{1}{10}=24$

$9d$　〃　$240\times\frac{2}{10}\ 48$

$11d$　〃　$240\times\frac{4}{10}=96$

此ノ餘ノ結果ハ前例ノ如ク得ラルサレドコレニテ十分ナリ

2. 次式ヲ小數第十位マデ算出セヨ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{2.4.6.8}+\frac{1}{2.4.6.8.10}+\frac{1}{2.4.6.8.10.12}$$

$$\frac{1}{2}=.5$$

$$\frac{1}{2.4}=.125$$

$$\frac{1}{2.4.6}=020833333333$$
$$\frac{1}{2.4.6.8}=.002604166666$$
$$\frac{1}{2.4.6.8.10}=.000260416666$$
$$\frac{1}{2.4.6.8.10.12}=.000021701388$$
$$\overline{.64871961805}$$

答 .6487196181

備考　千八百八拾四年六月算術2ノ備考ヲ見ヨ

3. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ノ價ヲ小數第五位マデ算出セヨ

$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ヲ分母子ニ乘ズレバ

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}-8}{2}$$
$$=\sqrt{15}-4$$
$$=3.87298\text{ 餘 }-4$$
$$=-.12702$$

備考千八百八拾四年一月算術2ノ備考ヲ見ヨ

4. 次式ノ値如何

(1) $(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2$

(2) $\dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}+\dfrac{x+z}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)}$

(1) $(x+y+z)^2=x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2$

$(x+y-z)^2=x^2+2xy-2xz+y^2-2yz+z^2$

$(x+z-y)^2=x^2-2xy+2xz+y^2-2yz+z^2$

$\underline{(y+z-x)^2=x^2-2xy-2xz+y^2+2yz+z^2}$

$$4x^2 \qquad +4y^2 \qquad +4z^2$$
$$=4(x^2+y^2+z^2)$$

$(x+y-z)^2$ノ積ハ$(x+y+z)^2$ノ積中ノzヲ$-z$ニ代ユレバ可ナリ其ノ他モ之ニ同シ

備考　次ノ規則ヲ記憶セヨ

多項式ノ平方ヲ得ムニハ各項ノ平方ト各二項ツヽノ相乘積ノ二倍トノ和ヲ記スベシ

例ヘバ

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e)^2=&a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\\&+2ab+2ac+2ad+2ae\\&+2bc+2bd+2be\\&+2cd+2ce\\&+2de\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b-c+d-e)^2=&a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\\&-2ab-2ac+2ad-2ae\\&+2bc-2bd+2be\\&-2cd+2ce\\&-2de\end{aligned}$$

(2) 先ツ次ノ〻ヲ知ルヲ要ス

$$(a-b)=-(b-a)$$
$$\therefore\quad \frac{1}{a-b}=-\frac{1}{b-a}$$

是ニ由テ符號ノミ相異ナル分母ヲ有スル分數ノ加減ハ凡テ全分母ニナサンガ爲ニ其ノ中ノ若干項ノ分母子ノ符號ヲ變ユルヿニ由テ大ニ簡單ニセラル

$$\frac{1}{a-b}=-\frac{1}{b-a}$$

又 $$\frac{1}{a-c}=-\frac{1}{c-a}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(a-b)(a-c)}=\frac{-1\times-1}{(b-a)(c-a)}$$

是ニ由テ一ツノ分母ノ二因子ガ他ノ分母ノ二因子ト單ニ符號ノミ相異ナルトキハ分子ノ符號ヲ變ズルニ及バズ

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$=0$$

本問ハ次ノ如シ

$$\frac{x+y}{(z-x)(z-y)}+\frac{x+z}{(y-x)(y-z)}+\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}$$
$$=\frac{x+y}{(x-z)(y-z)}-\frac{x+z}{(x-y)(y-z)}+\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}$$
$$=\frac{x^2-y^2-x^2+z^2+y^2-z^2}{(x-z)(y-z)(x-y)}$$
$$=0$$

5. 次ノ如キ分數ヲ見出セ, 分母子ニ三十六ヲ加フレハ其ノ價二倍トナリ分子ノ九倍ヲ分母ノ八倍ニ加フレバ分母子ノ積ノ三倍トナル

$\frac{x}{y}$ ヲ所求ノ分數トス

$$\frac{x+36}{y+36}=\frac{2x}{y}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$9x+8y=3xy\quad\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ　$xy+36y=2xy+72x$

即　$36y-72x=xy$

即　$108y-216x=3xy$

然ルニ　$8y+9x=3xy$

故ニ　$100y-225x=0$

$$225x=100y$$

$$\frac{x}{y}=\frac{100}{225}=\frac{4}{9}$$　答

6. 次ノ通同方程式ヲ解ケ

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$$

分母ヲ掃ヘハ　$6x+4y+3z=744\quad\cdots\cdots(1)$

$$20x+15y+12z=2820\quad\cdots\cdots(2)$$

$$15x+12y+10z=2280\quad\cdots\cdots(3)$$

(1)及(3)ヨリ　$30x+20y+15z=3720$

$$30x+24y+20z=4560$$

$$4y+5z=840\quad\cdots\cdots(4)$$

(2)及(3)ヨリ　$60x+45y+36z=8460$

$$60x+48y+40z=9120$$

$$3y+4z=660$$

即　$12y+16z=2640$

(4)ヨリ　$12y+15z=2520$

$$z=120$$

(4)ヨリ　$4y+600=840$

$$y=60$$

(1)ヨリ　$6x+240+360=744$

$$x=24$$

備考　分母中ニ未知數アルトキハ濫ニ分母ヲ掃フベカラズ

例　$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=3\quad\cdots\cdots(1)$

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4\frac{1}{12}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{5}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=5\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots(3)$$

(1)及(2)ヨリ　$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}+\frac{12}{z}=9$

$$\frac{6}{x}+\frac{8}{y}+\frac{10}{z}=8\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\frac{5}{6}\quad\cdots\cdots(4)$$

(1)及(3)ヨリ　$\frac{10}{x}+\frac{15}{y}+\frac{20}{z}=15$

$$\frac{10}{x}+\frac{10}{y}+\frac{12}{z}=11\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{y}+\frac{8}{z}=3\frac{2}{3}$$

(4)ヨリ
$$\frac{4}{y}+\frac{8}{z}=3\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

$$y=3$$

(4)ヨリ
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{z}=\frac{5}{6}$$

$$z=4$$

(1)ヨリ
$$\frac{2}{x}+1+1=3$$

$$x=2$$

7. 等比級數ノ第一項第二項ヲ知リn項ノ和ヲ求ムル法如何

第一項ハ二,第二項ハ三ナル等比級數十二項ノ和如何

（イ） 千八百八拾四年六月代數8ノ答ヲ見ヨ

（ロ） $a=2,\quad r=\frac{3}{2},\quad n=12$

故ニ
$$s=\frac{2\left(\frac{3^{12}}{2^{12}}-1\right)}{\frac{3}{2}-1}=\frac{4(3^{12}-2^{12})}{2^{12}}=\frac{3^{12}-2^{12}}{2^{10}}$$

$$=\frac{531441-4096}{1024}$$

$$=\frac{527345}{1024}$$

$$=514\frac{1009}{1024}\qquad 答$$

備考 千八百八拾三年六月代數7ノ備考及千八百八拾四年六月代數8ノ備考ヲ見ヨ

8 一商人アリ千五百ぽんどノ資金ヲ以テ商業ヲ營ミシニ第一年ニ八十ぽんど第二年ニ百十ぽんど第三年ニ百四十ぽんど追フテ年々三十ぽんどヅヽ增加スル利益ヲ得タリト云フ三十ヶ年後ニ於ケル全資金如何

商人ノ利益ハ等差級數ニシテ $a=80,\ d=30,\quad n=30$

故ニ
$$s=\frac{30}{2}\left\{80\times2+(30\times29)\right\}$$

$$=15\times1030$$

$$=15450$$

$$\underline{\quad 1500}$$

全資金ハ £16950

備考 事實ニ於テハ利益ハ尙多カルベシ即復利ニテ增スベシ

千八百八拾三年六月算術7ヲ見ヨ

9. 次ノ兩式ノ相乘積ニ於ケルx^4ノ係數ヲ見出セ

$$(1-x+x^2-x^3+x^4)^2$$

$$1-2x^2+4x^4$$

千八百八拾四年一月代數6ヲ見ヨ

通常ノ乘法ニ於ケル如ク置キ最後ニx^4ヲ生ズベキモノノミヲ乘ズレバ次ノ如シ

$$
\begin{array}{r}
1-x+x^2-x^3+x^4 \\
1-x+x^2-x^3+x^4 \\
\hline
1\ldots\ldots+x^2\ldots\ldots+x^4 \\
+x^2\ldots\ldots+x^4 \\
+x^2\ldots\ldots+x^4 \\
+x^4 \\
+x^4 \\
\hline
1\ldots\ldots+3x^2\ldots\ldots+5x^4 \\
1\ldots\ldots-2x^2\ldots\ldots+4x^4 \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+5x^4 \\
-6x^4 \\
+4x^4 \\
\hline
3x^4
\end{array}
$$

答3

備考　千八百八拾五年六月代數4ノ備考ニ依テ

$$(1-x+x^2-x^3+x^4)^2$$
$$=1+x^2+x^4+x^6+x^8-2x+2x^2-2x^3+2x^4-2x^3+2x^4-2x^5-2x^5+2x^6-2x^7$$
$$=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-4x^5+3x^6-2x^7+x^8$$

今之ニ　$1-2x^2+4x^4$ ヲ乘ジテ x^4 ヲ生ズベキモノハ實ニ $1\times 5x^4$, $-2x^2\times 3x^2$ 及 $1\times 4x^4$ ナリ由テ所求ノ係數ハ $5-6+4=3$（千八百八拾四年一月代數6ト比較セヨ）

10.　三百十八人ガ二分ノ一時間ニ幅十一ひーと深六ひーと長百五十五やーどノ濠ヲ堀ルナラバ二千八ガ六時間ニ幅十ひーと深七ひーとノ濠幾何ヲ堀リ得ンヤ

通常ノ復比例（千八百八拾四年一月算術7ノ如シ）又ハ因果法（全題ノ備考）ニテ求ムルトキハ一万千三百十四やーど七分ノ二ヲ得ム

備考　多クノ教育者ハ單比例若シハ復比例ヨリ歸一法ヲ用ヰルヲ可トセリ其ノ利益ハ各階段ノ算理ヲ明瞭ナラシムル處ニアリサレド實用ニハ餘リ繁雜ナルモノナリ今此ノ法ニ由テ本題ヲ解カンニ

幅	深	人	時	
11ひ	6ひ	310	$\frac{1}{2}$	$=155$や
1	6	310	$\frac{1}{2}$	$=155\times 11$
1	1	310	$\frac{1}{2}$	$=155\times 11\times 6$
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$=\dfrac{155\times 11\times 6}{310}$
1	1	1	6	$=\dfrac{155\times 11\times 6\times 12}{310}\ (6\div\frac{1}{2}=12)$
10	1	1	6	$=\dfrac{155\times 11\times 6\times 12}{310\times 10}$
10	7	1	6	$=\dfrac{155\times 11\times 6\times 12}{310\times 10\times 7}$
10	7	2000	6	$=\dfrac{155\times 11\times 6\times 12\times 2000}{310\times 10\times 7}$

$=11314\frac{2}{7}$やーど　答

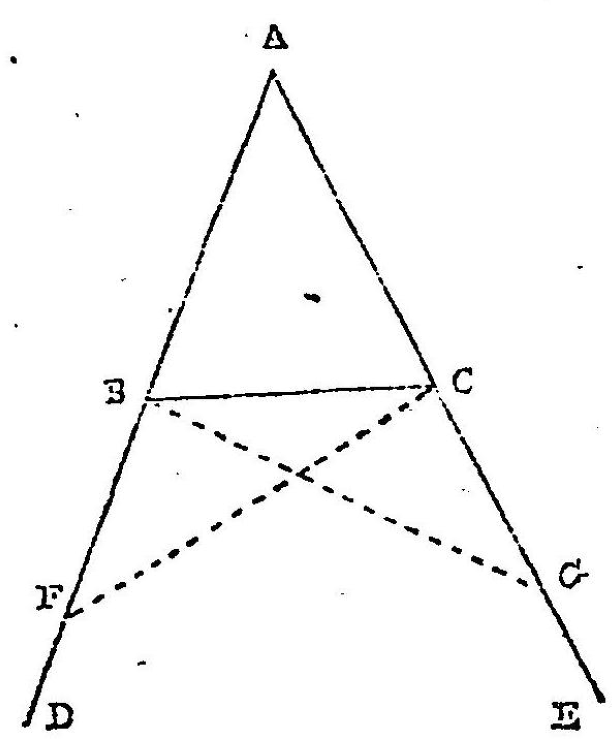
幾　何

1.　二等邊三角形ノ底角ハ相等シク又等邊ヲ延長スルトキハ

底ノ外側ノ角モ相等シ(1.5)

補　本題ノ證明ハ次ノ如シ

ABC ヲ二等邊三角形トシ A ヲ頂点トナス然ルトキハ兩底角 ABC, ACB ハ相等シ又 AB, AC ヲ D, E ニ延長スルトキハ角 CBD,BCE ハ相等シ



BD 中ニ任意ニ F 點ヲ取リ CE ヨリ BF ニ等シク CG ヲ取リ CF, BG ヲ結ブ然ルトキハ兩三角形 ABG,ACF ニ於テ AB ハ AC ニ, AG ハ AF ニ等シク角 A ハ兩形ニ通ズ之ニ由テ

$$BG=CF$$

$$\angle AGB=\angle AFC$$

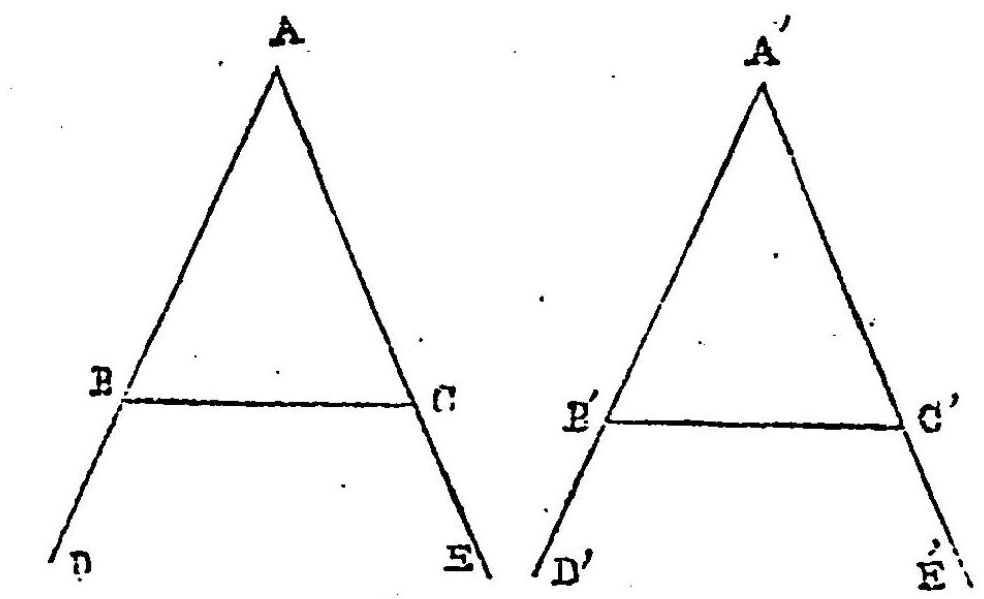
又兩三角形 BGC,CFB ニ於テ CG ハ BF ニ, BG ハ CF ニ等シク角 BGC ハ角 CFB ニ等シ之ニ由テ

$$\angle BCG=\angle CBF$$

從テ又　$\angle ACB=\angle ABC$

備考　三角形 ABC ノ二邊 AB,AC ハ相等シトス, AB,AC ヲ D,E マテ延長ス, 三角形 A′B′C′ ハ三角形 ABC ヲ精密ニ摸寫セルモノト仮定ス而シテ此ノ邊 A′B′, A′C′ ヲ D′,E′ マテ延長ス

A′ ヲ A ノ上ニ, A′E′ ヲ AD ノ上ニ置クトキハ A′D′ ハ AE ノ上ニ落ツ何トナレハ角 DAE, D′A′E′ ハ全ク相等シケレバナリ又 AB, AC, A′B′,A′C′ ハ凡テ相等シキガ故ニ B′ ハ C ト合シ C′ ハ B ト合セン是ニ由テ C′B′ ハ BC ト合セン如斯シテ諸角相合ス故ニ相等シ



2. 三角形ノ內角ノ總和ハ二直角ナルコ及凡テ直線形ノ內角ノ總和ハ之ニ四直角ヲ加フルトキハ邊數ノ二倍ノ直角ニ等シキコヲ證セヨ(I.32 及系4)

註　(I.32)ハ千八百八拾五年一月幾何2ヲ見ヨ

補．(I.32ノ系4)ハ證明ハ次ノ如シ

n 邊ノ多角形ハ其ノ一角頭ヨリ他各角頭ニ對角線ヲ引クトキハ $n-2$ 個ノ三角形ニ分チ得ベシ而シテ其ノ各三角形ノ內角ノ和ハ二直角ナルガ故ニ n 邊ノ多角形ノ內角ノ和ハ $n-2$ 個ノ三角形ノ內角ノ和即 $2(n-2)$ 直角ナリ故ニ之ニ四直角ヲ加フルトキハ $2n$ 即邊數二倍ノ直角ニ等シ

備考　此ノ系ノ大切ナル應用ハ正多角形ノ角ノ大サヲ見出スニアリ

正七角形ノ一角ノ大サヲ見出スコ

x ヲ一角ノ度數トス

$7x$ ハ內角ノ總和ナリ, 360 ハ四直角, 1260 ハ十四直角(14 ハ邊數ノ二倍)

故ニ　$$7x+360=1260$$

$$7x=900$$

$$x=128\frac{4}{7}\text{度}$$　　答

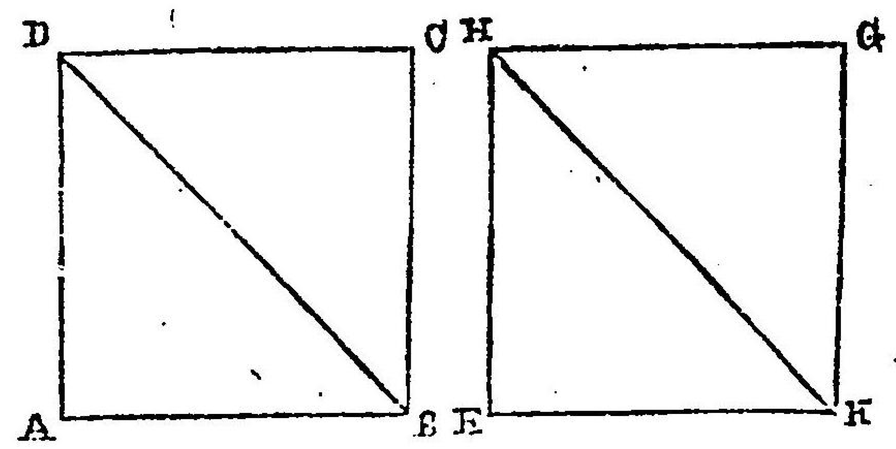
3. 三角形ノ一邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二邊上ノ正方形ノ和

ニ等シキトキハ後ノ二邊ノ夾ム角ハ直角ナリ(I.48)

此ノ定理ヲ證明スルニユークリッドハ二ツノ大切ナル假定ヲナセリ今之ヲ證セン

(1) 等直線上ノ正方形ハ相等シ

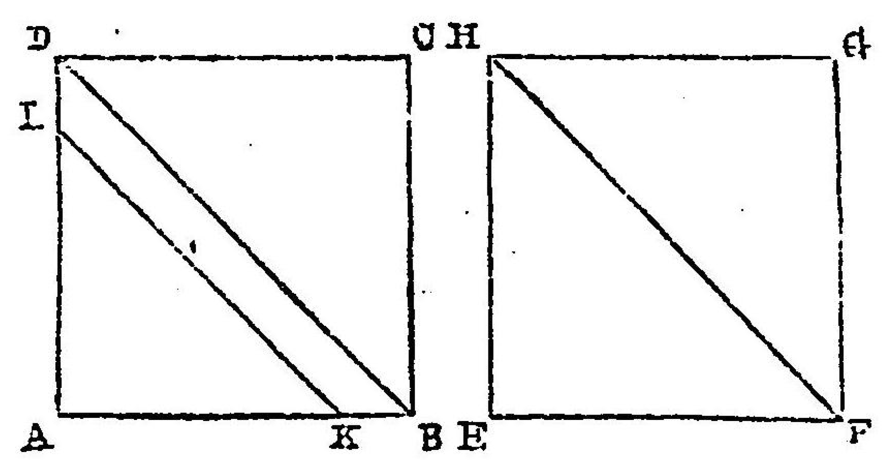
ABCD, EFGH ヲ等直線 AB, EF ノ上ニ書カレタル二ツノ正方形トス ABCD ハ EFGH ニ等シカルベシ



DB, HF ヲ結ブ然ルトキハ DA, AB ハ夫々 HE, EF ニ等シク而シテ角 DAB ハ角 HEF ニ等シキガ故ニ兩三角形 DAB, HEF ハ相等シ然ルニ等量ノ等倍ハ相等シ夫故二ツノ正方形 ABCD, EFGH ハ相等シ

(2) 等正方形ハ等直線上ニ書カル

兩正方形 ABCD, EFGH ガ相等シキトキハ AB ハ EF ニ等シカルヘシ



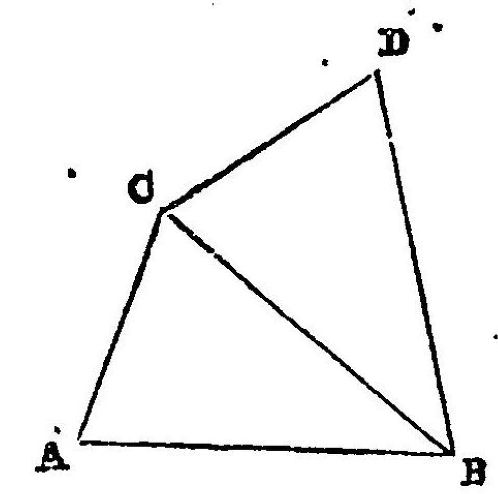
若シ然ラズハ其ノ一ハ他ヨリ大ナルベシ AB ヲ EF ヨリ大ナリトセン AB, AD 中ニ各 EF 或ハ EH ニ等シキ AK, AL ヲ取リ LK, DB, HF ヲ結ブ

LA, AK ハ夫々 HE, EF ニ等シク角 LAK ハ角 HEF ニ等シキカ故ニ兩三角形 LAK, HEF ハ相等シ然ルニ三角形 DAB, HEF ハ相等シソハ相等シキ正方形ノ半分ナルガ故ナリ夫故ニ

兩三角形 LAK, DAB ハ相等シ是レ小者ト大者ト相等シト云フニ當ル是レアリ得ベカラザルコトナリ故ニ AB, EF ハ相等シ

補　本題ノ證明ハ次ノ如シ

三角形 ABC ノ AB 上ノ正方形ハ AC, BC 上ノ正方形ノ和ニ等シトス然ルトキハ角 ACB ハ直角ナルベシ



CB ニ垂線 CD ヲ引キ CD ヲ CA ニ等シクシ BD ヲ結ブ然ルトキハ

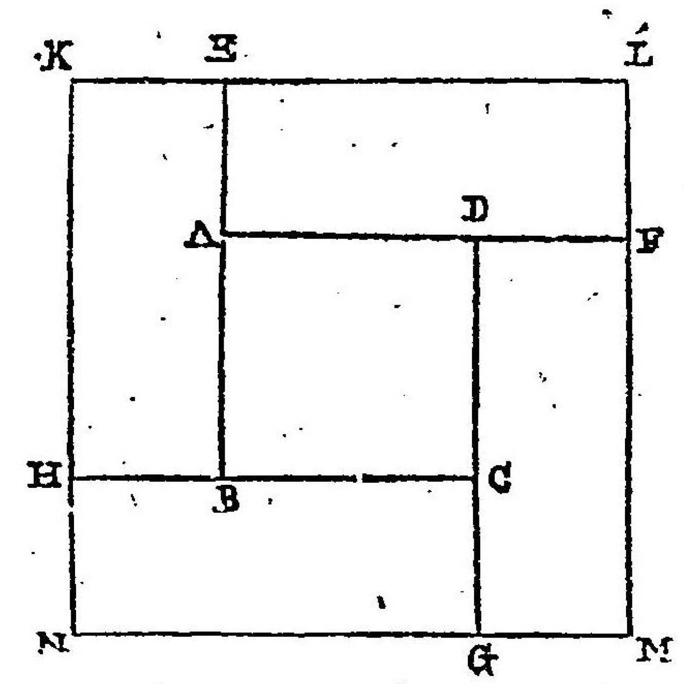
$$BC^2+CD^2=BD^2$$

然ルニ $BC^2+AC^2=AB^2$

且 $CD=AC$

之ニ由テ $BD^2=AB^2$ 即 AB, BD ハ相等シ故ニ兩三角形 ABC, DBC ハ三邊夫々相等シ故ニ角 ACB, DCB ハ相等シ之ニ由テ角 ACB ハ直角ナリ

4. 四ツノ相等シキ矩形ヲ正方形ノ周圍ニ置キテ更ニ一ツノ正方形ヲ作リ之ニ由テ全線ト其一部分トノ矩形ノ四倍ト他ノ部分ノ上ノ正方形トノ和ハ全線ト其ノ一部分トノ和ヨリナル線ノ上ノ正方形ニ等シキコトヲ證セヨ



ABCD ヲ一ツノ正方形トス, BA ヲ E 迄, AD ヲ F 迄, DC ヲ G 迄, CB ヲ H 迄延ハシ

$$AE=DF=CG=BH$$

ナラシム然ル後矩形 BHKE, AELF, DFMG, CGNH ヲ完成ス

KLMN ハ KL 上ノ正方形ナリ而シテ AB ノ上ノ正方形ト矩形 BK ノ

四倍トノ和ニ等シ

$$KL=BE+AE$$

$$\text{矩形}BK=\text{矩形}BE,AE$$

是ニ由テ全線BEト其ノ一部分ナルAEトノ矩形ノ四倍ト他ノ一部分ナルABノ上ノ正方形ノ和ハ全線BEト其ノ一部分ナルAEトノ和ニ等シキKLノ上ノ正方形ニ等シキコトヲ知ラル

備考　代數的ニ $a+b$ ヲ全線トシ a, b ヲ其ノ部分トセバ

$$\begin{aligned}4(a+b)b+a^2&=a^2+4ab+4b^2\\&=(a+2b)^2\\&=\{(a+b)+b\}^2\end{aligned}$$

5. 既知ノ矩形ニ等シキ正方形ヲ書ク(II.14)

註　(II.14)ハ千八百八拾四年六月幾何5ヲ見ヨ

備考　(III.31)ニ依テ著シク簡單ニスルヲ得

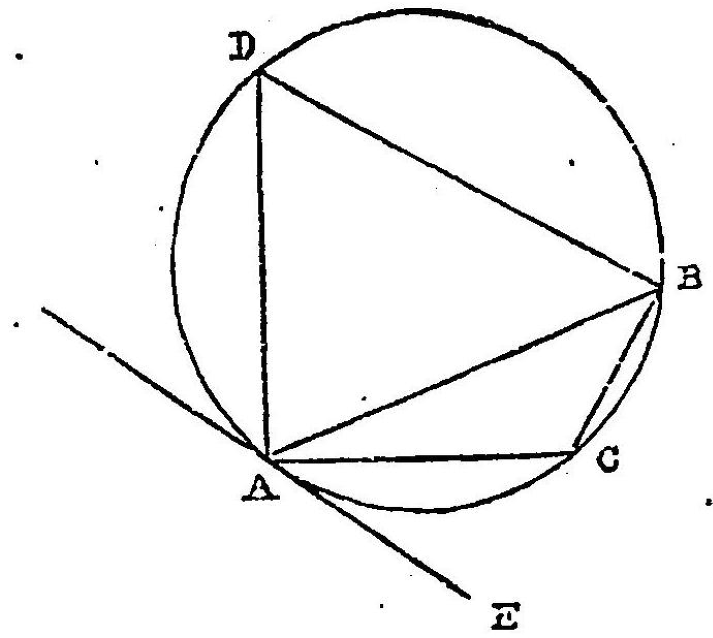
既知矩形ノ兩隣邊ノ和ニ等シキ直徑ヲ有スル半圓ヲ書キ二邊ノ接續點ヨリ之ニ垂線ヲ立テ圓周ト交ラシムルトキハ此ノ垂線ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ（千八百八拾五年一月幾何5ノ備考ヲ見ヨ）

註　(III.31)ハ"圓ノ弓形内ノ角ハ弓形ガ半圓ヨリ大ナルトキハ鋭角半圓ニ等シキトキハ直角,半圓ヨリ小ナルトキハ鈍角ナリ",

6. 弓形ノ角ト弓形ニ含マルヽ角トノ和ハ二直角ナリ

備考　弓形ノ角トハ弓形ノ弧ト弦トノ夾ム角ナリ若シ弧中ノ任意ノ一点ヨリ切線ヲ引クトキハ其ノ切線ノ方向ハ其ノ点ニ於ケル弧ノ方向ヲ表ハスモノトス故ニ弧ト弦トノ夾ム角ト云フハ弦ノ端ヨリ引ケル切線ト弦トノ夾ム角ニ等シ

次ニ本題ヲ證セン



ABCヲ一ツノ圓トス任意ノ弦ABヲ引キ圓ヲ二ツノ弓形ABC,ABDニ分ツ,Aヲ通ル切線AEヲ引ケ

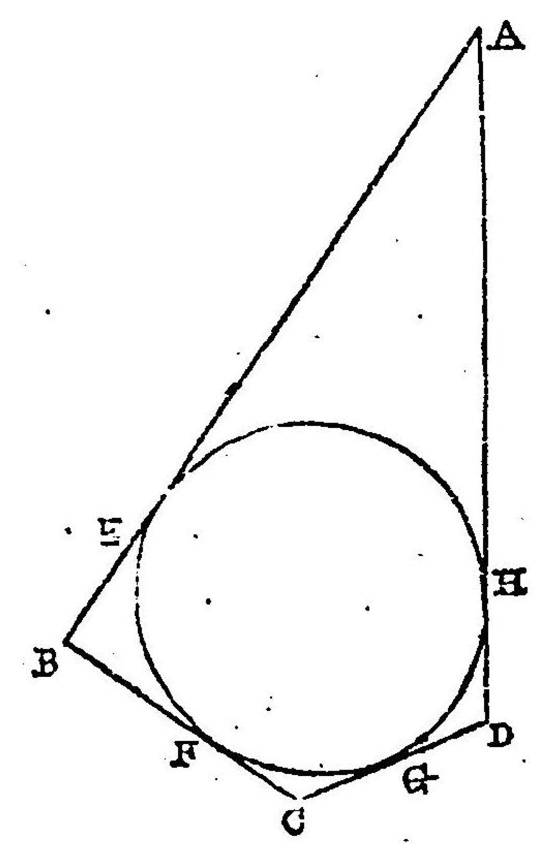
弧ADB, ACB中ニ任意ニD及Cヲ撰ミDA, DB, CA, CBヲ結ブ

今角BAEハ弓形ABCノ角ニシテ角ACBハ弓形ABC内ニ含マルヽ角ナリサテ角BAEハ隣弓形内ノ角ADBニ等シ

故ニ　$\angle BAE+\angle ACB=\angle ADB+\angle ACB$

然ルニ　$\angle ADB+\angle ACB=$二直角(圓内ノ四邊形)

夫故　$\angle BAE+\angle ACB=$二直角



7. 圓ガ四邊形ニ内切シ得ル要件如何

ABCDヲ四邊形トシ之ニ内接圓ヲ書キ得タリト假定ス而シテ圓ハABニEニテ, BCニFニテ, CDニGニテ, DAニHニテ切セリトス然ルトキハ

$$AE=AH$$
$$BE=BF$$
$$CF=CG$$
$$DG=DH$$

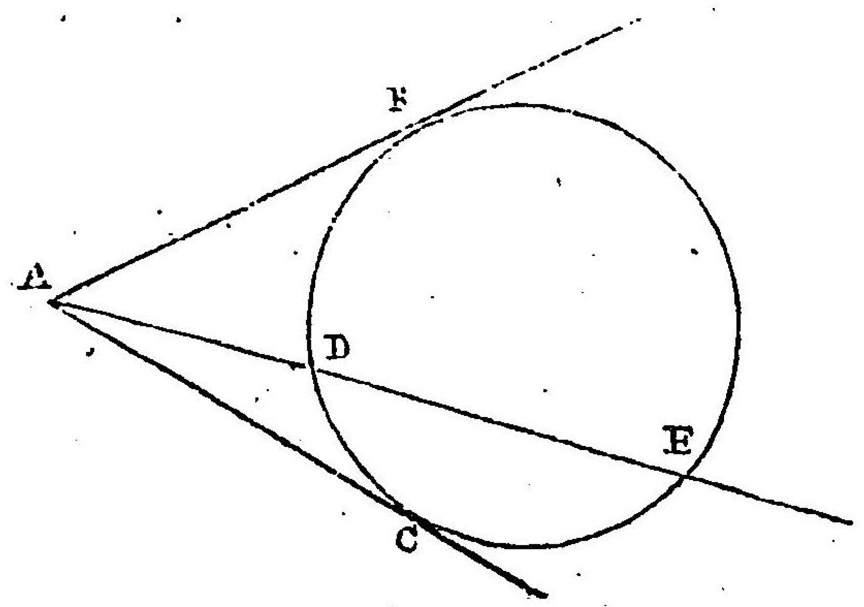
夫故　$AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH$

即　$AB+CD=AD+BC$

サレバ所求ノ要件ハ一對ノ對邊ノ和他ノ一對ノ對邊ノ和ニ

等シキヿナリ

備考1　同一点ヨリ一圓ニ引ケル二切線ハ相等シ



AB, AC ヲ一点 A ヨリ一圓ニ引ケル二切線トス然ルトキハ AB ハ AC ニ等シカルベシ

D,E ニテ圓ト交ル直線 ADE ヲ引クトキハ AB 又ハ AC ノ上ノ正方形ハ何レモ AE, AD ノ包ム矩形ニ等シ夫故互ニ相等シ従テ AB ハ AC ニ等シ

備考2本問ノ解ヨリ次ノ推論ヲ得

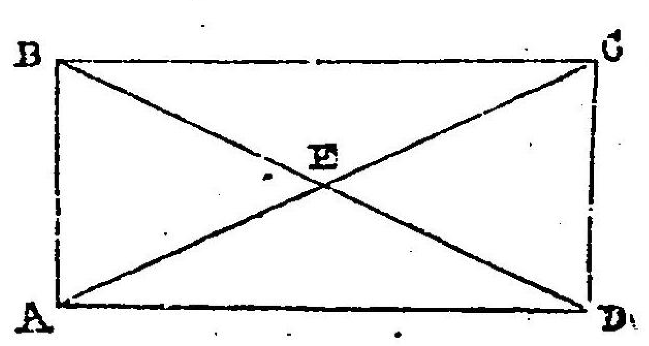
(1) 圓ハ菱形又ハ正方形ニ圓切セシムルヿヲ得其ノ外ノ平行四邊形ニハ内切セシムルヿ能ハス

(2) 對邊ノ和相等シキ四邊形ノ角ヲ二等分スルトキハ其ノ折半線ハ同一点ニ會ス

(3) 正方形又ハ菱形ノ對角線ハ其ノ角ヲ二等分ス

8. 直角三角形ニ於テ直角點ト斜邊ノ中點トヲ結フ線ハ斜邊ノ半分ニ等シキヿヲ證セヨ

ABC ヲ B ニ於テ直角ナル一ツノ直角三角形トス

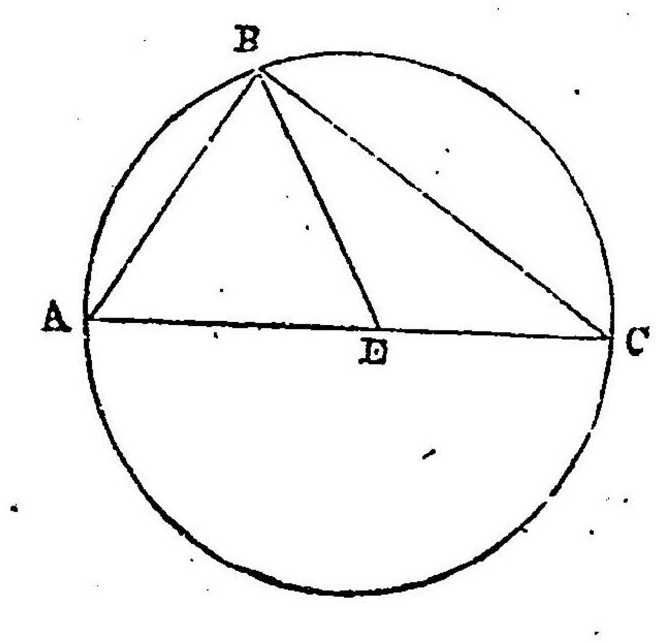


ABCD ナル矩形ヲ作リ BD ヲ結ビ AC ト E ニ交ラシム然ルトキハ三角形 ABC, DCB ニ於テ AB,BC ハ夫々 DC,CB ニ等シク角 ABC ハ角 DCB ニ等シキガ故ニ AC ハ BD ニ等シ

今千八百八拾三年六月幾何 1 ニ於テ平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分ス

夫故　. AE=EC=BE=ED

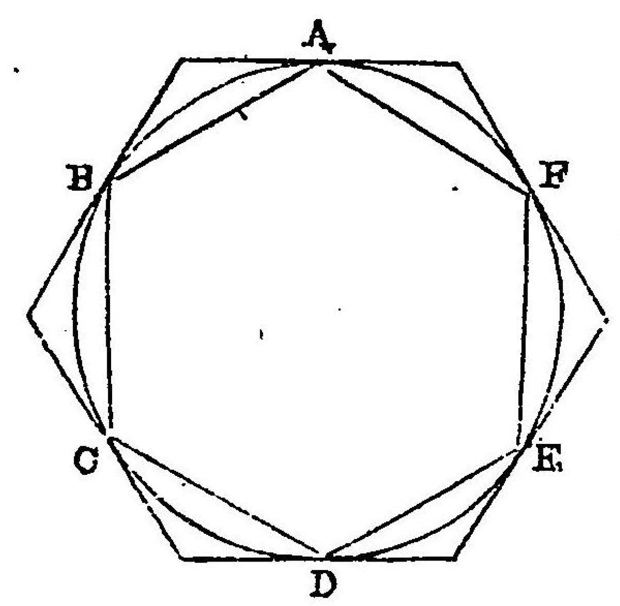
備考 AC ヲ直徑トスル圓ヲ畫ク圓ハ B 角ヲ通ルベキヿ明ナリ何トナラハ半圓周ニ於ケル角ハ直角ナレバナリ



サレハ B ト AC ノ中点トヲ結ブ線ハ半徑トナリテ AC ノ半ニ等シキヿ勿論ナリ

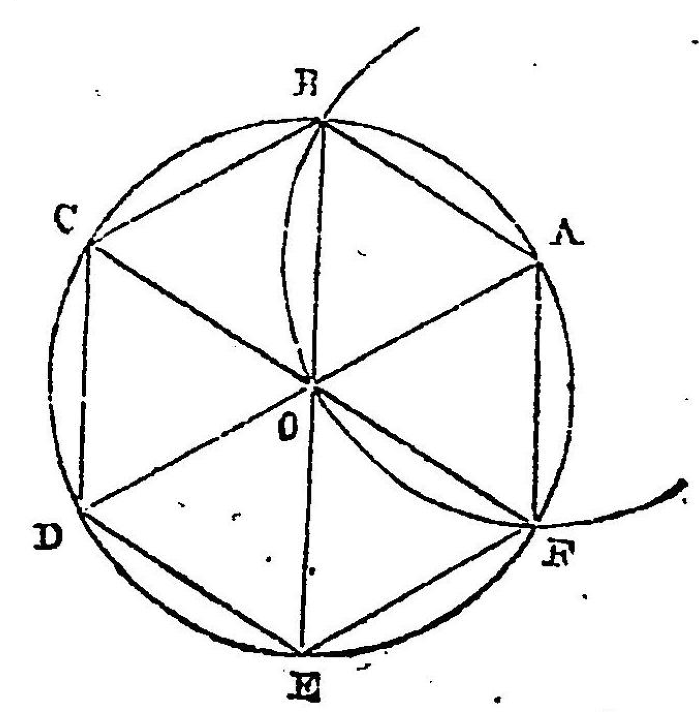
此定理ヲ用ヰテ直角三角形ヲ二個ノ二等邊三角形ニ分ツヿヲ得

9. 定圓ニ外切スル正六角形ヲ畫ケ



先ツ定圓内ニ正六角形ABCDEF ヲ畫キ (IV.15) 各角頂ヲ過リ切線ヲ引キ相會セシムルトキハ所要ノ正六角形ヲ得

註 (IV.15) ハ"既知圓内ニ正六角形ヲ畫クヿナリ作圖ハ次ノ如シ



圓周中ニ任意ニ一点 A ヲ撰ミ之ヲ既知圓ノ中心 O ト連結スAヲ中心,AO ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ既知圓ト B, F ニ交ラシメ OB ト OF ヲ結ブ, AO, BO, FO ヲ延長シテ再ビ既知圓ト D,E,C ニ交ラシメ AB,B

C,CD,DE,EF,FAヲ結ブ然ルキハABCDEFハ所要ノ正六角形ナリ

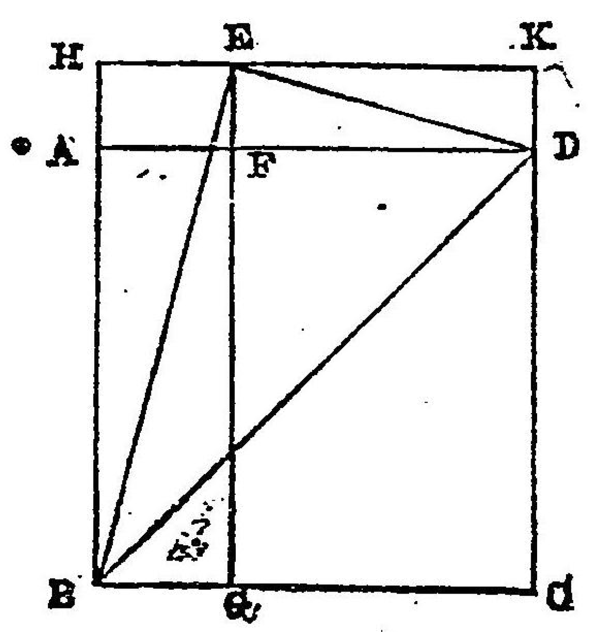
兩三角形 AOB, AOF ハ各等邊ナリ由テ角 AOB, AOF ハ各二直角ノ三分ノ一ナリ,又角 BOC, COD,DOE ハ互ヒニ角EOF, FOA, AOB ニ等シ故ニ中心ニ於ケル六ツノ角ハ各二直角ノ三分ノ一ニシテ互ニ相等シ故ニ六ツノ弦ハ相等シ

又弧 AB, BC, CD 等ハ各中心ニ於テ等シキ角ニ對スルヲ以テ相等シ由テ弧 BCDEF, CDEFA, DEFAB 等ハ互ニ相等シ故ニ六ツノ角 FAB, ABC, BCD 等ハ相等シ

之ニ由テ ABCDEF ハ正六角形ナリ

10. 一点アリ正方形ノ邊ヨリ其ノ點マデノ距離ノ上ノ正方形ノ和ガ正方形ノ二倍ナル如ク移動ス此ノ點ノ通路ヲ求ム。

ABCD ヲ正方形トシ E ヲ一點トス



E ガ直線 BA, CD ノ延長部ノ間ニ在リトス(E 點ハ圖形ヲ變スルニ從テ種々ノ位置ニアルベキハ勿論ナリ) AB ニ平行ニ EFG ヲ引キ AD ト F ニ, BC ト G ニ交ラシム AD ニ平行ニ HEK ヲ引キ BA ノ延長部ト H ニ, CD ノ延長部ト K ニ交ラシム, BE, ED ヲ結ブ

$$EH^2+EG^2+EK^2+EF^2=2AB^2$$

$$EH^2+EG^2=EB^2$$

又 $$EK^2+EF^2=ED^2$$

又 $$BD^2=2AB^2$$

是ニ由テ $$EB^2+ED^2=BD^2$$

如斯ナレバ BED ハ直角ナリ而シテ E ハ BD ヲ直徑トスル圓周中ニ在リ即正方形 ABCD ノ外接圓周中ニ在リ

千八百八拾六年一月

試驗官 グリーンヒル氏
　　　 ベンジヤミンウィリヤムソン氏

算術及代數

1. 1.236068 ノ立方ヲ 2.36068 ニテ除シ小數第五位マテ正シク算出セヨ

通常ノ乘除法ニ由テ次ノ答ヲ得

$1.236068 \times 1.236068 \times 1.236068 \div 2.36068$

$= .79999$……………………

備考 $\sqrt{5}=2.236068$ ナルコヲ記憶セルニヨリ

$1.236068=\sqrt{5}-1$

$2.36068 \;=10(\sqrt{5}-2)$

今 $$\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{10(\sqrt{5}-2)}=\frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{10(\sqrt{5}-2)}$$

$$=\frac{8\sqrt{5}-16}{10(\sqrt{5}-2)}$$

$$=\frac{8(\sqrt{5}-2)}{10(\sqrt{5}-2)}$$

$$=\frac{8}{10}$$

$$=8$$

2. $\sqrt{\frac{7}{5}}$ ノ平方根ヲ小數第七位マデ算出セヨ

$$\frac{7}{5}=1.4$$

通常ノ法ニテハ1.4ノ平方根ヲ求メ1.18321595661992ヲ得而〆又此ノ平方根ヲ求メ所要ノ根數1.0877573ヲ得

此ノ問題ヲ不注意ニ讀ムモノハ單ニ 1.4ノ平方根ヲ求ムルナルベシ

對數表ノ用ヲ許サルヽトキハ此ノ問題ヲ解スルヿ甚容易ナリ

備考1. 平方根ノ過半ノ數字ヲ算出セルトキハ殘餘ノ數字ハ除法ニテ算出シ得ルヿハ既ニ千八百八拾五年一月算術5ノ備考ニ於テ言ヘリキ

是ニ由テ 1.4ノ平方根ノ數字八ツニ至ルマデ通常ノ法ニテ求メ餘ハ除法ニテ求ムルヿ次ノ如シ

	1.1832
	1.4
	1
	40
2	21
	1900
22	1824
	7600
236	7089
	51100
2366	47324
	23664 / 37760 / 1595
	23664
	140960
	118320
	226400
	212976
	134240
	118320
	15920

∴ $\sqrt{1.4}=1.18321595$..............................

	1.0877
	1.18321595
	1
	1832
20	1664
	16815
216	15169
	164695
2174	152229
	21754 / 124660 / 573
	108770
	158900
	152278
	66220
	65262
	958

∴ $\sqrt{1.18321595}$..............$=1.0877573$..............答

備考2. ホルナー氏法ト稱スルモノアリ四乘根ヲ求ムルニハ左程必要ナルモノニモアラサレドモ立方根五乘根及其ノ他ノ根ヲ求ムルニハ大ニ便益アルモノナリ次ニ説明セン

				1.087 以下倣之
1	0	0	0	1.4000
	1	1	1	1 0000
	2	3	4000000	40000000
	3	60000		
	400			
	408	63264	4506112	36048896
	416	66592	5038848000	39511040000
	424	6998400		
	4320			
	4327	7028689	5088048823	35616341761
				3894698239

(1)　根ヲ求ムル數ヲ節ニ分ツ各節ノ數字ノ數ハ所要ノ根ヲ表ハス數ニ同シ（今ノ場合ニ於テハ四乘根ヲ求ムル故四ツナリ）但シ最左ノ一節ハ必シモ四數字ナラズ

(2)　一節ノ數字ノ數ト同數ノ行ヲ左方ニ作リ第一行ノ上ニ1他ノ行ノ上ニハ0ヲ置ク

(3)　第一節ノ根ヲ求メ第一商トス

(4)　第一商ヲ第一行ノ1ニ乘シ其ノ積ヲ第二行ノ0ニ加ヘテ其ノ和1ヲ第二行ノ下ニ置ク之ニ第一商ヲ乘シ積ヲ第三行ノ0ニ加ヘ其ノ和1ヲ第三行ノ下ニ置ク之ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第四行ノ0ニ加ヘテ其ノ和1ヲ第四行ノ下ニ置ク之ヲ第一商ニテ乘シ其ノ積ヲ第一節1ノ下ニ置ク

(5)　第一行ノ1ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第二行ノ1ニ加ヘ其和2ヲ第二行ノ下ニ置ク此ノ2ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第三行ノ1ニ加ヘ其和ヲ第三行ニ置ク此ノ3ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第四行ノ1ニ加ヘ其ノ和4ヲ第四行ニ置ク

(6)　第一行ノ1ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第二行ノ2ニ加ヘ其ノ和3ヲ第二行ノ下ニ置ク此ノ3ニ第一商ヲ乘シ其ノ積ヲ第三行ノ3ニ加ヘ其ノ和6ヲ第三行ノ下ニ置ク

(7)　第一行ノ1ヲ第一商ニ乘シ其ノ積ヲ第二行ノ3ニ加ヘ其ノ和4ヲ第二行ノ下ニ置ク

サテ第一商ヲ乘數トシテ四列(根ヲ表ハス故四ニ全シ)ニ用ヰタリ而シテ第一列ニ於テハ四回第二列ニ於テハ三回第三列ニ於テハ二回第四列ニ於テハ一回ノ乘法ヲ行ヘリ是迄ニテ第一商ヲ用ヰルコハ終レリ

(8)　第二行ニ0一ヲ加ヘテ40トナシ第三行ニ0二ツヲ

加ヘテ600トナシ第四行ニ0三ツヲ加ヘテ4000トナシ第五行ニ0四ツヲ加ヘテ10000トナス

(9)　減シテ又始ム

今被除數ハ4000試除數ハ4000トナレリ依テ次商ハ0ナルコヲ知ル嚴格ニ言ヘハ此ノ0ヲ以テ一々前ノ1ノ時ノ如キ手數ヲナステ要スサレ圧前ニ加ヘタル0ノ數ヲ二倍スルコニ由テ凡テ此ノ手續ヲ省畧スルコヲ得即各行ノ數ヲ400, 60000, 4000000, 40000000トス

探試ニ由テ次商8ナルコヲ知ル依テ8ヲ各行ニ乘シ其ノ積ヲ次行ノ直上ナル數ト加ヘテ行クコ第一商ノ時行ヘルニ同シ

上ノ如クニシテ根ノ凡テノ數字若クハ所要ノ數字ヲ求ム

此ノ法頗ル繁雜ナルガ如クナレ圧其ノ方法ハ同一ノ手續ヲ反覆スルニ過キザルヲ以テ一度了解スル時ハ容易ニ忘ルヽモノニアラス而シテ對數表ヲ用ヰスシテ立方根其ノ他高等方根ヲ精密ニ求ムル最良法ナリ

3.　一めーとるハ39.37079いんちナリ然ル時ハ五まいるト八きろめーとるノ差ハ殆五十一やーどナルコヲ證セヨ

註　1きろめーとる＝1000めーとる

1やーど＝36いんち

1まいる＝1760やーど

8きろめーとる＝39370.79×8

＝314966·32いんち

＝8749　やーど(殆)

5まいる＝8800　やーど

∴　差＝　51　やーど(殆)

4. 十月四日附四ヶ月後拂ノ六百三ぽんどノ手形ヲ十一月二十六日ニ年二分二分ノ一ニテ割引スルアリ常例三日ノ猶豫ヲ許スキハ眞割引高如何

名目上ノ仕拂期日　　二月四日

三日ノ猶豫ヲ許ゾ　　三月七日

十一月二十六日ニ取引スル故十一月二十六日ヨリ二月七日迄73日間ノ割引ヲナスヲ要ス

今 $2\frac{1}{2}$分ニテ73日間£100利息ハ $\frac{5}{2}\times\frac{73}{365}=\frac{1}{2}$ナリ

由テ　£$100\frac{1}{2}$ノ現價$=100$

故ニ　£603　〃　$=100\times 6$

$=600$

由テ眞割引ハ £3 ナリ

備考　千八百八拾四年一月算術3ヲ見ヨ又次ヲ讀メ

眞割引ハ既知割合ニ於テ既知年間現價ニ對スル利金ナリ銀行其ノ他通常ノ商業上ノ割引ハ全金額ニ對スル利金ナリ夫故眞割引ヨリ多シ

5. $\left(\frac{x^2-x+1}{12}\right)^3-27\left\{\frac{(x+1)(2x-1)(x-2)}{432}\right\}^2=\frac{x^2(x-1)^2}{256}$

ナルコヲ證セ

$(x^2-x+1)^3$

$=\{(x^2-x)+1\}^3$

$=(x^2-x)^3+3(x^2-x)^2+3(x^2-x)+1$

$=x^6-3x^5+3x^4-x^3+3x^4-6x^3+3x^2+3x^2-3x+1$

$=x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$

$(x+1)(2x-1)(x-2)$

$=2x^3-3x^2-3x+2$

$(2x^3-3x^2-3x+2)^2$

$=4x^6+9x^4+9x^2+4-12x^5-12x^4+8x^3+18x^3-12x^2-12x$

$=4x^6-12x^5-3x^4+26x^3-3x^2-12x+4$

夫故

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{4\times432}-\frac{\{(x+1)(2x-1)(x-2)\}^2}{16\times432}$$

$$=\frac{4x^6-12x^5+24x^4-28x^3+24x^2-12x+4-4x^6+12x^5+3x^4-26x^3+3x^2+12x-4}{16\times432}$$

$$=\frac{27x^4-54x^3+27x^2}{16\times432}$$

$$=\frac{x^2(x-1)^2}{256}$$

6. $x^{10}+x^5+1$ヲx^2+x+1ニテ除シ其ノ結果ニ $x^4+x^3+x^2+x+1$ ヲ乘セヨ

除算ヲ行ヒテ　$x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$ ヲ得

乘算ヲ行ヒテ　$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$ ヲ得

備考　拙著(原著者)代數因子分括法ヲ學ベル人ハ直ニ次ノコヲ知ラン

$$x^{10}+x^5+1=(x^{15}-1)\div(x^5-1)$$
$$x^2+x+1=(x^3-1)\div(x-1)$$
$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^5-1)\div(x-1)$$

夫故ニ直ニ下ノ如ク書キ下スコヲ得ベシ

$$\frac{x^{15}-1}{x^5-1}\times\frac{x-1}{x^3-1}\times\frac{x^5-1}{x-1}=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}$$
$$=x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$$

7. 百万以下ニテ３ノ倍數ナル凡テノ數ノ和ヲ見出セコレハ $3+6+9$……………………ナル級數 333333 項ノ和ヲ見出セバ可ナリ

$$s=(a+l)\frac{n}{2}$$
$$=(3+999999\times\frac{333333}{2}$$
$$=500001\times333333$$
$$=166666833333$$ 答

8. 初項二分ノ一末項九分ノ二ナル五項ノ等比級數ヲ問フ

$a=\frac{1}{2}$ $l=\frac{2}{9}$ 及 $n=5$ ヨリ r ヲ算出ス

今 $l=ar^{n-1}$

即 $\frac{2}{9}=\frac{1}{2}r^4$

$$r^4=\frac{4}{9}$$
$$r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

是ニ由テ所要ノ級數ハ

$$\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\ \frac{2}{9}$$

9 次ノ方程式ヲ解ケ

(1) $\dfrac{x+\frac{3}{4}}{3}-\dfrac{10\frac{3}{4}-x}{3\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}=b$

(3) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=12\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=1\end{cases}$

(1) $\frac{x}{3}+\frac{1}{4}-\frac{129}{44}+\frac{3x}{11}=\frac{1}{4}$

$$\frac{20}{33}x=\frac{129}{44}$$
$$x=\frac{129}{44}\times\frac{33}{20}$$
$$=4\frac{67}{80}$$ 答

(2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}=b$

$$\frac{\text{分子}-\text{分母}}{\text{分子}+\text{分母}}=\frac{2\sqrt{a-x}}{2\sqrt{a}}=\frac{b-1}{b+1}$$

平方シ $\dfrac{a-x}{a}=\left\{\dfrac{b-1}{b+1}\right\}^2$

$$1-\frac{x}{a}=\left\{\frac{b-1}{b+1}\right\}^2$$
$$x=a\left\{1-\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{4ab}{(b+1)^2}$$ 答

備考　2ノ解ハ次ニ擧クル處ノ比例ノ定則ニヨレルモノナリ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ナルトキハ加減法ニ依テa及bヨリ作ラレタル任意ノ分數ハ同方法ニ依テ作ラレタルc及dノ分數ニ等シ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},\quad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$ 餘倣之

此ノ定理ハ大ニ擴張セラルヽモノナルコ次ノ例ニ由テ見ラルヽガ如シサレド一般ニ比例ノコヲ論ズルハ本書ノ能クスル所ニ在ラス

（イ）a, b, c, d, ガ比例ヲナストキハ又次ノ比例アルコヲ證セ

$$a+b : c+d :: \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=m \text{ トス}$$

然ルトキハ　$a=bm$

$c=dm$

故ニ　$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{bm+b}{dm+d}=\frac{b(m+1)}{d(m+1)}=\frac{b}{d}$$

而シ　$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{b^2m^2+b^2}}{\sqrt{d^2m^2+d^2}}=\frac{b\sqrt{m^2+1}}{d\sqrt{m^2+1}}=\frac{b}{d}$$

此ノ方法ハ猶同種ノモノニ通用スルコヲ得

（ロ）$a:b::c:d$ ナルトキハ

$a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 :: c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2$ ナルコヲ證セ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=m \text{ トス}$$

然ルトキハ　$a=bm$

$c=dm$

故ニ　$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{b^2m^2+b^2m+b^2}{b^2m^2-b^2m+b^2}=\frac{m^2+m+1}{m^2-m+1}$$

而シ　$$\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}=\frac{d^2m^2+d^2m+d^2}{d^2m^2-d^2m+d^2}=\frac{m^2+m+1}{m^2-m+1}$$

上ノ例ハ注意シテ學習スベシ而シ説明セル定則ハ成ルベク屢方程式ノ解ニ用ヰルベシ

（3）

第一方程式ヨリ　$\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=48$

然ルニ　$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=1$

$$\frac{7}{x}=49$$

$$x=\frac{1}{7}$$

第一方程式ヨリ　$7+\frac{1}{y}=12$

$$y=\frac{1}{5}$$

備考　千八百八拾五年六月代數6ヲ見ヨ

10. 工人アリ次ノ約束ニテ六十日間雇ハレ六ぱんヲ受取

レリ勤怠日數如何

約束　一日働クトキハ七しりん六ぺんすヲ受取ルベク一日怠ルトキハ雇主ニ二しりん六ぺんすヲ拂フベシ

x ヲ働キシ日數トス，$60-x$ ハ怠リシ日數ナリ

然ルトキハ　$7\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}(60-x)=120$

即　$7\frac{1}{2}x-150+2\frac{1}{2}x=120$

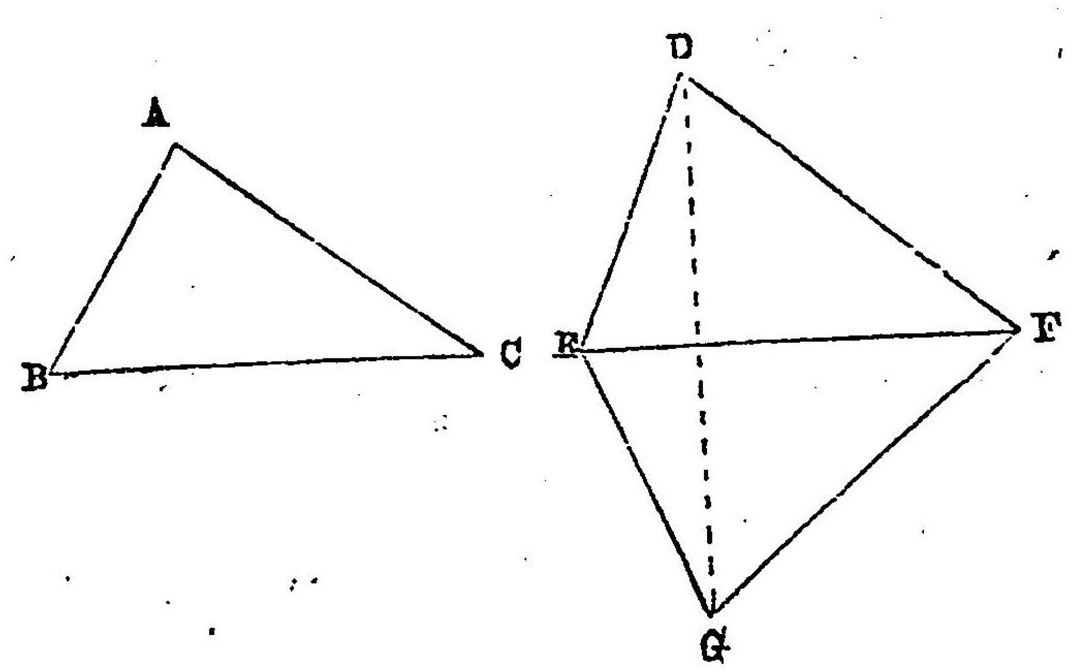
$$10x=270$$

$$\left.\begin{aligned} x&=27\\ 60-x&=33\end{aligned}\right\}\ 答$$

幾　何

1　一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形ノ三邊ニ等シキトキハ兩三角形ハ全ク相等シ(1 8)

補　本定理ノ證明ハ次ノ如シ



二ツノ三角形ヲ ABC, DEF トシ AB, BC, AC ハ順次ニ DE, EF, DF ニ等シトス然ルトキハ此ノ二ツノ三角形ハ全ク相等シ

三角形 ABC ヲ DEF ノ上ニ置キ B ヲ E ニ合シ BC ヲ EF ノ上ニ重ナラシムレハ BC, EF ハ相等シキ

カ故ニ C ハ F ニ合ス然ル後三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ反對ノ側ニアラシメ即 EGF ノ位置ニアラシム

DG ヲ結ブ然ルトキハ ED, EG モ亦相等シク FD, FG モ亦相等シキカ故ニ角 EDG, EGD ハ相等シク角 FDG, FGD モ亦相等シ之ニ由テ角 EDF, EGF ハ相等シ即角 EDF, BAC ハ相等シ然ルトキハ兩三角形 ABC, DEF ニ於テ AB, AC ハ DE, DF ニ等シク夾角 A, D ハ相等シ故ニ此兩三角形ハ全ク相等シ

此ノ定理ハ千八百八拾五年一月幾何 7 ノ證明中ニ引用セラレタリ

備考　三角形ニ六部分アリ三邊三角是ナリ

ユークリツドハ一ツノ三角形ノ三ツノ部分ガ夫々他ノ三角形ノ三ツノ部分ニ等シキトキハ兩三角形ハ全ク相等シキ塲合三ツヲ證セリ即

(1)　二邊夾角(1. 4)

(2)　三邊(1.8)

(3)　二角及相應セル一邊(1.26)

併シナカラ次ノ塲合ニ於テハ如何ニカアルベキ

(4)　一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シキトキ

(5)　一ツノ三角形ノ二邊及其ノ一ツニ對スル角ガ夫々他ノ三角形ノ二邊及相應角ニ等シキトキ

(4)　ノ塲合ニ於テハ兩三角形ハ必シモ等シカラズ唯形狀ノ相同シキノミ之ヲ類似ト稱ス

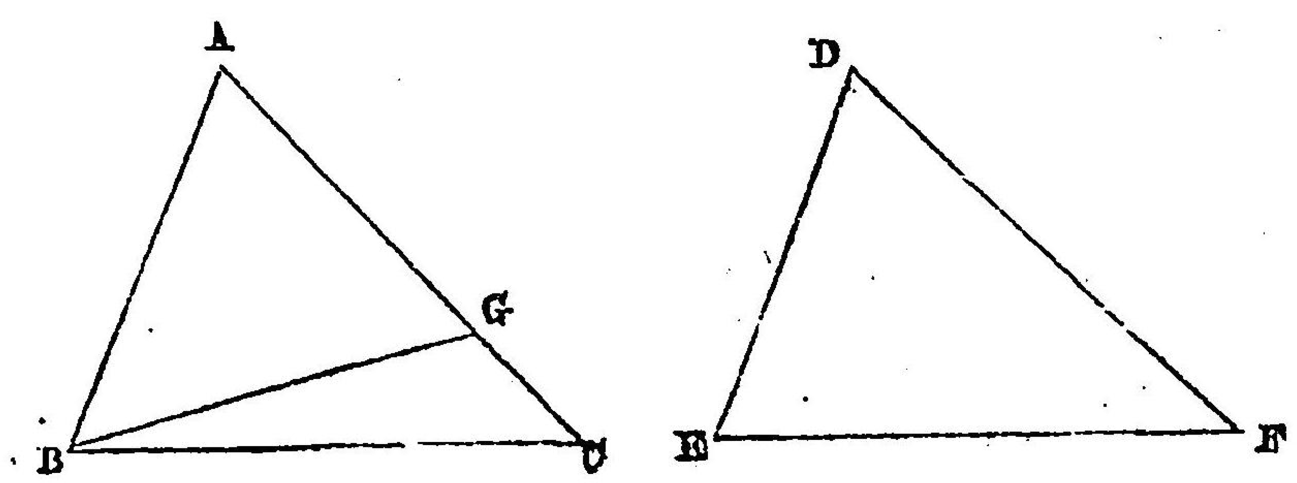
(5)　ノ塲合ニ於テハ考ヲ要スルモノナリ

一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ内ノ一邊ニ對スル角トガ夫々他

ノ三角形ノ之ニ相應スル邊ト角トニ等シキトキハ二邊ノ内ノ他ノ一邊ニ對スル角ガ何レモ鋭角ナルカ鈍角ナルカ若クハ其ノ一ガ直角ナルトキハ兩三角形ハ全ク相等シ

ABC, DEF ヲ二ツノ三角形トシ其ノ AB, BC ハ夫々 DE, EF ニ等シク角 BAC ハ角 EDF ニ等シトス

第一　角 ACB, DFE ガ各鋭角ナリトス



然ルトキハ角 ABC ハ角 DEF ニ等シク兩三角形ハ全ク相等シ，若シ然ラズトセバ角 ABC ノ方ヲ大ナリトセン而シテ角 DEF ニ等シク角 ABG ヲ作ラン然ルトキハ兩三角形 ABG, DEF ハ全ク相等シ(1.26)而シテ BG モ BC モ EF ニ等シキガ故ニ互ニ相等シ夫故角 BGC, BCG ハ相等シ夫故鋭角ナリ然ルニ角 BGA ハ鋭角ナリ何トナラハ角 EFD ニ等シ夫故角 BGC ハ鈍角ナリ即角 BGC ハ鋭角ニシテ又鈍角ナリト云フニ同シ是明ニ誤謬ナリ

如斯ナルヲ以テ角 ABC ハ角 DEF ニ等シク兩三角形ハ全ク相等シ

第二　角 ACB, DFE ガ各鈍角ナルトキ

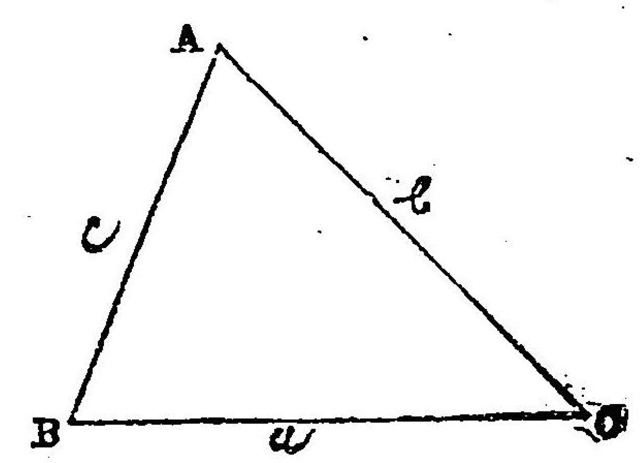
前ト同様ノ作圖法ニヨリ兩三角形ノ全ク相等シキヿヲ證明スルヿヲ得

第三　角 ACB ヲ直角トス

此ノトキ若シ角 ABC ガ角 DEF ニ等シカラズトセバ角 ABG

ヲ角 DEF ニ等シクセン

今第一ノ場合ニ於ケルカ如ク BG ハ BC ニ等シク從テ角 BGC ハ角 BCG ニ等シク其ノ結果トシテ三角形 BGC ハ二個ノ直角ヲ有スルヿトナル是レアリ得ベカラザルヿナリ夫故凡テノ場合ニ於テ定理ハ眞正ナリ



邊角ノ六個ノ内三ツ宛一組トスルトキハ二十組ヲ得

圖ノ如ク邊ヲ表ハスニ a, b, c ヲ用ヰ角ヲ表ハスニ A, B, C ヲ用ヰルトキハ

第一(1.4)ハ次ノ三組ヲ含ム

A, b, c ハ A', b', c' ニ等シ

B, a, c ハ B', a', c' ニ等シ

C, a, b ハ C', a', b' ニ等シ

第二(1.8)ハ唯一組ノミ

a, b, c ハ a', b', c' ニ等シ

第三(1.26)ハ九組ヲ含ム

A, B, c ハ A', B', c', ニ等シ

A, B, a ハ A', B', a', ニ等シ

A, B, b ハ A', B', b' ニ等シ

A, C, b ハ A', C', b' ニ等シ

A, C, a ハ A', C', a' ニ等シ

A, C, c ハ A', C', c' ニ等シ

B, C, a ハ B', C', a' ニ等シ

B, C, b ハ B', C', b' ニ等シ

B, C, c ハ B', C', c' ニ等シ

第四ハ唯一組ノミ

A, B, C ハ A,' B,' C' ニ等シ

第五ハ六組ヲ含ム

a, b, A ハ a,' b,' A' ニ等シ

a, b, B ハ a,' b,' B' ニ等シ

a, c, A ハ a,' c,' A' ニ等シ

a, c, C ハ a,' c,' C,' ニ等シ

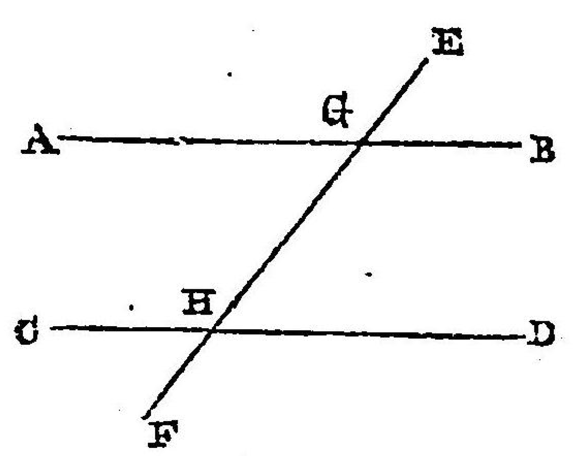
b, c, B ハ b,' c,' B' ニ等シ

b, c, C ハ b,' c,' C,' ニ等シ

2. 一直線ガ他ノ二直線ト交レルトキ同側ニ在ル内角ノ和二直角ニ等シキトキハ二直線ハ平行ナルコトヲ證セヨ (1. 28 ノ一部)

註 本定理ノ證明ハ次ノ如シ

直線 EF ガ他ノ二ツノ直線 AB, CD ト G, H ニ交リ同傍両内角 BGH, GHD ノ和ガ二直角ニ等シトナス然ルトキハ AB, CD ハ平行ナルベシ



∠GHC＋∠GHD＝二直角

然ルニ ∠GHD＋∠BGH＝二直角

由テ ∠BGH＝∠GHC

故ニ AB, CD ハ平行ナリ

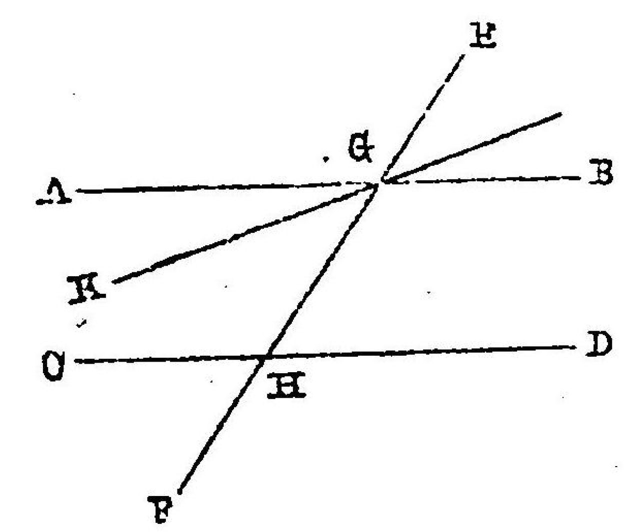
此ノ證明ハ"一直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ其ノ錯角ガ相等シケレバ二ツノ直線ハ平行ナリ"ト云フ定理ヲ用ヰタリ

備考 平行ナルコトヲ證明スルユークリッドノ定理ハ公理12ヲ基トシテ立論シタルモノナレドモ其ノ間ニ多クノ疑ヒアリ其

ノ代用トシテ推撰セラレタル多クノ方法ノ中プレーフエーア氏ノハ最簡單ナルモノニシテ甚明瞭ナル公理ヲ基礎トシテ立論セルモノナリ而シテ此ノ定理ヲ用ヰルモ毫モユークリッドノ系統ヲ乱ルモノニアラズ

公理 "互ニ交ル二直線ハ同一ノ直線ニ平行ナル能ハズ"ユークリッド 1. 29 ハ次ノモノト入換フベシ

直線 EF ガ平行直線 AB, CD ト交レリトセヨ然ルトキハ錯角 AGH, GHD ハ相等シカルベシ



何トナラバ若シ角 AGH ガ角 GHD ニ等シカラズバ何レカガ大ナルベシ今角 AGH ノ法ヲ大ナリトセヨ角 KGH ヲ角 GHD ニ等シク作レ

然ルトキハ EF ハ二直線 KG, CD ニ交ハリ互ニ相等シキ錯角 KGH, GHD ヲ作ルガ故ニ KG ハ CD ニ平行ナリ然ルニ AG ハ CD ニ平行ナリ是レ公理ニ背ク是ヲ以テ角 AGH, ト角 GHD トハ不等ナルベカラズ即等シ

註 上ニ示セル公理12ハ"二直線若シ第三ノ直線ニ交リ其ノ同傍ノ両内角ノ和若二直角ヨリ小ナルトキハ此ノ二線ヲ引長スレバ或有限ノ距離ニ於テ相交ル"

(1. 29)ハ千八百八拾五年一月幾何1ヲ見ヨ

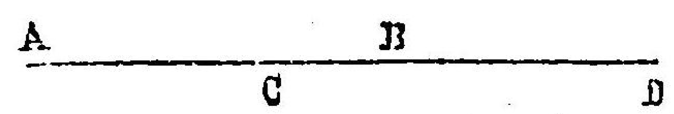
3. 三角形ノ二邊ノ中点ヲ結ブ線ハ第三邊ニ平行ナルコトヲ證セヨ

此ノ定理ハ千八百八拾三年六月幾何2ノ備考ニテ証セリ其ノ逆ハ千八百八拾四年一月幾何4ノ備考ニテ證セリ

4. 既知矩形ニ等シキ正方形ヲ畫ケ(II. 14)

千八百八拾五年六月幾何5ノ備考ヲ見ヨ

5. 直線ABアリCニテ二分セラル而ノ矩形AB.BCハACノ上ノ正方形ニ等シ今ABヲD迄延長シBDヲACニ等シクセバ矩形AD.DBハAB上ノ正方形ニ等シキコトヲ證セヨ



矩形 $AD.DB=BD.AC+BD.BC+BD.BD$ (II. 1)

然ルニ $AC=BD$

$\therefore$ $AD.DB=2AC^2+AC.BC$

然ルニ $AC^2=AB.BC$

由テ $AD.DB=AB.BC+AC.BC+AC^2$

$=AB^2$ (II. 2)

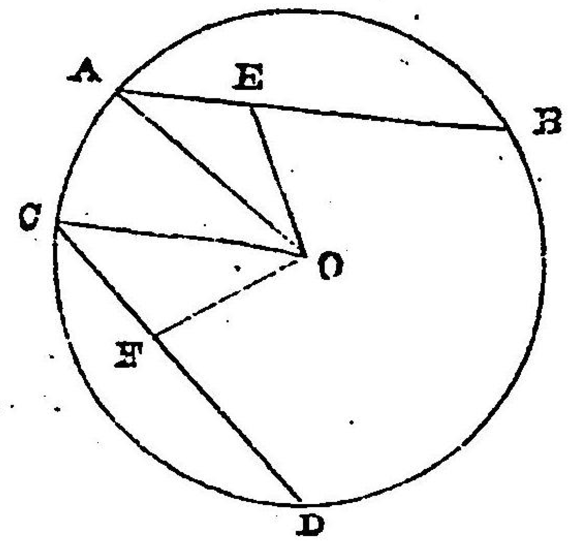
註 (II. 1)ハ"二直線ノ作ル矩形ハ其ノ一線ト他ノ線ヲ任意ニ分チタル各分トノ作ル矩形ノ和ニ等シ"

(II. 2)ハ"一直線ヲ二分スルトキ全線ト其ノ各分トニテ作ル矩形ノ和ハ全線ノ上ノ正方形ニ等シ"

6. 圓ノ等弦ハ圓心ヨリ等距離ニアリ(III. 14ノ一部)

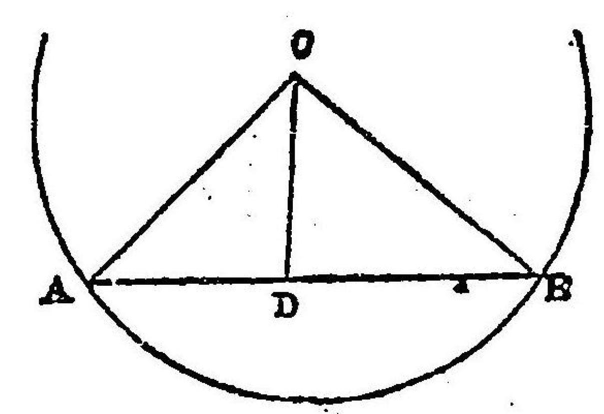
補 本定理ノ證明ハ次ノ如シ

AB, CDハ中心Oナル圓ノ等弦トス Oヨリ垂線OE, OFヲ引キ又OA, OCヲ結ブ然ルトキハE, FハAB, CDノ中点ナリ(III. 3ノ一部)而メAB, CDハ相等シキカ故ニAE, CFモ亦相等シ之ニ由テ二ツノ直角三角形OEA. OFCニ於テ斜邊OA, OCハ各半徑ニシテ相等シク又AE, CFモ相等シ故ニ



OEハOFニ等シ即チ等距離ナリ

(III. 3ノ一部)ハ"圓ノ中心ヨリ弦ヘ下セル垂線ハ弦ヲ二等分ス"ト云フ定理ナリ此ノ證明ハ次ノ如シ



ABハ中心Oナル圓ノ弦ナリOヨリ垂線ODヲ引キ又OA, OBヲ結ブ二ツノ直角三角形ODA, ODBハ斜邊OA, OB相等シク他ノ邊ODハ共通ナリ之ニ由テDAハDBニ等シ即チODハABヲ二等分ス

(III. 14)ハ千八百八拾四年一月幾何7ノ備考ニ於テ引用セラレタリ

備考 圓ノ等弦ノ中点ノ軌跡如何

總テノ中点ト圓心トヲ結ブトキハ此等ノ線ハ何レモ弦ニ垂線ナリ(III. 3ノ一部)故ニ凡テ相等シ(III 14ノ一部)因テ所要ノ軌跡ハ原圓ト同心ナル圓ナリ

註 (III. 3ノ一部)ハ上ニ揭ケタルモノト異ナル即"圓ノ中心ト弦ノ中点トヲ結ブ線ハ弦ニ垂線ナリ"

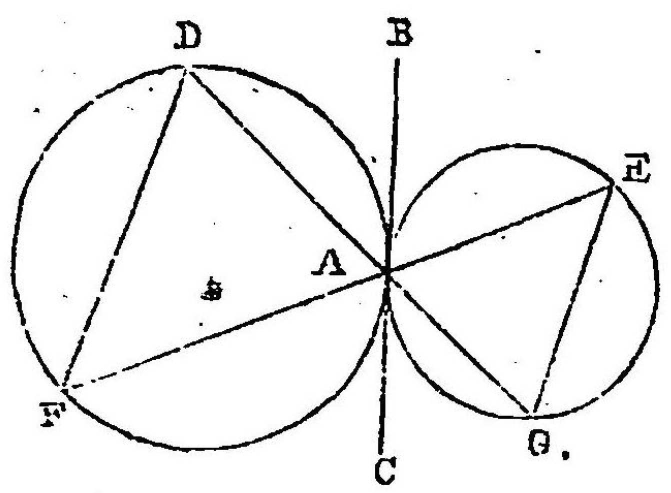
7. 圓ノ中心ニ於テノ角ハ同シ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ二倍ナリ(III. 21)

註 (III. 21)ハ千八百八拾四年六月幾何8ノ註ヲ見ヨ

8. 兩圓アリAニテ相切スAヲ通シテ二弦ヲ引キ一圓ヲDトFトニテ他ノ圓ヲEトGトニテ切ラシメ弦DFトEGトノ平行ナルコトヲ證セヨ

DAG, EAFヲ兩弦トス

Aヲ通シテ共通切線BACヲ引キ其ノB端ヲD, Eノ間ニア



ラシム然ルトキハ角 CAG ハ弊弓形內ノ角 AEG ニ等シ又角 BAD ハ角 AFD ニ等シ故ニ角 AEG ハ角 AFD ニ等シ而ノ錯角ナリ故ニ DF ハ EG ニ平行ナリ

補　一ツノ圓ガ他ノ圓ノ內ニ切スルモ同樣ナリ

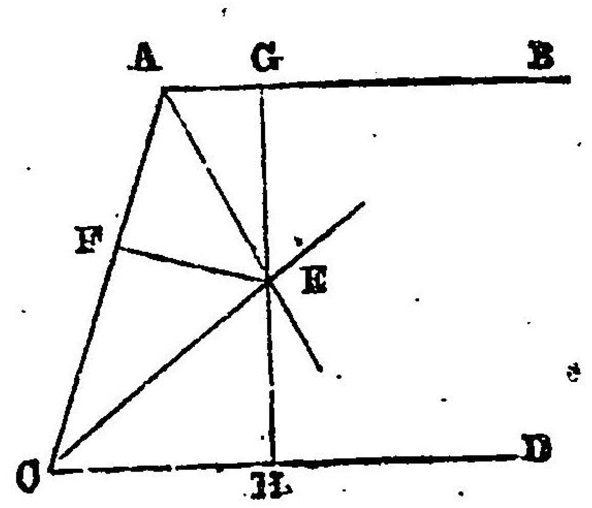
9. 三定直線ニ切スル圓ヲ畫ク法如何

備考　千八百八拾四年一月幾何 10 ノ備考ヲ見ヨ

(1)　三線平行ナルトキハ不能ナリ

(2)　二線平行ニノ第三線ノミ平行ナラサルトキ

AB, CD ハ平行ニノ AC ハ前ノ二線ト夫々 A, C ニ交ル



BAC, ACD ノ二角ヲ二等分スル直線 AE, CE ヲ引キ E ニ會セシムE F, EG, EH ヲ夫々 AC, AB, CD ニ垂直ニ引ク然ルトキハ (1V.4) ニ依テ E F, FG, FH ハ互ニ相等シキコヲ知ラル之ニ由テ E ハ所要ノ圓ノ中心ナリ

註 (1V.4) ハ千八百八拾四年六月幾何 9 備考 1 ヲ見ヨ

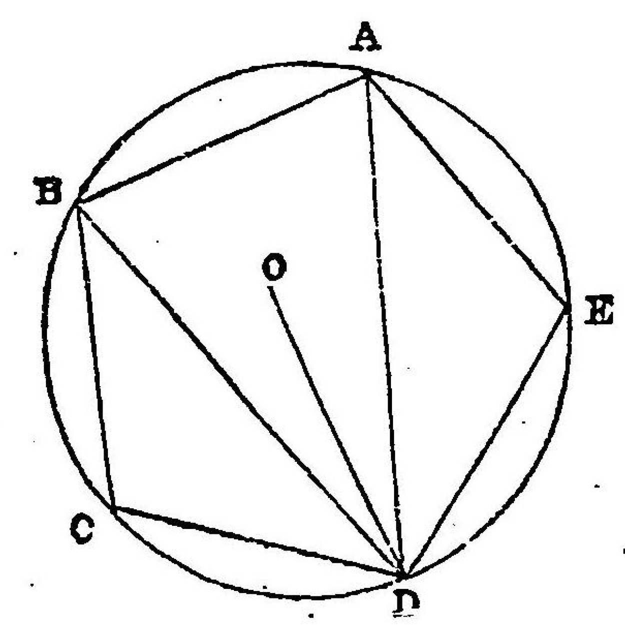
補　此ノ塲合ニ於テ三線ニ切スル圓ノ中心ハ二ツアリ（千八百八拾五年一月幾何 8 ノ補ヲ見ヨ）

(3)　三線皆平行ナラサルトキハ之ヲ延長シテ相交ラシム然ルトキハ三角形ヲ得ヘシ而ノ問題ハ (1V.4) ト同ジモノトナル

補　此ノ塲合ニ於テ三線ニ切スル圓ノ中心ハ四ツアリ（千

八百八拾五年一月幾何 8 ノ補ヲ見ヨ

10. ABCDE ハ正五角形ニノ O ハ其ノ外接圓ノ中心ナリ然ルトキハ角ハ BDO, CDA ハ合セテ直角ニ等シ



千八百八拾五年六月幾何 2 ニ說明セルコニ依テ正五角形ノ一角ノ大サハ

$$5x+360^0=900^0$$

$$5x=6\text{直角}$$

$$x=1\frac{1}{5}\text{直角}$$

BD, AD. OD ヲ結ヲ然ルトキハ角 CDO ハ角 CDE ノ半分ナリ (1V. 14) 即

$$\angle CDO=\frac{3}{5}\text{直角}$$

又弧 BA ハ弧 BC ニ等シキカ故ニ

$$\angle CDA=2\angle CDB$$

然ルニ弧 CB ハ弧 CD ニ等シキカ故ニ

$$\angle CDB=\angle CBD$$

由テ　$\angle CDA=\angle CBD+\angle CDB$

而ノ　$\angle BCD+\angle CBD+\angle CDB=2$ 直角

$$\angle BCD=1\frac{1}{5}\text{直角}$$

故ニ　$\angle CBD+\angle CDB=\frac{4}{5}$ 直角

即　$\angle CDB=\frac{4}{5}$ 直角

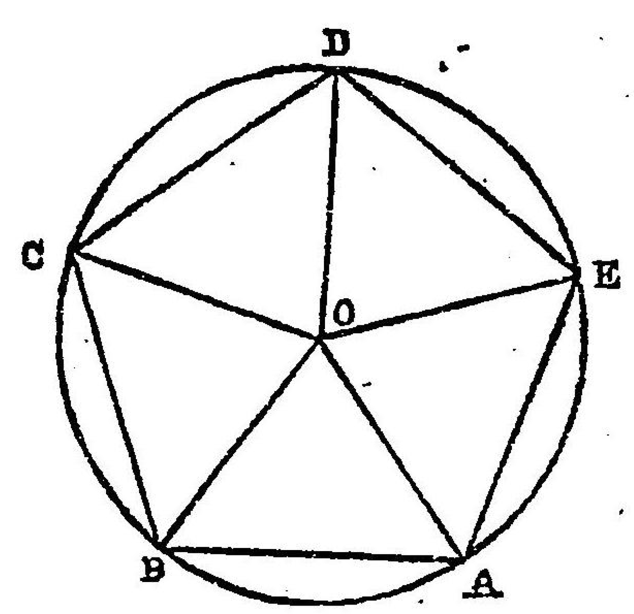
而シ　$\angle BDO=\angle CDO-\angle CDB$

$$=\frac{1}{5}\text{直角}$$

之ニ由テ　$\angle CDA+\angle BDO=$一直角

註(IV. 14)ハ"正五角形ニ外切スル圓ヲ畫クコ"ナリ此ノ作圖ハ次ノ如シ

ABCDEヲ正五角形トス,角A,Bヲ二等分シテAO,BOヲ引キOニ於テ交ハラシムOハ所要ノ外切圓ノ中心ナリ



OC,OD,OEヲ結ブ而三角形ABO.CBOニ於テABハBCニ等シクBOハ両形ニ通ヅ角ABO,CBOハ相等由テ角BAO,BCOハ相等シ然ルニ角BAE BCDハ相等シク角BAOハ角BAEノ半ナリ由テCOハ角BCDヲ二等分ス同様ニDO,EOハ角CDE,DEAヲ二等分ス又角ABC,BCD等ハ相等シキガ故ニ各ノ半分即角OAB,OBA,OBC等ハ相等シ由テOA,OB,OC等ハ相等シ故ニOハ正五角形ABCDEノ外切圓ノ中心ニシテOA,OB,OC等ハ其ノ半徑ナリ

附　　錄

時計之遲速

此等ハ概ソ比例ノ簡單ナルモノヽミ

"一日ニ二分ツヽ進ム時計ヲ月曜ノ正午ニ正時ニ合セ置クトキハ水曜ノ午後三時ニハ何時ヲ指スヤ"

トノ問ヒハ

"二十四時間ニ二分進ムトキハ五十一時間ニ何分進ムヤ"

ト云フニ同シサレド時トシ稍複雜ナルモノナキニ非ズ

例一　十二月二十五日午後二時ニ於テ同時ニ同時刻ヲ示ス二ツノ時計アリ一ハ二十四時間ニ八秒後レ他ハ七秒進ム二ツノ時計ノ指示スル時ガ半時間ノ差ヲ生スルハ何日ナリヤ而シテ各何時ヲ示セリヤ

24時間ノ後ニ於テ一ツノ時計ハ他ヨリ15秒進メルコ明ナリ

$$15\text{秒}:30\text{分}::24\text{時}:x$$
$$x=2880\text{時}$$
$$=120\text{日}$$

夫故所要ノ時ハ十二月二十五日ヨリ百二十日後ノ日ナリ即翌年四月二十四日午後二時ナリ

又第一時計ハ　$30\text{分}\times\frac{8}{15}=16\text{分}$ 後レタリ

第二時計ハ $30分 \times \frac{7}{15} = 14分$ 進ミタリ

夫故第一時計ハ午後一時四十四分ヲ指シ第二時計ハ午後二時十四分ヲ指ス

例二　月曜ノ正午ニ一ツノ時計ハ一分後レテ他ノ時計ハ二分進ミテアリ水曜ノ朝ノ八時ニ第一ノ時計ハ正時ヲ指シ第二ノ時計ハ一分後レテアリ第二ノ時計ノ正時ヲ指セシ時及二ツノ時計ガ同時ヲ指セシ時ヲ問フ

44 時間ニ第二ノ時計ハ三分後レタリ夫故 $29\frac{1}{3}$ 時間ニ 2 分後レタリ夫故火曜ノ午后五時二十分ニハ正時ヲ指セリ

又第一ノ時計ハ第二ノ時計ガ 3 分後ルヽ間ニ 1 分進ミタリ即第二ガ後レタル $\frac{1}{3}$ 丈進ミタリ換言スレハ兩時計ノ生シタル全差ノ $\frac{1}{4}$ 丈進ミタリ夫故 3 分ノ $\frac{1}{4}$ 丈進メル𪜈ハ他ノ時計ハ 3 分ノ $\frac{3}{4}$ 丈後ルベシ而シテ兩時計ノ差ハ消滅スベシ然ル𪜈ハ何時第一ノ時計 $\frac{3}{4}$ ヲ進ミシカヲ決定スルニアリ，コハ明ニ 44 時間ノ $\frac{3}{4}$ 經過セル𪜈即 33 時間經過セル𪜈ナリ

夫故兩ツノ時計ハ火曜日ノ午后九時ニ同時刻八時五十九分四十五秒ヲ指セシナリ

此ノ結果ハ正シキヿハ 33 時間ニ第二ハ $2\frac{1}{4}$ 分後レ第二ハ

$\frac{1}{4}$ 分進メルヿノ事實ニ因テ證明セラル

時計針問題

時計針問題ニテ肝要ナルコトハ分針ハ時針ノ十二倍回轉スルヿ從テ分針ハ分ノ刻ミ十二ヲ歩ム間ニ時針ヨリ十一多ク歩ムヿナリ

今三種ノ問題ヲ考究セン即(一)兩針重ナルヿ(二)兩針一直線ヲナスヿ(三)兩針一直角ヲナスヿ

例一　四時ト五時トノ間ニテ時計ノ兩針重ナル時ヲ問フ

四時ノ𪜈時針ハ分針ノ前 20 分標處ニアリ夫故兩針ノ重ラン爲メニハ分針ハ時針ヨリ 20 分標多ク歩マサルベカラズ

今分針ハ 11 標多ク歩ム爲ニ 12 標歩ム

故ニ　〃　1　〃　$\frac{12}{11}$　〃

而シ　〃　20　〃　$\frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$　〃

即四時過キ二十一分十一分ノ九ノ𪜈兩針相重ナルベシ

同一ノ方法ニテ他ノ任意ノ時ノ間ニ兩針ノ重ル時刻ヲ算スルヿヲ得，十一時ト十二時トノ間，十二時ト一時トノ間，ニ於テハ兩針重ナルヿナシ何トナラバ兩針ハ十二時ニ於テ相重ナレハナリ

例二　四時ト五時トノ間ニ於テ時計ノ兩針一直線ヲナス時ヲ問フ

此ノ場合ニ於テ分針ノ時針ニ追ヒ付キタル上更ニ 30 分標丈之ヲ超サヾルベカラス即分針ハ時針ヨリ 50 分標丈多ク歩マザルベカラズ

今 11 標多ク歩ム爲ニ 12 標歩ム

1 〃 $\frac{12}{11}$ 〃

50 〃 $\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$ 〃

答　四時過五十四分十一分ノ六

此ノ類ノ問題ヲ考フルニハ所題ノ時刻カ六時前ナリヤ後ナリヤニ注意スベシ何トナラハ六時後ニ於テ分針ハ時針ノ前三十分標ニアルヿ能ハザルヲ以テナリ夫故時刻ガ六時後ナラバ分針ガ時針ノ三十分標丈前ニアリシ𪜈ヲ算スベシ

例ヘバ八時ト九時トノ間ニ於テ兩針ガ直線ヲナスハ分針ガ時針ヨリ多ク 40−30 即 10 分標丈多ク歩メル𪜈ニアルガ如シ

又五時ト六時トノ間六時ト七時トノ間ニ於テハ兩針ハ決メ一直線ヲナスヿナシ何トナラハ兩針ハ六時ノ𪜈ニ一直線ヲナセバナリ

例三　四時ト五時トノ間ニ於テ兩針ノ直角ヲナス時刻ヲ問フ

此ノ場合ニ二回アルベシ(1)分針ガ時針ノ後 15 分標ノ處ニアル𪜈(2)分針ガ時針ノ前 15 分標ノ處ニアル𪜈

(1) ノ場合ニハ分針ハ時針ヨリ 20−15=5 分標丈多ク歩ムベシ

(2) ノ場合ニハ追付キテ後超ヘサルベカラザルガ故ニ20+15=30 分標丈多ク歩ムベシ

今分針ハ 1 分標多ク歩ムニ $\frac{12}{11}$ 分標歩ム

故ニ 〃 5 〃 $\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$ 〃

35 〃 $\frac{420}{11}=38\frac{2}{11}$ 〃

答　四時過五分十一分ノ五ノ𪜈

及　四時過三十八分十一分ノ二ノ𪜈

此ノ種類ノ問題ハ前ノ種類ノモノヨリ復雜ナリ何トナラハ兩針ノ直角ヲナス場合四ツアレバナリ即分針ガ時針ノ前若クハ後ノ十五分標ノ處ニアル𪜈及四十五分標ノ處ニアル𪜈是ナリ併シナカラ毎時ノ間ニ此ノ四ツノ場合ドモ之レアルニアラザレバ各題ニ就テ前ノ四ツノ場合ノ中孰レカアリ得ルヤヲ考フベシ概シテ云ヘハ次ノ規則ニ從フヲ可トス

十二時乃至三時ノ間ニテハ分針ハ時針ノ前十五分標及四十五分標ニアル𪜈

三時乃至九時ノ間ニテハ十五分標前及後ニアル𪜈九時乃至十二時ノ間ニテハ十五分標後及ヒ四十五分標後ニアル𪜈

上ノ規則ノ處ナルハ二時ト三時トノ間, 三時ト四時トノ間, 八時ト九時トノ間, 九時ト十時トノ間ナリ此ノ間ニ兩針ノ直角ヲナスハ唯一回ノミ何トナラハ兩針ハ三時ト九時トニ於テ直角ヲナセバナリ

同一ノ問題ガ代數學ニテハ甚簡易ニ解セラル

h ヲ所題ノ時刻中ノ前ナルモノトシ x ヲ所求ノ分ノ數トスレバ

兩針重ナル片　　$x=\frac{x}{12}+5h$

兩針直線ヲナス片

（イ） 12 時乃至 6 時ノ間　$x=\frac{x}{12}+5h+30$

（ロ） 6 時乃至 12 時ノ間　$x=\frac{x}{12}+5h-30$

兩針直角ヲナス片

（イ） 12 時乃至 3 時ノ間　$x=\frac{x}{12}+5h+15$

又ハ　$x=\frac{x}{12}+5h+45$

（ロ） 3 時乃至 9 時ノ間　$x=\frac{x}{12}+5h-15$

又ハ　$x=\frac{x}{12}+5h+15$

（ハ） 9 時乃至 11 時ノ間　$x=\frac{x}{12}+5h-15$

又ハ　$x=\frac{x}{12}+5h-45$

單利息ト復利息トノ比較

試驗官ハ何時モ能ク次ノ如キ問題ヲ出セリ

"年利四分ニテ三年間十ぱんど八しりんノ單利息ト復利息トヲ比較セヨ"

不注意ナル受驗者ハ兩利息ヲ算出シテ別々ニ二ツノ答ヲナスモノアリ然ルニ二量ヲ比較ストハ一量ノ他量ニ於ケル比ヲ見出スコトナリ而シテ元金ノ多少ニハ關係セス何トナラハ兩方ニ元金ハ等シケレバナリ夫故次ノ如ク運算ス

年 4 分ニテ 3 年間 £1 ノ單利 $=\frac{12}{100}$

"　　復利 $=\left(1+\frac{4}{100}\right)^3-1$

$=\frac{1951}{15625}$

是ニ由テ所要ノ比ハ $\frac{12}{100}:\frac{1951}{15625}$

即　$12\times15625:1951\times100$

即　$3\times15625:1951\times25$

即　$3\times625:1951$

即　$1875:1951$

百分算

賣買ニ關スル百分算ニ於テ元價ヲ百ト考フル片ハ計算上大ニ便利ナリ次ニ數列ヲ擧ケテ之ヲ說明セン

1. 一ぱんどニ付四ぺんすニテ砂糖ヲ買ヒ四ぺんす二分ノ一ニ賣ラハ何割ノ利アリヤ

買價ヲ 100 ト假定ス又買價ハ $4d$ 賣價ハ $4\frac{1}{2}d$

夫故"4 ニ付キテ $\frac{1}{2}$ ノ利ハ 100 ニ付キテ何程ノ利ナリヤ"ヲ考フベシ

2. 一ぽんどヲ四ぺんそ二分ノ一ニ賣ルトキハ十二分二分ノ一ヲ利ストス云フ元價如何

買價ハ $4\frac{1}{2}d$ ナリ又賣價ヲ $112\frac{1}{2}$ ト假定セハ買價ハ 100 ナリ

夫故"賣價 $112\frac{1}{2}$ ノ品物ノ原價ハ 100 ナリ賣價 $4\frac{1}{2}d$ ノモノヽ原價如何"ヲ考フヘシ

3. 一ぽんどニ付四ぺんすニテ砂糖ヲ買ヒ之ヲ賣リテ十二分二分ノ一ノ利ヲ得ントス賣價如何

買價ハ $4d$ ナリ又買價ヲ 100 ト假定セハ賣價ハ $112\frac{1}{2}$ ナリ

夫故"100 ニテ買ヘル物ヲ $112\frac{1}{2}$ ニテ賣ルナラハ $4d$ ニテ買ヘル物ヲ何程ニ賣ルベシヤ"ヲ考フベシ

次ノ問題ハ上ノニ比スレハ稍復雜ナリ

4. 十二分二分ノ一ヲ利シテ四ぺんす二分ノ一ニ賣ルベキ物ヲ何程ニ賣ラバ二十分ノ損アリヤ

買價ヲ 100 ト假定セバ

第一ノ賣價ハ $112\frac{1}{2}$

第二ノ賣價ハ 80

夫故"$4\frac{1}{2}d$ ガ $112\frac{1}{2}$ ニ當ラハ何程カ 80 ニ當ルカ"ヲ考フベシ

單比列ニテ $112\frac{1}{2} : 80 :: 4\frac{1}{2}d : x$

故ニ
$$x=\frac{9\times80\times2}{2\times225}$$
$$=\frac{16}{5}$$
$$=3\frac{1}{5}d$$ 答

發賣所　立眞舍　千葉縣千葉町本町

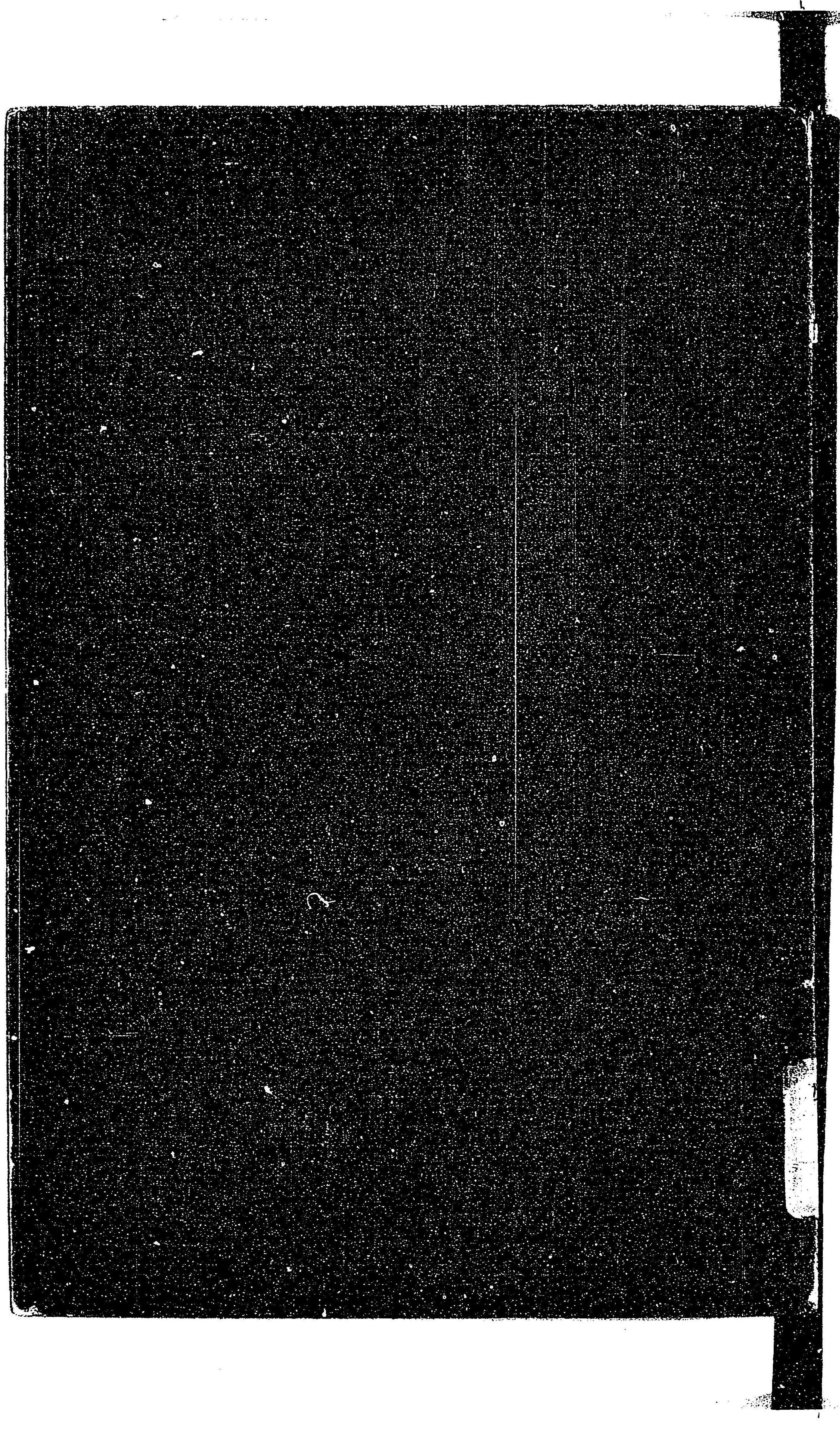
發行所　興文社　東京市日本橋區馬喰町貳丁目一番地

印刷兼發行者　鹿島長次郎　東京市日本橋區馬喰町貳丁目一番地

譯述者　中島喜一　千葉縣千葉町長州番外地

明治二十九年六月廿五日發行
明治二十九年六月廿二日印刷

（定價金四拾五錢）



数学試験問題解法一斑

中嶋 喜一／訳述