中等算學月刊

第五卷　第二期

要目

中華民國二十六年二月號

中等算學月刊社發行

中華民國郵政局特准掛號認為新聞紙類

中華民國內政部登記證警字伍壹肆貳號

本社代表人 陸子芬
(南京市立第一中學)

本社發行人 郭堅白
(四川省立重慶大學)

編輯委員會

魏時珍(叢書編輯主任)
(國立四川大學)

劉正經(月刊編輯主任)
(國立武漢大學)

周潤初	段調元	何魯
(國立四川大學)	(省立重慶大學)	(省立重慶大學)
余介石	張伯康	龍季和
(國立四川大學)	(中等算學研究會)	(國立北京大學)

經理

李修睦	劉和	王瑞祥
(南京市立第一中學)	(武昌國立武漢大學)	(四川省立重慶大學)

印刷

武昌國立武漢大學出版部印刷所 (電話：41420)

投稿規約

1. 本刊以供給中學師生補充算學教材，引起研究與爲趣宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎。

2. 來稿以簡明淺易，能合中等算學程度爲宜。如屬譯作，務請註明原文出處。

3. 來稿務宜謄正，萬勿過於潦草。格式每頁二十五行，每行三十五字。繪圖請用黑色墨水，精確作好，以便製版。

4. 來稿內容，本刊有修正之權，其不願修改者，請於寄稿時聲明。

5. 來稿除寄稿時特別聲明並附足郵費外，概不退還。

6. 來稿登載後，酌贈本刊若干期，以答雅意，非敢言酬也。

7. 來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社，或武昌珞珈山武漢大學本社。

本刊代售處

特約發行 南京中央書局 (太平路248號)

漢口：現代書局 良友書局 武昌：北新書局 新光書店

重慶：中華書局 商務印書館 成都：中華書局 商務印書館

武漢社址
武昌珞珈山
國立武漢大學

中等算學月刊

第五卷　第二期

南京社址
南京南捕廳
鍾英中學

目　次

中華民國二十六年二月號

本刊年出十冊（七八兩月停刊），預定全年國幣壹元壹角，零售每期國幣壹角叁分，郵費在內。郵票代洋，以壹分至壹角者爲限。國外郵費另加，每期貳角伍分，全年貳元伍角。如欲掛號，照郵章加費，每期國內捌分，國外伍角。

商務印書館出版

特價修學工具書

本館廿六年度特價書於每星期日公佈一次，茲將前十次中列入之修學工具書彙舉於後，以便選購。（本館出版修學工具書種類繁多，詳見本館「圖書彙報」）

王雲五大辭典（縮本）王雲五著 一册定價三元 特價二元一角⑤ 國內郵費一角五分半

王雲五小字彙 王雲五著 一册定價二元八分 特價二 角⑦ 國內郵費一角零五厘

康熙字典附考證及四角號碼索引 一册定價一元六角 特價一元一角二分⑩ 國內郵費二角三分

新字典 陸爾奎等編 一册定價一元九角二分 特價一元三角四分③ 國內郵費一角五分半

學生字典 陸爾奎 方毅編 一册 紙面定價四角八分 特價三角四分 布面定價八角 特價五角六分④ 國內郵費各一角零五厘

國音常用字彙 紙面定價四角八分 特價三角四分 布面定價八角 特價五角六分⑥ 國內郵費各一角零五厘

標準語大辭典 全國國語教育促進會編 國語統一籌備委員會編 一册定價一元八角 特價一元二角六分① 國內郵費一角三分

求解作文兩用**英漢模範字典**（增訂本）張世鎏 平海瀾 厲志雲 陸學煥編 一册定價二元五角 特價一元七角五分⑦ 國內郵費一角五分半

雙解標準英文成語辭典 厲志雲編 一册定價一元五角 特價一元零五分⑨ 國內郵費一角三分

漢英辭典 張在新編 一册定價二元 特價一元四角⑧ 國內郵費一角五分半

華英德法詞典 王安國著 新聞紙定價三元 特價二元一角 道林紙定價四元 特價二元八角⑥ 國內郵費二角三分

四庫全書總目提要 清永瑢等纂 四册定價十元 特價七 元① 國內郵費四角六分

中國地方志綜錄 朱士嘉編 三册定價二元八角 特價一元九角六分⑥ 國內郵費一角五分半

漢晉學術編年 劉汝霖著 四册定價二元四角 特價一元六角八分② 國內郵費一角五分半

東晉南北朝學術編年 劉汝霖著 一册定價一元四角 特價九角八分⑨ 國內郵費一角三分

重編**日用百科全書** 黃紹緒等主編 三册定價九元 特價六元三角⑥ 國內郵費六角九分

少年百科全書（縮本）王雲五主編 廿册定價十元 特價七 元⑧ 國內郵費六角九分

古書虛字集釋 裴學海著 一册定價一元八角 特價一元二角六分⑨ 國內郵費一角三分

古書讀法略例 孫德謙著 一册定價九角 特價六角三分⑩ 國內郵費一角三分

新文化辭書 唐敬杲編 一册定價四元 特價二元八角③ 國內郵費二角三分

英漢對照百科名彙 王雲五主編 一册定價二元五角 特價一元七角五分⑦ 國內郵費一角五分半

哲學辭典 樊炳清編 一册定價三元 特價二元一角⑤ 國內郵費二角三分

法律大辭書 鄭競毅等編 三册定價七元 特價四元九角④ 國內郵費四角六分

動物學大辭典（縮本）杜亞泉等編 一册定價七元 特價四元九角② 國內郵費三角零五厘

礦物學名詞 國立編譯館編訂 一册定價四元 特價二元八角③ 國內郵費二角三分

中國醫學大辭典 謝觀等編 三册定價十二元 特價八元四角⑦ 國內郵費六角一分

現代外國人名辭典 唐敬杲主編 一册定價四元 特價二元八角⑩ 國內郵費二角三分

標準漢譯外國人名地名表 余祥森等編 一册定價一元六角 特價一元一角二分② 國內郵費一角三分

（附註）特價下之數字示公布之次數其特價截止期如下①五月二日止②五月九日止③五月十六日止④五月廿三日止⑤五月卅日止⑥六月六日止⑦六月十三日止⑧六月廿日止⑨六月廿七日止⑩七月六日止

第五卷　中等算學月刊　第二期

高中算學修學指導

汪　桂　榮

關於算學的話

從前 Aristotle 說，算學爲量的科學。 最近 Bertrand Russell 說，算學是這樣一種的科學，在牠裏面，我們永不知道我們所說的是什麼，也不知道我們所說的是對不對。這兩種說法，前者太簡，後者太空，都不是中學生所能領略的。 現在就各方面分頭看看算學的性質，究是怎樣。

第一，算學的根據，是公理和定義。這些公理和定義，有說是從經驗而來的，有說是可以任意選定的，議論紛紛，我們不必深究。 不過初等算學中所採用的公理和定義 至少都不與日常經驗相違背，是不是爲了要使大衆易懂，我們也不敢武斷。

其次算學的方法乃極其嚴密之論理方法。從公理及定義入手，推出定理公式，再以此推出之結果爲根據，按律推演，逐漸發展。這是近數十年來研究算學的基礎所得的算學發展觀。其實就歷史方面看來，算學的發展，不一定都取這種演繹的方式。不過在算學上從來不曾發現過有矛盾的情形，當然是方法嚴密的原故。

再次算學的目的，或研究的對象，粗略地說起來，不外乎數和形兩者。Plato 說過，‘天地間的奧妙，於數可見，於形可知，宇宙雖大，吾何難以算理御之’，就是這個意思。 算學的起源，大抵都由於實用上的需要，如幾何發源於量地，三角肇端於測天，這是大家都知道的。 可是後來研究進步，目的却不在實用而是爲算學而研究算學了。那預先存心想爲實用而研究算學的人，不獨算學方面沒有上等的成就，就是實用方面，也得不到預期的效果。 純粹算學，在研究的時候，決不想到如何應用，然而結果應用的範圍，反而非常廣大，這種例子是常見的。正合着俗語說的"有意栽花花不發，無心插柳柳成陰"了！

最後說到算學的應用，那眞是一言難盡。一切科學，如天文，地質，物理，化學，軍事，工程，社會，經濟，沒有離得開算學的。我國今日貧弱如是，大都由於科學知識之落後及建設能力之薄弱。談到復興民族和經濟建設，所倚賴的是大批科學的人才。諸位在高中讀書，正是這樣人才的預備時代，將來要替國家出力，此時應將爲凡百科學基礎的算學好好學習纔是。

綜合以上所說各節，我們可以說：

算學乃根據與日常經驗不相違背的公理與定義，用嚴密的論理方法推出定理和公式，以研究關於數和形的理論及其應用的一種學問。

高中算學的內容

高中算學分爲平面三角，幾何，高等代數及解析幾何四大類。

(1) 平面三角 乃研究三角形解法及三角函數理論的學問。內容可分應用及理論兩部分；如三角形的解法及測量上的應用屬於前者，至於恆等式的證明及三角方程式的解法，則屬於後者。

(2) 幾何 乃根據公理定義，用嚴密的論理方法推出定理及問題，以研究圖形的性質，關係及大小的學問。內容分兩部分：其一爲平面部分，與初中平面幾何之專講基本定理及計算問題者，略有不同，除對於證法特別注重外，并詳論軌跡及作圖題，著名的定理和問題，亦略談及。其二爲立體部分，主要目的在訓練空間懸想，立體圖形表示及面積體積計算方法。

(3) 高等代數 乃根據設理定義，用嚴密的論理方法推出定律公式法則等，以研究函數之計算及方程式解法的學問。初中代數注重實數的運算，高中代數則注重虛數及雜數之理論。初中代數研究少數簡單級數，高中代數則研究無窮級數。此外初中代數中之方程式，大都簡單而特殊；高中代數則注重方程式理論，而且旁及排列，配合，或率及二項式定理等。

(4) 解析幾何 乃應用坐標及代數以研究圖形性質的學問。內容略分四部：第一爲基礎部分，研究用坐標法求距離，角度，面積以及方程式描跡法；第二討論直線與圓；第三爲二次曲線的研究，爲此課程之主要部分；第四略及高級平面曲線。亦有略附立體解析幾何者，但普通多缺此部分。

學習算學應注意的事項

高中學生年齡比初中學生大一些，學習功課，一半固然還要先生的督責，一半也要自己勤奮，才能有成。算學爲主要科目之一，更應特別注重。現在把學習時應注意的事項，詳細地寫在下面，希望大家留心。

(1) 好的開始。古人說凡事愼之於始，西諺亦謂好的開始，等於一半成功。所以無論何

種算學課程，在開始上課以前，必須將應用工具一齊帶好，然後聚精會神開始工作。這樣可以把基礎弄好，頭緒弄清楚，以後按步就班進行，自無困難。

(2) 專心聽講。算學是有連續性的課程，前面不懂，後面便聽不下去。所以每次聽講，非專心不可，否則心不在焉，聽若無聞，試問如何能懂。專心二字，不只上課用得着，即便在課室討論問題，或自修時演習題，都要同樣專心致志纔好。

(3) 參考筆記。要求深造，僅僅課本上的知識是不夠的，應當請先生指定或介紹參考書籍，於暇時閱讀。隨着課程的前進，參考材料時時變更。閱過之後，將要點筆記下來，加以整理。這樣做去，你的學識定有顯著的進步。

(4) 摘要復習。每講完一章或一段落，要將其中重要綱領，摘錄於手冊中，以便時時展閱。如重要公式及定理等，多寫一遍，印像便更深一層。復習的工作，更是重要，有人看懂了便將功課丟開，可是不多時便忘懷了。世上有幾個過目不忘的人？不復習結果必致隨學隨忘，有何益處？

(5) 多做習題。算學與其他功課不同的地方，便是其中知識，一半要從習題得來，所以多做習題，確爲要務。做習題時，除專爲練習公式之計算題以外，遇着複雜問題，必先把題意看清，分別已知事項和所求事項。分析旣畢，就已知及所求分別求其有關係之定理及公式，然後設法解決。代數問題，須適當選擇未知數，與已知各項列爲方程式。幾何問題，須正確將圖作好，然後思索其中已知及未知部分的關係。多做之後，不獨公式定理格外透澈，而且熟能生巧。加以思想愈用愈靈，即遇困難問題，亦能悉心分析，如理亂絲，而解決後之心神愉快，更有非筆墨所能形容的。

思考與記憶

算學是用思考最多的科學，但是思考應有適當的步驟，並不是糊思亂想所能成功的。中學生在高中時期，智力纔開始發達，思考能力尙弱，許多學生怕算學，這是主要原因之一。其實思考的步驟，簡單說起來，無非是從已知求未知。問題當前，沒有現成解決方法，這纔要用思考。第一先考查這問題中，究竟困難之點何在。其次便要分析問題內面各關係事項。關係明白之後，可以假定解決辦法，然後依照這辦法去試做。如果此法不行，就當再想他法，即便此法已可得結果，也不妨再試試別法。例如證一定理，將假設及終結分別清楚之後，想想用什麼證法。順證不得則逆証之，逆証不得則旁証之，再四思尋，總可証出。解一問題，也是將已知及所求分明之後，再想用什麼定理或公式，此法不行再試他法。有時覺得一種證法或解法，雖可成功，但還不及另外方法較爲簡單或更爲美滿。如此運用思考，學問自然進步。普通都說研究算學，可以訓練思想或增進思考能力，就是這種道理。

學習算學，和其他科學一樣，學過了的部分，總要記住。有些人記憶力特別強，當然是最好不過，但是這種人究居少數，所以記憶也要得法，纔不致枉費腦力。算學中的事項，有的部分只要記住原理，有些特殊的結果，因為時常應用，非牢記不可。例如對數算法，以加減代乘除的原理，須要記得，但是對數表，大可不必去背誦。又如特別角(如 30°, 45°, 60° 等)的三角函數，因為應用太多，非熟記不可。又如代數裏面關於三次方程式的解法或行列式的展開，理論似乎可以不必記(記得當然好，但非高中學生所必要，)只能記住方法即可。這種例子太多，不勝枚舉。至於記憶的方法，背誦當然是一種，但是最重要的，還是多想多做，這是自然的記法，非強記可比，而且所記得的可以保持很長久的時期，甚至終身不忘。此外如徹底了解，摘錄要點，利用想像，都是幫助記憶的方法。有時各人有各人自己的特別記憶法，那便非一言所能盡的了。

精確與整潔

算學的精神，在乎精密與準確。所以學習算學，應有愛精確的習慣。我國人的性情，大都馬馬虎虎，國家的衰弱，這是最大的原因。要求精確，第一應當細心。譬如做習題，如果寫錯一個數字或符號，立即得不着正確的結果。不正確的結果，毫無價值可言。學生對於此點，往往不大注意，以為不大要緊；他們嘗說：只要方法不錯，得數差點，可以原諒，其實這是重大的錯誤。就很簡單的例子說，如算一筆賬，或計劃一件工程，如果結果錯誤，試問有何用處？這一點和責任心也有相當的關係。有責任心的人，對於此等處，決不肯含糊過去。在學生時代說'方法不錯，得數差點不要緊'的人，將來替國家辦事，一定貽害無窮；其弊不只在於學不好算學而已。愛精確的學生，對於課本方面，必求透澈了解，稍有疑問，必定請教先生。做習題時要處處細心，寫一個式子，必得檢查，得到答數，必須覆驗，答數如有單位，必須註明，是否合理，必須考察。如應用問題，方程式列好，逐步計算無誤，得答數後，當然可以適合方程式，但是還要看看合題意與否。有時負數或分數的答案不能用，或者幾個答數中只有一個可用，這都是應當注意的。又如解分數或無理方程時，常發現增根，也應除去。如此所得的結果，纔可稱為精確。

與精確有關係的事，寫錄的整潔也是一宗。在課室寫筆記，為了時間關係，不得不潦草，下課之後，務必立時整理清楚，否則再過若干時，自己都會認不清楚。做習題時，依照相當的格式，整齊地寫下去，不獨練習簿美觀，即便有錯誤也容易檢查出來。幾何或三角題，常有作草圖的必要，如果信筆亂畫，等邊形畫成不等邊，在圓內相交的畫出圓外，代表一寸的線段比代表一尺的還要長，不獨過些時自己看不清，而且常常引起錯誤。這種整潔的習慣，對於人生，影響很大，學生諸君千萬留意為是。

戒條

此外尚有應戒事項若干，分述於下：

(1) 勿缺課。前面說過，算學是有系統的功課，前面不懂，後面便聽不下去。所以非萬不得已，切莫缺課。

(2) 勿畏難。算學比其他課程，不免稍難，但是如果畏難而不敢嘗試，那便終無學成之望。其實肯下決心，多讀多做，從頭便如此，以後自無困難。從前 Euclid 說過，幾何學中，沒有皇帝走的御道，可見研究算學非下苦工不可。普通學生對於繁雜的計算，都怕麻煩，不肯耐煩去做，這種心理，非根本改革不可。

(3) 勿欠習題。習題應按時繳納，不可隨便少交。有些學生交習題的時候，常推說有事，未能全做，下次再補，一次兩次，都是如此，結果債台高築，永無清償之日。這種因循苟且的習慣，大非學生所宜有。

(4) 勿抄演草。抄襲他人演草，也是不良習慣之一。要想學好算學，非自己下工夫做習題不可。遇到難題，務必多加思考，或參考書籍，或與同學研討，或向教師請問，均無不可，何必貪圖便宜，借人演草，做這種自欺欺人的事情呢？

(5) 勿存疑不問。中學生還有一種通病，就是每遇功課中有疑問的地方，只要可以含糊過去，便不肯問。有些定理的證明很艱澀，有些公式的導來很繁難，即便用心聽講，未必皆能全部明白。如此等處，許多學生都以為教師尚且吃力，我們何必深求，只要將結果記住，能夠應用便已足意。這還是好一點的學生們的意見，至於笨一點的學生們，更不消說是不問了。加之這些部分，考試時大半是不會出題的，更樂得不聞不問。這樣學習算學，至多不過一知半解，決無深造的希望。

(6) 勿臨陣磨槍。算學這門功課，非要天天有恆，一步一步的前進，不能學好。平時不用功，一到考試臨頭，纔來預備，决來不及。嘗見有些學生，到考試的時候，大開其夜車，拚命強記，以圖及格，結果成績還是不佳，縱令一時僥倖及格，然而身體大受損傷，眞是得不償失。

以上所言，雖係老生常談，無甚高論，然而都是修學的階梯，成功的大道，尚望學生諸君多加注意。

*　　*　　*　　*　　*　　*

上期算學遊戲問題答案

1. 甲有牲口11頭，乙有7頭，丙有21頭。2. 甲44•9元，乙22•5元，丙11•3元，丁5•7元，戊2•9元，己1•5元，庚0•8元。3. 其時為午後九點三十六分。按2題可推廣如次：設在局者有 n 人，每人最後囊中餘金同為 $m(2^n)$ 則最後做莊者上場時所帶之款為 $m(n+1)$，前一人之款為 $m(2n+1)$，再前一人為 $m(4n+1)$，再前為 $m(8n+1)$，如是遞推，最初做莊者所帶之款為 $m(2^{n-1}\cdot n+1)$。本題 $n=7$，$m=1$。

高中幾何中之初中幾何

黃 泰

高中幾何教學中，有一個值得注意的問題：就是“高中幾何中如何處置初中幾何定理?”若是一個個仔細討論，為低能的學生着想，固然是很好，但是時間費得太多，很不經濟；並且初中幾何已讀好的學生們聽了，必定索然無味。假如開快車講過去呢？根基好的學生，可以得到複習的效益，可是根基不好的，依舊是走馬看花，不能深入。結果似是而非，似懂不懂，耳內聽得進，嘴裏說不出。幾何班學生成績，往往因此而一塌糊塗。至於說初中定理，高中幾何中可以完全不講，那更是空中樓閣，一點影子也沒有。幾何是最嚴密的學程，學習的程序，應取螺旋式向上進行，第一層不學好，第二層決沒有學好的可能。幾何教學的要點，不僅使學生懂得，還要使他們記得，僅僅記得還無用，必須要使他們會拿來應用，而且說出來或寫出來的話，要是幾何的話，合於幾何的方式。這一點是很難的。有的學生，他懂得，記得，而且會用，但是講出的話或寫出的敍述，總總難令教師滿意。這與邏輯次序有關，在初中幾何教學中，不易做到，但到了高中，便應加意訓練。幾何教學，本是全部算學教學中最費研究的一部分，尤其是高中幾何這一階段。因為內容比較空洞，在一般的幾個原則下，可深可淺，可難可易。其中最重要的一關鍵，就是關於初中已學過的一部分，在高中幾何課程中，如何組織及如何教學？這一部分做好了，全部幾何才有學習好的希望。所以“高中幾何中如何處置初中幾何定理?”確是一個值得注意的問題！

當然，高中幾何，是幾何教學的第二圓周，他的使命，是使學生對於初中幾何不透澈的透澈，已透澈的更加透澈，而後授以應添的材料。邏輯的次序，初中學生年齡幼稚，未易與之嚴守，高中學生却宜加意訓練。又定理證法方式甚多，初中學生思想簡單，未易與之分析研究，高中學生則當特別重視，使其接受一種證法後，便能解決若干問題。基於這二要點，我常想，若以定理證法為經，初中幾何為緯，就每種證法所能解決的一羣定理，放在一起，這樣分類討論起來，一方面可以訓練學生，使其對於每種證題方法，有深切的認識，能自由地運用，一方面又複習了全部初中幾何定理，而同時並感覺到基本幾何定理證明的簡單化，收效既宏，時間又極經濟，豈不兩全其美。但是其中有一極困難的問題，就是要遵守邏輯次序，否則毫無意義。要遵

原件短缺

就主詞賓詞之相合相拒而構成命辭如上，是曰範疇命辭(categorical proposition)。若取二範疇命辭而聯繫之，由甲命辭之假設，推而及於乙命辭，則曰假設命辭(hypothetical proposition)。其中甲命辭爲乙命辭成立之條件，名爲前件(antecedent)，乙命辭爲由甲命辭引出之結論，名爲後件(consequent)。

算學命辭常爲假設的，其所有範疇命辭，每得改爲假設命辭之形式。如'三角形內角之和爲二直角'乃一範疇命辭，但改爲'若 A, B, C 爲一三角形之內角，則 A+B+C 爲二直角'，卽成一假設命辭矣。蓋取範疇命辭中之主詞賓詞，分別爲假設命辭中前件後件之賓詞，而另取一公共之主詞卽得。反而行之，亦可改假設命辭爲範疇的。例如'一三角形各邊對應相等於他一三角形時，則二形爲全等'可改爲'任何三角形，全等於他一三角形之各邊與其對應相等者'。

用符號邏輯之方法，得將上述之二情形併爲一種形式。設以 a, b 二文字表二類概念，則 $a<b$ 表示'凡 a 皆爲 b'之一全稱肯定命辭(主辭 a 爲周延，賓辭 b 爲不周延，此命辭指凡 a 爲 b 之一部分)。若 a, b 表二範疇命辭，則 $a<b$ 表示'命辭 a 含有命辭 b'。前者稱爲 $a<b$ 一式之概念的詮釋(conceptual interpretation)，後者則爲其命辭的詮釋(propositional interpretation)* 此爲 Boole 之重要貢獻。

若'凡 a 皆爲 b'而又'凡 b 皆爲 a'，則 a 與 b 全同，以 $a=b$ 表之。故 $a<b$，且 $b<a$ 時，則 $a=b$.

聯 合 判 斷

上述之假設命辭，爲一種聯合判斷(compound assertion)。聯合判斷倘有合若干主詞以肯定或否定一賓詞者，是曰合主判斷(copulative assertion)，亦有由一主詞肯定或否定若干賓詞者，是曰合賓判斷(conjunctive assertion)。推而廣之，主詞及賓詞皆由若干概念合成亦無不可。算學中有一種更複雜之情形，卽聯合若干判斷爲前件，以推出一由若干判斷合成之後件，吾人姑稱之爲複聯合判斷或命辭。如上所舉關於三邊對應相等之全等三角形一命辭，可析爲下列形式：在 ΔABC, $\Delta A'B'C'$ 中，

若 $BC=B'C'$, $CA=C'A'$, $AB=A'B'$; (三判斷合成之前件)

則 $\angle CAB=\angle C'A'B'$, $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\angle BCA=\angle B'C'A'$. (三判斷合成之後件)

吾人於此宜注意者，卽後件中各判斷，可分立之使成若干命辭(結構類於合賓判斷)，但前件中之各判斷則決不能分離之，與普通邏輯所論不同。蓋若前件中某一部分判斷，可以割出而不影響後件之成立，則此部分之判斷，對於後件初無作用，不應列入算學命辭之前件中也。

* Couturat-Robinson: The Algebra of Logic, p. 4. (以後簡稱邏輯代數)

Boole-Schröder 代數之基本觀念

符號邏輯之觀念，實濫觴於德大哲學家 Leibnitz. 氏之原則有二：(1)吾人之觀念，不外少數簡單觀念之結合物，此等少數觀念，可稱為'人類思想之字母'；(2)應有一種類乎算術推理法，以結合此等簡單觀念，使成複雜觀念。 前者之研究曰 characteristica universalis，後者為 calculus ratiocinator. 近代之發展，在後一方面，以 Boole, De Morgan, Jevons, Venn, Pierce 及 Schröder 諸家之力居多。Boole-Schröder 之代數其一例也。在前一方面，則推 Frege, Peano 及 Russell 諸氏之貢獻為最大。*

Boole 以為邏輯代數得有三種運算：†

(1) 邏輯乘法。 符號 ab 之概念的詮釋，為 a, b 二類所共含之一最大類，其命辭的詮釋則為含 a, b 二命辭之一範圍最大命辭，換言之，即 a 及 b 之同時肯定也。

(2) 邏輯加法。 符號 $a+b$ 之概念的詮釋，為含 a, b 之一最小類；其命辭的詮釋則為 a, b 二命辭所共含之一範圍最小命辭，換言之，即 a 或 b 之更迭肯定也。

(3) 相反法(negation)。 二類之不能並存或二命辭之不能同時成立者，謂之相反。a 之反為'非 a'，以 a' 表之。

Russell 以反(contradictory)，離(disjunctive)，合(conjunctive)，涵(imperative)四種函數為邏輯推理之基礎(見算學原理 p. 6)，即指上之相反，加，乘與<也。

Boole 又引入兩個邏輯常數，一為 0，一為 1。§ 其概念的詮釋，前者表虛無，後者表全部；而其命辭的詮釋，則前者表僞妄，後者表眞實。

同異原理

同異原理 (principle of identity and difference) 亦曰思想律 (laws of thought)，計分三條：

(1) 同一律(law of identity)**為考察相同事理之原則，公式為"a 即為 a"，以

$$a=a$$

之符號式表之，其作用乃表明吾人推理時所用名詞及觀念，必需保持其內容原意而固定之。

(2) 矛盾律(law of contradiction)††，其形式為"a 不為非 a"，即以否定命辭表達上律所蘊之義。 申言之，同一律與矛盾律，不過以肯定否定二種形式述一致之原則耳。 此律若以符

* 邏輯代數序文 pp. VI-VIII.　　† 同書 pp. 9-10, 21-22.　　§ 同書 pp. 17-18.

** 同書 p. 8.　　†† 同書 pp. 23-24.

號式表之，則為

$$aa'=0.$$

(3) 排中律(law of the excluded middle)*，亦曰差別律(law of difference)。矛盾律謂"a 與非 a 不能並存"，此律則斷"a 或非 a 必有一是"。故其符號表示式為

$$a+a'=1.$$

所謂排中者，蓋謂矛盾之間，無中立之餘地也。據此，則吾人之論斷，皆為雙鋒；肯定一事，卽不啻否定其反面。 Spinoza 謂"確定為消除"，卽係此義。 是理又可述為一律如次：

(4) 重否律(law of double negation),† 意卽"不為非 a 者必為 a"，其符號式為

$$(a')'=a.$$

直　接　推　理

由一命辭直接推至另一命辭，是曰直接推理(immediate reasoning)，其作用乃將原有意義，換一更明晰易曉之方式以表達之，於事理上幷不能有所增益。如認推理係完成或擴充其出發之事理以推求其結果，則所謂直接推理，僅為一種引伸(eduction)而已。

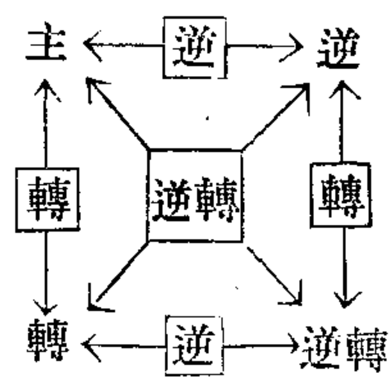
普通邏輯所言之各種直接推理法，乃施於範疇命辭，故用於算學上通用之假設命辭時，須稍加改變；今倣其意，幷借用其中之術語。

(一) 換位(conversion)，卽互換前件與後件或主詞與賓詞。

(二) 換質(inversion)，卽改換前件與後件(或主詞與賓詞)中判斷之性質。

算學命辭，既限於全稱，故無換量之可能。 由此二法，則一假設命辭，可改成四種形式，如下左表所示，而各形式間之關係，則示於下右圖：

命辭 ＼ 組織	原命辭 Original	逆命辭 (換位) Converse	轉命辭 (換質) Obverse	逆轉命辭 (位質均換) Contrapositive
前件	如有 a	如有 b	如無 a	如無 b
後件	則有 b	則有 a	則無 b	則無 a
符號式	$a<b$	$b<a$	$a'<b'$	$b'<a'$



至諸命辭間眞偽之關係，則於下文述之。

逆　轉　定　律

一命辭與其逆轉命辭，恆為同値，卽兩者同時為眞同時為偽也；以式表之為

* 邏輯代數 pp. 23-24.　　† 同上

$$(a<b)=(b'<a'),$$

是謂逆轉定律(law of contraposition)*。此卽謂由'如有 a 則有 b'之命辭，可推出'如無 b 則無 a'。按重否律，欲証無 a，只須證不得有 a 卽足。今若有 a，則有 b；然所求證之命辭，其前件中已限制無 b，故由矛盾律，知二者不能並存，故不得有 a。

由此可知推翻一命辭之後件，則無異否決其前件，是卽邏輯上所謂破壞性假設推論式(destructive hypothetical syllogism)也。

從上圖知轉命辭與逆命辭，亦互爲逆轉，故此二種命辭亦爲同値。

算學命辭，間有前件與後件所述共指同一情形者，亦有前件與後件換位後，意義均仍不變者。如此則逆命辭與轉命辭，實與原命辭無異，是曰自逆與自轉。

例一。"如 $l_1 // l_2$, $l_2 // l_3$，則 $l_3 // l_1$" 一命辭中，取前件中條件之一與後件換位，所得實與原命辭無別，故爲自逆。

上述逆與轉二命辭同値，故自逆命辭之轉命辭必眞。在本例中，其轉命辭爲"如 $l_1 // l_2$, l_2 與 l_3 相交，則 l_3 與 l_1 必相交"，亦能成立。此種情形之轉命辭，可視爲原命辭之逆轉命辭。

例二。取命辭"在不等腰三角形 ABC 中，如 $\angle A>\angle B$，則 $a>b$"而將前件與後件均換質，得"在不等腰三角形 ABC 中，如 $\angle B>\angle A$，則 $b>a$"，其意義顯與原命辭者同，是爲自轉。

取一命辭及其轉命辭，可合成所謂離命辭(disjunctive proposition，與普通邏輯中之離命辭，格式雖有類似處，實不相同)。吾人已知轉命辭之逆轉命辭，卽原命辭之逆命辭，故由逆轉定律，知離命辭之逆(卽由其所含各命辭之逆所合成者)必眞。

例。"同圓或等圓中，如二圓心角等，則其截弧必等；圓心角大者之截弧必大，圓心角小者之截弧必小"。此命辭爲三假設命辭合成，而每一命辭之反面，卽由其餘二命辭合成之，是爲一離命辭，故其逆必眞。

逆命辭之眞僞

逆命辭由換位而得，施之於範疇命辭，則主詞賓詞易位。但在全稱肯定命辭中，賓詞每不周延，然易位並不改量，故逆命辭將不復爲全稱，在算學中不能成立。故一般言之，一命辭爲眞時，其逆命辭除上節所述幾種特別情形外，未必爲眞。

在一複聯合命辭中，任互換其一判斷，皆得一逆命辭，不必全部均換。如是可成一組逆命辭，但不必皆爲眞確。

例。設有 ΔABC 及 $\Delta A'B'C'$。以 $a, b, c; a', b', c'$ 分別記各角之對邊，則當 $a=a'$, $b=b'$,

* 邏輯代數 pp. 26-27.

$c=c'$ 時，必 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

依法變化，得命辭凡二十，但可歸爲六類：

(一)　三邊($s.s.s.$)，卽原命辭，爲眞。

(二)　二邊及其一對角 ($s.s.a.$)，有(a, b, A), (a, b, B); (b, c, B), (b, c, C); (c, a, A) 及 (c, a, C)六類，不必皆眞。

(三)　二邊及其夾角($s.a.s.$)，有(b, c, A), (c, a, B), (a, b, C)三類，皆眞。

(四)　二角及其一對邊 ($a.a.s.$)，有(A, B, a), (A, B, b); (B, C, b), (B, C, c); (C, A, c) 及(C, A, a)六類，皆眞。

(五)　二角及其共邊($a.s.a.$)，有(B, C, a), (C, A, b), (A, B, c)三類，皆眞。

(六)　三角($a.a.a.$)，不必眞。

按逆命辭所以不必成立之故，在於原命辭之賓詞爲不周延。若在命辭 $a<b$ 中主詞與賓詞爲唯一的，因而賓詞亦爲周延，則逆命辭 $b<a$ 必眞，是曰定一法(rule of identity)。

例一。　等腰三角形頂角平分線，必爲底邊之中垂線。　等腰三角形底邊之中垂線，必爲其頂角之平分線。

例二。　如二直線被一直線所截，而同位角相等，則此二線必不相交。

此定理在雙曲幾何及歐氏幾何中均能成立，但其逆命辭，則須由歐氏假設斷定平行線之唯一性後，方爲眞實，故在雙曲幾何中，此逆命辭不眞。

例三。　直線 l 如有下列四性質之二，則必有其他二性質：(1)過 C 圓中心，(2)平分圓內一定弦，(3)與此弦垂直，(4)平分此弦之對弧。

此因任取二條件，皆定唯一之直線。　如是可得定理六則。

例四。　在等腰梯形 ABCD 中，如直線 l 有下列性質之二：(1)平分底邊 AB，(2)平分底邊 CD，(3)與 AB 垂直，(4)與 BC 垂直；則除(3)，(4)之結合外，皆定唯一之直線。故由此可得定理五則，但實際只有不同之三條。若在雙曲幾何內，則(3)，(4)亦定唯一之直線而可得六定理。

* * * * * *

遺　產　糾　紛

律師某君日前告我說："我有一位當事人，病重的時候請我去立遺囑。他的夫人那時將近分娩，所以他吩咐如果生男，便給與遺產三分之二，其餘三分之一，歸他的夫人。　但是如果生女，那麼母親得三分之二，女兒繼承三分之一。　這遺囑立好不久，他便撒手西歸。後來夫人臨盆，却是雙胎，而且一男一女。　這可使我爲難了！　試問這份遺產，到底應當如何分配，纔可以儘量地符合死者遺囑的意旨呢？"（答案下期發表）

歐几里得的幾何原本

李贊和

(一)

在太古的時候，人民愚昧，文化未開，無所謂幾何學。後來逐漸交通便利，土地肥沃，人民除了解决生活問題之外，很多空閑的時間，以研究各種學問，因此文化漸漸的發達起來，幾何學也因之逐漸成立了。

巴比倫和埃及，因地理上的種種便利，在紀元前二千年便有很高的文化。巴比倫是用六十進位法的，現在我們分圓為 360 度，尚是巴比倫的遺跡呢。他們又因要測量土地，很早便知直角三角形三邊的關係，以及圓周和直徑的比率。

在埃及，因尼羅河的定期汎濫，土地易起變遷，也須常加測量，故其經驗幾何頗稱發達。後來希臘人如退拉斯 Thales，畢達哥拉斯 Pythagoras，柏拉圖 Plato 等，皆曾到埃及求學，把埃及文化轉販到希臘，更加以精密的推理，於是希臘的幾何，便遠超乎埃及人之上。

退拉斯曾發明對頂角相等；二等邊三角形的底角相等；兩個三角形，若一邊和兩鄰角互相等，則兩形全等等定理，且施之應用。畢氏對於幾何學及天文學皆有深刻的研究，創設畢達哥拉斯學社，招收生徒，祕密研究，遂為人所猜疑，社亦為人焚毀了。幾何中著名的畢氏定理，即為他的發明。畢氏的門人，對於幾何的貢獻很多，如無理數，面積，及立體幾何上，皆有各種重要的發明。柏拉圖為一哲學家，對於算學也有深刻的研究。他的學校的門外寫着：未曾學幾何的人，不許進內！可知他是怎樣的重視幾何學了。他溝通算學和哲學的關係，完成初等幾何中的解析証法，積極鼓勵其門人研究立體幾何。他創設的學校，計存立了九百餘年，於希臘文化有絕大的影響。

由上所述，古代希臘幾何學發達的情形，不難窺其一班了。後來亞歷山大帝征埃及，便在尼羅河口築一亞歷山大城，極力提倡文化，搜羅古來圖書七十餘萬卷，藏在藏書樓。於是亞歷山大城中，人才蔚起，所出的哲學家，文學家，算學家，不計其數，為當時文化中心，達七百餘年之久。其中算學上最偉大的人物便推歐几里得了。

(二)

歐几里得 Euclid，希臘人，據一般的推測，約是西曆紀元前 330 年至 270 年之間的人物，為

從古以來最著名的幾何學家。對於他生時的種種事實，我們多不甚悉，現把紀載傳下來的叙述，略舉於下，以作他的小傳。

歐氏在少年時，大約曾在柏拉圖及亞里斯多得 Aristotle 的學校中求學，得到精深的幾何學智識和論理學智識。以後當 Ptolemy Soter 在位時，爲亞歷山大大學的教授。他在亞歷山大大學當教授很久，從紀元前 300 年大學開始創辦起，到他死的時候，都在那兒。

他做大學教授時，便把他的算學和論理學的知識融化起來，做成一部空前絕後的名著，幾何原本 Elements. 此書在希臘書中，實爲翻譯最多，傳佈最廣，影響最大的一部。除了這部之外，歐氏還有很多關於算學及物理的著作，但他的大名所以能垂永久，都在這部幾何原本上。

歐氏對於學算學的人，都用極溫和的態度，極誠懇的言辭，和他接近。故從他學算學的，上自皇子，下至平民，爲數甚衆。有一次，埃及皇子，苦幾何之難通，請歐氏把捷徑告訴他。歐氏答道："幾何學中，沒有爲皇子另闢的路。" 有一青年，向歐氏學幾何，學了一問題，便問歐氏："學了幾何有何利益呢"？ 歐氏便叫僕人道："拿錢給他！ 因他要有利益才去學習的！"

(三)

現在略談幾何原本十五卷之內容：卷一，論三角形；卷二，論線；卷三，論圓；卷四，論圓內外切形；卷六，論平面之比例及相似形；以上皆屬於平面幾何。卷五，論比例，其理可通於普通數量。卷七至卷九，爲數論之材料。卷十，論無公度的量，卷十一以後，皆論立體幾何。最後兩卷(十四，十五)，不是歐氏所著。

其卷一至卷四所論尙屬易解；但卷五所論的數量比例，便很嚴密深奧。卷七至九，專述數論，但他仍用幾何法叙述，不用數字或文字，而是用線段做記號的；其中歐氏頗有重要的發明。

但歷來各算學家皆公認第十卷爲最深奧，亦惟此卷分量最多。歐氏論無公度的量，可分二十五類，證明各類之各線，和其他各類的各線皆沒有公度，甚不易讀。以前各卷多集先人的收獲而成，獨此卷則純爲歐氏自己所著。

(四)

歐氏以前，一切的幾何定理，都是零碎得很，毫無系統。歐氏才用論理的眼光，將這些定理一致連貫起來，論証嚴密，前後一貫；集古人的大成，啓後人的途徑，真不愧爲古今第一部幾何上的偉著！自當時以至現今，人們把他用作教科書，已有二千餘年之久。普通教本形式上的編制，雖與原本多不相同，這不過因當時代數學尙未發達，歐氏不敢用代數上的符號，後人才把繁雜的叙述，改爲簡單明朗，或次序略爲移前易後，俾愈合於學習心理罷了。至其講理論証的方法，和歐氏的原本，根本是沒有差異的。後來甚至就將 Euclid 當作幾何學的名稱，這便可見他的著作之偉大了！

一部偉大的著作，因個人的精力有限，以後研究進步，自然不免發現錯誤之點；如公理有些遺漏，有些定義可以根據公理去證明，有些定義解釋得不甚妥切等等。這些小小不妥，我們自應相當的加以原諒，要知這是無關於大局的呵！

（五）

至於幾何原本介紹到我國的經過，也應說個大略。當明神宗時，意大利人利瑪竇遠來我國傳敎，先在廣東，後又北上進京，以學術結交在朝人士。適其時徐光啓很留心天算，便從利瑪竇學，盡通其術；暇時便請利氏將外洋的天文書，譯爲華文。談到幾何學，利氏謂此書原本若未譯，其餘諸書更不必論及：於是徐氏便和利氏合譯其前六卷。

本來幾何學，譯爲形學較妥，但徐氏取諧聲會意之義，譯爲今名，用久已成習慣，也不必改了。當時徐氏很看重此書，謂後代人必人人皆學此科，且自恨學之太晚。今日各校皆有此科，徐氏的話，算是應驗了。

不過徐氏譯本不全，以致後人閱之，不能窺其全豹。清初的大算學家梅文鼎曾說："徐氏不繙譯完全，莫非有所珍秘嗎？或者義理淵深，不易繙譯嗎？"以後英人偉烈亞力，於道光廿七年到我國，住在上海，和我國人討論算學。李善蘭先生到上海，便和偉氏交遊，於是二人相約，把幾何原本繙譯完竣，凡四年始成。當時中國無完善的原本，偉氏乃托人向英國購得，又因校勘不精，字多錯誤。幸得李氏精於算學，多所匡補，方得完全。現此書舊書肆多有，購求甚易，我們取來繙閱時，必覺得他不用代數符號，專用文字記載，寫得連篇累牘，那知是費了先賢的幾多心血，幾多歲月，才幸而能成功的呢！

★ ★ ★ ★ ★ ★

捉 賊 趣 談

"巡捕，我且問你"，被告律師開始盤駁證人，"你不是說當你起身捉拿囚犯的時候，他恰好在你前面二十七步嗎？"

"是的，先生。"

"而且他走八步的時候，你確乎只能走五步？"

"一點不錯。"

"那我可要領教，在這樣情形之下，你怎能捉拿到他？"

"我的脚步長，兩步就可以當他的五步。你只要算一算，便知道我走的步數，剛夠使我趕上捉住他的那個地點。"

說到此處，陪審員便請求稍停一會，以便計算這位巡捕所行的步數。諸位不妨也算算看。

（答案下期發表）

平面幾何學軌跡問題詳論

王 元 吉

第三章 共線點及共圓點

7. **共線點與共圓點.** 平面幾何學範圍內的軌跡,恆爲直線與圓,故證軌跡題時,完備性的措辭常爲:試證合於某條件的點在某線(或圓)上。此爲關於共線點及共圓點的問題。

按兩點之間可聯一直線,三點則不必在同一直線上;求證三個或三個以上的點在一直線上的問題,稱爲共線點問題。過不在一直線上的三點,可作一圓,所以共圓點問題,常係證四個或四個以上的點,在同一圓周上。

此二問題的證法,普通教本多未專章講授,而其在軌跡問題上應用又廣,故將各種證法舉例說明於下。

8. **證明共線點的原則.** 我們所熟知的定理中,直接論及三點共線的,實屬異常稀少。所以初學的人遇着這種問題,多半茫無頭緒。但將問題的措辭稍爲更變,往往可以迎刃而解。更變措辭有一個原則:

欲證 A,B,C 三點共線,可聯 AB,BC 而證此二線重合。

又求證一點在一直線上,亦爲軌跡證法中常有之事,倣此原則,可將其改變如下:

欲證一點 P 在一直線 l 上,可(a)在 l 上取一適宜之 A 點,聯 AP 而證其與 l 重合;或(b)在 l 上取二點 B,C,聯 PB,PC 而證此二線重合。

問題經此更變後,遂變爲求証二線重合的方式。此類定理常見者有(1)對頂角定理的逆定理;(2)補鄰角外邊定理。

9. **證法一.** 欲證 AB,BC 重合,可另取一直線 LBM;若

a. A,C 分居 LBM 線的兩側,則證

$$\angle ABL=\angle CBM, \qquad (1)$$

或

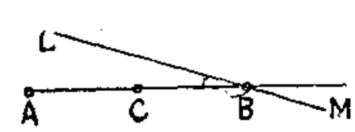
$$\angle ABL+\angle CBL=180^\circ. \qquad (2)$$

b. A,C 同居 LBM 線的一側,則證

$$\angle ABL=\angle CBL, \qquad (3)$$

或

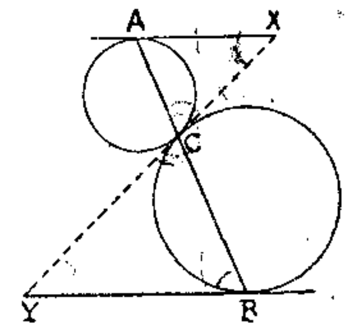
$$\angle ABL+\angle CBM=180^\circ. \qquad (4)$$



上(1)式根據對頂角的逆定理;(2),(4)根據補隣角外邊定理;(3)根據等角之定義。

例。二圓外切於C,作二平行線分切二圓於A,B如圖所示;試證A,C,B三點共線。

[證] 過C引兩圓之公切線,與A,B二點之切線分別交於X,Y. 因A,B各在一圓上,自必分居公切線之兩例,故可利用本節a中(1)式,證$\angle ACX=\angle BCY$.



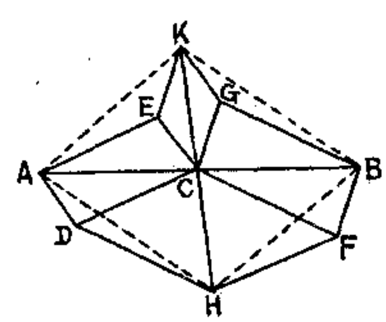
在ΔXAC中,XA,XC為自同點所作一圓之切線,故相等;因而ΔXAC為等腰三角形。同理ΔYBC亦為等腰。但題設$AX /\!/ BY$,故此兩個等腰三角形之頂角$\angle AXC=\angle BYC$,而兩形相似;因之其底角亦必相等。由是$\angle ACX=\angle BCY$,而A,C,B共線。

10。證法二。利用線段中點,定比分點,角之平分線,及過一點與一直線垂直或平行線等之唯一性,亦可證共線點問題。

如欲証某線段之中點在某一直線上,可証此直線與該線段相交,而交點卽為線段中點;又如欲證某點在某角之平分線上,則可聯此點至角頂而證此聯線卽角之平分線。

例。設C為線段AB之中點,以AC,BC為對角線,任作兩個平行四邊形ADCE,BFCG,又作平行四邊形CDHF,CEKG;求證H,C,K共線。

[證] 本題可聯HK而證其與AB相交,再證此交點卽為AB之中點。聯AH,HB,BK及KA,則由平行四邊形對邊相等且平行之理,可證



$$\Delta ADH\equiv\Delta KGB,\qquad \Delta AEK\equiv\Delta HFB.$$

由是$AH=KB$,$AK=HB$而AHKB為平行四邊形。故HK與AB互為二等分;換言之,卽H,C,K共線。

11。證法三。欲證AB,BC重合,可另取一點S,而證SB聯線與AC聯線之交點卽爲B. 証時先設交點為T,而後證$ST=SB$,或用他法證B,T兩點重合。

例。在正方形ABCD之AB邊上任取一點E;作$EF\perp AB$,且等於AB之半(如圖中所示)。以EF為對角線作正方形,設其近A之頂為M,近B之頂為L;再以DM,CL為邊,另作兩個正方形DMGK及CLHJ. 求證G,F,H共線。

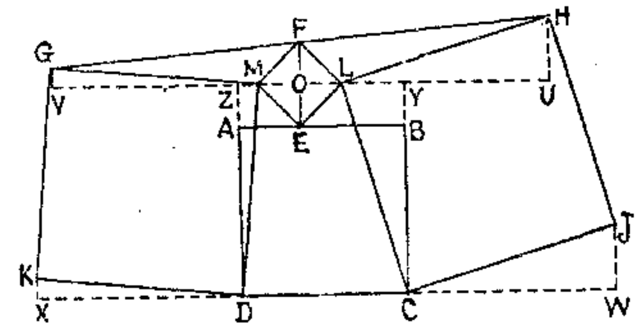
[證] 設EF交GH於F'. 聯LM而延長之,使交DA,BC之延長線於Z,Y. 自G,H各向LM作垂線GV及HU. 又自K,J各向CD之延長線作垂線KX及JW. 設O為EMFL正方形之中心,則次列各關係由圖極易証明:

$\Delta MGV\equiv\Delta DMZ=\Delta DKX$, $\Delta LHU\equiv\Delta CLY=\Delta CJW$.

又因 $DZ=CY$，故 $VM=UL$，由是 $VO=UO$，而 OF' 爲梯形 GVUH 之中線。因得

$$OF'=\tfrac{1}{2}(GV+HU)=\tfrac{1}{2}(ZM+YL)$$
$$=\tfrac{1}{2}ML=\tfrac{1}{2}EF=OF,$$

而 F′ 與 F 合。



習題三

1. 以三角形之二邊爲直徑各作一圓，則二圓之另一交點在第三邊上。

2. APB, AQB 爲在其公共弦 AB 同側之二圓弧。若 AP 弦與在 A 所作 APB 弧之切線間之夾角等於 AQ 弦與在 A 所作 AQB 弧之切線間之夾角，試證 B, P, Q 三點共線。

3. 圓內接四邊形 ABCD 之對邊 AB, CD 交於 P; AD, BC 交於 Q，則 ΔPBC 與 ΔQCD 之外接圓，再交於 PQ 直線上。

4. 外切二圓之直徑 AB, CD 平行，則 AD, BC 皆過切點。

5. 於線段 AB 上取 C, D 二點，使 $AC:CD=CD:DB$，再於 AB 之同側作三相似三角形 ACE, CDF, DBG；試證 E, F, G 共線。

6. AB, CD 爲同圓之二平行弦，則 AC, BD 及 AD, BC 之交點與圓心共線。

7. 三圓兩兩外切於 A, B, C 三點；延長 AB, AC 各交第三圓於 D, E，則 DE 爲第三圓之直徑。

8. 由三角形 ABC 之外接圓上任一點，向三邊作垂線，試證三垂足在一直線上。

9. 設 AD, BE, CF 爲 ΔABC 之三高，則過 D 所作 AB, AC, BE, CF 之垂線，其垂足共線。

10. 三角形之外心，重心，垂心及九點圓心在一直線上。

12. **證明共圓點的原則。** 共圓點的問題，證明時常用

(1) 同弧上圓周角相等；(2) 內接四邊形對角互補；(3) 定點至定圓之方積一定；諸定理之逆。但有時亦可依次之原則，更變其措辭：

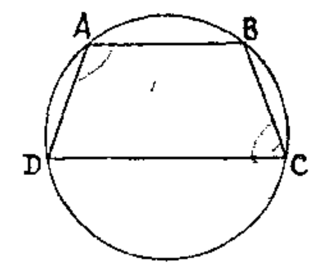
欲證 A, B, C, D 四點共圓，可過 A, B, C 作圓而證 D 在其上，或過 A, B, C 及 D, B, C 各作一圓而證此二圓重合。

13. **證法一。** 證 A, B, C, D 四點共圓，可先聯 BD，若

a. A, C 在 BD 之同側，則證 $\angle BAD=\angle BCD$; [12 節(1)]

b. A, C 在 BD 之異側，則證 $\angle BAD=\angle BCD$ 之補角。 [12 節(2)]

例。等腰梯形爲圓內接四邊形。



設 ABCD 爲等腰梯形，$AB /\!/ CD$, $AD=BC$；求證 A,B,C,D 共圓。

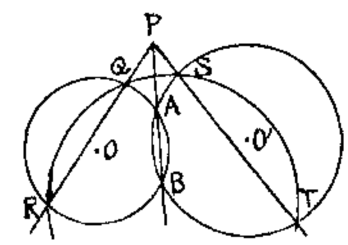
［證］由題設知 $\angle BAD$ 與 $\angle ADC$ 互補，又 $\angle ADC=\angle BCD$，故 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$ 亦互補；而 A,B,C,D 共圓。

14. 證法二。證 A,B,C,D 四點共圓，可聯 AB,CD；若

a. 二線交於 P；則證 $PA \cdot PB=PC \cdot PD$；

b. 二線不相交，則證 ABCD 爲等腰梯形。

例。兩圓相交；過其公共弦延線上任一點作二圓之割線，求證四割點共圓。



設 O, O′ 兩圓之公共弦爲 AB，P 爲 AB 延線上之任一點，自 P 作線割 O 圓於 Q,R，割 O′ 圓於 S,T；求證 Q,R,S,T 共圓。

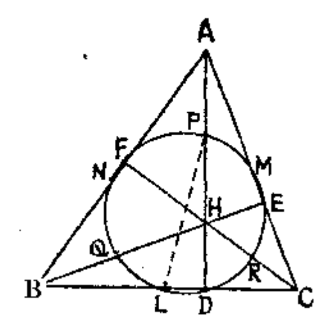
［證］$PQ \cdot PR=PA \cdot PB=PS \cdot PT$，故知 Q,R,S,T 共圓。

15. 證法三。證 A,B,C,D 四點共圓，可過 A,B,C 作一圓，再證

a. D 與圓心之距離等於半徑；　　*b*. D 對圓之一直徑張直角。

例。三角形三邊之中點，三高線之足，三頂至垂心聯線之中點，凡九點共圓。

設 ΔABC 三邊之中點爲 L,M,N；三高線足爲 D,E,F；三頂至垂心聯線之中點爲 P,Q,R. 求證此九點共圓。



［證］過 D,P,L 作圓，則因 $\angle PDL$ 爲直角，PL 必爲直徑。

$QL /\!/ CF$,　$QP /\!/ AB$;　$\therefore$ $\angle PQL=$直角。

$RL /\!/ BE$,　$RP /\!/ CA$;　$\therefore$ $\angle PRL=$直角。

$ML /\!/ AB$,　$MP /\!/ CF$;　$\therefore$ $\angle PML=$直角。

$NL /\!/ CA$,　$NP /\!/ BE$;　$\therefore$ $\angle PNL=$直角。

由本節 *b* 知 P,D,L,M.N,Q,R 七點共圓。其餘二點見下節例中。

16. 證法四。證 A,B,C,D 四點共圓，可過 A,B,C；D,B,C 各作一圓，再證此二圓

a. 同心等半徑；　　*b*. 有一公直徑；　　*c*. 有三點相共。

例。同上節。

［證］由上節之法，過 E,Q,M 作圓，可證 Q,E,M,R,P,N,L 七點共圓。同樣可證 R,F,N,P,Q,L,M 七點亦共圓。比較三圓上之點，知其有 P,Q,R,L,M,N 六點公共。由本節

c 知九點共圓。

習題四

1. 四邊形之外角平分線所成之四邊形內接於圓,其內角平分線所成之四邊形亦然。

2. 過正方形對角線上任一點作二線,各平行於一組對邊,交其邊於四點,則此四點共圓。

3. 以平行四邊形 ABCD 之 AB 邊爲弦,作圓交 AD,BC 於 E,F,則 E,F,C,D 共圓。

4. 兩圓相切於 C,過 C 作直線交二圓於 A,B; 於 AB 線外任取 D 點;聯 DA 交一圓於 E,聯 DB 交他圓於 F,求證 C,D,E,F 共圓。

5. AB,AC 爲同圓之二弦,與 A 點切線平行任作一直線,截 AB,AC 於 D,E;求證 B,C,D,E 共圓。

6. 四圓順次相交;若其一組四交點共圓,則其另一組亦共圓.

7. 三角形之內心,二頂,及此二頂所在邊外之傍心,凡四點共圓。

*　*　*　*　*　*

土工妙算

王教授有一次早出散步,碰巧看見一個土工,正在掘一地洞。

"早安,"他說,"這洞有多少深呢?" "猜着,"土工答,"我的身長是五英尺十英寸,一點不多不少。" "那麽你還要掘多少深呢?" "要掘下去到兩倍現在這樣深,"土工笑說,"那時我的頭便不在地面之上,而且離開地面兩倍現在的距離了!"

王教授請讀者告訴他,到底此洞掘成之後,深度如何。

郵局慘案

1887 年一月十二日,倫敦某街郵務支局,發生駭人盜案。這天早上郵員上工時,只見局內什物,狼藉不堪,保險鐵櫃已被人撬開,現金郵票一掃而空,守夜的更夫不知何往,不過此人服務多年,秉性忠誠,决無可疑之處。同日下午此人的尸首,被水警發見在街後河中,遍身傷痕,顯係毆斃後丟入河內的。死者衣袋內發現一錶已停,由這一點本可察知失盜時刻;不想發現此錶的水警,得錶之後,將針左右亂撥,他的意思是想使錶走,誰知不但不走,反而幾乎誤了大事。經署長一番嚴厲申斥後,一定要他報出當時錶面情狀;想了許久,他說只記得錶的長短針正在一起。好在秒針未動,剛剛過去四十九秒一點。現在要問這錶到底是何時停的。

(答案下期發表)

矢算淺說

及其在平面幾何上之應用

龍季和

(1) 緒言。 矢量爲現代算學重要工具。晚近幾何學家，研究曲線曲面之性質，每採用之以代笛卡兒坐標，且覺簡潔異常。 例如球之方程式，在笛卡兒坐標爲

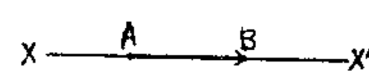
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

如用矢量方程式表之，則爲

$$(\vec{\xi}-\vec{\alpha})^2=r^2.$$

本文爲程度及篇幅所限，不及詳細討論，祇略言矢算之簡易運算，並述其在平面幾何上之應用。

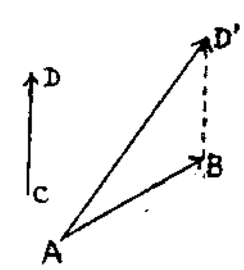
(2) 矢之定義。 在平面上取一直線 XX'，於其上取一線段 AB，與之以一正向，例如自 A 至 B. 於 B 處作一箭頭，則此帶箭頭的線段 AB 謂之一矢，以 $\overrightarrow{AB}$ 記之。 A 稱矢之原點，B 稱端點，直線 XX' 稱爲矢之支線。 任取一長度爲單位，則 AB 線段之長，可與之比數而得，此長度稱爲 $\overrightarrow{AB}$ 之矢長，或其絕對值，卽以 AB 記之。



(3) 矢之相等。 兩矢若在同一支線或分居兩平行支線之上，且其長相等，其向相同，則稱爲相等。 若其長相等而其向相反，則其一稱爲其他之負矢。 由此定義，立知

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$$

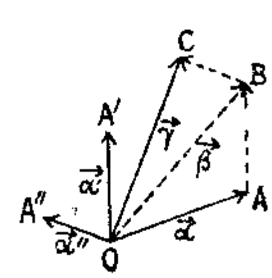
(4) 兩矢之和。 設有兩矢 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$. 過 $\overrightarrow{AB}$ 之端點 B，作 $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{CD}$，則 $\overrightarrow{AD'}$ 稱爲 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$ 之和。 以式表之爲 $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.



爲簡單起見，以後遇討論多矢時，概於平面上取一點 O 爲原點而以過 O 之等矢代之。且用與端點英文字母相當之希臘文字母，於其上作一箭頭，爲該矢之記號。例如 $\overrightarrow{OA}$ 記作 $\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OE_{12}}$ 記作 $\vec{\varepsilon}_{12}$，等等。

(5) 多矢之和。 設有三矢 $\alpha, \alpha', \alpha''$ 於此，過 α 之端點 A 作 $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}'$，則由(3)，(4)之規定，知

$$\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\alpha}'.$$



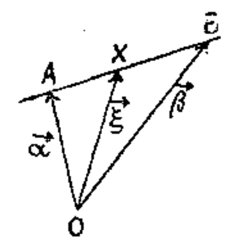
又由 B 作 $\overrightarrow{BC}=\vec{\alpha}''$，則

$$\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}''=\vec{\alpha}+\vec{\alpha}'+\vec{\alpha}''.$$

至於多矢之和，讀者可以由此類推。 從此幷可知兩矢之差，亦爲一矢。 例如上圖中

$$\vec{\beta}-\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}'.$$

(6) 定理。 設兩矢 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 端點 A，B 之聯線上有一點 X，且 AX：XB＝λ，λ 爲常數，則



(I) $$\vec{\xi}=\frac{\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}}{1+\lambda}.$$

［證］ 因 $\overrightarrow{AX}=\vec{\xi}-\vec{\alpha}$， $\overrightarrow{XB}=\vec{\beta}-\vec{\xi}$，而兩者在同一支線上；故由題設知

$$\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{XB},\qquad 卽\quad \vec{\xi}-\vec{\alpha}=\lambda(\vec{\beta}-\vec{\xi}).$$

解之卽得(I)式。

系。 若 X 爲 AB 之中點，則 $\vec{\xi}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

(7) 三矢端點共線之條件。由(I)式得 $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}-(1+\lambda)\vec{\xi}=0$，其中係數之和，恰等於零。故若 A，B，C 三點共線，則有

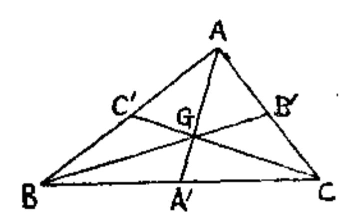
(II) $$a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}=0,\qquad a+b+c=0.$$

反之，若三矢 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 有(II)之關係，則其端點 A，B，C 必共線。 蓋由(II)式知

$$\vec{\gamma}=\frac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}}{-c}=\frac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}}{a+b}=\frac{\vec{\alpha}+(b/a)\vec{\beta}}{1+b/a},$$

與(I)式比較，知 C 點在 A，B 之聯線上。故(II)式實爲三矢端點共線之必須且充分條件。

(8) 定理。 三角形之三中線交於一點。



［證］ 設 A′，B′，C′ 爲 ΔABC 三邊之中點，則由(6)系

$$\vec{\alpha}'=\tfrac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}),\quad \vec{\beta}'=\tfrac{1}{2}(\vec{\gamma}+\vec{\alpha}),\quad \vec{\gamma}'=\tfrac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

次設 BB′ 與 CC′ 之交點爲 G，則由(6)之定理

(III) $$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{\beta}+\lambda\vec{\beta}'}{1+\lambda}=\frac{\vec{\gamma}+\mu\vec{\gamma}'}{1+\mu},\quad 卽\quad \frac{\vec{\beta}+\lambda\cdot\frac{1}{2}(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})}{1+\lambda}=\frac{\vec{\gamma}+\mu\cdot\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})}{1+\mu}.$$

等置 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 之係數，得 $\lambda=\mu=2$，因之

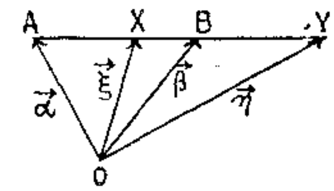
$$\overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$

G 本爲 BB′ 與 CC′ 之交點，而上式對於 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 顯爲對稱；此對稱性足以證明 G 亦在 AA′ 上，故 AA′，BB′，CC′ 三中線交於一點。 因 $\lambda=\mu=2$，由(III)又得

系。 $$\frac{AG}{GA'}=\frac{BG}{GB'}=\frac{CG}{GC'}=2.$$

(9) 調和點列。 在一直線上有 A,B,X,Y 四點,若

(IV) $$\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}=-1,$$



則曰 A,B 為 X,Y 分成調和比,而 A,B,X,Y 四點謂之調和點列,以(ABXY)=−1 記之,此式卽(IV)式之略寫。

設有 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta}$ 四矢,其端點 A,B,X,Y 在同一直線上,且成調和點列,卽(ABXY)=−1;茲考此四矢間之關係。 設 $\lambda=AX:XB$, $\mu=AY:YB$, 則由(IV)知$(-\lambda):(-\mu)=-1$, 而 $\mu=-\lambda$. 故

(V) $$\vec{\xi}=\frac{\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}}{1+\lambda},\qquad \eta=\frac{\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}}{1+\mu}=\frac{\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}}{1-\lambda}.$$

反言之,$\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 及適合(V)之 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 四矢,其端點 A,B,X,Y 必成調和點列。 蓋由(V)可知 $AX:XB=\lambda$, $AY:YB=-\lambda$, 故 A,B,X,Y 四點適合(IV)之關係也。由是得

定理。 如 A,B 為 X,Y 分成調和比,或 A,B,X,Y 成調和點列,則

$$\vec{\xi}=\frac{\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}}{1+\lambda},\qquad \vec{\eta}=\frac{\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}}{1-\lambda},$$

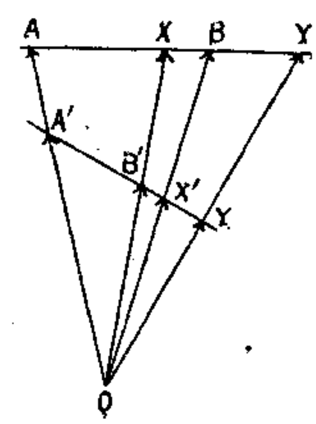
其逆說亦眞。

將上二式對於 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 解之,則得

$$\left.\begin{aligned}\vec{\alpha}&=\frac{1+\lambda}{2}\vec{\xi}+\frac{1-\lambda}{2}\vec{\eta}=\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\left(\vec{\xi}+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\vec{\eta}\right)=\frac{\vec{\xi}+\sigma\vec{\eta}}{1+\sigma},\\ \vec{\beta}&=\frac{1+\lambda}{2\lambda}\vec{\xi}-\frac{1-\lambda}{2\lambda}\vec{\eta}=\left(\frac{1+\lambda}{2\lambda}\right)\left(\vec{\xi}-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\vec{\eta}\right)=\frac{\vec{\xi}-\sigma\vec{\eta}}{1-\sigma}.\end{aligned}\right\},\qquad \sigma=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

由是知 A, B 為 X, Y 分成調和比時,X, Y 亦為 A, B 分成調和比。

(10) 定理。過一點 O 之四直線,為另一直線割成調和點列,則亦必為任一直線(不過 O)割成調和點列。



[證] 如圖設(ABXY)=−1,則

$$\vec{\xi}=\frac{\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}}{1+\lambda},\qquad \eta=\frac{\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}}{1-\lambda}.$$

再設 $OA':OA=a$, $OB':OB=b$, $OX':OX=x$, $OY':OY=y$, 則

$$\vec{\alpha}'=a\vec{\alpha},\quad \vec{\beta}'=b\vec{\beta},\quad \vec{\xi}'=x\vec{\xi},\quad \vec{\eta}'=y\vec{\eta}.$$

令 $$\vec{\xi}'=x\vec{\xi}=x(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})/(1+\lambda)=\frac{bx\vec{\alpha}'+ax\lambda\vec{\beta}'}{ab(1+\lambda)};\qquad \vec{\eta}'=y\vec{\eta}=y(\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta})/(1-\lambda)=\frac{by\vec{\alpha}'-ay\lambda\vec{\beta}'}{ab(1-\lambda)},$$

而 X′, Y′ 均在 A′B′ 直線上，故由(7)三點共線之條件，知

$$ab(1+\lambda)=bx+ax\lambda,\qquad ab(1-\lambda)=by-ay\lambda,$$

$$\therefore\quad x=ab(1+\lambda)/(b+a\lambda),\qquad y=ab(1-\lambda)/(b-a\lambda),$$

而 $$\vec{\xi}'=\frac{\vec{\alpha}'+(a/b)\lambda\vec{\beta}'}{1+(a/b)\lambda},\qquad \vec{\eta}'=\frac{\vec{\alpha}'-(a/b)\lambda\vec{\beta}'}{1-(a/b)\lambda}.$$

故定理云云。

(11) **廣義重心。** 設有 n 點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，於其上各附以質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，任取一 O 點而令

$$\text{(VI)}\qquad \frac{m_1\vec{\alpha}_1+m_2\vec{\alpha}_2+\cdots+m_n\vec{\alpha}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma m\vec{\alpha}}{\Sigma m}=\overrightarrow{OG},$$

則如是所得之 G 點，無論 O 在何處，恆爲一定，謂之 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 諸質點之重心。欲証此理，可另取一點 O′，則

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{O'G}+\overrightarrow{OO'},\qquad \overrightarrow{OA_i}=\overrightarrow{O'A_i}+\overrightarrow{OO'},\qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

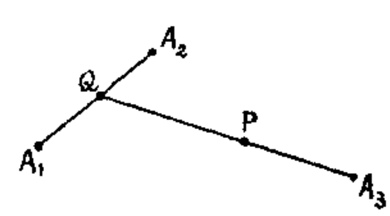
以此等關係代入(VI)式，得

$$\overrightarrow{O'G}+\overrightarrow{OO'}=\frac{\Sigma m_i\cdot\overrightarrow{OA_i}}{\Sigma m_i}=\frac{\Sigma m_i(\overrightarrow{O'A_i}+\overrightarrow{OO'})}{\Sigma m_i}=\frac{\Sigma m_i\cdot\overrightarrow{O'A_i}}{\Sigma m_i}+\overrightarrow{OO'},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{O'G}=\frac{\Sigma m_i\cdot\overrightarrow{O'A_i}}{\Sigma m_i}.$$

設此式右端定一點 G′，則 $\overrightarrow{O'G}=\overrightarrow{O'G'}$ 而 G′ 與 G 合，故重心之位置不因 O 點之位置而變。

(12) **定理。** 設 A_1, A_2, A_3 三點之質量各爲 m_1, m_2, m_3，重心爲 P；又 A_1, A_2 二質點之重心爲 Q，則 Q, P, A_3 三點共線。



［證］ $$\overrightarrow{OP}=\frac{m_1\vec{\alpha}_1+m_2\vec{\alpha}_2+m_3\vec{\alpha}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

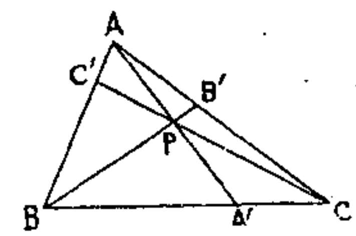
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{m_1\vec{\alpha}_1+m_2\vec{\alpha}_2}{m_1+m_2}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\frac{(m_1+m_2)\overrightarrow{OQ}+m_3\overrightarrow{OA_3}}{m_1+m_2+m_3},$$ 而 P 在 QA_3 線上，且知 P 爲 Q, A_3 兩質點之重心。

(13)　Céva 定理。自 ΔABC 之頂點作三線交對邊於 A′,B′,C′;若 AA′,BB′,CC′ 共點,則

(VII)
$$\frac{BA'\cdot CB'\cdot AC'}{A'C\cdot B'A\cdot C'B}=1.$$

〔證〕　設 AA′,BB′,CC′ 相交於 P.　試假想 A,B,C 爲三質點,各附以質量 m,n,p,而設重心爲 P.　由上節定理,知 A′ 爲 B,C 之重心,故



$$\vec{\alpha}'=\frac{n\vec{\beta}+p\vec{\gamma}}{n+p}=\frac{\vec{\beta}+(p/n)\vec{\gamma}}{1+(p/n)}$$

此式表示 BA′/A′C$=p/n$.　同理可證 CB′/B′A$=m/p$, AC′/C′B$=n/m$.　此三式相乘卽得(VII)式。

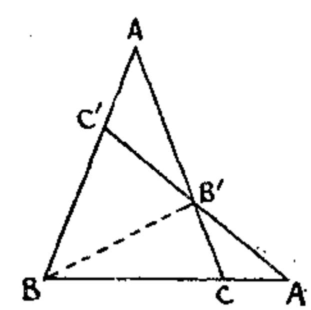
(14)　Ménelaüs 定理。設一直線交 ΔABC 之三邊於 A′,B′,C′,則

(VIII)
$$\frac{BA'\cdot CB'\cdot AC'}{A'C\cdot B'A\cdot C'B}=-1.$$

〔證〕　設 $\vec{u}$ 爲 BA′ 線上之單位矢(卽長爲 1 之矢),$\vec{v}$ 爲 BA 線上之單位矢,則

$$\overrightarrow{BC}=a\vec{u}\qquad \overrightarrow{BA'}=a'\vec{u},\qquad \overrightarrow{BA}=c\vec{v},\qquad \overrightarrow{BC'}=c'\vec{v},$$

內 a,a',c,c' 表諸矢之長。因 B′ 爲 AC 與 A′C′ 之交點,故有



$$\overrightarrow{BB'}=\frac{a'\vec{u}+\lambda c'\vec{v}}{1+\lambda}=\frac{a\vec{u}+\mu c\vec{v}}{1+\mu}.$$

比較 $\vec{u},\vec{v}$ 之係數,得 $\lambda=(ca'/c'a)\mu=-c(a'-a)/a(c'-c)$,

$$\therefore\qquad BB'=\frac{aa'(c'-c)\vec{u}+cc'(a-a')\vec{v}}{c'a-ca'}.$$

$$\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{BC}=\frac{(a'-a)c'}{c'a-ca'}(a\vec{u}-c\vec{v}),$$

$$\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB'}=\frac{(c-c')a'}{c'a-ca'}(a\vec{u}-c\vec{v});$$

$$\therefore\quad \frac{CB'}{B'A}=\frac{(a'-a)c'}{(c-c')a'}.$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{BA}=(c'-c)\vec{v},$$

$$\overrightarrow{C'B}=-\overrightarrow{BC'}=-c'\vec{v};$$

$$\therefore\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{c-c'}{c'}.$$

$$\overrightarrow{BA'}=a'\vec{u},$$

$$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA'}=(a-a')\vec{u};$$

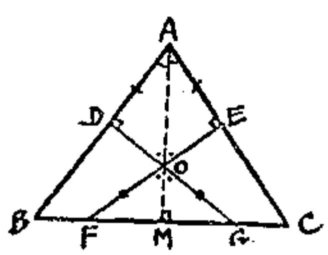
$$\therefore\quad \frac{BA'}{A'C}=\frac{a'}{a-a'}.$$

三式連乘,卽得(VIII)式矣。　　　　(下期續完)

幾何一題數證舉例

陳紹德

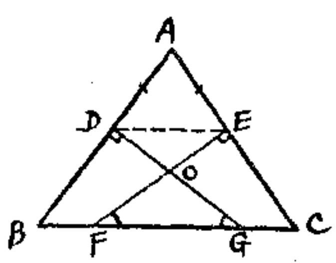
例一. 如圖，$\triangle ABC$內，$AD=AE$，$DG\perp AB$，$EF\perp AC$，又$DG=EF$，求証此三角形爲等腰。



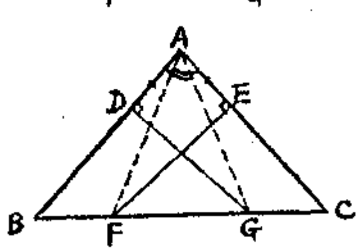
［證一］ 設DG，EF交於O，聯AO並延長之，使交BC於M，則由直角三角形ADO與AEO全等(斜邊一股)，易知

$$OF=OG,\quad \angle FOM=\angle GOM,\quad 故\quad OM\perp FG.$$

由是$AM\perp BC$且平分A角，故$\triangle ABC$爲等腰。

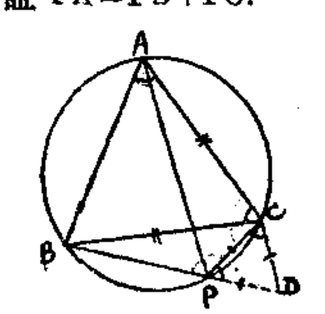


［證二］ 聯DE，並設DG，EF交於O；則因$\triangle ADE$爲等腰，知$\angle ADE=\angle AED$，而其餘角$\angle ODE=\angle OED$，故$\triangle ODE$亦爲等腰。由$DG=EF$內分別減去等量OD，OE得$OG=OF$，因之$\angle OGF=\angle OFG$. 由是直三角形DGB與EFC有一銳角及一股相等而全等。故$\angle B=\angle C$而$\triangle ABC$爲等腰。



［證三］ 聯AF，AG，則直角三角形ADG，AEF因兩股相等而全等。於是$AG=AF$，$\angle GAD=\angle FAE$，$\angle AGF=\angle AFG$而$\triangle AGB\equiv\triangle AFC(a.s.a.)$。故$AB=AC$.

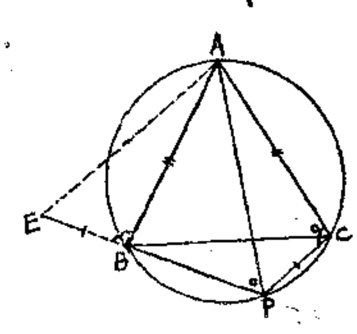
例二. 設P爲正三角形ABC之外接圓周劣弧BC上之一點，求証$PA=PB+PC$.



［證一］ 延長BP至D，使$PD=PC$，聯CD，則因$\angle CPD=60°$，知$\triangle CPD$亦爲正三角形。就$\triangle ACP$，$\triangle BCD$考之，

$$AC=BC,\quad CP=CD,\quad \angle ACP=\angle BCP+60^\circ=\angle BCD,$$

故兩形全等而$PA=DB=PB+PD=PB+PC$.

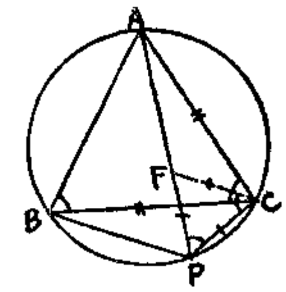


［證二］ 延長PB至E，使$BE=PC$，聯AE，則在PCA，EBA兩三角形內，$PC=EB$，$CA=BA$，$\angle PCA=\angle EBA$，故兩形全等而$PA=EA$，因之$\triangle APE$爲等腰。但

$$\angle APE=\angle ACB=60^\circ,\quad \therefore\quad \angle AEP=60^\circ,$$

而$\triangle APE$爲正三角形。故$PA=PE=PB+PC$.

以上兩法，係先作出 PB 與 PC 之和而證其等於 PA。

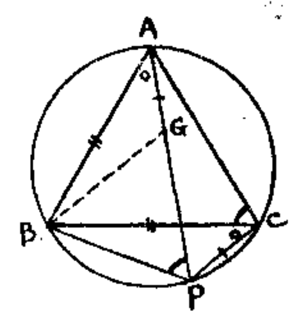


[證三] 在 PA 上取 PF=PC，聯 CF；則因 $\angle CPF=\angle CBA=60^\circ$，知 ΔCPF 爲正三角形。於是

$CF=CP$, 又 $CA=CB$, $\angle ACF=60^\circ-\angle BCF=\angle BCP$,

而 $\Delta ACF\equiv\Delta BCP$. 故 $FA=PB$; 但 $FA=PA-PF=PA-PC$,

故 $PA=PB+PC$ 得證。



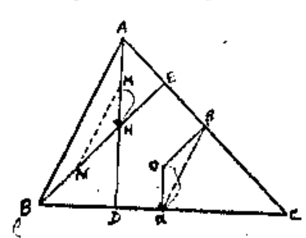
[證四] 在 AP 上取 $AG=PC$，連 BG；則立知 $\Delta BAG\equiv\Delta BCP$(*s. a. s.*). 於是 $BG=BP$，但 $\angle BPG=\angle BCA=60^\circ$，故 ΔBPG 爲正三角形而 $PG=PB$. 由是卽得 $PA=PB+PC$.

以上兩法，係先作出 PA 與 PC 之差而証其等於 PB。

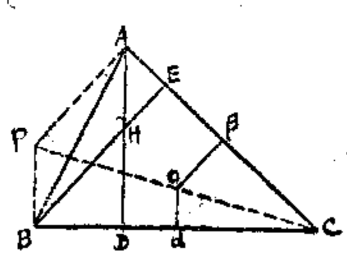
[證五] 本例亦可應用 Ptolemy 氏定理證之。因 AP，BC 爲圓內接四邊形之對角線，故若以 a 表三角形邊長，則由 $PB\cdot CA+PC\cdot AB=PA\cdot BC$，得 $PB\cdot a+PC\cdot a=PA\cdot a$. 以 a 遍除各項卽得所求之證矣。

例三。三角形任一角頂至垂心之距離，二倍於從外心至此角對邊之距離。

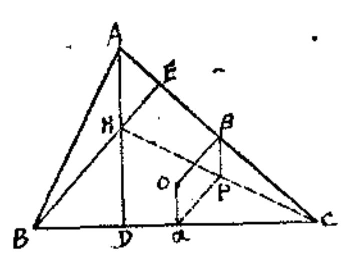
設 H，O 各爲 ΔABC 之垂心及外心，α，β 爲 BC，CA 之中點，AD，BE 各爲 BC，CA 上之垂線。求證 $AH=2O\alpha$, $BH=2O\beta$.



[証一] 設M，N 各爲 HA，HB 之中點，聯 MN 及 $\alpha\beta$，則兩者皆平行於 AB，且等於其一半，故 $MN=\alpha\beta$，而 MHN 與 $\alpha O\beta$ 兩三角形全等。因之 $O\alpha=HM=\frac{1}{2}AH$，$O\beta=HN=\frac{1}{2}BH$，故云。



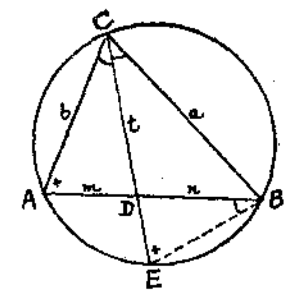
[證二] 由 B 引 $BP\parallel O\alpha$ 交 CO 之延長線於 P. 聯 PA，則易見 $PB=2O\alpha$，及 O 爲 CP 之中點。由是 $AP\underline{\parallel}2O\beta$，因之 AHBP 爲平行四邊形亦易證明。故 $AH=PB=2O\alpha$，$BH=PA=2O\beta$.



[證三] 聯 CH，自其中點 P 作線至 α，β，則 $\alpha P\underline{\parallel}\frac{1}{2}BH$，$\beta P\underline{\parallel}\frac{1}{2}AH$，而 $\alpha O\beta P$ 爲平行四邊形。由是 $O\alpha=\beta P=\frac{1}{2}AH$，$O\beta=\alpha P=\frac{1}{2}BH$，故云。

例四。設 ΔABC 中 C 角平分線交對邊 AB 於 D，交外接圓於 E；以 a, b, c 三邊之長，試

證 $CE/DE=(a+b)^2/c^2$.



$$\therefore\ \frac{CE}{DE}=\left(\frac{a+b}{c}\right)^2.$$

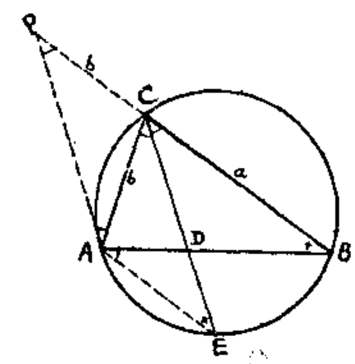
〔證一〕 聯 BE,並設 $AD=m$, $DB=n$, $CD=t$, 則 $DE=mn/t$. 但(溫德華士幾何 182 頁)

$$m=\frac{bc}{a+b},\quad n=\frac{ac}{a+b};\qquad \therefore\ DE=\frac{abc^2}{(a+b)^2t}\cdot \qquad (1)$$

又 ΔCBE 與 ΔCDA 等角,故兩形相似而

$$CE:CB=CA:CD,\qquad 即\qquad CE=ab/t. \qquad (2)$$

〔證二〕 引長 BC 至 P,令 $CP=CA$,聯 PA,AE 則在 ΔCEA, ΔAED 中,E 角公共,$\angle ACE=\angle DCB=\angle DAE$,故兩形相似而 $CE:AE=AE:DE$. 又由圖易見



$$\Delta PBA\backsim\Delta CBD\backsim\Delta CEA\backsim\Delta AED,$$

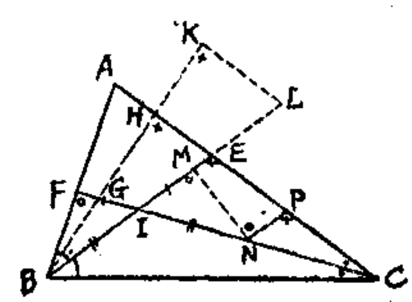
$$\therefore\ AE:DE=PB:AB=a+b:c,$$

而 $\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AE}{DE}=\left(\dfrac{AE}{DE}\right)^2=\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^2$, 即 $\dfrac{CE}{DE}=\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^2$.

例五。 三角形小角之平分線,必比大角之平分線大。

設 ΔABC 中,$\angle B>\angle C$, BE,CF 各為 $\angle B$,$\angle C$ 之平分線;求證 $BE<CF$.

〔證一〕 因 $B>\angle C$,知 $\angle EBA>\angle FCA$. 於 $\angle EBA$ 中作 $\angle EBH=\angle FCA$,其 BH 邊交 CF 於 G, EA 於 H,則 $\angle HBC>\angle HCB$ 而 $HC>HB$. 引長 BH 至 K 使 $BK=HC$,作 $KL\parallel AC$ 遇 BE 之延線於 L,則 $\Delta BKL\equiv\Delta CHG$($a.s.a.$)而 $BL=CG$. 由是 $BE<BL=CG<CF$,如所求證。



〔證二〕 仍用上圖,設 BE,CF 交於 I,則因 $\angle IBC>\angle ICB$, 知 $IC>IB$. 今若 $IF\geqq IE$,則 $CF>BE$ 甚明,無庸再證。故設 $IF<IE$.

於 IE 上截取 $IM=IF$,IC 上截取 $IN=IB$,聯 MN,則 $\Delta FIB\equiv\Delta MIN$($s.a.s.$)而 $\angle IMN=\angle IFB$. 但 $\angle IFB=\angle A+\frac{1}{2}\angle C$, $\angle IEC=\angle A+\frac{1}{2}\angle B$,故 $\angle IFB<\angle IEC$,即 $\angle IMN<\angle IEC$.

作 $NP\parallel BE$ 交 CE 於 P,則由 $\angle IEC>\angle IMN$ 知 $ME<NP$. 但 $\angle NPC>\angle IFB>\angle NCP$, 故 $NC>NP>ME$. 由是 $IC-IN>IE-IM$ 而 $IC+IM>IE+IN$.

以 $IF=IM$, $IB=IN$ 代入上之不等式,即得 $CF>BE$ 矣。

—(完)—

代數課外習題選解

（五　續）

鴻　之

51. 試證

$$f(x)=ax^3+3bx^2+d,\quad g(x)=bx^3+3dx+e,\qquad abde\neq 0,$$

有公約式之必須且充分條件爲

$$(ae-4bd)^3=27(ad^2+b^2e)^2. \tag{1}$$

［證］ 作

$$P(x)=b\cdot f(x)-a\cdot g(x)=3b^2x^2-3adx+bd-ae,$$

$$R(x)=e\cdot f(x)-d\cdot g(x)=x\{(ae-bd)x^2+3bex-3d^2\};$$

則由問題48之理，知

(i) $ae-bd\neq 0$, 時，$f(x)$, $g(x)$有公約式之必須且充分條件，卽爲 $P(x)$，$R(x)$有公約式之必須且充分條件。 且 $abde\neq 0$, 該公約式不能含 x 爲因子，故此條件實又與 $P(x)$及

$$(ae-bd)x^2+3bex-3d^2 \tag{2}$$

有公約式之必須且充分條件一致。 由問題49知此條件爲

$$\{9b^3e+3ad(ae-bd)\}\{9ad^3-3be(bd-ae)\}=\{-(ae-bd)^2+9b^2d^2\}^2.$$

此式經化簡後，兩邊各除以 $ae-bd$, 卽得(1)式。

(ii) 若 $ae-bd=0$, 則

$$P(x)=3x(b^2x-ad),\quad R(x)=3x(bex-d^2).$$

此時 $P(x)$, $R(x)$ 之公約式 x, 當然非 $f(x)$, $g(x)$ 之公約式。 但因 $ae=bd$, 故

$$d(b^2x-ad)\equiv a(bex-d^2)$$

而 $P(x)$, $R(x)$除 x 外尙有一一次之公約式，卽 b^2x-ad 或 $bex-d^2$ 是也。 實則此時

$$b\cdot f(x)-a\cdot g(x)=3x(b^2x-ad),$$

故若 $f(x)$, $g(x)$ 有公約式，則非卽爲 b^2x-ad 不可。 由是所求條件爲

$$f\left(\frac{ad}{b^2}\right)=0\qquad\text{或}\qquad g\left(\frac{ad}{b^2}\right)=0.$$

以 $ae=bd$ 之關係代入而化簡之，得

$$-b^3d^3=(ad^2+b^2e)^2,$$

是卽(1)式在 $ae-bd=0$ 時之變形。故在任何情形下(1)式皆爲必須且充分之條件。

52。x 之三次式 ax^3+bx+c 及 $a'x^3+b'x+c'$ 有一次的最高公約式之必須且充分條件爲

$$ab'-a'b\neq0,\qquad (ca'-c'a)^3=(ab'-a'b)^2(bc'-b'c). \qquad (1)$$

［證］以 A 及 A′ 表所設之兩個三次式，並令

$$P(x)\equiv aA'-a'A=(ab'-a'b)x-(ca'-c'a),$$

$$Q(x)\equiv b'A-bA'=(ab'-a'b)x^3-(bc'-b'c).$$

由問題 48 之理，知 $ab'-a'b\neq0$ 時，A，A′ 之最高公約式卽爲 P，Q 之最高公約式。今題設有一次的最高公約式，則此式當然卽爲 $P(x)$，而所求之條件；乃爲 $P(x)$ 整除 $Q(x)$ 之必須且充分條件；卽

$$(ab'-a'b)\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^3-(bc'-b'c)=0.$$

去分母卽得求證之式。

若 $ab'-a'b=0$，且 $ca'-c'a=0$，則 $A/A'=a/a'=b/b'=c/c'$，而 A，A′ 之最高公約式卽彼等自身，乃三次式而非一次式。又若 $ca'-c'a\neq0$，則 $P(x)$，$Q(x)$ 均爲常數，而 A，A′ 無公約式。此二種情形均不合題，故所求之必須且充分條件卽爲(1)式。

53。試求

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\qquad g(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d'$$

有二次的最高公約式之必須且充分條件。

［解］由 48 題之理，知 $ab'-a'b\neq0$ 時，$f(x)$，$g(x)$ 有公約式之必須且充分條件，與

$$P(x)\equiv-a'\cdot f(x)+a\cdot g(x)=(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+(ad'-a'd),$$

$$Q(x)\equiv\ b'\cdot f(x)-b\cdot g(x)=(ab'-a'b)x^3+(b'c-bc')x+(b'd-bd')$$

有公約式之必須且充分條件一致。題設 $f(x)$，$g(x)$有二次的最高公約式，故此式必亦爲 $P(x)$，$Q(x)$之最高公約式，因之卽爲 $P(x)$本身。由是所求條件，卽 $P(x)$整除 $Q(x)$之必須且充分條件。此時 $P(x)$必能整除

$$Q-xP=(ca'-c'a)x^2+(bc'-b'c+da'-d'a)x+(db'-d'b),$$

$$\therefore\qquad \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c+da'-d'a}{ac'-a'c}=\frac{db'-d'b}{ad'-a'd},\quad ab'-a'b\neq0,$$

爲所求之條件。

(編者按如此條件，不止一種，假如設 $Q(x)\equiv d'\cdot f(x)-d\cdot g(x)=(ad'-a'd)x^3+(bd'-b'd)x^2+(cd'-c'd)x$，則 $P(x)$ 整除 $Q(x)$ 之條件，應爲

$$\frac{ab'-a'b}{ad'-a'd}=\frac{ac'-a'c}{bd'-b'd}=\frac{ad'-a'd}{cd'-c'd},\qquad ad'-a'd\neq 0.$$

故所謂必須且充分條件之前，應加"一種"二字始妥，以前各題中，間亦有此種情形，但未明言；特申明於此，讀者幸注意焉。)

54. 已知兩個 x 之整式之積及其最高公約式，試求此二整式。

[解] 設 $P(x)$ 及 $G(x)$ 分別表已知之積及最高公約，$f(x)$ 及 $g(x)$ 爲所求之整式，則

$$f(x)g(x)\equiv P(x),\qquad f(x)=G(x)Q(x),\qquad g(x)=G(x)R(x),$$

$Q(x)$, $R(x)$ 爲互素之二整式。吾人倘能求出 $Q(x)$ 及 $R(x)$，則本題解決矣。由上各式得

$$P(x)=f(x)g(x)=Q(x)R(x)[G(x)]^2,$$

故知 $P(x)$ 必爲 $[G(x)]^2$ 所整除。將此除得之商，分爲互素之二整式，取其一爲 $Q(x)$，又一爲 $R(x)$ 可矣。但如此分爲互素之二整式，方法不止一種，因之所得 $Q(x)$, $R(x)$ 可有兩組或兩組以上。例如設

$$P(x)=(x-1)^3(x+2)^5(x+3)^2,\qquad G(x)=(x-1)(x+2)^2,$$

則

$$P(x)/[G(x)]^2=(x-1)(x+2)(x+3)^2.$$

故 $Q(x)$, $R(x)$ 之取法有四種如次：

$$\begin{cases}Q(x)=1,\\ R(x)=(x-1)(x+2)(x+3)^2;\end{cases}\qquad \begin{cases}Q(x)=x+2,\\ R(x)=(x-1)(x+3)^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}Q(x)=x-1,\\ R(x)=(x+2)(x+3)^2;\end{cases}\qquad \begin{cases}Q(x)=(x+3)^2,\\ R(x)=(x-1)(x+2).\end{cases}$$

所求之整式，乃有四組答案：

$$\begin{cases}f(x)=(x-1)(x+2)^2,\\ g(x)=(x-1)^2(+x2)^3(x+3)^2;\end{cases}\qquad \begin{cases}f(x)=(x-1)(x+2)^3,\\ g(x)=(x-1)^2(x+2)^2(x+3)^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x)=(x-1)^2(x+2)^2,\\ g(x)=(x-1)(x+2)^3(x+3)^2;\end{cases}\qquad \begin{cases}f(x)=(x-1)(x+2)^2(x+3)^2,\\ g(x)=(x-1)^2(x+2)^3.\end{cases}$$

55. 已知兩個 x 之整式之和及其最低公倍式，試求此二整式。

［解］ 設 $S(x)$ 及 $L(x)$ 分別表已知之和及最低公倍，$f(x)$ 及 $g(x)$ 為所求之整式，又設 $G(x)$ 為 $f(x)$, $g(x)$ 之最高公約，則由上題立知

$$S(x)=f(x)+g(x)=[Q(x)+R(x)]G(x), \tag{1}$$

$$L(x)=f(x)g(x)/G(x)=Q(x)R(x)G(x). \tag{2}$$

因 $Q(x)$ 與 $R(x)$ 為互素，故其和與其積亦為互素，而 $S(x)$ 及 $L(x)$ 之最高公約卽為 $G(x)$. 由是有 $S(x)$ 及 $L(x)$ 卽可定 $G(x)$, $G(x)$ 既定，$f(x)$ 及 $g(x)$ 由次之聯立方程可求之：

$$f(x)+g(x)=S(x), \qquad f(x)g(x)=L(x)G(x).$$

解之得

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\{S(x)+\sqrt{[S(x)]^2-4L(x)G(x)}\}, \quad g(x)=\tfrac{1}{2}\{S(x)-\sqrt{[S(x)]^2-4L(x)G(x)}\}.$$

此中根號下之式，必為完全平方無疑，因由(1)，(2)

$$[S(x)]^2-4L(x)G(x)=\{[Q(x)+R(x)]^2-4Q(x)R(x)\}[G(x)]^2=\{Q(x)-R(x)\}^2[G(x)]^2.$$

56. 設 A,B,C 為三整式，其最高公約式及最低公倍式分別為 G 與 L；又 B,C；C,A；A,B 之最高公約式及最低公倍式分別為 G_1,G_2,G_3 及 L_1,L_2,L_3：求證

(i) $G_1G_2G_3L_1L_2L_3=(ABC)^2$; (ii) $ABCG=LG_1G_2G_3$; (iii) $ABCL=GL_1L_2L_3$.

［證］ (i) 因二式之積，恆等於其最高公約式與最低公倍式之積，故 $G_1L_1=BC$, $G_2L_2=CA$, $G_3L_3=AB$；三式連乘卽得求證之式.

(ii) 設 $A=GA_aA_bA_c$，其中 A_a 為 A 所獨有之因式，A_b 為 A 與 B 除 G 外之最高公約式，A_c 為 A 與 C 除 G 外之最高公約式，則 $A_bG=G_3$, $A_cG=G_2$. 同樣可設 $B=GB_aB_bB_c$ 及 $C=GC_aC_bC_c$；則 $B_aG=G_3$, $B_cG=G_1$；$C_aG=G_2$, $C_bG=G_1$；因之 $A_b=B_a=G_3/G$, $B_c=C_b=G_1/G$, $C_a=A_c=G_2/G$，而

$$ABC=G^3B_c^2C_a^2A_b^2A_aB_bC_c, \qquad L=GB_cC_aA_bA_aB_bC_c.$$

$$\therefore\ ABCG=G^3LB_cC_aA_b=G^3L\frac{G_1}{G}\frac{G_2}{G}\frac{G_3}{G}=LG_1G_2G_3.$$

(iii) 由 (i) (ii) 兩式立可推得.

57. 設 A,B 為互素之二整式，C 為一任意整式，則適合關係式

$$AU+BV=C$$

之二整式 U,V 必存在，且有無限多組. 若以 U_0,V_0 表其中一組，則其他組概可表如下形：

$$U=U_0+BS, \qquad V=V_0-AS,$$

式中 S 亦為一整式.

［證］ 因 A 與 B 互素，故必有適合 $AU_1+BV_1=1$ 之二整式 U_1, V_1。 以 C 乘兩端即得

$$AU_0+BV_0=C,$$

式中 $U_0=U_1C, V_0=V_1C$，即爲適合(1)式之兩整式。 若 S 爲任意整式，則

$$AU_0+ABS+BV_0-ABS=C, \qquad \text{即} \quad A(U_0+BS)+B(V_0-AS)=C.$$

是即 U_0+BS, V_0-AS 又爲適合(1)式之一組兩整式。 因 S 爲任意整式，故適合(1)式之整式組 U, V 爲數無限，皆可用

$$U=U_0+BS, \qquad V=V_0-AS$$

之形式表之，故本題之證明完成。

58. $x^n+py^n+qz^n$ 爲 $x^2-(ay+bz)x+abyz$ 所整除時，試證

$$\frac{p}{a^n}+\frac{q}{b^n}+1=0,$$

但 $ab\neq 0$.

［証］ 以 $f(x)$ 表 $x^n+py^n+qz^n$，則因

$$x^2-(ay+bz)x+abyz=(x-ay)(x-bz),$$

故如能整除時，必須 $f(ay)=0$, $f(bz)=0$, 即

$$\begin{cases}(ay)^n+py^n+qz^n=0,\\ (bz)^n+py^n+qz^n=0;\end{cases} \qquad \text{或} \qquad \begin{cases}(a^n+p)y^n+qz^n=0,\\ py^n+(b^n+q)z^n=0.\end{cases}$$

然 y, z 不必皆爲零，故欲此二式成立，必須

$$\begin{vmatrix} a^n+p & q \\ p & b^n+q \end{vmatrix}=0, \qquad \text{即} \qquad b^np+a^nq+a^nb^n=0.$$

因 $ab\neq 0$, 以 a^nb^n 遍除各項，即得所求證之式。

59. n 爲 $6m-1$ 型之自然數時，$(x+y)^n-x^n-y^n$ 爲 $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ 所整除。

［證］ 以 $f(x,y)$ 表題中第一式，則因

$$f(o,y)=y^n-y^n=0, \qquad f(x,o)=x^n-x^n=0.$$

知 x, y 各爲其因子。 又因 $n=6m-1$，故

$$f(x,-x)=-x^{6m-1}-(-x)^{6m-1}=-x^{6m-1}+x^{6m-1}=0,$$

而 $x+y$ 亦爲其因子。 次以 ω_1, ω_2 表 1 之虛立方根，

$$\omega_1^3=\omega_2^3=1, \qquad \omega_1\omega_2=1, \qquad \omega_1+\omega_2+1=0; \qquad (1)$$

則因

$$x^2+xy+y^2=(x-\omega_1 y)(x-\omega_2 y),$$

吾人若能證$f(\omega_1 y,y)=0$及$f(\omega_2 y,y)=0$，卽知x^2+xy+y^2亦爲$f(x,y)$之因子矣。今

$$f(\omega_1 y,y)=(\omega_1 y+y)^n-\omega_1^n y^n-y^n=y^n\{(\omega_1+1)^n-\omega_1^n-1\},$$

而$n=6m-1$，加以(1)中諸關係，知

$$\begin{aligned}(\omega_1+1)^{6m-1}-\omega_1^{6m-1}-1&=-\omega_2^{6m-1}-\omega_1^{6m-1}-1 &&(\because\ \omega_1+1=-\omega_2)\\&=-\omega_2^{-1}-\omega_1^{-1}-1 &&(\because\ \omega_1^{6m}=\omega_2^{6m}=1)\\&=-(\omega_1+\omega_2+1) &&(\because\ \omega_2^{-1}=\omega_1,\ \omega_1^{-1}=\omega_2)\\&=0,\end{aligned}$$

故$f(\omega_1 y,y)=0$；同理$f(\omega_2 y,y)=0$. 因xy, $x+y$, x^2+xy+y^2彼此皆爲互素，故知$f(x,y)$爲$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$所整除。

60. n爲$6m-1$型之自然數時，$(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$爲$\Sigma x^2-\Sigma xy$所整除；若n爲$6m+1$型之自然數，則同式爲$(\Sigma x^2-\Sigma xy)^2$所整除，試證之。

［證］ 設α,β,γ爲$x^3+px+q=0$之三根，則

$$\Sigma\alpha=0,\qquad \Sigma\alpha\beta=p,\qquad \alpha\beta\gamma=-q.$$

p,q各爲α,β,γ之二次及三次對稱式，而α,β,γ之一切對稱齊次式，均可以p,q之函數表之，此爲方程式論中之定理。特例

$$\alpha^{6m-1}+\beta^{6m-1}+\gamma^{6m-1}=\mathrm{A}qp^{3m-2}+\mathrm{B}q^3p^{3m-5}+\cdots+\mathrm{L}q^{2m-1}p$$

中之A,B,…,L等均可求出，因右端每項均爲α,β,γ之$6m-1$次對稱齊次式也。由是知

$$\alpha+\beta+\gamma=0\text{ 時，}\quad \alpha^{6m-1}+\beta^{6m-1}+\gamma^{6m-1}\text{ 可以 }p=\Sigma\alpha\beta\text{ 除盡。}$$

今設$\alpha=y-z$, $\beta=z-x$, $\gamma=x-y$，則顯然$\alpha+\beta+\gamma=0$，又

$$\Sigma\alpha\beta=(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)=-(\Sigma x^2-\Sigma xy),$$

故$(y-z)^{6m-1}+(z-x)^{6m-1}+(x-y)^{6m-1}$可以$\Sigma x^2-\Sigma xy$整除。又

$$\alpha^{6m+1}+\beta^{6m+1}+\gamma^{6m+1}=aqp^{3m-1}+bq^3p^{3m-4}+\cdots+lq^{2m-1}p^2$$

中之$a,b,\cdots,l$皆可求出，此卽謂

$$\alpha+\beta+\gamma=0\text{ 時，}\quad \alpha^{6m+1}+\beta^{6m+1}+\gamma^{6m+1}\text{ 可以 }p^2=(\Sigma\alpha\beta)^2\text{ 整除。}$$

同上理知$(y-z)^{6m+1}+(z-x)^{6m+1}+(x-y)^{6m+1}$可以$(\Sigma x^2-\Sigma xy)^2$整除。

（待　續）

零縑碎錦

本欄專載小品文字,如小問題之討論,教本片段之批評或更正,舊題新證,讀書心得等篇幅不過長之文章,無論創作或譯述,均所歡迎,并編號發表,以便將來援引.

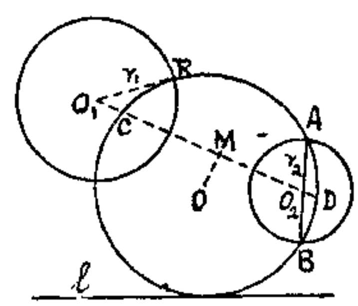
7. 43·5之解法

廣州培正中學道社

(本刊問題欄43·5一題於四卷七期中曾用解析法證其可作,但作法未得. 今由廣州培正中學道社寄來一作法,亟發表於下,以餉讀者:——編者.)

求作一圓切於一定直線,正交於一定圓,且依全徑割另一定圓.

[解析] 設 l 爲定直線,O_1,O_2 爲二定圓,O 爲所求作之圓,正交 O_1 而依全徑割 O_2 於 A,B.



聯 O_1O_2 交 O 圓於 C,D,則得以下之關係:—

$$O_1C\cdot O_1D=r_1^2,\qquad O_2C\cdot O_2D=r_2^2,\qquad (1)$$

內 r_1,r_2 各爲 O_1,O_2 之半徑. 令 $O_1O_2=a$, $O_1C=x$, $O_1D=y$. 自 O 作 CD 之垂線,垂足爲 M,則 M 爲 C,D 之中點而 $O_1M=\frac{1}{2}(x+y)$. 將(1)改書爲 $xy=r_1^2$ 及 $(a-x)(y-a)=r_2^2$,立得

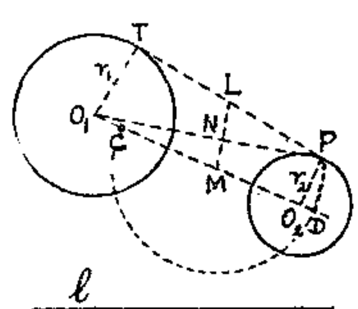
$$a(x+y)=a^2+r_1^2+r_2^2,\qquad \therefore\ O_1M=\tfrac{1}{2}(x+y)=\tfrac{1}{2}(a^2+r_1^2+r_2^2)/a.\qquad (2)$$

由是得

$$x=\frac{a^2+r_1^2+r_2^2-\sqrt{(a^2+r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a},\quad y=\frac{a^2+r_1^2+r_2^2+\sqrt{(a^2+r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a}.\quad (3)$$

而 M,C,D 皆爲定點. 故若吾人能作出 C,D,則過 C,D 而切 l 之圓,卽爲所求之圓;如此之圓有二,故本題一般有二解.

[作圖] 連 O_1O_2. 於 O_2 內作半徑 $O_2P\perp O_1O_2$. 自 P 作 PT 切 O_1 於 T,再由 PT 之中點 L 作線垂直 O_1P 於 N 而交 O_1O_2 於 M,則 M 卽與上節中之 M 爲同一點.



次以 M 爲心,MP 爲半徑,於 O_1O_2 上截取 C,D 兩點,此 C,D 二點卽上節中之 C,D 二點.

過 C,D 作與 l 相切之圓,卽得所求之圓。

［證］ 如前設 O_1,O_2 之半徑爲 r_1,r_2, $O_1O_2=a$, 則由作圖知 O_1NLT 及 O_2MNP 皆爲圓內接四邊形,故

$$\left.\begin{aligned} O_1M\cdot O_1O_2&=O_1N\cdot O_1P,\\ LP\cdot TP&=NP\cdot O_1P.\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\therefore\ O_1M\cdot O_1O_2+LP\cdot TP=(O_1N+NP)\cdot O_1P,\\ &\text{卽}\qquad a\cdot O_1M+\tfrac{1}{2}TP^2=O_1P^2.\end{aligned}$$

但 $O_1P^2=a^2+r_2^2$, $TP^2=O_1P^2-r_1^2=a^2+r_2^2-r_1^2$,故

$$a\cdot O_1M=(a^2+r_2^2)-\tfrac{1}{2}(a^2+r_2^2-r_1^2)=\tfrac{1}{2}(a^2+r_1^2+r_2^2),\text{而 } O_1M=\tfrac{1}{2}(a^2+r_1^2+r_2^2)/a$$

與(2)相符。又設 $O_1C=x$, $O_1D=y$,則因 $CM=MD=MP$,而

$$MP=\sqrt{MO_2^2+O_2P^2}=\sqrt{(a-O_1M)^2+r_2^2}$$

$$=\sqrt{\left(a-\frac{a^2+r_1^2+r_2^2}{2a}\right)^2+r_2^2}=\frac{\sqrt{a^4-2a^2(r_1^2+r_2^2)+(r_1^2+r_2^2)^2+4a^2r_2^2}}{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{a^4+2a^2(r_1^2+r_2^2)+(r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a}=\frac{\sqrt{(a^2+r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=O_1M-CM=O_1M-MP=\frac{a^2+r_1^2+r_2^2-\sqrt{(a^2+r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a},$$

$$y=O_1M+MD=O_1M+MP=\frac{a^2+r_1^2+r_2^2+\sqrt{(a^2+r_1^2+r_2^2)^2-4a^2r_1^2}}{2a},$$

恰與(3)同。故知作法無誤。

8. 化二次方程爲標準形狀之另一法　　乙　閣

設二次方程爲

(1)　　$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,\qquad \Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2.$

(I·1)　$ab-h^2=0$, $\Delta\neq0$ 時,(1)式表拋物線。此時 $ax^2+2hxy+by^2$ 爲一完全平方,故設

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv(px+qy+\lambda)^2-4\mu(qx-py+\nu).$$

由次列各關係,p,q,λ,μ,ν 之值,可以決定:

(2)　　$p^2=a,\qquad q^2=b,\qquad p\lambda-2q\mu=g,\qquad q\lambda+2p\mu=f,\qquad \lambda^2-4\mu\nu=c.$

解之得

(3)　　$p=\sqrt{a},\qquad q=\sqrt{b},\qquad \lambda=\dfrac{pg+qf}{p^2+q^2},\qquad \mu=\dfrac{pf-qg}{2(p^2+q^2)},\qquad \nu=\dfrac{\lambda^2-c}{4\mu}.$

因 $px+qy+\lambda=0$ 與 $qx-py+\nu=0$ 垂直,故若設

$$X=\frac{qx-py+\nu}{\sqrt{p^2+q^2}},\qquad Y=\frac{px+qy+\lambda}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

則化成之標準形狀爲

(4) $$Y^2=(4\mu/\sqrt{p^2+q^2})X.$$

(I·2) $ab-h^2=0$ 且 $\Delta=0$ 時，(1)式表二平行線；此時可設

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv(px+qy+\lambda)^2-\mu^2,$$

而由次列關係定 p, q, λ, μ 之值：

(5) $$p^2=a,\quad q^2=b,\quad p\lambda=g(\text{或 } q\lambda=f),\quad \lambda^2-\mu^2=c.$$

(6) $$\therefore\quad p=\sqrt{a},\quad q=\sqrt{b},\quad \lambda=g/p,\quad \mu=\sqrt{\lambda^2-c}.$$

令 X 或 $Y=\dfrac{px+qy+\lambda}{\sqrt{p^2+q^2}}$，則化成之標準形狀爲

(7) $$X^2=\mu^2/(p^2+q^2),\qquad \text{或 } Y^2=\mu^2/(p^2+q^2).$$

(II·1) $ab-h^2\neq0$, $\Delta\neq0$ 時，(1)式表橢圓或雙曲線。此時 $ax^2+2hxy+by^2$ 可書爲兩平方之和或差，故可設

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv\lambda(x+py+q)^2+\mu(px-y+r)^2-\nu.$$

式中 $\lambda, \mu, \nu; p, q, r$ 之值，由次諸關係決定之：

(8) $$\lambda+\mu p^2=a,\quad p(\lambda-\mu)=h,\quad \lambda p^2+\mu=b,\quad \lambda q+\mu pr=g,\quad \lambda pq-\mu r=f,\quad \lambda q^2+\mu r^2-\nu=c.$$

由前三式消去 λ, μ 得

$$\begin{vmatrix} 1 & p^2 & a \\ p & -p & h \\ p^2 & 1 & b \end{vmatrix}=0,\text{展開之得}(1+p^2)[hp^2+(a-b)p-h]=0;$$

$$\therefore\quad p=\frac{b-a\pm\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}{2h}.$$

p 卽將來新軸之斜度，上式中 p 之二值，其積爲 -1，表示新軸互爲垂直；但計算時可僅取正值。p 值旣定，λ, μ, q, r, ν 之值，自易求出。將(8)中第一，三及第四，五聯立，得

(9) $$\lambda=\frac{a-bp^2}{1-p^4},\quad \mu=\frac{b-ap^2}{1-p^4},\quad q=\frac{pf+g}{\lambda(1+p^2)},\quad r=\frac{pg-f}{\mu(1+p^2)},\quad \nu=-\frac{\Delta}{ab-h^2}.$$

令 $X=\dfrac{x+py+q}{\sqrt{1+p^2}}$, $Y=\dfrac{px-y+r}{\sqrt{1+p^2}}$，則得所求之標準形狀爲

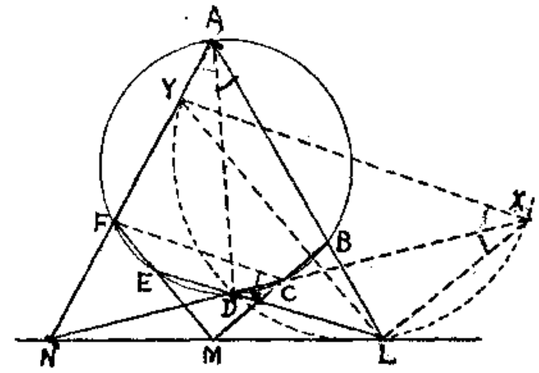
(10) $$\lambda X^2+\mu Y^2=\nu(1+p^2),\qquad \text{或}\ \frac{X^2}{\nu(1+p^2)/\lambda}+\frac{Y^2}{\nu(1+p^2)/\mu}=1.$$

注意由(8)中前三式知 $\lambda\mu=(ab-h^2)/(1+p^2)^2$，故 λ, μ 同號時爲橢圓，異號時爲雙曲線。

(II·2) $ab-h^2\neq0$, $\Delta=0$ 時，知 $\nu=0$. 故所求之標準形狀爲 $\lambda X^2+\mu Y^2=0$. 若 λ, μ 同號，此式代表一對相配虛線，交於一實點；λ, μ 異號則爲一對相交實線。

9. Pascal 定理之一種初等幾何證法 賀培民

茲用初等幾何定理證明 Pascal 定理之一特例如下："圓內接六邊形各對邊之交點共線"。設 ABCDEF 爲圓內接六邊形，AB，DE 交於 L，BC，EF 交於 M，CD，FA 交於 N，求證 L，M，N 共線。



過 L 作線平行 MB 交 CD 之延長線於 X；聯 CF，過 X 作線與之平行交 AF 於 Y，如圖所示。因 $\angle LXD = \angle MCD = \angle BAD = \angle LAD$，知 A，D，L，X 四點共圓。又 $\angle DXY = \angle DCF = \angle DAY$，故 A，Y，D，X 四點亦共圓，即 A，Y，D，L，X 五點共圓。

今 $\angle NFM = \angle ADE = \angle AXL = \angle NYL$，故 $FM /\!/ YL$。如是則 ΔFCM 與 ΔYXL 之相應邊彼此平行，而其相應頂之聯線 YF，XC，ML 必會於一點。但 YF 與 XC 交於 N，故 N 在 LM 上，而 L，M，N 爲共線。

10. 有疑問的習題二則 乙 開

下列二題，讀者來函詰問者甚多，特提出加以討論。

(1) 開明書店出版陳建功毛路眞編之高中幾何，將"已知三角形之三高，求作此三角形"之作圖題置於比例面積章之前；是否此題不用比例面積之定理，可以解決？

(2) 中華書局出版吳在淵編高級幾何學中，有"於四邊形內求一點，令其與各頂之聯線，分此四邊形爲四等分"一題，此題是否有解？

按解 (1) 題所用定理，一般皆爲(a)圓之割線與其圓外一段之積爲一定，及(b)相似三角形之相應部分之比爲一定。此外尙用三角形面積等於底高乘積之半。此等定理，初中幾何似均有之。開明本高中幾何，手下無此書，若圓及相似三角形已講過，則此題已屬可作，不成問題。該書編者陳先生係名算學家，此等處大概不致有誤。至於此題除用上理解決外，是否再有他法，則尙未之見；卽 Peterson 之幾何作圖法及理論（余介石譯，中華出版）中，亦將其置於相似節下，以是言之，似再無他法可解。

至於(2)題之無解，本刊一卷五期問題欄中，已有討論。解題人皮亦雄君證得此題如有解，則其中四邊形，非爲平行四邊形不可。其實若爲 a,b,c,d 表此四邊形之四邊幷表其長，A 表面積，則尙可如下所言，證其不必有解。因以 a 爲底而面積等於 $\frac{1}{4}$A 之三角形，其頂點之軌跡爲一與 a 平行之線。同樣以 c 爲底，而面積等於 $\frac{1}{4}$A 之三角形，其頂點之軌跡爲一與 c 平行之直線，此二直線相交（設 a 與 c 不平行），所定之一點，不必能適合其餘條件。換言之，以此點爲頂，b,d 爲對底之兩個三角形，不必一定相等。故此題一般爲不可能，毫無疑義。

問題欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，均可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．來函請寄武昌珞珈山國立武漢大學劉乙閣教授收．

注意 1．來函務請書明姓名住址，以便有必要時可通信問答．

注意 2．提出問題如有出處者，請於題末示知出處所在．

注意 3．提出人對於所提問題，如已有解答者，請將解答一併惠下．

問題已解決者

48·1　試證 $(x+a)^n=x^n+C_1^n a(x+b)^{n-1}+C_2^n a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\cdots$

$$+C_r^n a(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\cdots+C_n^n a(a-nb)^{n-1}.$$

證(江蘇常州中學程心一)

題式右方各項展開後，所得之項可分爲二部分；卽不含 b 之項及含 b 之項．其不含 b 之項之和爲

$$x^n+C_1^n ax^{n-1}+C_2^n a^2x^{n-2}+\cdots+C_r^n a^r x^{n-r}+\cdots+C_n^n a^n\equiv(x+a)^n.$$

故若得證得所有含 b 之項，其和爲零，則本題得證．將此等項依 b 之升冪列之，得

$$b\sum_{r=1}^{n-1}\{r\,C_r^n C_{1}^{n-r}-r(r+1)C_{r+1}^n\}a^r x^{n-r-1}$$

$$+b^2\sum_{r=1}^{n-2}\{r^2C_r^n C_{2}^{n-r}-r(r+1)^2C_{r+1}^n C_{1}^{n-r+1}+(r+2)^2C_{r+2}^n C_2^{r+1}\}a^r x^{n-r-2}$$

$$+b^3\sum_{r=1}^{n-3}\{r^3C_r^n C_{3}^{n-r}-r(r+1)^3C_{r+1}^n C_{2}^{n-r+1}+(r+2)^3C_{r+2}^n C_2^{r+1}C_{1}^{n-r-2}-(r+3)^3C_{r+3}^n C_3^{r+2}\}a^r x^{n-r-3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+b^{n-1}(C_1^n-n\,C_n^n)a$$

細察此式，知 b 之各乘冪之係數皆爲 0，故不論 b 之值爲何，恆等於 0，因知本題成立．

48·2　試證 $C_r^{m+n}=C_r^m+C_{r-1}^m C_1^n+C_{r-2}^m C_2^n+\cdots+C_1^m C_{r-1}^n+C_r^n.$

證(提出人廈門鼓浪嶼陳紹德)

用算學歸納法証本題，已知 $C_n^n=C_0^n=1$，$C_1^n=n$，又 $r>n$ 時 $C_r^n=0$ 及公式

$$C_r^{m+1}=C_r^m+C_{r-1}^m. \tag{1}$$

設 $n=1$，則題式右端爲 $C_r^m+C_{r-1}^m$，以後各項均爲 0；由(1)知題式爲眞．

設 $n=2$，則題式右端爲 $C_r^m+C_{r-1}^m C_1^2+C_{r-2}^m C_2^2=(C_r^m+C_{r-1}^m)+(C_{r-1}^m+C_{r-2}^m)=C_r^{m+1}+C_{r-1}^{m+1}$ $=C_r^{m+2}$，而題式仍成立．同樣 $n=3$ 時，亦可証其成立．今設題式於 $n=k$ 時爲眞，卽

$$C_r^{m+k}=C_r^m+C_{r-1}^m C_1^k+C_{r-2}^m C_2^k+\cdots+C_1^m C_{r-1}^k+C_r^k. \tag{2}$$

以 $k+1$ 換(2)右端之 k，得

$$C_r^m+C_{r-1}^mC_1^{k+1}+C_{r-2}^mC_2^{k+1}+C_{r-3}^mC_3^{k+1}+\cdots+C_1^mC_{r-1}^{k+1}+C_r^{k+1}$$

$$=\underline{C_r^m}+\underline{C_{r-1}^m}(C_1^k+C_0^k)+\underline{C_{r-2}^m}(C_2^k+C_1^k)+\underline{C_{r-3}^m}(C_3^k+C_2^k)+\cdots+\underline{C_1^m(C_{r-1}^k}+C_{r-2}^k)+\underline{C_r^k}+C_{r-1}^k.$$

將下面有～～之各項歸併，卽(2)式之右端；其餘各項歸併之得式爲

$$C_{r-1}^m+C_{r-2}^mC_1^k+\cdots+C_1^mC_{r-2}^k+C_{r-1}^k,$$

恰與(2)式右端中，將 $r-1$ 換 r 所得結果相同，故此式等於 C_{r-1}^{m+k} 而上式之值乃爲

$$C_r^{m+k}+C_{r-1}^{m+k}=C_r^{m+k+1}. \qquad [由(1)]$$

故若(2)式爲眞(卽 $n=k$ 時題式成立)，則

$$C_r^{m+k+1}=C_r^m+C_{r-1}^mC_1^{k+1}+C_{r-2}^mC_2^{k+1}+\cdots+C_1^mC_{r-1}^{k+1}+C_r^{k+1},$$

而題式於 $n=k+1$ 時亦成立。 今 $n=1,2,3$ 時已知題式爲眞，故 $n=4$ 時亦然，$n=5$ 時亦然，…，因之 n 爲任意正整數時，題式皆爲眞。

又證(前人)。

C_r^{m+n} 爲 $(a+b)^{m+n}$ 展開式中 $a^{m+n-r}b^r$ 項之係數。 今 $(a+b)^{m+n}=(a+b)^m(a+b)^n$，卽

$$(a+b)^{m+n}=(a^m+C_1^ma^{m-1}b+\cdots+C_r^ma^{m-r}b^r+\cdots+b^m)(a^n+C_1^na^{n-1}b+\cdots+C_r^na^{n-r}b^r+\cdots+b^n).$$

比較兩端中 $a^{m+n-r}b^r$ 之係數而等置之，卽得所求證之式。

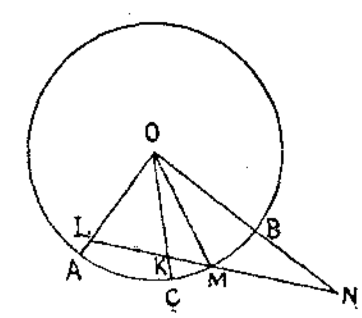
又證(廣州中山大學梁憲釗)

將 $m+n$ 物分爲 m 物之羣與 n 物之羣。 自 m 羣內取 r 物有 C_r^m (種方)法；自 m 羣取 $r-1$，n 羣取 1，有 $C_{r-1}^m\cdot C_1^n$ 法；又自 m 羣取 $r-2$，n 羣取 2 有 $C_{r-2}^m\cdot C_2^n$ 法。如是遞推，最後自 n 羣取 r 有 C_r^n 法。此等數之總和，卽由 $m+n$ 物內每次取出 r 個之方法總數，故得所求証之式。

(編者按提出人陳紹德君來稿中亦有此證法，常州中學程心一君亦寄來同證，此係普通課本中証明此式之方法。但原提出人之意，係欲用公式証；如第一證法情形，發表時未及聲明，特此道歉！)

48·3　設在圓 O 內，半徑 OC 平分圓心角 AOB，K 爲 OC 上一定點：求過 K 作一直線，以 OA，OB 爲界(必要時可延長之)，而被圓周所平分。

解(編者按本題尙未收到解答，但據個人觀察，本題可解。)



[解析]　設此題已作，所作直線交 OA，OB 於 L，N，而被圓周平分於 M，則在 ΔOLN 中，O 角，其分角線 OK，及中線 OM 皆爲已知；故此題與下題同意：

已知 A，m_a，t_a，求作三角形 ABC，設件中 m_a，t_a 各爲過 A 之中線及 A 角平分線之長。如常例以 a，b，c 表 Δ 之三邊，則有

$$b^2+c^2=\tfrac{1}{2}a^2+2m_a^2,\cdots\cdots(1)\qquad t_a=2bc\cos(\tfrac{1}{2}\mathrm{A})/(b+c).\cdots\cdots(2)$$

但 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$，代入(1)式而整理之，得

$$b^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}=4m_a^2,\qquad 即\qquad (b+c)^2-4bc\sin^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{A})=4m_a^2.\cdots(3)$$

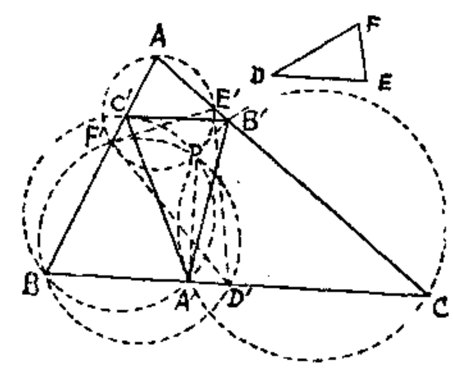
由(2)得 $2bc=t_a(b+c)\sec(\frac{1}{2}\mathrm{A})$，代入(3)式得一 $b+c$ 之二次方程，解之得

$$b+c=t_a\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}+\sqrt{t_a^2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}+4m_a^2},$$

而 $b+c$ 及 bc 皆爲已知。故本題可作，且只有一解。

48•4 在一已知三角形內，求作一三角形，使與另一已知三角形相似，且有最小面積。

解(山西太谷銘賢學校李世義)



解本題時應用下列三定理：(1) 設有一三角形，與一已知三角形相似，其一角頂固定，第二角頂恆在所設直線上，則第三角頂之軌跡爲一直線，此直線與第二角頂所在之直線間之夾角，等於第一角。(2) 已知三角形 ABC 之內接三角形 A'B'C'(A' 在 BC 上，B' 在 CA 上，C' 在 AB 上)變動大小位置，但恆相似於另一已知三角形，則 ΔAB'C'，ΔBC'A'，ΔCA'B' 之外接圓周交於一定點 P. 此點稱爲 ΔA'B'C' 之旋轉中心 (pivot point)。(3) 相似形面積之比，等於其對應線段(如對應邊，對應垂線等等)之二乘比。此等定理之證明，(1)見新亞書店出版之幾何學辭典第 1609 題；(2)見 Peterson 之幾何作圖題之理論及作法(余介石譯，中華書局出版)第三章 9 節；(3)則普通課本中亦有之，不甚難證。

如圖設 ΔABC 爲已知，求於其內作一三角形，與 ΔDEF 相似，且有最小面積。應用上述定理(1)，於 BC 上取 D' 爲一角頂，設 AC 爲第二角頂 E' 所在之直線，則第三角頂之軌跡與 AB 之交點 F' 可作。D'，F' 既定，E' 在 AC 上之位置亦定，如是所作之 ΔD'E'F'，爲內接於三角形 ABC 而與 ΔDEF 相似之一三角形。因 D' 之位置係任意所取，故變更 D' 在 BC 上之位置，由此法可作許多內接於 ΔABC 且相似於 ΔDEF 之三角形。此許多之三角形，由定理(2)，有同一之 pivot point. 作 AE'F' 及 BF'D' 兩圓再交於 P，即爲此等三角形之 pivot point. 於是自 P 作 BC 之垂線，垂足爲 A'. 過 C，P，A' 作圓交 CA 於 B'，過 B，P，A' 作圓交 AB 於 C'，則 ΔA'B'C' 爲所求之三角形。

［證］ 由定理(2)知 ΔA'B'C' 爲內接於 ΔABC 而與 ΔDEF 相似之許多三角形中之一。因

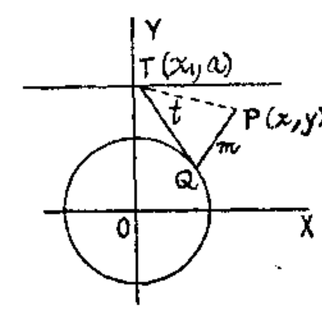
PA′ 爲垂線，較任何斜線 PD′ 爲小，而 $\Delta D'E'F' : \Delta A'B'C' = PD'^2 : PA'^2$(定理 3)，故 $\Delta A'B'C'$ 有最小之面積。

(注意) 過 C,P,A′ 之圓，以 PC 爲直徑，故 $PB'\perp CA$；同理 $PC'\perp AB$. 故求得 P 點後，作 PA′,PB′,PC′ 分別垂直於 BC,CA,AB，而定 $\Delta A'B'C'$ 亦可。 本題僅有一解。

48•5 自已知直線上之一動點 T，作直線切已知圓於 Q；過 Q 作他一已知直線之垂線，而在此垂線上取 P 點，令 TP=TQ：求 P 之軌跡。

解(編者按本題迄未收到解答，似非初等幾何所可解決者，今用解析幾何之法考之。)

設已知圓爲 $x^2+y^2=r^2$，動點 T 所在之直線爲 $y=a$，則 T 之坐標爲(x_1,a). 自 T 作圓之切線有二，此二切點(卽 Q 之兩位置)之聯線，爲 T 對於圓之極線，卽 $x_1x+ay=r^2$. 將此式與 $x^2+y^2=r^2$ 聯立解之，得 Q 之坐標爲



$$\xi=\frac{(rx_1\pm at)r}{x_1^2+a^2},\qquad \eta=\frac{(ra\mp x_1t)r}{x_1^2+a^2},\quad (1)$$

內 $t=\sqrt{x_1^2+a^2-r^2}$ 爲切線 TQ 之長。 題設 QP 垂直於已知直線，其斜度必爲一定，以 m 表之，則 $m=(y-\eta)/(x-\xi)$. 將(1)式中 ξ,η 之值代入而整理之，得

$$\{(y-mx)(x_1^2+a^2)-r^2(a-mx_1)\}^2=r^2(x_1+ma)^2(x_1^2+a^2-r^2).\qquad(2)$$

由 TQ=TP 得 $x_1^2+a^2-r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$，簡化後得

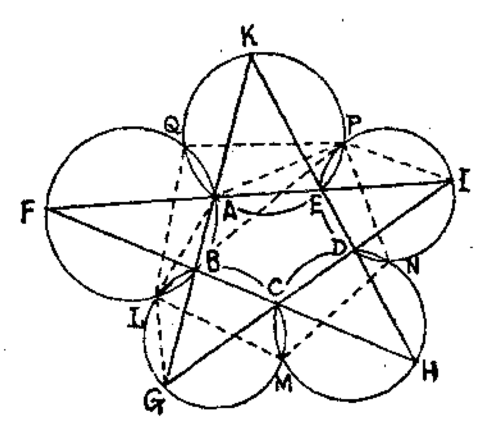
$$x^2+y^2-2x_1x-2ay+r^2=0.\qquad(3)$$

自(2)，(3)二式中消去 x_1，卽得所求之軌跡。 結果繁冗已極，但知其爲八次曲線。

48•6 引長 ABCDE 五邊形之各邊，交於 F,G,H,I,K 五點，成 ABF,BCG,CDH,DEI,EAK 五個三角形，則此五個三角形諸外接圓之交點 L,M,N,P,Q 必同在一圓周上。

證(武昌高級中學彭銳軍)

聯 LA,LG，就四邊形 ALGI 觀之，則見 $\angle LGI=\angle FBL=\angle FAL$，故 A,L,G,I 爲共圓。



聯 PA,PI，就四邊形 APIG 觀之，則見 $\angle PIG=\angle KEP=\angle KAP$，故 A,P,I,G 亦爲共圓。 由是 A,L,G,I,P 五點共圓。

聯 LMNP 四邊形之各邊，則見 $\angle PNM=\angle PND+\angle DNM=\angle PIG+\angle GCM=\angle PIG+\angle GLM$. 兩邊各加 $\angle PLM$，則因 $\angle GLM+\angle PLM=$

$\angle PLG$ 而 $\angle PIG+\angle PLG=180^\circ$，知 $\angle PNM+\angle PLM=180^\circ$；故 L，M，N，P 共圓。同理可證 L，M，P，Q 共圓。故 L，M，N，P，Q 五點共圓。

（本題證者尚有廈門鼓浪嶼陳紹德，山西太谷銘賢學校李世義，廣州中山大學梁憲釗，常州中學程心一及西安高級中學賀培民諸君，證法大同小異，不另錄。）

提出之問題

52·1　在相交二定直線之平面上有一定點 P，求過 P 至定線作二線段，其長相等，且夾等角（武昌中華大學左確扶提）。

52·2　設 n 為正整數，求証（武昌東湖中學嚴棟開提）。

$$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdots(2n-1)=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}{2^{n-1}}.$$

52·3　設 P 為正三角形 ABC 外接圓周上一點，證 $PA^2+PB^2+PC^2$ 為常數（廈門鼓浪嶼陳紹德提）。

52·4　設 $\phi=\theta-2e\sin\theta+\frac{3}{4}e^2\sin2\theta-\frac{1}{3}e^3\sin3\theta$，求證

$$\theta=\phi+2e\sin\phi+\frac{5}{4}e^2\sin2\phi+\frac{1}{12}e^3(13\sin3\phi-3\sin\phi),$$

但 e 之三次以上之項均略去不計（前人提）。

52·5　若 θ，ϕ 為極小之角，試證（前人提）。

$$\frac{\theta}{\phi}=\frac{2\sin\theta}{3\sin\phi}+\frac{1}{3}\frac{\tan\theta}{\tan\phi}-\frac{\theta}{180\phi}(\theta^2-\phi^2)(9\theta^2-\phi^2).$$

52·6　已知三角形三內角平分線與對邊交點之位置，求作此形（安慶高工職校方圓提）。

★　★　★　★　★　★

讀者通訊

廈門鼓浪嶼陳紹德君來函：下列各點請賜覆於讀者通訊欄內：—

（1）調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 最初百萬項之和僅及 21，如何證之？

（2）橢圓長短兩軸各為 $2a$，$2b$，其周界是否為 $\pi(a+b)$？試以解析幾何方法求之。

（3）用三角法能否證 Euler 線及九點圓之定理？

（4）僅用圓規如何求出一已知圓之中心？

（5）三角形之九點圓與三傍切圓外切，與內切圓內切，用解析幾何方法能否證得？

（6）下列四極限值如何證明：

(i) $\lim\limits_{x\to0}x^x=1$，(ii) $\lim\limits_{x\to e}(\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}=\frac{1}{e}$，(iii) $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}=1$，(iv) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\sec x}=1$.

（7）勾股定理據云證法達百數十種，可否轉載刊出？

答。（1）當 $0<x<1$ 時，$-\log(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots>x$. 設 $x=1/n$，n 為大於 1 之

正整數，則得 $1/n<log\{n/n-1)\}$. 以 $n-1, n-2, \cdots, 3, 2$ 依次換 n，得式相加，則

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}<log\frac{n}{n-1}+log\frac{n-1}{n-2}+\cdots+log\frac{3}{2}+log\frac{2}{1}=log\,n.$$

由是得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}<log\,n+1$. 今若 $log\,n=20$，則 $n=e^{20}>10^8\times4$，故最初四萬八千萬項之和尙不及21；又若 $n=1,000,000$ 則 $log\,n=14$ 而最初百萬項之和應小於15. 若用不等式 $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$ 而設 $n=21$，則 2^n-1 約爲二百十萬。

(2) 橢圓周界之長，祇可用積分求，且得式不能積分；解析幾何中並無求曲線長度之法。

(3) 可証，但遠不及幾何證法之簡便。關於角度及距離之問題，三角法有時勝於幾何法，但如共點共線共圓相交相切諸問題，則不然。

(4) 請參看 Hudson, Ruler and Compasses 第136面(北平師大附中算學叢刻社翻印本)。

(5) 初等幾何定理，用解析幾何概可証明，不獨 Feuerbach 定理爲然；特計算不免稍繁耳。

(6) 此等極限值，用微分法計算之甚便。 尊問各則，皆係指數形式，故宜先取對數而後計算之爲便。

公式：若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，則求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$(理論不贅，參看任何微積教本不定式章)。

例如證 $x\to0$ 時 $lim\ x^x=1$ 先設 $u=x^x$，則 $log\,u=x\,log\,x$，而 $log(lim\ u)=lim\ log\,u=\lim\limits_{x\to0}\frac{log\,x}{1/x}$

$$=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0}(-x)=0,\ \therefore\ \lim_{x\to0}u=e^0=1.$$

此中每步均有理由，爲篇幅所限，不能詳細批明爲憾。 以下各例均倣此，恕不縷述矣。

(7) 民七北平高等師範(卽今師大)數理雜誌中載有傅仲嘉先生輯成勾股定理證法一篇，其中巳有九十餘種證法。 惜該刊早巳絕版，但其中未及搜羅之証法尙多；聞西書中有專册，以不悉其名，無由介紹。 敝社亦正欲搜羅此本，將來如購得，當譯爲敝社叢書之一。 (正)

廣西百色共和街71號梁紹鴻君來函： 茲有下列數事相詢，敬請答覆：

(1) 三角形之 Brocard 圓其証法若何？

(2) 完全四角形各對邊中點聯線之交點，巳有無定義？ 若無，應命何名始當？ 請代命。

(3) 若干點或線始可定一圓錐曲線？ 且在何情形下所定爲拋物線？ 橢圓？ 雙曲線？

(4) 較高等之平面幾何學，有無中文本？ 以何者爲便？ 定價若干？ 何處出版？

(5) 欲讀近世幾何學，必先讀何種有關之書爲基礎？ 請示定價及出版處(要中文本)。

(6) 前投上一稿及問題若干，未知能獲先生一顧否？ 鄙人酷好幾何，已共得定理若干，倘不嫌棄，當整理投上，先生以爲何如？

答。(1) 請參看商務出版武崇經郭鳳藻編譯之"近世平面幾何學"(定價陸角)40頁或北

平師大附中算學叢刻社出版劉亦珩著"初等近世幾何學"(定價壹元貳角)98頁。

(2) 按此卽四角形之重心,似無另命專名之必要。若四角點之坐標爲(x_i, y_i), $i=1,2,3,4$則此點之坐標爲$(\frac{1}{4}\Sigma x, \frac{1}{4}\Sigma y)$.

(3) 五點(無三點在同一直線上者)定一圓錐曲線,五線(無三線過同一點者)亦然。所定曲線上之點全在有限平面上者爲橢圓,有一點在無窮遠者爲拋物線,有兩點在無窮遠者爲雙曲線。又五線中若有一線爲無窮遠線,則所定曲線爲拋物線。此外一點(或線)四線(或點),二點(或線)三線(或點)均可定圓錐曲線,但其數不止一個。欲知其詳,宜閱近世幾何,非一言所能盡。

(4)及(5) 中華書局出版陸欽軾譯之高等幾何;原著者 Altshiller-Court 兩氏(定價不詳),北平師大附中算學叢刻社出版傅種孫編之高中平面幾何(定價壹元貳角)及(1)中所舉兩書,均可讀,但以劉,傅二書爲較佳。

(6) 尊稿黃金分割於下期發表於"零練碎錦"欄中,至幾何題則當陸續提出,其中有數則不妥,有數則已經發表,均須割愛,至希原諒!如蒙繼續賜稿,更所歡迎! (正)

★ ★ ★ ★ ★ ★

編 後

本期中黃泰先生提出"高中幾何中之初中幾何"一問題,並將其歷年試驗成功的方案和盤托出。從定理的排列,感到依證法分類而同時又要顧到邏輯次序的困難。這一問題,確乎值得中學教師的重視。黃先生和汪桂榮先生都是揚州中學有名教師,然而這裏所發表的方案,在黃先生當然不認爲是最後的辦法,希望中等算學界同人,加入討論,於教學改進方面裨益一定不少。

龍季和君關於矢量在平面幾何上應用一文,介紹現代研究幾何的一種新工具,我想不久高中幾何教科書中,一定有採用這種方法的。本刊對於此類新教材,向極注意,以後在這方面,還有幾篇文字發表。

近來最可慶幸的事,便是熱心的讀者們投稿日見踴躍。這當然是讀者愛護的盛意,因此不吝珠玉,肯將研究的心得寄來發表。陳紹德君是讀者中最熱心的一位,以往在問題欄方面,同着梁憲釗李世義諸君的貢獻,委實不少,本期所載陳君一文,對於高中同學,無疑地是最好的參考。

關於算史方面,有李贊和先生談幾何原本一文,頗饒興趣。下期登載"九章算術內容分析,"由徐步塀先生主稿,先此預告。