新中學文庫

數學全書

第三册 解析

韋柏 著
鄭太朴 譯

商務印書館發行

數 學 全 書

第三冊 解析

Von H. Weber 著

鄭 太 朴 譯

商 務 印 書 館 發 行

中華民國二十六年三月初版
中華民國三十六年四月二版

(557840)

數學全書 第三冊 解析
Enzyklopädie der Elementarmathematik
Drittes Buch, Analysis

定價國幣肆元
印刷地點外另加運費

原著者 Von H. Weber
譯述者 鄭太朴
發行人 朱經農
上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館
各地

(本書校對者王養吾)

目　次

第十九章

無盡級數

第二十章

乘方級數　二項式級數

第二十一章

指數函數及三角函數

第二十二章

自然對數 反三角函數 三角級數

第二十三章

π 之乘積表法 乘方和數 $\zeta(2n)$ 歐氏常數

第二十四章

e 與 π 之超絕性

數學全書

第三册　解析

第十九章　無盡級數

§116. 收斂與發散

1. 級數係按照規律而構成的數目序列:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots$$

此項數目名爲級數之項.倘此規律可無限使用,因而對於任何一標數 ν, 可求得其相當之 a_n, 則此級數謂之無盡者.今茲所欲論者,姑先以實數所成者爲限.

例如自然數 $1, 2, 3,\cdots\cdots$, 實構成一無盡級數,又如算術級數之項 $a, a+b, a+2b, a+3b,$　或幾何級數之項 $1, a, a^2, a^3,\cdots$　或 $1^k, 2^k, 3^k,\cdots\cdots$($k$ 爲任何指數)等數目,均可構成無盡級數.

廣之,吾人亦可將級數之項,視爲一函數之值 $f(\nu)$, 於此,其中之變數遍取 $\nu=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 整值[1].任何一整數 n 所構

註: (1) 因之,變數取整值以外之值時,函數可不確定,例如 $f(\nu)$ 爲第 ν 個質數.

成之式$f(n)$或a_n吾人名之爲級數之普通項.

2. 設有一級數

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,$$

則可設

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n,$$

以得一新級數

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\cdots\cdots$$

$s_1, s_2, s_3,\cdots$名爲級數(1)之部分和數(Partialsummen).

吾人今按§28內之概念,作一定義如下:

倘一無盡級數之部分和數構成一收斂的數列,則此級數謂之收斂者.

因之,倘極限值

(2) $$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

存在,則級數(1)係收斂者.倘部分和數所成之數列,無有極限值,則此級數謂之發散者.

按之§28之**1**.,吾人可云:

倘有一確定的數目S,且對於每一已知正數ε,可有

一標數 n, 能

(3) $$|S-s_{n+\nu}|<\varepsilon, \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)爲收斂者.

倘級數爲收斂者,則其極限值 S 名爲級數(1)之和數或值,寫作:

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$$

此項寫法之意義,在表明求級數之和時,祇須取其充分多之項,則可隨吾人之意,以與 S 相接近.因之,吾人每可用無盡級數,以求 S 之值,其近似可隨吾人之意爲之,且在事實上,吾人求某種數目或函數之值時,級數往往爲最重要之法門,甚或爲唯一之法門也.

3. 略去(1)中首數項而得之級數

(4) $$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\cdots$$

名爲(1)之餘級數(Restreihen)[1].此級數之爲收斂或發散,與原級數(1)同.蓋(4)之部分和數爲

$$\sigma_1=s_{n+1}-s_n,\ \sigma_2=s_{n+2}-s_n,\cdots\cdots$$

$$\sigma_\nu=s_{n+\nu}-s_n,\cdots\cdots,$$

故如 $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_{n+\nu}$ 存在,即(1)爲收斂時,則 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma_\nu$ 亦存在,且僅

註:(1) 無盡級數之收斂或發散雖尚未能決定,但在書寫上,不妨先以和數之形式出之.

於此時方能存在也;此時(4)之和數為 $\lim \sigma_\nu = S - s_n$. 差數

$$\rho_n = S - s_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

名為收斂級數(1)之餘數.而按(3),則可知對於任何一正數 ε,可有一標數 n,能

$$|\rho_{n+\nu}| < \varepsilon, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

是即在收斂級數方面,其餘數向極限值0收斂.

4. 用 § 28, **6.** 之定理,吾人可無須先對於 S 有所假定,即不難決定一級數之收斂性.蓋

如對於每一正數 ε,可有一標數 n,能

$$(5) \qquad |s_{n+\nu} - s_n| < \varepsilon, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)為收斂者,亦僅於此時方為收斂者.但 $s_{n+\nu} - s_n = \sigma_\nu$ 為餘級數(4)之部分和數:

$$s_{n+\nu} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots + a_{n+\nu},$$

故可得定理如下:

倘對於每一正數 ε,可有一餘級數,其部分和數之絕對值恆小於 ε,則此無盡級數為收斂者,亦僅於此時方為收斂者.

5. 今試以

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots\cdots$$

爲例[1],其中之分母,係三角數(§56, 3)所成. 此級數亦可如下寫之:

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

其部分和數,則爲

$$s_1=1=2\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$s_2=\frac{4}{3}=2\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$s_3=\frac{3}{2}=2\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

....

廣之,有

$$s_n=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots$$

$$+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

由此可見 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在,且

註: (1) 此級數爲最初所研究及的無盡級數中之一, Lord Brouncker 已於其 Phil. Trans. (1668) 中及之.

$$\lim s_n = 2,$$

故此級數爲收斂者,其和爲2.吾人於是可寫之作

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots=2.$$

同時,吾人復可見此級數之收斂甚緩.故如欲所得之和,準確至三位小數,其差不及0.0005,則由s_n之值,已可見所用之項須至4000之多.

6. 試再一論以下之級數:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲[1]

$$a_n=\frac{1}{2^n},$$

其部分和數則爲

$$s_0=1=2-1$$

$$s_1=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

$$s_2=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}$$

$$s_3=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8},$$

廣之有

註:(1) 此處吾人用a_0以表首項,其部分和數則相當的用s_0, s_1, s_2,……表之.

(6)
$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=2-\frac{1}{2^n}.$$

由此可知 $\lim s_n=2$, 此級數爲收斂者,而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots=2.$$

由(6),吾人復可知推求部分和數時所至之準確程度可如何.倘欲使級數之和其差小於 $\frac{1}{1000000}$, 則須取21項($n=20$)用之.

7. 上節內所論之級數,實爲一無盡的幾何級數

(7)
$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$$

之特例,其中之 x 可爲任何一實數.按 §20, **11**, 其部分和數 s_n 爲

(8)
$$s_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

倘 x 爲一眞分數(正或負),則 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, 故 $\lim s_n$ 存在,而得如次之定理:

倘 $|x|<1$, 則此無盡級數係收斂者,其和爲

(9)
$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

今如以 $-x$ 代 x, 則可知該級數仍係收斂者,而有

$$(9a)\qquad 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots=\frac{1}{1+x}.\qquad(|x|<1)$$

倘 $x\geqq 1$, 則 (7) 之部分和數卽無極限值, 蓋其值可超過任何大之數也. 又如 $x<-1$, 則 (8) 中之 x^n 卽無有界限, 因而 s_n 亦然, 而如 $x=-1$, 則其部分和數交替的爲 1 與 0, 故亦無有極限值可求. 因之:

倘 $|x|\geqq 1$, 則此無盡幾何級數爲發散者.

循環小數亦在收斂的幾何級數之範圍內. 蓋如

$$\gamma=\{0.\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_l}\cdots\cdots\}$$

爲一無盡小數, 其週期爲 $\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_l}$, 而其十進寫法之數作

$$\{z_1z_2\cdots\cdots z_l\}=m,$$

則此小數實與以下之級數[1]相同:

$$\gamma=\frac{m}{10^l}+\frac{m}{10^{2l}}+\frac{m}{10^{3l}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{m}{10^l}\left(1+\frac{1}{10^l}+\frac{1}{10^{2l}}+\cdots\cdots\right).$$

此處括弧中卽爲一無盡幾何級數, 於此 $x=\frac{1}{10^l}=10^{-l}$, 故

$$\gamma=\frac{m}{10^l}\cdot\frac{1}{1-10^{-l}}=\frac{m}{10^l-1},$$

註: (1) 此處吾人已先用此定理, 卽凡收斂之級數, 倘用一定數 c 乘其各項, 亦仍收斂, 且其和亦被 c 所乘, 蓋其每一部分和數 s_n 需改爲 cs_n, 而有

$$\lim cs_n=c\lim s_n=cS$$

也 (參觀 § 29, 1.).

此則吾人於§31, 3. 中已以他法求得之矣.

不循環之無盡小數,亦可視之爲無盡級數:

$$\{0, z_1z_2z_3\cdots\cdots\} = \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} + \cdots\cdots \qquad (0 \leqq z_i \leqq 9)$$

此級數亦爲收斂者,其部分和數爲§30內用 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 表出之有盡小數,而用小數所表出之實數 $\alpha = \lim A_n$ 則爲級數之和.

8. 數學家從事於無盡級數以來,爲時已久,但鮮有注意及其收斂及發散者.十八世紀時代所致力者,都爲不收斂之級數,例如公式(9a),實僅可於 $|x|<1$ 之前提下用之但彼時之人則往往於其中設 $x=1$ 或 $x=2$,因而求得 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 之和爲 $\frac{1}{2}$, $1-2+4-8+16-\cdots\cdots$ 之和爲 $\frac{1}{3}$,且對於此項可注意之結果,力求玄學的及神學的理由,以補充數學論證之不足(Leibniz 1696, Grandi 1703). Euler 氏亦曾以同法($x=1$ 時之級數值)求 $1^n-2^n+3^n-4^n+\cdots\cdots$ 及 $1!-2!+3!-4!+\cdots\cdots$ 等級數之和.如是,彼時之人,實將每一公式視爲普遍可用,獨立存在,不問其來源如何,以爲其中之變數任何值均可取者[1].彼時固已有人對此發生

註: (1) 試以二項級數爲例,即可知其結果將如何:

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 - \cdots\cdots$$

今於其中設 $z=2$,則實數之和,將成爲一虛數矣.

疑問,如 Varignon (1712), Nikolaus II, Bernoulli (1743), d'Alembert (1768) 等,但大率爲偶然的,對於彼時之思想,可謂毫無影響.直至十九世紀時,始發生此確信,知唯有收斂之級數,乃能有其存在之理由,亦唯有收斂之級數,方可由之以推論確切之結果.Gauss, Abel 及 Cauchy 諸人,於此方面貢獻尤多[1],自是以來,論證上之精密謹嚴,乃成爲數學研究上之特徵.

9. 及至晚近,有極多發散的級數,始亦成爲精密研究之對象.於此,所用之方法殊多,但其共同之根本思想,則在將發散的級數與某種收斂的數列相關,而將後者之極限值視爲級數之值.凡發散級數,如能適用此種方法,則謂之可求其和者.且可按收斂數列之性質而分別之.例如在某種狀況下,吾人可對發散級數與一收斂的連分相關,因而將連分之值視爲級數之值.但關於發散級數之詳盡理論,則尤以某種平均值之構成爲其基礎.今姑以最簡單之例示其一斑.

註: (1) Gauss 氏曾於其 Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) 中,謂"吾人之研究,自僅可限於收斂的事例方面,故如 $x>1$ 而欲求其值,此爲無意義之問題".四十年之後,Gauss 於其致 Schumacher 之信中,復謂"收斂之級數,有淸晰之意義可言,如此條件不存在,則其意義亦卽隨而失去……余始終未承認發散的級數之亦可應用……無論何處,余僅能用及收斂之級數……"Abel 氏之 Untersuchung der binomischen Reihe (1826) 以及 Cauchy 之 Cours d'analyse (1821) 亦可參閱.

級數

(𝔄)　$$a_1+a_2+a_2+\cdots\cdots$$

之爲收斂與否,隨其部分和數之數列

(𝔖)　$$s_1, s_2, s_3, s_4,\cdots\cdots$$

是否爲收斂而定.今試作部分和數之算術平均數:

(𝔖′)　$$s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, \frac{s_1+s_2+s_3}{3},\cdots\cdots,$$

則可知(𝔖)收斂時,(𝔖′)亦必收斂,且其極限値相同.但有時亦可(𝔖′)收斂而(𝔖)則不然.於是(𝔄)卽發散,但吾人藉(𝔖′)之助,仍不失其爲有和可求者,且可將

$$s=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}$$

視爲其値.

試以

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots$$

爲例,則有

$$1, 0, 1, 0, 1,\cdots\cdots$$

爲(𝔖),因而其(𝔖′)爲

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7},\cdots\cdots$$

故如n爲奇數,則

$$\frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

而如 n 爲偶數,則爲 $\frac{1}{2}$,故可知

$$\lim \frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}=\frac{1}{2}.$$

此卽上述意義下級數

$$1-1+1-\cdots\cdots$$

之值也.

10. 級數中之特爲重要且其屬性亦以簡單見殊者,厥爲各項均爲正數之級數.於此,其部分和數構成一單調上升之數列(§ 27, **1**.),而由 § 28, **7**.,則可知:

各項均爲正數之級數,倘其部分和數所成之數列爲有界者,則此級數收斂,亦祇於此時方收斂,此項部分和數之上界,等於級數之和數.

但如部分和數之數列非爲有界者,則對於每一數目 N,可有一標數 n,自 s_n 以下,一切部分和數均大於 N,而級數爲發散者.

11. 級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots \tag{10}$$

之普通項爲 $u_n=\frac{1}{n}$,名爲調和級數 (harmonische Reihe). 今試指出其發散性.因

$$1>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{4}{8}\text{ 或 }\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{15}>\frac{8}{16}\text{ 或 }\frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故

$$s_1>\frac{1}{2},\ s_3>\frac{2}{2},\ s_7>\frac{3}{2},\ s_{15}>\frac{4}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

廣之,

$$s_{2^k-1}>\frac{k}{2}$$

因之,倘有 N 爲已知數,而取 $n\geqq 2^{2N}-1$,則自 s_n 以下一切部分和數均大於 N.故可知此級數爲發散者.

12　根據以下之定理,吾人不難由一收斂級數,以得任何多之其他收斂級數.

設　$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

爲一收斂級數,其項均爲正數,

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\cdots\cdots$$

爲正數或負數所成之有界數列,則級數

(11)　$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+\cdots\cdots$$

亦爲收斂者.

蓋如(11)之部分和數爲$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots\cdots$, 則

$$\sigma_{n+\nu}-\sigma_n=k_{n+1}a_{n+1}+k_{n+2}a_{n+2}$$
$$+\cdots\cdots+k_{n+\nu}a_{n+\nu}.$$

按所設,一切數目k_i之絕對值不能超過一有限之界g:

$$|k_i|\leqq g,$$

故 $$|\sigma_{n+\nu}-\sigma_n|\leqq g|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\cdots+a_{n+\nu}|$$

或即 $$|\sigma_{n+\nu}-\sigma_n|\leqq g|s_{n+\nu}-s_n|<\varepsilon,$$

故吾人對於已知之正數ε,祇須如是決定n使

$$|s_{n+\nu}-s_n|<\frac{\varepsilon}{g}, \qquad (\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則即適於上列條件,而因原級數爲收斂者,故此恆爲可能之事.

如是,吾人已證明(11)之收斂性[1].

今使$k_1, k_2, k_3, \cdots\cdots$僅取0與1爲值,則得如次之定理:

凡收斂之級數,倘其項均爲正數,則略去任何多之項時,仍爲一收斂級數.

又如使$k_1, k_2, k_3, \cdots\cdots$取$+1$或$-1$爲值,則可知:

收斂級數之項如均爲正數,則將其項之號任意改動後所得之新級數,亦均爲收斂者.

註: (1) 此定理爲其他一較廣定理之特例當於§119, 4.內證明之

§117. 收斂之標識

1. 以上所得關於收斂之標識,均須先知級數之部分和數.就一般的事例而言,欲使部分和數成爲如是之形式,俾吾人對於n增大時可直接知其情況,此實爲不可能之事.故就實用言,上述之標識,實難應用.然吾人頗可由此以知其他之標識,俾由級數之項,即已可決定其爲收斂或發散.

最先所可見者,則級數之項須以0爲其極限值,是即對於任何一正數δ,須有一標數n,俾m超過n時,

(1)
$$|a_m|<\delta.$$

蓋如吾人於§116,(5)內設$\varepsilon=\frac{\delta}{2}$,則有一標數$n$,於$m>n$時,

$$|s_m-s_n|<\frac{\delta}{2},\quad |s_n-s_{m-1}|<\frac{\delta}{2}.$$

按§14,**3.**,有

$$\begin{aligned}|s_m-s_{m-1}|&=|(s_m-s_n)+(s_n-s_{m-1})|\\&\leqq|s_m-s_n|+|s_n-s_{m-1}|,\end{aligned}$$

故
$$|s_m-s_{m-1}|<\delta,$$

而此則與(1)之意義相同.

然如§116,**11.**內之調和級數一例所示,此條件對於收斂尚爲不充分者.

2 然有頗重要的一類級數,於此,條件(1)已爲充分者,是即更替級數(alternierenden Reihen),其項爲單調向下者是所謂更替級數者,係其項迭爲正負之級數,故其形式爲

$$(2)\qquad a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\cdots,$$

於此,一切 a_n 均爲正者.關於此項級數,Leibniz 之定理可以適用.

更替級數之項如恆減小,末後可至任意小者,則此級數收斂.

蓋按所設,有

$$a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots\cdots$$

及

$$\lim a_n=0.$$

(2)之部分和數爲

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1-a_2=s_1-a_2$$

$$s_3=s_1-(a_2-a_3)$$

$$s_4=s_2+(a_3-a_4)=s_3-a_4$$

$$s_5=s_3-(a_4-a_5)$$

$$s_6=s_4+(a_5-a_6)=s_5-a_6$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以上括弧內之差數均係正數,故 $s_1, s_3, s_5, \cdots\cdots$ 構成一單調向下數列,而 $s_2, s_4, s_6, \cdots\cdots$ 則爲單調向上之數列.此外則

$$s_1 > s_2,\ s_3 > s_4,\ s_5 > s_6, \cdots\cdots$$

而
$$\lim(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim a_{2n} = 0.$$

由此可知該二數列係相關數列(§ 27, **1** 及 § 28, **4**), 故決定一數目

$$S = \lim s_{2n-1} = \lim s_{2n},$$

是卽此級數爲收斂者[1].

試舉一例, 則

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots$$

一級數爲收斂者,其和數在 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間,但如此級數之項盡爲同號,則此級數卽爲發散者.

3 Leibniz 此定理,可作爲以下定理之特例含於其內:

設 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 爲單調向下之正數數列,且

$$\lim c_n = 0,$$

又設 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots$ 爲正數或負數之數列,其部分和數

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n \tag{3}$$

爲有界者,則級數

註: (1) 吾人亦可云: 第一數列之一切數目均 $> s_2$, 第二數列之一切數目均 $< s_1$, 故前者向下有界,後者則向上有界,而因 $\lim(s_{2n-1} - s_{2n}) = 0$, 故必 $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n}$. 倘將部分和數 $s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots$ 於數目直線上描出之,則極限値之由來,卽不難得其幾何的圖解.

(4) $$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+\cdots\cdots$$

收斂.

欲證明此定理,吾人可將 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n$ 用部分和數 (3) 表出之,即

$$u_1=U_1,\ u_2=U_2-U_1,\ u_3=U_3-U_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ u_n=U_n-U_{n-1}.$$

如是則 (4) 之第 n 個部分和數,即爲

$$\begin{aligned}s_n&=c_1U_1+c_2(U_2-U_1)+c_3(U_3-U_2)\\&\quad+\cdots\cdots+c_n(U_n-U_{n-1})\\&=U_1(c_1-c_2)+U_2(c_2-c_3)+\cdots\cdots\\&\quad+U_{n-1}(c_{n-1}-c_n)+U_nc_n.\end{aligned}$$

因無盡級數

$$(c_1-c_2)+(c_2-c_3)+\cdots\cdots=c_1$$

爲正數所成,且係收斂者,而 $U_1, U_2, U_3, \cdots\cdots$ 之絕對值均小於一有盡數 g,故按 § 116, **12**., 級數

(5) $$U_1(c_1-c_2)+U_2(c_2-c_3)+\cdots\cdots$$

亦爲收斂者. U_nc_n 旣逼近於 0, 則 $\lim s_n$ 即等於此級數之和數,是即 (4) 與 (5) 向相同之和數收斂.由前一級數轉成爲後一級數之轉變法,名爲 Abel 氏轉變法.

今使 $u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots$ 取 $+1, -1, +1, -1, \cdots$ 爲值,則即得 Leibniz 氏之定理.以後於 § 134 之 **5** 內,將見此一般定理之應用.

4　較簡單而常用以證明收斂者,爲級數之比較.今設

(𝔄)　$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

爲一級數,其項均爲正數.倘能有一其他之級數

(𝔅)　$$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots,$$

其項均不小於(𝔄)中之相當項,卽[1]

$$a_1\leqq b_1,\ a_2\leqq b_2,\ a_3\leqq b_3,\cdots\cdots,$$

幷知(𝔅)爲收斂者,則(𝔄)亦必收斂,且(𝔄)之和數小於(𝔅)之和數.

蓋如是則(𝔄)之部分和數必小於(無論如何不能大於)(𝔅)之相當的部分和數,而此則構成一有界數列,故均小於一有限之數目 B,因而(𝔄)之一切部分和數亦均小於 B.故亦爲有界者,而按§116, **10** 可知(𝔄)亦爲收斂者.

此處之(𝔅),名爲(𝔄)之較大類例(Majorante).反之,倘(𝔄)爲發散者,則(𝔄)之一切較大類例,自均爲發散者.

5.　今試舉一例,設(𝔄)爲

(6)　$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots,$$

則　$$1=1,\ \frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot4},\cdots\cdots,$$

故　$$1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots$$

註:(1)此處不能均適用等號,否則(𝔄)與(𝔅)爲相同者矣.

爲(6)之較大類例.但此級數係收斂者,其値等於2,蓋自第二項以下,其項爲§116中(6)之一半也.因之,(6)亦爲收斂者,其和數小於2.

(6)既爲收斂者,則一切級數

$$(7)\qquad 1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots,$$

凡其中$k\geqq 2$者,自均爲收斂者.

6. 吾人亦可證明,祗須$k>1$時,此項亦均已收斂.於此,吾人可按§116,**11.**爲之.試設

$$u_0=1,\ u_1=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k},\ u_2=\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

廣之,

$$u_\nu=\frac{1}{2^{\nu k}}+\frac{1}{(2^\nu+1)^k}+\frac{1}{(2^\nu+2)^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{\nu+1}-1)^k},$$

則u_ν由2^ν項所成,而

$$u_\nu<\frac{2^\nu}{2^{\nu k}}=\frac{1}{2^{\nu(k-1)}}.$$

今設$\nu=0,1,2,3,\cdots\cdots$,則可知

$$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\frac{1}{2^{3(k-1)}}+\cdots\cdots$$

爲$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$之較大類例,而此後者則卽爲(7).此較大類例係一無盡幾何級數,倘$\frac{1}{2^{k-1}}<1$,則卽收斂,亦卽

於 $\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2}$, $k>1$ 時為收斂者.因之,(7) 亦必收斂,祇須 $k>1$ 便可.

但如 $k<1$, 則

$$1=1,\quad \frac{1}{2^k}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3^k}>\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4^k}>\frac{1}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 (7) 成為調和級數之較大類例.因調和級數係發散者,故此級數亦必發散.吾人於是得如次之定理:

級數

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots$$

於 $k>1$ 時為收斂者,於 $k\leqq 1$ 時則為發散者.

7　藉級數比較之助.吾人可從得若干規則,俾可由項之情況,即判定一級數之為收斂或發散.此項規則,名為收斂之範疇 (Konvergenzkriterien),且可按照其中所用者為個別之項或若干項之結合而將範疇分為第一種或第二種者.適用於一切事例之範疇,至今尚缺如.吾人今茲所欲論者,為若干簡單而應用頗廣之範疇,惟亦僅能以正數項之級數為限.

8　Cauchy 氏之第一種範疇

由級數

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$$

之項,試作如次之數列:

$$(8)\qquad a_1,\ \sqrt{a_2},\ \sqrt[3]{a_3},\ \sqrt[4]{a_4},\cdots\cdots,\ \sqrt[n]{a_n},\cdots\cdots,$$

倘此數列中幾於一切數目均小於一眞分數,則此級數爲收斂者但如此數列中有無限多之數目均大於1或等於1,則級數即發散.

蓋如爲前者之事例,則可有一正數$\theta<1$,俾自n以下,均

$$\sqrt[\nu]{a_\nu}<\theta \qquad (\nu>n)$$

如是則由第n項以下,一切項

$$a_\nu<\theta^\nu,$$

因而收斂的幾何級數

$$\theta^n+\theta^{n+1}+\theta^{n+2}+\theta^{n+3}+\cdots\cdots$$

爲餘級數

$$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\cdots$$

之較大類例.由此可知此餘級數爲收斂者而原級數亦爲收斂者矣.

但如(8)中有無限多之數目$\sqrt[\nu]{a_\nu}\geqq1$,則有無限多之級數項$a_\nu\geqq1$,因而級數必發散.

9. Cauchy氏之第二種範疇.

試將級數內每相繼之二項作一比,則得一數列如下:

$$(9)\qquad \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \frac{a_4}{a_3},\ \frac{a_5}{a_4},\cdots\cdots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\cdots\cdots$$

倘此數列內幾於一切數均小於一眞分數，則此級數爲收斂者．但如幾於一切數均大於1或等於1，則此級數係發散者．

在第一事例方面，有一正數$\eta<1$，自n以下，

$$a_{n+1}<\eta a_n$$

$$a_{n+2}<\eta a_{n+1}<\eta^2 a_n$$

$$a_{n+3}<\eta a_{n+2}<\eta^3 a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故可知收斂的幾何級數

$$a_n(\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4+\cdots\cdots)$$

爲餘級數

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+\cdots\cdots$$

之較大類例，故此級數爲收斂者，而原級數亦收斂．

在第二事例方面，

$$a_n\leqq a_{n+1}\leqq a_{n+2}\leqq a_{n+3}\leqq\cdots\cdots,$$

故級數爲發散者．

10　數列(8)與(9)可有幾個叢聚值，故如其最大之叢聚值小於1，則數列內幾於一切數目均小於一眞分數；反之，倘其最小之叢聚值大於1，則數列內幾於一切數目均大於1．在第一種範疇方面，倘有無限多之數目(不必幾於一切)均大於1，則已爲發散，故祇須其最大叢聚值

大於1便可因之,吾人得如次二條件:

	第一種範疇	第二種範疇
收斂	$\limsup \sqrt[n]{a_n}<1$	$\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$,
發散	$\limsup \sqrt[n]{a_n}>1$	$\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

倘二數列中之一爲收斂者,則 lim sup 及 lim inf 與極限值相合,而如 (9) 爲收斂者,則二種範疇間即有一密切之關係,可以如次之定理表出之:

倘 (9) 爲收斂者,則 (8) 亦收斂,而二者之極限值相同

蓋如 $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, (p,q) 爲任意小之間段, a 常在其中,

$$p<a<q.$$

如是則由某一標數 m 以上,(9) 之一切數目在此間段中,而有

$$pa_m<a_{m+1}<qa_m$$

$$pa_{m+1}<a_{m+2}<qa_{m+1}$$

$$pa_{m+2}<a_{m+3}<qa_{m+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$pa_{n-1}<a_n<qa_{n-1}.$$

今將此項不等式相乘,并去其正因子 $a_{m+1}a_{m+2}\cdots\cdots a_{n-1}$,則得

$$p^{n-m}a_m<a_n<q^{n-m}a_m,$$

故 $$p^n<\frac{p^m}{a_m}a_n<\frac{\alpha^n}{a_m}a_n<\frac{q^m}{a_m}a_n<q^n.$$

為簡單計,令設 $\frac{\alpha^m}{a_m}=\beta$,則經開方後,有

$$p<\sqrt[n]{\beta}\sqrt[n]{a_n}<q.$$

從可知 m 充分大時,對於一切 $n>m$ 者,數目 $\sqrt[n]{\beta}\sqrt[n]{a_n}$ 均在 α 所處之任意小間段內,因而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta}\sqrt[n]{a_n}=\alpha.$$

按 § 38, **5**., $\lim\sqrt[n]{\beta}=1$, 故按 § 20, 5, 可知

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\alpha=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

11 此二範疇之應用,將於後見之此處尚須指出者,則此項範疇并非恆可應用者是 今試以前所用過之級數

(10) $$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots,$$

則 $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^k}{(n+1)^k}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k},$$

故對於每一 k, 按之 **10**, 有

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\sqrt[n]{a_n}=1.$$

由此結果,吾人實不能對於收斂有所推論,而在級數 (10) 中,固亦有收斂者與發散者之別也.

又如§116之級數(6),其普通項爲 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$, 此二範疇亦不能有所決定.蓋

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}=\frac{1}{1+\frac{2}{n}},$$

故亦
$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\sqrt[n]{a_n}=1.$$

然吾人由(10)之例,亦正可推求適用於該項事例之新範疇,以解決前二種範疇所不能決定者.

12. 倘能求得一指數 $k>1$, 使數列 $\{n^k a_n\}$ 爲有界者,則級數即收斂.

蓋如是則數目 $n^k a_n=c_n$ 均在一有限的界之下,而按6.級數 $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots$ 於 $k>1$ 爲收斂者,故按§116, **12**.級數

$$c_1+\frac{c_2}{2^k}+\frac{c_3}{3^k}+\frac{c_4}{4^k}+\cdots\cdots=a_1+a_2+a_3+a_4\cdots\cdots$$

亦爲收斂者.

例如§116, **5**.內之級數,有

$$n^2a_n=\frac{2n^2}{n(n+1)}=\frac{2n}{n+1},$$

故 $\{n^2a_n\}$ 爲一有界數列,其上界爲2,因而級數爲收斂者.

13. 但如 na_n 隨 n 而增大,超出任何界限,或其極限值

不等於0,則級數爲發散者[1]

蓋如是則可取一正數c,俾幾於一切之乘積$na_n>c$,故可有一有限數m,俾一切$n>m$時,

$$a_n>\frac{c}{n}$$

因之,餘級數

$$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots\cdots$$

爲

$$c\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots\cdots\right)$$

之較大類例,此級數按之§116, **11**.既爲發散者,則餘級數亦必發散,而$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$自亦如此矣.

按之,可知

$$\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\alpha+3\beta}+\cdots\cdots$$

一級數(β爲正數)爲發散者,蓋

$$\lim na_n=\lim\frac{n}{\alpha+\beta n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\alpha}{n}+\beta}=\frac{1}{\beta},$$

而此則不等於0也.

註:　(1)　此處12.及13.內之範疇,亦爲Cauchy氏所創立.

§118 有條件的與無條件的收斂

1. 今設

$$(\mathfrak{A}) \qquad a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$$

爲一級數,其項爲正負均可,吾人卽稱之爲級數 $\mathfrak{A}$. 今將級數中之負項盡易以正者,亦卽構成其絕對值之級數

$$(\mathfrak{A}^*) \qquad |a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+\cdots\cdots,$$

并稱之爲 $\mathfrak{A}$ 之絕對級數 (Absolutreihe), 以 $\mathfrak{A}^*$ 表之. §116 末之定理,於是可如是表出之:

設 $\mathfrak{A}^*$ 收斂則 $\mathfrak{A}$ 亦收斂.

此定理之倒,不能適用,蓋儻有原級數收斂而其絕對級數不收斂者,如

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$$

卽爲其例.如是,吾人可將收斂分爲二種:

1. 倘級數之絕對級數收斂,則此級數謂之絕對收斂者.

2. 倘級數本身收斂而其絕對級數發散,則此級數爲有條件的收斂者.

從可知收斂的級數內,倘僅有有限多之異號項,則爲絕對收斂者,而凡有條件收斂之級數,則必有無限多之正項及無限多之負項.

2. 爲詳細研究此二種不同之級數計,可於$\mathfrak{A}$內將其正項及負項分別之.今設

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots\cdots$$

爲正項,

$$-c_1, -c_2, -c_3, -c_4, \cdots\cdots$$

爲負項,其用此種項之絕對值所構成之級數$\mathfrak{B}$及$\mathfrak{C}$表之,即

$$(\mathfrak{B}) \qquad b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots\cdots$$

$$(\mathfrak{C}) \qquad c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots\cdots$$

又設$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$之部分和數爲

$$A_\nu = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_\nu$$

$$B_\nu = b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_\nu$$

$$C_\nu = c_1+c_2+c_3+\cdots\cdots+c_\nu$$

$$(\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

而如級數收斂時,其和數爲A, B, C.

$\mathfrak{A}$之部分和數係由$\mathfrak{B}$及$\mathfrak{C}$者所合成,即

$$(2) \qquad A_\lambda = B_\mu - C_\nu,$$

於此,λ, μ, ν同時增加至於無限.設$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$收斂,則

$$\lim B_\mu - \lim C_\nu = \lim(B_\mu - C_\nu)$$
$$= \lim A_\lambda.$$

是即$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$均收斂時,$\mathfrak{A}$亦收斂,而

$$(3) \qquad A = B - C.$$

在此假設下,$\mathfrak{A}$ 之絕對級數亦收斂,蓋其部分和數爲 $B_\mu + C_\nu$ 也.反之,亦祇有 $\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{C}$ 均收斂時 $\mathfrak{A}^*$ 乃能收斂.因之:

倘正項所成之級數及負項所成之級數均收斂,則原級數爲絕對收斂者,亦祇於此時方能絕對收斂.

3 關於絕對收斂之級數,有如次之定理:

絕對收斂之級數,倘將其項任意顚倒之,亦仍收斂,且其和數亦仍不變.

吾人雖已有交換定律,但此定理之非爲自明者,不難於以後之有條件收斂的級數方面見之.

倘級數之收斂及和數,與項之次序并無關係,則此級數謂之無條件收斂者.按此,吾人可作如次之定理:

凡絕對收斂之級數,必爲無條件收斂者.

試先以一切項均爲正數之級數證明此定理.設級數

$$(\mathfrak{D}) \qquad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \cdots\cdots$$

爲收斂者,其和爲 D.將其項顚倒後,可得一新級數

$$(\mathfrak{D}') \qquad d_1' + d_2' + d_3' + d_4' + \cdots\cdots$$

對於 $\mathfrak{D}'$ 之任何一部分和數 D_μ',可得一 $\mathfrak{D}$ 之較大的部分和數 D_ν,吾人祇須使 D_ν 包括如是多之項,將 D_μ' 中之項盡落入其中便可,故有

$$D_\mu' < D_\nu.$$

由此即知級數$\mathfrak{D}'$亦爲收斂者,其和數D'不能大於和數D:

$$D' \leqq D.$$

仿此,吾人亦可對於$\mathfrak{D}$之任何一部分和數作較大的$\mathfrak{D}'$之部分和數,因而亦有

$$D \leqq D'.$$

觀此,則可知唯有

$$D = D',$$

此二不等式乃能成立,於是一切項均爲正數之級數,已證明其可適用此定理.

今設**1**中之級數$\mathfrak{A}$爲絕對收斂者,其項正負兼具.如是則按**2**,$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$亦爲絕對收斂者.將$\mathfrak{A}$之項加以顚倒而得新級數$\mathfrak{A}'$時,$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$內亦發生相當之顚倒.於此,吾人前已見之,和數B與C仍不變,故$\mathfrak{A}'$之和數亦仍與$\mathfrak{A}$之和數同:

$$A = B - C.$$

試假定此處所證明之定理3在有條件收斂之級數方面不適用,則絕對收斂與無條件收斂二概念即相同,而吾人祇須保存後者一名稱卽可.

4.　倘**2**之二級數$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$中有一爲收斂者,一爲發散者,則由(2)可知$\mathfrak{A}$爲發散者.但如$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$二級數均爲發散

者,則其情形卽異於此,絕對級數$\mathfrak{A}^*$固爲發散者,但$\mathfrak{A}$之部分和數A_λ仍可有極限值,因而其收斂爲有條件者.緣此:

在有條件的收斂級數方面,正項所成之級數與負項所成之級數均爲發散者.

例如在有條件的收斂級數

$$(4)\qquad \mathbf{L}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$$

方面,其

$$(\mathfrak{U})\qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

一級數與

$$(\mathfrak{G})\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

一級數均爲發散者,此則不難由§117之**13**見之.

此處吾人可見一特殊之狀況.$(\mathfrak{U})$與$(\mathfrak{G})$之部分和數爲

$$U_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$G_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}.$$

試取調和級數之部分和數

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n},$$

則

$$S_n=2G_n,$$

又,(4)之第$2n$個部分和數爲

$$L_{2n}=U_n-G_n,$$

但
$$S_{2n}=U_n+G_n=2G_{2n},$$

故

(5)
$$L_{2n}=2(U_n-G_{2n}).$$

但 U_n-G_{2n} 爲級數

(6)
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

之首 $3n$ 項之和,而由 (5) 則可知此級數亦爲收斂者.此級數之項與 (4) 者同,惟其次序則異,一正項之後恆繼以二負項,而按 (5) 則可知其和數不再等於 L 而爲

(7)
$$L'=\frac{1}{2}L.$$

由此結果,可知級數之和,與其項之次序有關,故驟觀之不能使人無驚異,蓋此與加法上之交換律相背謬者也.但吾人須知算術上之定律,實以有限多之運算爲前提,而級數內之項則爲無限多者,宜其不能用也.

(7) 之結果,吾人可如是明之,卽在部分和數 L'_{3n} 內,L_{2n} 之項固均包於其中,但此外尙有負項,在 (4) 中須至後來方發現者,至於此種項之多,則亦隨 n 而增加至於無限.

5. 吾人倘欲將有條件的收斂級數之狀況作一般的研究,則須假定 $\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{C}$ 二級數之項均爲正數時,均係發

散者.欲將$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$二級數相合而成爲收斂級數時,則并須假定此二級數之項均得0收斂,即

$$\lim b_n = 0,\ \lim c_n = 0. \tag{8}$$

吾人今可如是作一級數$\mathfrak{A}$,其中先爲若干[1]正項$b_1, b_2, \cdots\cdots$,再爲若干負項$-c_1, -c_2, \cdots\cdots$,再則仍爲正項b,其後復爲負項$-c$,等等,但須注意者,則無論正項b或負項$-c$,均須就其次序應用之,不可將任何一項越過.如是則可得如次之定理[2]:

$\mathfrak{B}$與$\mathfrak{C}$在$\mathfrak{A}$內之項次序,可如是列之,使此級數收斂,且有一任意之值A.

設A爲正數,則因$\mathfrak{B}$爲發散者,故可先求如是多的b項之和,使末後之b加上後,其和數大於A.如是則此和數所大於A者,自不能超過末後所加上之項b.次再加上如是多之負項$-c$,使和數仍適小於A,如是則其差亦不能大於末後減去之項c.於是重再加上b項,使和數復超過A,并可繼續反復使用此法.按此則可知和數與A間之差,恆在末後所加上之b或$-c$之下,至多祇能與之相等而已,而因(8)之關係,可減小至於任何小之程度.如是所構成之級數$\mathfrak{A}$,可知其係向A收斂.今如A爲負數,則可以負

註:(1) 此數之多寡亦可爲0.

(2) 此定理摹自Riemann.

項 $-c$ 爲開始,仿同法爲之,於是上述之定理卽已證明[1].

因之,吾人可用二個發散的級數(其項均爲正數,且以0爲其極限值者),以構成有條件收斂之級數,而將其項加以適當之整列後,可得任何之和數.

§119　複項級數

1.　今試一論項爲複數之級數,但先須確定複數數列之極限值,其意義爲何.

試一回憶複數之幾何的圖表法,以及複數之絕對值之定義.設

$$z=x+iy$$

爲一複數,則正數

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

爲其絕對值.就幾何上言之,其所代表者爲 z 點與零點間之距離.

二複數間差之絕對值 $|a-b|$,其意義爲 a 與 b 二點間之距離.

設 ε 爲任何一正數,則凡 ζ 點,能

(1) $$|z-\zeta|<\varepsilon$$

註: (1) 嚴格言之,所證明者僅在 A 爲 S 之某種部分和數之極限值而已.但吾人亦可證明 A 爲一切部分和數之極限值,蓋用上法所作之每二個部分和數間,有幾於一切的 S 之部分和數也.

者,吾人均名之爲 z 點之附近.此項 ζ 點,完滿以 z 爲中心,以 ε 爲半徑之圓之內部.

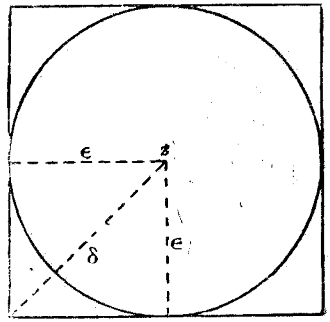

圖 22

今設 $z=x+iy,\zeta=\xi+i\eta$, 則由不等式(1),可知

(2) $$|x-\xi|<\varepsilon,\ |y-\eta|<\varepsilon.$$

反之,倘此二不等式能成立,則必

(3) $$|z-\zeta|<\delta.$$

於此, $\delta=\varepsilon\sqrt{2}$.

此種關係,不難直接由圖見之,或亦可由公式

$$|z-\zeta|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

以知之.

今按 § 28 之 **2.**, 作一定義如下:

設有無限多複數所成之列 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots$, 而在 z 之任何一附近內,幾於該列中一切數均在其中,則此數列爲收斂者,且其極限值爲 z.

按此,可知對於任何一已知數 ε, 可有一標數 n, 能

(4) $$|z-z_{n+\nu}|<\varepsilon \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

今設 $z_n=x_n+iy_n$, $z=x+iy$, 則按(2),可知與(4)相并立者,有

(5) $$|x-x_{n+\nu}|<\varepsilon \text{ 及 } |y-y_{n+\nu}|<\varepsilon,$$

因而有極限值

$$\lim x_n = x,\ \lim y_n = y. \tag{6}$$

反之,倘 (5) 能成立,則對於任何一正數 $\delta = \varepsilon\sqrt{2}$, 祇須 n 充分大, 即有

$$|z - z_{n+\nu}| < \delta,$$

故得定理如下:

複數 $z_n = x_n + iy_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 所成之數列,倘其實數數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 收斂,則亦向一極限值 $z = x + iy$ 收斂,且祇於此時方收斂,而有 $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$.

2. 設有一無盡級數,其項均為複數:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots\cdots, \tag{$\mathfrak{C}$}$$

其普通項為

$$c_n = a_n + ib_n,$$

則如其部分和數

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots\cdots + c_n$$

向一極限值 $C = A + iB$ 收斂時此級數即為收斂者.但

$$C_n = A_n + iB_n,$$

於此, A_n 及 B_n 為實級數

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots \tag{$\mathfrak{A}$}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots \tag{$\mathfrak{B}$}$$

之部分和數,故按末後之定理,吾人可云:

複數項之無盡級數$\mathfrak{C}$,倘其二部分所成之級數$\mathfrak{A}$與$\mathfrak{B}$各自收斂,以A與B爲和數,則此級數爲收斂者,亦祇於此時方收斂,而以

$$C=A+iB$$

爲其和數.

3. 設$c=a+ib$,則$|c|=\sqrt{a^2+b^2}$,

而 $$|a|\leqq|c| \quad 及 \quad |b|\leqq|c|.$$

從可知$\mathfrak{C}$之絕對級數

$$(\mathfrak{C}^*) \qquad |c_1|+|c_2|+|c_3|+|c_4|+\cdots\cdots$$

爲$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{B}$之絕對級數$\mathfrak{A}^*$,$\mathfrak{B}^*$之較大類例.故如$\mathfrak{C}^*$爲收斂者,則$\mathfrak{A}^*$與$\mathfrak{B}^*$亦收斂,因而$\mathfrak{A}$與$\mathfrak{B}$亦收斂,且爲無條件者'故$\mathfrak{C}$亦必收斂矣.緣此:

倘無盡級數$\mathfrak{C}$之絕對級數$\mathfrak{C}^*$收斂,則$\mathfrak{C}$本身亦收斂.而因$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{B}$爲無條件收斂者,故$\mathfrak{C}$亦爲無條件收斂者.

此定理亦猶實數方面之相當定理然.不能用其反.蓋$\mathfrak{C}$每可收斂,而絕對級數$\mathfrak{C}^*$則發散,祇須$\mathfrak{A}$與$\mathfrak{B}$二級數中有一爲有條件收斂者,則卽如此.如是則$\mathfrak{C}$亦爲有條件收斂者.

4. 設級數

$$c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots\cdots$$

爲無條件收斂者,而

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\cdots\cdots$$

爲複數所成之任何一數列,其絕對值均在一有限正數 g 之下,則級數

$$k_1c_1+k_2c_2+k_3c_3+\cdots\cdots$$

亦爲無條件收斂者.

蓋

$$|k_1c_1|<g|c_1|,\ |k_2c_2|<g|c_2|,$$

$$|k_3c_3|<g|c_3|,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故如

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+\cdots\cdots$$

爲收斂者,則

$$|k_1c_1|+|k_2c_2|+|k_3c_3|+\cdots\cdots$$

亦收斂.

§120. 無盡級數之運算

1. 試一論二個無盡級數,均爲收斂者,其項可爲實數或複數[1]:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A&=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\\ B&=b_0+b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots \end{aligned}$$

此二級數之部分和數爲 A_n, B_n ($n=0,1,2,3,\cdots\cdots$),故

$$A=\lim A_n,\quad B=\lim B_n.$$

註: (1) 吾人不用 a_1, b_1 以表首項,而用 a_0, b_0 表之,蓋以後於乘法上較爲便利也.

今設

(2)
$$a_0 \pm b_0 = c_0,\quad a_1 \pm b_1 = c_1,$$
$$a_2 \pm b_2 = c_2,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

於此,吾人採用其正號或負號均可,但須一致.試作一級數

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots\cdots,$$

其部分和數爲 C_n, 則

$$C_n = A_n \pm B_n.$$

今使 n 增大至於無限, C_n 亦向一極限值 C 收斂而有

(3)
$$C = A \pm B.$$

從可知:

倘於二收斂級數方面,將其每二個相當之項加之(或減之),則所得之級數仍爲收斂者,其和數等於二級數值之和(或差).

倘於級數中插入若干項,其值爲 0 者,則此級數之值自不受影響.因之,吾人可用種種不同之法,以構成和數 C, 蓋 a_n, b_n 各項之次序,可任意改變之,例如

$$C = b_0 + (a_0 + b_1) + (a_1 + b_2) + a_2$$
$$+ (a_3 + b_3) + \cdots\cdots$$

或
$$C = a_0 + a_1 + (a_2 + b_0) + (a_3 + b_1)$$
$$+ b_2 + (a_4 + b_3) + \cdots\cdots.$$

2.　在乘法方面,其事卽不如是之簡.今設

$$(4)\qquad \begin{aligned} A&=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots \\ B&=b_0+b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots \end{aligned}$$

爲二實數所成之收斂級數.其項均爲正數.倘有多項式之乘法於此,則其一級數內之每一項須與其他級數內之每一項相乘,而將一切乘積加之.吾人今可將此項乘積如是整列之.使一切乘積 $a_\mu b_\nu$,其標數之和相同者,併成爲一項.即

$$(5)\qquad \begin{aligned} c_0&=a_0b_0 \\ c_1&=a_0b_1+a_1b_0 \\ c_2&=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n&=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2} \\ &\qquad +\cdots\cdots+a_nb_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

今試作其和數

$$C_m=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_m,$$

而將其與 A_nB_n 一乘積相較.

在乘積 A_nB_n 內,有一切乘積 $a_\mu b_\nu$,於此,同時有 $\mu\leqq n$ 及 $\nu\leqq n$,但不能有其他之項.

在 C_m 內,有一切之項 $a_\mu b_\nu$,於此,$\mu+\nu\leqq m$,其他之項亦無有.故如設 $m=2n$,則 C_m 中固含有 A_nB_n 之一切項,但此外

尚有其他者,於此,μ 或 ν 大於 n. 因一切 a_μ, b_ν 均爲正數,故

$$A_n B_n < C_{2n},$$

而如 $n' > 2n$, 則更必

$$A_n B_n < C'_n. \tag{6}$$

他方面,在 $A_n B_n$ 之項 $a_\mu b_\nu$ 中,有一切如是之項,於此,$\mu+\nu \gtreqless n$ 者,在此種項方面,斷不能 μ 或 ν 大於 n. 但此爲 C_n 之項,故

$$C_n < A_n B_n,$$

或如以 n' 代 n 時,有

$$C'_n < A'_n B'_n. \tag{7}$$

由 (6) 及 (7), 可知

$$A_n B_n < C'_n < A'_n B'_n. \tag{8}$$

但 $A_n B_n$ 與 $A'_n B'_n$ 係向同一之極限值收斂,即 AB, 故 C'_n 亦向此極限值收斂,即

級數

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots\cdots$$

爲收斂者,其和數爲

$$C = AB.$$

於此,吾人尚須說明,即差數

$$D_n = A_n B_n - C_n \tag{9}$$

爲正的乘積 $a_\mu b_\nu$ 之和,而當 n 增大時,亦向 0 收斂.

3. 今設

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$$

爲二個無條件收斂之級數,其部分和數爲 U_n 及 V_n, 又設 (4) 爲其絕對級數.吾人今作一新級數

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots$$

此級數之構造法,與由級數 (4) 以構成 c 之級數法相同,故

(10)
$$
\begin{aligned}
w_0 &= u_0 v_0 \\
w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0 \\
w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} \\
&\quad + \cdots\cdots + u_n v_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

而 $$W_m = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots\cdots + w_m.$$

差數 $$\Delta_n = U_n V_n - W_n$$

係由若干乘積 $u_\mu v_\nu$ 之和所成,而如吾人用其絕對值 $a_\mu b_\nu$ 以代之,則 Δ_n 即成爲 D_n. 按之 § 45 之 8., 知和數之絕對值不能大於絕對值之和數,故有

$$|\Delta_n| \leqq D_n,$$

而 $|\Delta_n|$ 之極限值爲 0, 因之, Δ_n 之極限值亦爲 0. 由此即可知

$$\lim W_n = \lim U_n \cdot \lim V_n,$$

是即(10)亦爲收斂者其和數爲

$$W = UV.$$

但 $$|w_n| \leqq a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots\cdots + a_n b_0 = c_n,$$

且 c 之級數爲收斂者,故 $|w_n|$ 之級數亦收斂是即級數(10)爲無條件收斂者.吾人於是得如次之定理:

倘由二個無條件收斂之級數(其和數爲 U 與 V),按照公式(10)作一新級數,則此新級數亦爲無條件收斂者,其和數爲

$$W = UV.$$

第二十章　乘方級數 二項式級數

§ 121　乘方級數之收斂

1.　今設 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 爲一無盡數列,由實常數或複常數所成,z 爲一複變數.吾人今用之作一級數

$$(\text{P})\qquad c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots\cdots,$$

并名之爲 z 之乘方級數 (Potenzreihe).

乘方級數中之最簡單者,爲無盡的幾何級數

$$1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots,$$

并可知此項乘方級數對於 z 之某項值爲收斂者,對於其他之值則爲發散者.

2.　欲一般的判定一乘方級數之收斂或發散,可應用 Cauchy 之第一種收斂範疇,且宜應用之於 (P) 之絕對級數

$$(\text{P}^*)\qquad |c_0|+|c_1|r+|c_2|r^2+|c_3|r^3+\cdots\cdots,$$

於此,$r=|z|$ 爲 z 之絕對值.因之,按 § 117 之 **8**,吾人須一論

$$(1)\qquad |c_1|r,\ \sqrt{|c_2|}\,r,\ \sqrt[3]{|c_3|}\,r,\cdots\cdots,\ \sqrt[n]{|c_n|}\,r,\cdots\cdots$$

一數列,至於級數 P* 之爲收斂或發散,則須視此數列之

最大叢聚值小於或大於 1 而定.倘爲前者之事例,則 $\mathfrak{P}^*$ 與 $\mathfrak{P}$ 同爲收斂,且 $\mathfrak{P}$ 爲無條件收斂者.倘爲後者之事例,則 $\mathfrak{P}$ 亦與 $\mathfrak{P}^*$ 同爲發散,蓋如 $\sqrt[n]{|c_n|}\,r>1$, 則 $|c_n|\,r^n>1$, 卽 $|c_nz^n|>1$, 此關係既適用於無限多之 n, 則 $\mathfrak{P}$ 自不能收斂.

今設 C 爲

$$|c_1|,\ \sqrt{|c_2|},\ \sqrt[3]{|c_3|},\ \cdots\cdots,\ \sqrt[n]{|c_n|},\ \cdots\tag{2}$$

之最大叢聚值,則 Cr 爲 (1) 之最大叢聚值,故

如 $r<\dfrac{1}{C}$, 則此級數 $\mathfrak{P}$ 收斂,如 $r>\dfrac{1}{C}$, 則卽發散.

一切 $r<\dfrac{1}{C}$ 之點,在以 0 點爲中心以 $\dfrac{1}{C}$ 爲半徑之圓內,其 $r>\dfrac{1}{C}$ 之點,則在此圓之外.此圓名爲 $\mathfrak{P}$ 之收斂圓,而得如次之定理:

對於收斂圓內之任何點,乘方級數爲無條件的收斂者,對於收斂圓外之任何點,此級數爲發散者.收斂圓之半徑爲

$$\rho=\frac{1}{C},\tag{3}$$

於此,C 爲 (2) 之最大叢聚值.

3. 在特殊狀況下,倘極限值 $\lim\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在,則按 § 117 之 **10**. (2) 亦有極限值,且係相同,故 $C=\lim\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$. 而可知倘此值存在,則

收斂圓之半徑爲

$$(4)\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

4. 對於無盡的幾何級數,不難知其收斂半徑爲1,故此級數對於單位圓內之任何點均爲收斂者,於圓外之任何點則均爲發散者.

有時亦可以$\rho=0$爲收斂半徑,如是則除$z=0$而外,此級數對於任何一z均爲發散者.試以

$$(5)\qquad 1+z+2!z^2+3!z^3+4!z^4+\cdots\cdots$$

爲例,則可知

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

故極限值

$$\lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$$

存在,而此級數除$z=0$而外,均爲發散者.

但如

$$(6)\qquad 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\cdots$$

一級數,則有

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{n+1},$$

故

$$\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\sqrt[n]{|c_n|}=0,$$

而$C=0$,因而收斂半徑爲無限大,是卽

級數(6)對於z之任何值均爲收斂者.

5. 關於級數在收斂圓之周上之情況,吾人實難一般言之.於此,須按級數之性質,乃能定其爲收斂或發散,有時亦可在若干點收斂,而在其他點則發散也.

試以幾何級數而論,則可見其在全部圓周上均係發散者,蓋在此處,一切項之絕對值均爲1也.

又如

$$z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\cdots$$

一級數,則亦以單位圓爲收斂圓,但於$z=+1$爲收斂,而於$z=-1$爲發散者.

6. 乘方級數之收斂方式.試再稍詳論之,并確定其一可注意之屬性.

乘方級數對於收斂圓内之任何點z,代表一z之函數

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots\cdots$$

如是用一乘方級數以確定之函數,吾人稱之爲解析函數(analytische Funktion).

設此級數之第n個部分和數爲

$$f_n(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n,$$

并設

(7) $$f(z)=f_n(z)+r_n(z).$$

則 $f_n(z)$ 爲 n 次之整函數,而 $r_n(z)$ 爲第 n 餘數

(8) $$r_n(z)=c_{n+1}z^{n+1}+c_{n+2}z^{n+2}+\cdots\cdots$$

又設 C 爲 (2) 之最大叢聚值,則對於固定的 $\delta>0$, 可如是選擇 n, 俾於一切 $\nu>n$, 有

(9) $$|c_\nu|<(C+\delta)^\nu.$$

今如 $\mathfrak{K}(\rho)$ 爲收斂圓, $\mathfrak{K}(\rho_o)$ 爲一同心圓,以 $\rho_o<\rho$ 爲半徑,則按 (3),

$$C\rho_o=\theta<1.$$

吾人恆可如是選擇 ρ_o 使凡在 $\mathfrak{K}(\rho)$ 內之點 z, 亦在 $\mathfrak{K}(\rho_o)$ 內.如是則 $|z|=r$ 而 δ 爲充分小時,必能 $(C+\delta)r<\theta$, 故按 (9) 對於一切 $\nu>n$, 有

$$|c_\nu z^\nu|=|c_\nu|r^\nu<(C+\delta)^\nu r^\nu<\theta^\nu.$$

由此根據 (8), 可知

$$|r_n(z)|<\theta^{n+1}+\theta^{n+2}+\theta^{n+3}+\cdots\cdots$$

或

(10) $$|r_n(z)|<\frac{\theta^{n+1}}{1-\theta},$$

故對於每一 $\nu>n$, 必更

$$|r_\nu(z)|<\frac{\theta^{n+1}}{1-\theta}$$

此處之右端係與 z 有關故此不等式對於 $\mathfrak{K}(\rho_0)$ 內之任何點均可適用.設 ε 爲任何已知正數,則 n 充分大時,恆可使 $\frac{\theta^{n+1}}{1-\theta}<\varepsilon$, 如是則

$$|r_\nu(z)|<\varepsilon$$

對於任何一大於 n 之 ν 及任何一 $\mathfrak{K}(\rho_0)$ 內之 z 均適用.

廣之今設

(11) $$a_0(z)+a_1(z)+a_2(z)+\cdots\cdots$$

爲一級數,其項爲 z 之函數.此級數對於 $\mathfrak{A}$ 區域內每一 z 之值均爲收斂者,并設

$$r_n(z)=a_{n+1}(z)+a_{n+2}(z)+\cdots\cdots$$

爲第 n 餘數.倘對於任何一正數 ε 恆可決定一 n, 俾於一切 $\nu>n$ 及一切 $\mathfrak{A}$ 內之 z, 恆有

(12) $$|r_\nu(z)|<\varepsilon,$$

則吾人稱(11)爲在 $\mathfrak{A}$ 內均勻收斂者 (gleichmässig konvergent).

按此,可得如次之定理:

乘方級數在其收斂圓內爲均勻收斂者

§122　乘方級數之連續性

1　對於均勻收斂之級數,有如次之重要定理[1]:

設 $a_0(z), a_1(z), a_2(z)$ ······ 為 z 平面內 $\mathfrak{A}$ 中連續函數所成之數列,用以構成之級數

$$(1)\qquad f(z)=a_0(z)+a_1(z)+a_2(z)+\cdots\cdots$$

在 $\mathfrak{A}$ 內為均勻收斂者.如是則 $f(z)$ 亦為 $\mathfrak{A}$ 內 z 之連續函數.

證:　每一部分和數

$$f_n(z)=a_0(z)+a_1(z)+\cdots\cdots+a_n(z)$$

為有限多的連續函數之和,故亦為連續者,是卽 $\mathfrak{A}$ 內一

註: (1) 函數論上均勻收斂之概念,實亦基於此定理,至於此概念之應用,則實自 G. G. Stoke 及 Ph. L. Seidel 始. Stoke 幷會舉出不均勻收斂級數之例,如

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+3x}\right)+\cdots\cdots$$

是,此級數之第 n 部分和數為 $s_n(x)=1-\frac{1}{1+nx}$, 故此級數於一切 $x\geqq 0$ 均為收斂者,其和數為:

$$x>0\ \text{時}\ s(x)=1,$$

$$x=0\ \text{時}\ s(x)=0.$$

因之,於 $x\geqq 0$ 時, $s(x)$ 為不連續之函數,惟一切級數　則仍為連續者. 於 $x>0$ 時,第 n 餘數 $r_n(x)=\frac{1}{1+nx}$, 故可見於已知之正數 $\varepsilon<1$, 不能有 n 之值,使一切 $x>0$ 者恆為 $r_n(x)<\varepsilon$, 蓋於任何 $x<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ 必 $r_n(x)>\varepsilon$ 也. 因之,級數於每一間段 $0<x\leqq a$ 內為不均勻收斂者.

變數 ζ 經過一收斂數列而以 z 爲極限值時,$f_n(\zeta)$ 亦經過一收斂數列而有極限值 $f_n(z)$,用符號表之,有[1]

$$\lim_{\zeta\to z} f_n(\zeta)=f_n(z).$$

故如有已知之正數 ε,則不難對於 z 附近之一切值,使

$$|f_n(z)-f_n(\zeta)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

又設

$$f(z)=f_n(z)+r_n(z), \tag{3}$$

則因 (1) 爲均勻收斂者,故於充分大之 n,倘 z 與 ζ 均爲 $\mathfrak{A}$ 內之點,有

$$|r_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |r_n(\zeta)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

但

$$\begin{aligned}|f(z)-f(\zeta)| &= |f_n(z)-f_n(\zeta)+r_n(z)-r_n(\zeta)|\\ &\leqq |f_n(z)-f_n(\zeta)|+|r_n(z)|\\ &\quad+|r_n(\zeta)|,\end{aligned}$$

註: (1) 參閱 § 92, 1. 惟彼處所論者係實函數,而如 $\zeta=\xi+i\eta$,則 $f_n(\zeta)=\varphi_n(\xi,\eta)+\psi_n(\xi,\eta)$,其中 φ_n 及 ψ_n 爲無盡多的實連續函數之和,係連續者,故

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \eta\to y}} \varphi_n(\xi,\eta)=\varphi_n(x,y),$$

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \eta\to y}} \psi_n(\xi,\eta)=\psi_n(x,y),$$

而按 § 119 之 1. 卽有以上之極限值.

故按(2)及(4),可知對於任何一正數 ε,可求得 z 之一附近.於此,凡屬此附近內之點 ζ 必

$$|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon.$$

是即於 $\zeta\to z$ 時 $f(\zeta)$ 向 $f(z)$ 收斂:

$$\lim_{\zeta\to z}\ (\zeta)=f(z).$$

此亦即函數於 z 處爲連續者.

如是,吾人已將定理1.證明,并可知:

用乘方級數所表出之函數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$$

於其收斂圓內之任何點爲連續者[1].

2. 倘 ζ 由收斂圓之內轉向圓上之點,則此定理對於 $f(\zeta)$ 之狀況,即無所說明.關於此 Abel 氏[2]亦有一定理,惟吾人祇能就其特種形式證明之,其應用亦在後:

設乘方級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots$$

之收斂圓爲單位圓,於 $z=1$ 時向 A 收斂

(5) $$A=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

註: (1) 此爲 Abel 氏之定理.

(2) 此定理亦見於 Abel 氏之二項式級數論文內.或以爲此定理係自明者,則不難由此以知其不然,蓋乘方級數於 $z<1$ 時爲無條件收斂者,但級數(5)則在某種狀況下僅爲有條件收斂者.因之,吾人不能遽即謂 $z=1$ 時乘方級數之值與(5)之值在此種秩序下爲一致者.

則當 z 由較小之實值轉向 1 時,$f(z)$ 卽轉向 A:

$$\lim_{z\to 1} f(z) = A$$

欲證明此定理,吾人可將乘方級數之係數仿 §117 之法,用 (5) 之部分和數以表之.如是,有

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1 - A_0,\ a_2 = A_2 - A_1,$$

$$\cdots\cdots\quad \cdots\cdots\cdots,\ a_n = A_n - A_{n-1},\cdots\cdots$$

故
$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n$$

$$= A_0 + (A_1 - A_0)z + (A_2 - A_1)z^2 + \cdots\cdots$$

$$+ (A_n - A_{n-1})z^n$$

$$= (1-z)(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots$$

$$+ A_{n-1}z^{n-1}) + A_n z^n.$$

今設 $0<z<1$,則於 $n\to\infty$ 時,z^n 之極限值爲 0,而因 (5) 爲收斂者,故 A_n 之值仍爲有限者,故當 $z<1$ 時,

$$f(z) = (1-z)(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots),$$

如是則 $f(z)$ 之級數卽轉成爲一其他者,於 $0<z<1$ 亦收斂.

今設 n 爲有限之數,幷設

$$F_n(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n$$

$$R_n(z) = A_{n+1}z^{n+1} + A_{n+2}z^{n+2} + \cdots\cdots,$$

則

(6)
$$f(z) = (1-z)F_n(z) + (1-z)R_n;$$

此處 $R_n(z)$ 之係數 $A_{n+1}, A_{n+2},\cdots\cdots$ 於 n 爲充分大時,與 A 之

差可任何小故於已知之正數ε自n以下必有

$$|A_{n+\nu}-A|<\varepsilon \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

今如作

$$R_n(z)-A(z^{n+1}+z^{n+2}+\cdots\cdots)$$

$$=(A_{n+1}-A)z^{n+1}+(A_{n+2}-A)z^{n+2}+\cdots\cdots$$

則此差之絕對值

(7) $$\left|R_n(z)-\frac{Az^{n+1}}{1-z}\right|<\frac{\varepsilon z^{n+1}}{1-z}$$

按之(6),有

$$f(z)-A=(1-z)F_n(z)-A(1-z^{n+1})$$

$$+(1-z)R_n(z)-Az^{n+1},$$

故按(7),

$$|f(z)-A|<|(1-z)F_n(z)-A(1-z^{n+1})|$$

$$+\varepsilon z^{n+1}.$$

今設η為任何之已知數,則於n充分大時,

$$\varepsilon z^{n+1}<\frac{1}{2}\eta$$

倘能如此,則當z向1接近時,可使

$$|(1-z)F_n(z)-A(1-z^{n+1})|<\frac{1}{2}\eta,$$

故當z充分接近1時,有

$$|f(z)-A|<\eta,$$

是即 $$\lim_{z\to 1}f(z)=A.$$

3 往往乘方級數之係數亦爲一變數 t 之函數如是則凡級數收斂之處其所表者卽爲 z 及 t 之函數:

$$f(z,t)=c_0(t)+c_1(t)z+c_2(t)z^2+\cdots\cdots, \tag{8}$$

但其收斂區域,卽收斂圓之半徑,則就一般而論,自必每次與 t 有關.今設 t 爲一實變數,就一間段論之.幷名此間段爲 $\mathfrak{T}$,幷設在 $\mathfrak{T}$ 內之每一值級數視爲 z 之函數時係收斂者,且收斂半徑 $\rho(t)$ 每次恆超過一與 t 無關之正數 ρ_0.如是則當 t 經過 $\mathfrak{T}$ 時,對於 $\rho(t)$ 有一下界 $\geqq\rho_0$.而此則卽爲一圓之半徑,級數 (8) 視爲 z 之函數時,對於間段內 t 之一切值均爲收斂者.吾人今稱之爲屬於間段 $\mathfrak{T}$ 之收斂圓,以 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{T}}$ 表之.設 $\dfrac{1}{\Gamma}$ 爲其半徑,則 Γ 有一有限之值,且爲 $\mathfrak{T}$ 內一切數之上界

$$C(t)=\limsup\sqrt[n]{|c_n(t)|}.$$

4 今試證明以下之定理:

設乘方級數之係數爲一間段 $\mathfrak{T}$ 內實變數 t 之連續函數,則在所屬之收斂圓內,和數 $f(z,t)$ 亦爲 t 之連續函數.

蓋如按 (3),寫作

$$f(z,t)=f_n(z,t)+r_n(z,t),$$

則 $f_n(z,t)$ 爲有限多的 t 之連續函數之和,故本身亦爲 t 之連續函數.吾人可如是選擇 n,使凡 $\nu>n$ 時,δ 爲充分小時,有

$$|c_\nu(t)|<(\Gamma+\delta)^\nu.$$

於此 Γ 對於一切 t, 其值均同,對於任何 z, 祇須在 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{T}}$ 內者,必 $\Gamma r=\vartheta<1$,(ν 爲 z 之絕對值).故如 § 121 之 (10), 有

$$|r_n(z,t)|<\frac{\vartheta^{n+1}}{1-\vartheta},$$

於此此式之右端與定值 t 並無關係者.對於任意所取之正數 ε, 吾人今可如是選擇 n, 使凡 $\nu>n$ 時,對於 $\mathfrak{T}$ 內之每一 t, 有

$$|r_\nu(z,t)|<\varepsilon.$$

觀此,可知級數 (8) 不僅爲 z 之函數時係均勻收斂者,且在 $\mathfrak{T}$ 內視爲 t 之函數時,亦均勻收斂,故按定理1.,即可得上述之定理.

因之, $\mathfrak{T}$ 內之變數 τ, 倘經過一收斂數列,其極限值爲 t, 則

$$\lim_{\tau\to t} f(z,\tau)=f(z,t).$$

此式之意義,與

$$\lim_{\tau\to t}\sum_\nu c_\nu(\tau)z^\nu=\sum_\nu \lim_{\tau\to t} c_\nu(\tau)z^\nu$$

相同.故可知極限及和數之符號可以顛倒,因之,欲求 $\tau\to t$ 時級數之極限值,不妨逐項求其極限值也.

§ 123. 不定係數法　偶函數與奇函數

1　設有二乘方級數,在含有0點之區域內均爲收斂

者,且在此區域內之一切點,其值均相同,即對於區域內之每一z有

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots$$

則此二級數係相同者,亦即其等高方數之係數必均相等:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots\cdots$$

蓋如設$z=0$,則因連續關係,必$a_0=b_0$;因之,亦必

$$a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots=b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots$$

此式既適用於全部收斂區域,對於不等於0的z之值亦必適用,故對於該種z,必可有

$$a_1+a_2z+\cdots\cdots=b_1+b_2z+\cdots\cdots$$

而因連續之故,此式對於$z=0$亦必適用;因之,復可知$a_1=b_1$,等等.

所謂不定係數法,實即以此定理爲其根據.自Descartes及Leibniz等以來,十八世紀之數學家,尤喜應用此法,將已知之函數展成爲級數.試舉一簡單之例以爲說明.

今如欲將$\dfrac{1}{1-z}$一函數展爲級數,則可設

$$\frac{1}{1-z}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$$

倘此級數於某一區域內爲收斂者,則可用$(1-z)$乘之,其積自亦爲收斂者(見§12),3.).於是有

$$1=a_0+(a_1-a_0)z+(a_2-a_1)z^2+\cdots\cdots,$$

且對於收斂區域內之任何值,此式必均可用.此式之左端,吾人亦可視之爲一乘方級數,於此,除首項外,其餘一切係數均爲0.按以上之定理,即有

$$a_0=1,\ a_1-a_0=0,\ a_2-a_1=0,$$

$$a_3-a_2=0,\cdots\cdots,$$

故

$$a_0=a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=1,$$

而所求之展開式爲

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots$$

嚴格應用此方法時,吾人恆須證明所得之級數爲收斂者.以此處之例而論,倘z爲單位圓內之值,則恆如此.

2　以上之定理內含有如次之特例在內:

倘有一乘方級數,在其收斂區域內,其值恆爲0,則此級數必全等的爲0,亦即其一切係數必均爲0.

3　倘函數內變數之值易以相反者而其值不變,即

$$f(-x)=f(x),$$

則此函數謂之偶函數.但如函數內變數之值易以相反者而其值亦變爲相反者:

$$f(-x)=-f(x),$$

則此函數謂之奇函數.

於此有一定理如下:

倘一偶奇函數在含有 0 點之區域內,可用一乘方級數以表之,則此級數僅含有 x 之偶奇方數.

蓋如 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$,則對於某一值 x,其相當之負值 $-x$ 亦屬於此級數之收斂範圍內,故

$$f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-\cdots\cdots$$

今設 $f(x)$ 爲一偶函數,則經相減後,可知在全部收斂區域內,必

$$a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots\cdots=0.$$

然此則祇有於一切係數 $a_1, a_3, a_5,\cdots\cdots$ 均爲 0 時方可能.但如 $f(x)$ 爲一奇函數,則經相加後,亦可知在全部收斂區域內,必

$$a_0+a_2v^2+a_4x^4+\cdots\cdots=0.$$

故亦唯有

$$a_0=a_2=a_4=\cdots\cdots=0.$$

§ 124　二項式級數

1.　前於 § 55 中已對於整正指數推得二項式定理.按此,倘 n 爲一自然數,則

(1)
$$(1+z)^n=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots\cdots,$$

其中之二項係數爲

$$\binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

等等.廣之,

(2) $$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k}.$$

在整正的 n 方面,(1) 至 $\binom{n}{n}z^n=z^n$ 爲止,其下之二項係數均爲0.

今如 n 非爲整正數,則如 § 53 之 7. 中所已提及者,吾人可對於 $k=1, 2, 3, 4,\cdots\cdots$ 以計算此項係數,其中無有爲0者,故可得一無限之數列,而用此項係數所作之級數 (1), 卽成爲一無盡級數矣.

例如

$$n=-1,\ \binom{n}{1}=-1,\ \binom{n}{2}=+1,\quad \binom{n}{3}=-1,\cdots\cdots$$

$$n=-2,\ \binom{n}{1}=-2,\ \binom{n}{2}=+3,\quad \binom{n}{3}=-4,\cdots\cdots$$

$$n=\frac{1}{2},\quad \binom{n}{1}=\frac{1}{2},\quad \binom{n}{2}=-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4},\ \binom{n}{3}=+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6},\cdots\cdots$$

$$n=-\frac{1}{2},\ \binom{n}{1}=-\frac{1}{2},\ \binom{n}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\quad \binom{n}{3}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},\cdots\cdots$$

於此,有二問題可提出:

1 對於 z 之何種值,此級數爲收斂者?

2. 此級數所表者爲 z 之何種函數(倘此級數爲收斂者)?

2 以上之第一問題,不難直接得其答覆.蓋相繼的二係數之比爲

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{n-k}{k+1}=\frac{n-1}{k+1}-1,$$

故有極限値 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=1$, 而按 § 121 之 **3**., 知

二項式級數 (1) 於單位圓內之一切點爲無條件收斂者,於圓外則恆爲發散者.

從可知級數之收斂半徑與 n 之値幷不相關.

3. 欲解答第二個問題,吾人可應用二項係數之相加定理:

$$(3)\qquad \binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\cdots\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

前於 § 55 之 **4**. 中,吾人係假定 m, n 爲整數而推得此式者,但亦不難用完全歸納之法,以普遍的證明之.對於任何實 m 及 n 不難知

$$\binom{m+n}{0}=\binom{m}{0}\binom{n}{0},\quad \binom{m+1}{1}=\binom{m}{0}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{0},$$

故 (3) 對於 $k=0$ 及 $k=1$ 爲適用者.今假定其對於某一 k 已證明,而欲證明其對於 $k+1$ 於是亦必適用.於此,可應用公式

$$(4)\qquad (n-k)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n}{k+1},$$

而此則不難直卽由(2)得之.

今試用$m+n-k$乘公式(3),幷按以下之方式,將此因子改變其形式:

$$
\begin{aligned}
m+n-k &= (n-k)+m \\
&= (n-k+1)+(m-1) \\
&= (n-k+2)+(m-2) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

如是則可得

$$
\begin{aligned}
(m+n-k)\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}(n-k)\binom{n}{k} \\
+\binom{m}{1}(n-k+1)\binom{n}{k-1} \\
+\binom{m}{2}(n-k+2)\binom{n}{k-2}+\cdots\cdots \\
+m\binom{m}{0}\binom{n}{k}+(m-1)\binom{m}{1}\binom{n}{k-1} \\
+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

或按(4):

$$(k+1)\binom{m+n}{k+1}=(k+1)\binom{m}{0}\binom{n}{k+1}+k\binom{m}{1}\binom{n}{k}+\cdots\cdots$$

倘將此處上下相當之項加之,則可將因子$(k+1)$剔去,而有

$$\binom{m+n}{k+1}=\binom{m}{0}\binom{n}{k+1}+\binom{m}{1}\binom{n}{k}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-1}+\cdots\cdots$$

此在事實上已卽爲(3),祇將 k 易爲 $k+1$ 而已.

4. 二項式級數(1)之和數,在假定級數爲收斂,卽 $|z|<1$ 之條件下,以 $\varphi(n)$ 表之,而此則爲 n 之連續函數(§ 122, **4**.). 吾人今將如是之二級數

$$\varphi(m)=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\cdots\cdots$$

(5)

$$\varphi(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots\cdots$$

相乘(其法見 § 121 之 **3**.),則得乘積級數之項如下:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{0}$$

$$\left[\binom{m}{0}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{0}\right]z=\binom{m+n}{1}z$$

$$\left[\binom{m}{0}\binom{n}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{0}\right]z^2=\binom{m+n}{2}z^2,$$

....

故可知:

對於 $|z|<1$ 及 m, n 之任何值有

(6) $$\varphi(m)\varphi(n)=\varphi(m+n).$$

此種變數值及函數值間之關係,名爲**函數方程**(Funktionalgleichung). 今須求得一連續函數,而適合此函數方程者.

5 方程 (6) 所表出者爲乘方之特性,而在事實上吾人亦不難證明函數 $\varphi(n)$ 實須視爲一 n 次之方數.

今於 (6) 內繼續設 $m=n, 2n, 3n, \cdots\cdots$, 則得

$$\varphi(2n)=\varphi(n)\varphi(n)=\varphi(n)^2,$$

$$\varphi(3n)=\varphi(2n)\varphi(n)=\varphi(n)^3,$$

$$\varphi(4n)=\varphi(3n)\varphi(n)=\varphi(n)^4,$$

等等;廣之,有

(7) $$\varphi(kn)=\varphi(n)^k,$$

於此 k 爲整正數

因之,倘 $n=1$, 則按 (5) 有 $\varphi(1)=1+z$, 故得

$$\varphi(k)=\varphi(1)^k=(1+z)^k.$$

於是,整正指數之二項式定理,吾人重再爲之證明[1].

6 今再於 (6) 內設 $m=-n$, 幷注意按 (5) 有 $\varphi(0)=1$, 則得

(8) $$\varphi(-n)=\frac{1}{\varphi(n)}.$$

故若取整負指數,則

$$\varphi(-k)=\frac{1}{(1+z)^k}=(1+z)^{-k},$$

是卽二項式定理於整負指數亦仍可用,但須 $|z|<1$. 例

註: (1) 此處自可不再加以 $|z|<1$ 之限制,蓋 $\varphi(k)$ 所表者爲一有限之級數也.

如於 $-1, -2, -3$ 三指數有

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=1-2z+3z^2-4z^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(1+z)^3}=1-3z+6z^2-10z^3+\cdots\cdots$$

7. 今設 p 爲一正或負之整數，q 爲正整數於(7)內設 $k=q,\ n=\frac{p}{q}$，卽 $kn=p$，則有

$$\varphi(p)=\varphi\left(\frac{p}{q}\right)^q=(1+z)^p,$$

故
$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right)=(1+z)^{\frac{p}{q}},$$

從可知對於一切有理的 n，有

(9)
$$\varphi(n)=(1+z)^n,$$

而因 $\varphi(n)$ 爲連續者，故按 § 92 之 **2.**，此方程於每一實指數 n 均適用於是吾人得普遍的二項式定理，在全部解析學上實有根本重要之意義：

對於任何正或負的實數 n，及對於單位圓內之每一 z，有

$$(1+z)^n=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots\cdots$$

於此有當注意者則 $(1+z)^n$ 對於非整數之指數其值不

一而足.例如於有理指數 $n=\frac{p}{q}$, 其可有 q 個值.但因連續關係,吾人可知:

二項式級數所表的 $(1+z)^n$ 之值,於 $z\to 0$ 時,亦連續的轉成爲1

如是,$(1+z)^n$ 於 $|z|<1$ 及任何一實 n, 吾人已確定其爲 z 之一值的函數.

關於二項式級數之理論,此處不能詳及,讀者如欲作深入的研究,可閱 N. H Abel 氏之論文 Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$, 其中幷論及複數之指數.而此級數在收斂圓上之狀況,卽 $|z|=1$ 時之狀況,其中尤深有所論列.

8　今試用二項式級數以計算平方根.於 $n=\frac{1}{2}$ 時,有

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{1}{2}z-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^2+\cdots \tag{10}$$

如欲計算 $\sqrt{2}$ 之值.吾人自不能簡單設 $z=1$, 蓋此級數之收斂,僅於 $|z|<1$ 之條件下已證明也[1].故在應用時每須先求得平方數 q^2. 將其與 2 相乘後,得一其他平方數之近似值,如 $2q^2=p^2+1$ 或 $2q^2=p^2-1$. 此卽是,吾人先設 p 及 q

---

註: (1) 在此事例方面,級數於 $z=1$ 自亦爲收斂者,此不難由 Leibniz 氏關於更替級數之定理以知之(§117, 2.), 但此種收斂甚弱,故在實際上此級數殊難應用.

爲不定方程$p^2-2q^2=-1$或$p^2-2q^2=+1$之解(參觀§73).如是則有

$$q\sqrt{2}=\sqrt{p^2+1}=p\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$$

或

$$q\sqrt{2}=p\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}.$$

再設$z=\frac{1}{p^2}$或$z=-\frac{1}{p^2}$,然後用級數(10)以計算右端之平方根.以後用$\frac{p}{q}$以乘之,即可得$\sqrt{2}$.

例如$q=5$則$p=7$, $z=\frac{1}{49}$.而$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$.爲便於計算級數,其每項可用一字母表之,即

$$\sqrt{1+z}=1+A_1-A_2+A_3-A_4+\cdots\cdots$$

於是即有

$$A_1=\frac{z}{2}\quad=\frac{1}{98}=0.010204081633$$

$$A_2=\frac{z}{4}A_1=\frac{A_1}{196}=0.000052061641$$

$$A_3=\frac{z}{2}A_2=\frac{A_2}{98}=\qquad 531242$$

$$A_4=\frac{5z}{8}A_3=\frac{10A_3}{784}=\qquad 6776$$

$$A_5=\frac{7z}{10}A_4=\frac{A_4}{70}=\qquad 97$$

$$A_6=\frac{3z}{4}A_5=\frac{A_5}{65}=\qquad 1$$

$$1+A_1+A_3+A_5=1.010204612972$$

$$A_2+A_4+A_6=0.000052068418 \text{ (相減)}$$

$$1.010152544554=\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$

因之,吾人得 $\sqrt{2}=1.414213562376$, 此值僅末後一位超過眞值三單位.

吾人可用相同之計算於 $\sqrt{3}$, 蓋 $16\cdot 3=49-1$, 故 $\sqrt{3}=\frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$, 而右端之平方根爲

$$\sqrt{1-z}=1-A_1-A_2-A_3-A_4\cdots\cdots,$$

其 A_1, A_2, ……之值與上所得者同,故得

$$\begin{array}{r} 0.010204612972 \\ +0.000052068418 \\ \hline 0.010256681390 \end{array}$$

$$0.989743318610=\sqrt{1-\frac{1}{49}}$$

而 $\sqrt{3}=1.732050807567$, 所差亦不過末位之二單位而已.

第二十一章　指數函數及三角函數

§ 125. 數目 e

1. 前於第六章內已曾指出對數之概念,原由比較算術級數與幾何級數而得.而 Bürg 及 Neper 之最初的對數表,其根本思想實在將幾何級數儘可能的化之使密.於是須選取

(1)
$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

形式之數目,以為對數之底.此中之 n,為一極大之數.且 n 愈大則幾何級數中之數目,亦愈為密.因之,吾人乃不能不就 n 之增大,對於 e_n 作一探討.於此,不妨先假定 n 為一整數,將 (1) 按二項式展開之:

$$e_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

或

(2)
$$e_n=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

由此可知一切數目 $e_n>$ ，蓋一切項均爲正者也他方面,吾人倘用較大之數 1 以代 $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \cdots, 1-\frac{n-1}{n}$, 則亦可知

$$(3) \qquad e_n< \ +\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}.$$

但 $2!=2, 3!>2^2, 4!>2^3, \cdots\cdots, n!>2^{n-1}$, 故必

$$e_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

從可知一切數目 $e_n<3$, 故必構成一有界數列,而有一上界 (§ 25). 此界爲純粹數學上最重要的常數之一,爲吾人所欲確定者,平常恆用字母 e 以表之

2. 吾人今再證明,數目 e_n 隨 n 而增大同時須再注意及 (2) 之右端之被加數,均爲正者,故如略去一部分之項,則該式必因之而減小故設 $m<n$, 則

$$(4) \qquad e_n>2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!},$$

又 $$1-\frac{1}{n}>1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{2}{n}>1-\frac{2}{m}, \cdots\cdots,$$

故必

$$e_n > 2+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}$$

如 (2) 所示.右端等於 e_m. 故可知

$$e_n > e_m \qquad (n>m)$$

因之,數目 e_n 構成一單調向上數列.而因其爲有界者,故必收斂,且以上界爲其極限值.此即是 $\lim e_n = e$, 或

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3　吾人可於 (4) 內對於任何已知之 m, 選擇充分大之 n, 使因子 $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \cdots\cdots, 1-\frac{m-1}{n}$ 隨意與單位相接近,而因 $e>e_n$, 故按 (3), 對於任何已知之 m, 有

$$e > 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{m!} > e_m.$$

因 $e=\lim e_m$, 故 e 亦爲 $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}$ 之極限值,而可知

數目 e 爲無盡級數

(6) $$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$

之和.

此級數之收斂,於是已經證明.按之 Cauchy 氏之第二種範疇,亦可知其爲收斂者,蓋

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

故 $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$

4. 計算 e 時倘將級數和至 $\frac{1}{m!}$ 爲止,而欲知其差誤之大小,則可設

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}+\Delta_m.$$

如是則 Δ_m 爲餘級數

$$\Delta_m=\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\frac{1}{(m+3)!}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots\right).$$

倘於分母內將因子 $m+2, m+3,\cdots\cdots$ 均易爲 $m+1$, 則

$$\Delta_m<\frac{1}{m!}\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^3}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{m!}\frac{1}{(m+1)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)}$$

或

(7) $$\Delta_m<\frac{1}{m\cdot m!}.$$

因之,可得一定理如下:

倘吾人於 e 之級數(6)僅取至 $\frac{1}{m!}$ 爲止,則所發生之差誤小於末項之 m 分之一.

例如吾人取至$\frac{1}{10!}$,則因$10!=3628800$,故其差誤小於$3\cdot10^{-8}$.

計算級數(6)時,其事亦不難,蓋如欲得$\frac{1}{m!}$一項,則祇須將以前之項用m除之即可.倘取三十二位小數,則得

$$e=2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66.$$

5. 今可不再假定$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$中之$n$為整數,證明以下之定理:

數目

$$e_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

中之ν經過一無限增加之實數列時,有一極限值,此值等於e.

蓋每一數目ν,在相繼的二個整數之間:

$$n\leqq\nu<n+1.$$

如是則

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^n\leqq\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

$$\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

故

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

$$<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

或
$$\frac{e_{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<e_\nu<e_n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

因 n 與 ν 同增加至無限,故

$$\lim e_\nu=\lim e_n=e.$$

6. 吾人尙可得定理5推廣之,卽 ν 經過一負數之列而向 $-\infty$ 時,e_ν 之極限值亦仍爲 e. 蓋如 $\nu=-\mu$, μ 爲正數,則

$$e_{-\mu}=\left(1+\frac{1}{-\mu}\right)^{-\mu},$$

故
$$\frac{1}{e_{-\mu}}=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-1}=\frac{1-\frac{1}{\mu}}{\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}}$$

而
$$e_{-\mu}=\frac{e_{\mu-1}}{1-\frac{1}{\mu}}$$

以及
$$\lim_{\mu\to\infty}e_{-\mu}=\lim e_{\mu-1}=e.$$

§126　指數函數

1. 設 z 爲任何一實數,但非爲0. 試於§125之**5**內設 $\nu=\frac{\mu}{z}$,則當 ν 爲無限時,μ 亦成爲無限,而有

$$\lim_{\mu\to\infty}\left(1+\frac{z}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{z}}=e.$$

此處不問 z 之值如何,但自某一 μ 以下,一切 $\left(1+\frac{z}{\mu}\right)$ 自

均爲正數.如是,吾人可按§40之**9**兩端均求其方數,至z方爲止:

(1) $$\lim_{\mu\to\infty}\left(1+\frac{z}{\mu}\right)^{\mu}=e^{z}.$$

此式於$z=0$時亦仍可用,故對於z之一切實值均適用:於此,μ可經過任何一無限增加之實數數列.

倘將z視爲變數,則e^{z}爲z之函數,吾人稱之爲指數函數.

2. 此函數可用一無盡級數表之.倘n爲整正數,有

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}=1+z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}$$

今將此式分成爲二部分Z_1+Z_2,其中$m<n$:

$$Z_1=1+z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{z^m}{m!}$$

$$Z_2=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}$$

設r爲z之絕對值,則因一切因子$\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$,$\cdots\cdots$均小於1,故

$$|Z_2|<\frac{r^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{r^{m+2}}{(m+2)!}+\cdots\cdots+\frac{r^n}{n!}.$$

因之,倘設

$$(2)\qquad e_n(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n!}$$

并用無限級數

$$(3)\qquad e(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

(按§121之**4**,此級數於 z 之任何值均爲收斂者),則

$$(4)\qquad |Z_2|<e_n(r)-e_m(r)<e(r)-e_m(r).$$

今設 m 爲定數,則當 n 爲充分大時,Z_1 內之因子 $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ……, $\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$ 可與 1 任意接近,故 n 充分大時,$|Z_1-e_m(z)|$ 可任意小.

但 $$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-e(z)=[Z_1-e_m(z)]-[e(z)-e_m(z)]+Z_2,$$

故按(4)

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-e(z)\right|<|Z_1-e_m(z)|+|e(z)-e_m(z)|$$
$$+|e(r)-e_m(r)|.$$

今先使 m 如是大,使

$$|e(z)-e_m(z)|\text{ 及 }|e(r)-e_m(r)|$$

均小於一任何正數 $\frac{\varepsilon}{3}$,此則因(3)爲收斂,故必可能者.再

則使n如是大,俾

$$|Z_1-e_m(z)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

如是則

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-e(z)\right|<\varepsilon$$

故如n充分大,則此差可小於任何小之數,而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e(z).$$

按(1),吾人卽可得指數函數之級數展開法如下:

(5)
$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

從可知此級數對於z之一切實數值,均以e^z爲其和數.此不難用級數本身以證明之.倘仍用$e(z)$以表此級數,則可知

(6)
$$e(0)=1,\quad e(1)=e.$$

今用x與y二值作其級數,按§120, **3**.之規則將$e(x)\cdot e(y)$乘之.應用該處之符號時,於$n=1, 2, 3, \cdots$有

$$u_n=\frac{x^n}{n!},\quad v_n=\frac{y^n}{n!},\quad u_0=v_0=1,$$

故
$$w_n=\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{y}{1!}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}$$

或因 $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$, 故

$$w_n=\frac{1}{n!}\left[x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+y^n\right]$$

$$=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

再設 $w_0=1$, 則卽不難知 w_n 之級數卽爲 $e(x+y)$, 故

$$e(x)e(y)=e(x+y). \tag{7}$$

此爲乘方之函數方程.吾人前已於 § 124 中論及之,而經相當之考慮後,可知[1]計及(6)中之條件時,對於任何實數 x, 必

$$e(x)=e^x.$$

3. 試再注意及此點.卽 $e(z)$ 於任何複數 z 亦爲收斂者,則吾人幷可用之以確定複指數的 e 之方數.吾人可云:

以複數 z 爲指數的 e^z, 係指一解析函數:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

(7) 中所表出的方數之根本屬性,於此亦仍適用.

按 § 122, 可知

指數函數 e^z 在全部數目平面內爲 z 之連續函數.

4. 今於指數級數內以 $-z$ 代 z, 則有

註: (1) 此處之問題,亦如 § 124 中,在求函數方程之連續的解.

$$(8)\qquad e^{-z}=\frac{1}{e^z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\cdots$$

此級數對於z之任何值亦均爲收斂者,故e^{-z}對於有限之值z,不致成爲無限,因而

指數函數對於任何有限值不能爲0

倘z經過一實數所成之無限的向下數列,則e^z向0收斂,可寫作

$$\lim_{z\to-\infty} e^z=0,$$

或亦可云:

$z=-\infty$時e^z將成爲0.

5. 倘實變數x經過一切實值,由0至於∞,則指數函數恆爲增加者,由1增至於∞(此不難直接由級數以知之).反之,如$x=-x'$經過一切負值,自0至於$-\infty$(卽x'自0至於$+\infty$),則$e^x=e^{-x'}=\frac{1}{e^{x'}}$恆減小,自1減至於0.因之,

倘變數經過$-\infty$至$+\infty$之一切值,則指數函數恆增加,由0增至於∞

函數$y=e^x$之全部經過,不難用圖表法以得其大體觀念.吾人可取儘量多的x之值爲横坐標,作其相當之縱坐標,如是所得之點,構成一連續的曲線,由y軸之點1開始,在正x之一面,恆與x軸相離,而在負x之一面,則恆與x軸相接近,但在有限之處,亦不能與之相接觸也.

§127. 函數 sin x 及 cos x.

1. 今於指數函數內設 $z=ix$, 於此, x 爲實變數, 并按 §46 之 **1.** 內所定 i 之乘方之値, 則得

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\cdots\cdots$$

此級數既爲無條件收斂者, 故不妨將其項之次序易之. 於級數之值自不致發生影響. 如是, 吾人可用下列之級數確定二新函數, 此二級數於每一 x 均爲無條件收斂者:

(1)
$$c(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$
$$s(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots,$$

於是有

(2)
$$e^{ix}=c(x)+is(x).$$

2. 對於 $c(x)$ 及 $s(x)$ 二函數. 吾人不難直接確定其諸屬性如下:

(I)
$$c(0)=1;\quad s(0)=0.$$

(II)
$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=1.$$

(III)
$$c(-x)=c(x);\quad s(-x)=-s(x),$$

故可知 $c(x)$ 爲一偶函數, $s(x)$ 爲一奇函數.

此外則乘積方程

$$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$$

實與

$$c(x+y)+is(x+y)=[c(x)+is(x)][c(y)+is(y)]$$

同其意義故將實數部分與虛數部分相分開後,即得

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} c(x+y)&=c(x)c(y)-s(x)s(y) \\ s(x+y)&=s(x)c(y)+c(x)s(y). \end{aligned}$$

今於以上之第一式內設 $y=-x$, 則按 (I) 與 (III):

$$\text{(3)}\qquad c(x)^2+s(x)^2=1.$$

3. 觀此不難見此項公式與三角函數 $\cos x$ 及 $\sin x$ 之式完全相同.此處祇須將公式 (II) 一證之.其餘諸式,不難由初等三角學以知之也.

設 AB 爲一圓弧,其半徑等於 1 設角 x 吾人用弧度量之.則 AB 弧之長,即等於 x 由 B 作垂線 BE 於 CA, 并於 A 處作垂線 AD 至與 CB 相交處 D 爲止.如是則

$$\overline{BE}=\sin x,\quad \overline{AD}=\operatorname{tg} x,\quad \overline{CE}=\cos x.$$

由圖,不難見三角形 CEB 之面積小於圓分 CAB 之面積,而此則復小於三角形 CAD 之面積.於此,

$$\text{三角形 } CEB=\frac{1}{2}\sin x\cos x,$$

$$\text{圓分 } CAB=\frac{1}{2}x,$$

$$\text{三角形 } CAD=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

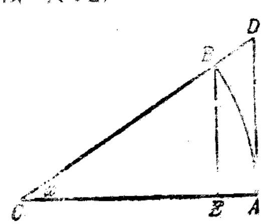

圖 23

因 $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 故得

$$\sin x\cos x<x<\frac{\sin x}{\cos x},$$

而
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}$$

當 x 充分小時，$\cos x$ 可任意與 1 相接近．故可知 x 傾向於 0 時，$\dfrac{\sin x}{x}$ 傾向於 1 而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{4}$$

4. 今證明一重要定理即 (I), (II), (III), (IV) 諸屬性可不二的將 $\cos x$ 及 $\sin x$ 二函數確定，故如有二連續函數 $c(x)$ 及 $s(x)$ 能適合此項公式，則必與 $\cos x$ 及 $\sin x$ 相同．

由公式 (I), (III), (IV) 所推得之方程 (3)，可使吾人知 $c(x)$ 及 $s(x)$ 之實值均在 -1 與 $+1$ 之間，故可設

$$c(x)=\cos\varphi, \tag{5a}$$

及

$$s(x)=\sin\varphi. \tag{5b}$$

於此 φ 爲與 x 有關之變數．故爲一函數 $\varphi(x)$，而按習慣，可視之爲一角度．因之，φ 變動 2π 之倍數時，$\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 不變．而 $c(x)$ 及 $s(x)$ 亦不變，故尙可對於 $\varphi(x)$ 之一開始値作一確定．

按 (I), $x=0$ 時, $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, 故可設

(6) $$\varphi(0)=0.$$

吾人今對於原變數之三值 x, y, 及 $(x+y)$, 設

$$\varphi(x)=\varphi_1,\quad \varphi(y)=\varphi_2,\quad \varphi(x+y)=\varphi_3,$$

則按 (IV), 有

$$c(x+y)=\cos\varphi_3=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$s(x+y)=\sin\varphi_3=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$=\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

故必 $\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2$[1], 或

函數 φ 必適合函數方程

(7) $$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y).$$

由此,吾人不難確定 φ 對於 n 個變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$, 即可得

$$\varphi(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots\cdots+\varphi(x_n).$$

故如 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=x$, 則

(8) $$\varphi(nx)=n\,\varphi(x),$$

因而於 $x=1$ 時, 有

(9) $$\varphi(n)=na,$$

註: (1) 因 (6), 此處不能加入 2π 之倍數,此亦不難由 (7) 見之,祇須於其中設 $y=0$ 即可.

於此，$$\varphi(1)=a.$$

又由 (8) 及 (9)，可知於 $x=\frac{m}{n}$ 時：

$$\varphi(m)=n\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=am,$$

故 $$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=a\frac{m}{n}.$$

從可知對於每一有理的 x，以及因連續關係，亦卽對於每一無理的 x 有[1]

$$\varphi(x)=ax.$$

於此吾人尙須決定 a，而此則可用公式 (II) 爲之.按之，有

$$\frac{s(x)}{x}=\frac{\sin\varphi}{x}=a\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

故因 (6) 及 (4)，得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=a\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=a.$$

從可知 $\varphi=x$，因而吾人根據 (I)，(II)，(III)，(IV)，可證明

$$c(x)=\cos x,\quad s(x)=\sin x.$$

5. 試再返觀 **1**，則可知

對於函數 $\cos x$ 及 $\sin x$ 有恆收斂之級數展開法[2]：

註：(1) 此結果對於負的 x 亦可用.蓋按 (6) 及 (7)，如設 $y=-x$，則

$$\varphi(-x)=-\varphi(x).$$

(2) 應用此項級數以計算某角之函數時，須注意此項角係以弧度計算者.

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots \end{aligned}$$

以及[1]

$$\text{(11)}\qquad e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

試於此中用 $-x$ 代 x, 則得

$$\text{(12)}\qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

吾人今可用級數(10)或用(11)中之歐氏方程以為 $\cos x$ 及 $\sin x$ 二函數之定義.並可知此二函數與三角學上得之於幾何研究者,實無不同之處也.

(11)及(12)中之式,吾人前於第七章之複數理論內已見之.觀此,則可知彼處之方向函數 $E(\varphi)$, 實卽為指數函數 $e^{i\varphi}$. 由此,吾人卽可得方向函數之一切屬性,而由

$$(e^{ix})^n=e^{inx},$$

可得Moivre之定理:

$$\text{(13)}\qquad (\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx.$$

且可知其對於任何實數 n 均適用.

6. 由(11)及(12),可用指數函數以表 $\cos x$ 及 $\sin x$:

$$\text{(14)}\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

註:(1) 此為Euler氏之著名公式,但在Euler以前,已有Roger Cotes氏者,曾得一定理,其內容與 $ix=\log(\cos x+i\sin x)$ 同.

用此二式或用級數(10),該二函數不僅對於實數值,且對於任何 x 之複數值亦已確定,屬性 I, II, III, IV 亦仍適用.但對於純虛數之函數,尋常有特殊之符號以表之:

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos x$$

(15)

$$\frac{1}{i}\sin(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sin x,$$

并名之爲雙曲線的餘弦及正弦,蓋其與等股雙曲線之關係,亦猶 cos 及 sin 與圓之關係也.對於此項函數,有如次之方程:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1.$$

因之,以 $\xi^2 - \eta^2 = a^2$ 爲方程的等股雙曲線上之任意點 ξ, η, 可以下式表之:

$$\xi = a\cos\varphi,\quad \eta = a\sin\varphi.$$

應用雙曲線函數時, cos 及 sin 之值,於複數變數 $z=x+iy$ 時,可寫作

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos y - i\sin x \sin y$$

(16)

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos y + i\cos x \sin y.$$

7. 用歐氏公式(11),并可得 e 與 π 間之關係.數目 π 亦可視爲如是之數,以確定之,即 $\frac{\pi}{2}$ 爲最小的正數,於此,

$\cos x=0$ 及 $\sin x=1$[1] 者 如是則按(11),有

$$e^{\frac{\pi i}{2}}=i. \tag{17}$$

由此,復可知

$$e^{\pi i}=-1,\ e^{2\pi i}=+1, \tag{18}$$

故

$$e^{z+2\pi i}=e^z. \tag{19}$$

是即指數函數 e^z 中之 z 倘增加 $2\pi i$ 或 $2\pi i$ 之倍數,則此函數仍不變.因之吾人稱 e^z 爲週期函數,以 $2\pi i$ 爲其週期

由(19),於 $z=xi$ 時,有

$$\cos x+i\sin x=\cos(x+2\pi)+i\sin(x+2\pi),$$

故 $$\cos x=\cos(x+2\pi);\quad \sin x=\sin(x+2\pi).$$

三角函數爲週期函數,以 2π 爲實週期.

8. 按(18)中之第一式,有

$$e^{z+\pi i}=-e^z,$$

註:(1) 此種數目之存在,可如是認識之:$\cos 0=1$,而由級數,可知 $\cos 2$ 爲負者,故有一最小的正數 $\frac{\pi}{2}<2$,使 $\cos\frac{\pi}{2}=0$. 如是則按(3),$\sin\frac{\pi}{2}$ 爲 $+1$ 或 -1. 但按IV,倘設 $x=\frac{\pi}{2}$ 並以 $-y$ 易 y,則

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin\frac{\pi}{2}\sin y.$$

如 y 由 0 至 $\frac{\pi}{2}$,則左端恆爲正者,但 $\sin y$ 對於小的正數 y,自亦爲正者,故必 $\sin\frac{\pi}{2}=+1$.

故如 $z=ix$, 則

$$\cos(x+\pi)=-\cos x,\ \sin(x+\pi)=-\sin x.$$

由此可知 $\sin x$ 於一切 π 之倍數,卽

$$x=k\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\cdots),$$

均將爲0

吾人今再證明除此而外, $\sin x$ 不能再有其他之0點.

爲表明變數亦可取複數爲値之意,吾人用 z 代 x, 幷設 $\sin z=0$, 則 $\cos z=\pm 1$, 故 $e^{iz}=\pm 1$.

今設 $z=x+iy$, 則 $e^{-y}e^{ix}=\pm 1$, 故

$$e^{-y}\cos x=\pm 1,\ e^{-y}\sin x=0.$$

方至二次幷相加後,得 $e^{-2y}=1$, 故 $y=0$, $z=x$, 是卽 sin 函數僅有實0點.倘 $\sin x$ 有一0點,非爲 π 之倍數.如 $x\quad\xi$, $k\pi<\xi<(k+1)\pi$, 則 $\xi-k\pi$ 亦將爲一0點.是卽有一0點在 $(0,\pi)$ 間段中矣.如是則由 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 必將使 cos 函數有一0點在 $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 間段中,然此則不可能者也(見 **7**).

§ 128　柏氏數　tg x 及 ctg x 之級數

1.　今試再求 tg x 及 ctg x 之級數展開法,幷自 ctg x 始.則按 § 127 之(14),有

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}=i\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}},$$

或如用 e^{ix} 乘之,卽得

$$\operatorname{ctg} x = i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}. \tag{1}$$

試用入一函數

$$f(z) = \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1}, \tag{2}$$

并試將其展為級數.如是則

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} f(2ix), \tag{3}$$

將 $f(z)$ 展為級數時可用不定係數之法(§ 123).今用 $-z$ 以代 z,并用 e^z 乘之則

$$f(-z) = -\frac{z}{2}\,\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1}$$

$$= -\frac{z}{2}\,\frac{1+e^z}{1-e^z} = f(z),$$

故 $f(z)$ 為一偶函數.

又於(2)內將 e^z 之級數代入,則

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{2+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\cdots}{1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\cdots}, \tag{4}$$

而於 $z=0$ 時,有 $\qquad f(0)=1$

因之吾人可仿 § 123 之 **3**,設如次形式之級數展開法:

$$\frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} = 1+\frac{B_1}{2!}z^2+\frac{B_2}{4!}z^4+\cdots\cdots, \tag{5}$$

并試決定 $B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots$ 諸係數.

2. 今設想此式之左端已將 (4) 代入,幷以分母中之級數 $1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$ 乘其兩端,然後將兩端等高方數之係數相等之.如是則得 z^{2n} 之係數如下:

$$\frac{1}{2\cdot(2n)!}=\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{B_1}{2!(2n-1)!}+\frac{B_2}{4!(2n-3)!}$$
$$+\cdots+\frac{B_n}{(2n)!1!}.$$

試再用 $(2n+1)!$ 乘兩端,而將右端首項移於左端,則按 §53 之 (4),有

$$(6)\qquad \binom{2n+1}{2}B_1+\binom{n+1}{4}B_2+\binom{2n+1}{6}B_3+\cdots\cdots$$
$$+\binom{2n+1}{2n}B_n=n-\frac{1}{2}.$$

設 $n=1, 2, 3,\cdots$ 時,卽得若干循環式.吾人於是可以之爲根據,以計算 $B_1, B_2, B_3,\cdots\cdots$ 諸數.

但如將 z^{2n+1} 之係數相互比較,則得:

$$\frac{1}{2(2n+1)!}=\frac{1}{(2n+2)!}+\frac{B_1}{2!(2n)!}+\frac{B_2}{4!(2n-2)!}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{B_n}{(2n)!2!}.$$

倘再用 $(2n+2)!$ 乘之,幷將首項移至左端,卽得

$$(7)\qquad \binom{2n+2}{2}B_1+\binom{2n+2}{4}B_2+\binom{2n+2}{6}B_3+\cdots\cdots$$
$$+\binom{2n+2}{2n}B_n=n.$$

由此將(6)減去,則 B_k 之係數卽成爲[參觀 § 53(8^b)]

$$\binom{2n+2}{2k}-\binom{2n+1}{2k}=\binom{2n+1}{2k-1},$$

故

$$(8)\qquad \binom{2n+1}{1}B_1+\binom{2n+1}{3}B_2+\binom{2n+1}{5}B_3+\cdots\cdots$$

$$+\binom{2n+1}{2n-1}B_n=\frac{1}{2}.$$

(6), (7), (8) 諸類公式均可用以計算 $B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots$, 惟以後者爲最佳.如是於 $n=1, 2, 3,$ 時.吾人可得

$$3B_1=\frac{1}{2}\qquad B_1=\frac{1}{6}$$

$$5B_1+10B_2=\frac{1}{2}\qquad B_2=-\frac{1}{30}$$

$$7B_1+35B_2+21B_3=\frac{1}{2}\qquad B_3=\frac{1}{42}.$$

此項有理數 $B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots$, 因其首見於 Jakob Bernoulli 之遺著 Ars Conjectandi (1713) 中.故卽名爲伯氏數.在數學之各種部門內(如解析,整數論,或然算法等),此項數目頗占重要位置.就吾人所用之符號而論,此項數目交替的迭爲正負[1].而就其絕對值言之,則開始時隨增加的標數而減小,其後則迅速增加至極大.開首之七個數目如下:

$$\frac{1}{6},\quad -\frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad -\frac{1}{30},\quad \frac{5}{66},\quad -\frac{691}{2730},\quad \frac{7}{6}.$$

註: (1) 此可用 § 136 之 (8) 以證明之.

Adams氏曾算出其開首之62個數目(Journ. f. Math. 85, 1878),其中之末一個,其大至於3.[illegible]·10[illegible]之程度(參觀§136, **5**).

3. 以後於§136之**4**.內,可證明用柏氏數所構造成之級數(5),在某一區域內係收斂者.因而可知展開法係可用者.今於其中設 $z=2ix$. 則按(3),可得

$$(9)\qquad \operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-2\frac{B_1}{2!}(2x)+2\frac{B_2}{4!}(2x)^3-\cdots\cdots$$

4 欲求 $\operatorname{tg} x$ 之展開法時,可作

$$\varphi(z)=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z-1}{e^z+1}=z\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}-\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

或

$$\varphi(z)=f(2z)-f(z).$$

今於右端代入級數(5),以 $2z$ 及 z 構成之,并用2以乘之,則

$$(10)\qquad z\frac{e^z-1}{e^z+1}=A_1\frac{z^2}{2!}+A_2\frac{z^4}{4!}+A_3\frac{z^6}{6!}+\cdots\cdots$$

於此,

$$(11)\qquad A_n=2(2^{2n}-1)B_n\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

此項數目 A_n 均為整數,但此處吾人不欲證之.其開首之若干數,為

$$1,\ -1,\ 3,\ -17,\ 155,\ -2073,\ 38227.$$

對於此項數目,吾人亦可如**2**.中之法,由(10)推論得循

環式,其法在用z除之將e^z-1及e^z+1之級數代入,并將第一級數之逐項,與第二級數與右端之積之逐項相等.如是則用$(2n+1)!$乘後,z^{2n}之係數爲

$$(12)\qquad \binom{2n+1}{2}A_1+\binom{2n+1}{4}A_2+\binom{2n+1}{6}A_3+\cdots\cdots +\binom{2n+1}{2n}A_n=2n+1.$$

由此,吾人可於$n=1,2,3,\cdots\cdots$直接計算$A_1, A_2, A_3,\cdots\cdots$,不須應用柏氏數爲助.

試於此處加上(6)之二倍,并計及

$$A_k+2B_k=2\cdot 2^{2k}B_k,$$

則卽得柏氏數之新循環式

$$(13)\qquad \binom{2n+1}{2}\cdot 2^2B_1+\binom{2n+1}{4}\cdot 2^4B_2+\cdots\cdots +\binom{2n+1}{2n}2^{2n}B_n=2n.$$

此式以後尙須用及.

5. 試於(10)內設$z=2ix$,則函數

$$2ix\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}=2ix\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=-2x\operatorname{tg}x,$$

因而有級數展開法

$$(14)\qquad \operatorname{tg}x=A_1\frac{(2x)}{2!}-A_2\frac{(2x)^3}{4!}+A_3\frac{(2x)^5}{6!}-\cdots\cdots$$

(9)與(14)之實用的意義自不甚大,蓋僅對於x之小值,

乃能充分快的收斂也.

6　吾人計算自然數等高方數之和時,柏氏數亦須用及,此則柏氏本身已見及之.

試設

(15)　$$S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k,\qquad (k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$$

則 $S_0=n$. 幷作指數函數之和:

(16)　$$e^z+e^{2z}+e^{3z}+\cdots\cdots+e^{nz}=e^z\frac{e^{nz}-1}{e^z-1}.$$

於左端用入 e^z 之級數,則和數爲

(17)　$$S_0+S_1\frac{z}{1!}+S_2\frac{z^2}{2!}+S_3\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

此級數對於每一 z 爲收斂者.蓋此爲有限多的恆收斂級數之和也.

今幷將(16)之右端展成爲乘方級數,有

$$\frac{e^{nz}-1}{z}=n+\frac{n^2z}{2!}+\frac{n^3z^2}{3!}+\cdots\cdots$$

而按 5)

$$\frac{ze^z}{e^z-1}=\frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\frac{z}{2}+\frac{B_1}{2!}z^2$$

$$+\frac{B_2}{4!}z^4+\frac{B_3}{6!}z^6+\cdots\cdots$$

二級數之積,至少於第二級數之收斂區域內爲收斂者.故按 § 123 之 **1**, 可與 (17) 相比較,而如再用 $k!$ 乘後,則

由有 z^k 之項,可得

$$S_k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\binom{k}{1}\frac{B_1}{2}n^{k-1}+\binom{k}{3}\frac{B_2}{4}n^{k-3}+\binom{k}{5}\frac{B_3}{6}n^{k-5}+\cdots\cdots \tag{18}$$

此式於偶的 $k=2m$, 其末項爲 $B_m\cdot n$, 於奇的 $k=2m+1$ ($k=1$ 爲例外), 則爲

$$\frac{2m+1}{2}B_m\cdot n^2.$$

如是,對於 k 之首諸值,有

$$S_1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{19}$$

$$S_4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$S_5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

由 (18), 吾人尚可得一極限值, 爲十七世紀時數學家所樂用者:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1} \tag{20}$$

§129　用無盡乘積以表正弦及餘弦

1. 除將函數展為無盡級數外,將其展為無盡乘積,亦係重要之事.

今設 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ 為一無限數列,其絕對值均小於 1 試作一無盡乘積

$$Q=(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)\cdots\cdots,$$

而如其部分乘積

$$Q_n=(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)\cdots\cdots(1+q_n)$$

有一有限而不等於 0 之極限值 Q, 則該無盡乘積亦為收斂者.

但如 Q_n 無有有限之極限值或 $\lim Q_n=0$, 則此無盡乘積謂之發散者[1].

乘積 Q_n 亦可簡作

$$Q_n=\prod_{\nu=1}^{n}(1+q_\nu);$$

其無盡乘積則作

$$Q=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+q_\nu).$$

註: (1) 倘吾人對於 $\lim Q_n=0$ 之無盡乘積視為收斂者,則雖無一因子為 0, 而收斂的乘積 Q 可以等於 0, 例如

$$Q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdots\cdots$$

是.

吾人今先一論如是之乘積,於此一切數目 $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ 均爲實數,其符號均相同,幷假定其均爲負者.因之可寫作

$$(1)\qquad \begin{aligned} Q &= (1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)\cdots\cdots \\ Q_n &= (1-q_1)(1-q_2)\cdots\cdots(1-q_n), \end{aligned}$$

其中之 $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ 均爲正數.

同時,吾人幷一論無盡級數

$$(2)\qquad q_1+q_2+q_3+\cdots\cdots,$$

其部分和數爲 $S_n=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n$.如是則有如次之定理:

對於每一 n,有

$$(3)\qquad 1-s_n<Q_n<1.$$

Q_n 之小於 1,此不難知者,蓋一切因子 $1-q_1, 1-q_2, \cdots\cdots$ 均爲小於 1 之正數也.

於 $n=2$ 時,有

$$Q_2=1-(q_1+q_2)+q_1q_2>1-s_2,$$

故 (3) 爲適用者.吾人今假定其對於任何一 n 已適用,幷作

$$\begin{aligned} Q_{n+1}=Q_n(1-q_{n+1})>1-(s_n+q_{n+1}) \\ +s_nq_{n+1}>1-s_{n+1}, \end{aligned}$$

則可知其對於 $n+1$ 亦適用,故 (3) 已經普遍證明.

2. 今設級數 (2) 爲收斂者,其和數爲 $s<1$.如是則對

於一切部分和數有

$$0<s_n<s<1,$$

而按 (3), 可知一切乘積 Q_n 在二正值 $1-s$ 及 1 之間.他方面,Q_n 構成一單調向下數列,故有一正的下界 $Q\geqq 1-s$, 而有一不等於 0 之極限值:

$$\lim Q_n=Q,$$

是即無盡乘積 (1) 爲收斂者.

以上係假定 (2) 之和數 s 小於 1 者.今可不再用此假定.蓋如級數爲收斂者,則可取 ν 如是大,使和數 $q_{\nu+1}+q_{\nu+2}+\cdots\cdots<1$. 如是則乘積 $(1-q_{\nu+1})(1-q_{\nu+2})\cdots\cdots$ 亦必收斂.此則已證明者.故可知乘積 (1) 亦如是,蓋相差僅爲無限多之因子也.

3. 今在關於 $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ 之相同假定下,一論

(4) $$Q_n'=(1+q_1)(1+q_2)\cdots\cdots(1+q_n)$$

諸乘積.則可知其均小於 1, 構成一單調向上級數.

但乘積

$$Q_nQ_n'=(1-q_1^2)(1-q_2^2)\cdots\cdots(1-q_n^2)<1,$$

故

(5) $$1<Q_n'<\frac{1}{Q_n}<\frac{1}{Q}.$$

因之,Q_n' 有一上界 Q', 而有一不等於 0 之極限值

$$\lim Q'_n = Q',$$

是即無盡乘積

$$(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)\cdots\cdots \tag{6}$$

爲收斂者.

4. 但如級數(2)爲發散者,則其部分和數 s_n 可增加至任何大,超出任何之大數.而因 $Q'_n>1+s_n$,故部分乘積 Q'_n 亦增加至於任何大,而(6)爲發散者.但對於部分和數 Q_n 則仍

$$0<Q_n<\frac{1}{Q'_n}.$$

故必 $\lim Q_n=0$,因而(1)亦爲發散者.

5. 於是吾人得一重要定理如下:

作如次形式,即

$$(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)\cdots\cdots \text{或} (1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)\cdots\cdots$$

形式之無盡乘積(其中 $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ 爲正數)[1],隨級數

$$q_1+q_2+q_3+\cdots\cdots$$

之爲收斂或發散而亦收斂或發散.

吾人亦可如§118之**3**,證明此項乘積之無條件收斂,是即其值與因子之序列並無關係者也.

註: (1) 在第一類乘積方面,吾人尚須假定數目 q 中無有爲1者.至於假定 $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ 均小於1,此則可不必要,蓋如(2)收斂,則自僅有有限多之 $q_\nu>1$ 者.

6 吾人今求正弦函數之乘積按Moivre氏式有

$$(\cos z+i\sin z)^n=\cos nz+i\sin nz$$

於此，n 爲任何一正整數試將二項式定理用於左端則得

$$\cos nz+i\sin nz=\cos^n z+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}z\sin z$$

$$-\binom{n}{2}\cos^{n-2}z\sin^2 z$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}z\sin^3 z+\cdots\cdots$$

因之倘將兩端之虛數部分相等之并用 $\sin z$ 以除之即有

(7) $$\frac{\sin nz}{\sin z}=\binom{n}{1}\cos^{n-1}z-\binom{n}{3}\cos^{n-3}z\sin^2 z$$

$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}z\sin^4 z-\cdots\cdots$$

今如 $n=2m+1$ 爲一奇數爲簡單計，試設

$$\sin^2 z=t$$

則 $\cos^2 z=1-t$，而 (7) 成爲

(8) $$\frac{\sin nz}{\sin z}=\binom{n}{1}(1-t)^m-\binom{n}{3}(1-t)^{m-1}t$$

$$+\binom{n}{5}(1-t)^{m-2}t^2-\cdots\cdots,$$

故右端爲一 m 次之整函數今設

$$\frac{\sin nz}{\sin z}=F(t)$$

$t_1, t_2, \cdots\cdots t_m$ 為 $F(t)$ 之根,則有

$$\frac{\sin nz}{\sin z} = a_0(t_1 - t)(t_2 - t)\cdots\cdots(t_m - t), \tag{9}$$

於此,a_0 與 t 為無關者.將 t^m 之係數與 (8) 中者相較後,得

$$a_0 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\cdots + \binom{n}{n} = 2^{n-1} \tag{10}$$

他方面,按 (9) 於 $t=0$ 時,亦即於 $z=0$ 時,有

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin nz}{\sin z} = a_0 t_1 t_2 \cdots\cdots t_m,$$

但按 § 127 之 **3**,則得

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin nz}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin nz}{nz} \cdot \frac{z}{\sin z} \cdot n = n,$$

此亦與 (7) 相一致,祇須於其中設 $z=0$ 即可.因之,有

$$a_0 t_1 t_2 \cdots\cdots t_m = n, \tag{11}$$

而由 (9),可得

$$\sin nz = n \sin z\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)\left(1 - \frac{t}{t_2}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{t}{t_m}\right) \tag{12}$$

但 $\sin nz$ 除 $z=0$ 為 0 外,祇於 $nz = k\pi$ 為 π 之倍數時乃亦成為 0,因之,$F(t)$ 之根均為

$$t_k = \left(\sin \frac{\pi k}{n}\right)^2 \tag{13}$$

之形式,其中之 k 為一整數.但 $k=0$ 時不能得根,蓋按 (11)

$F(0)=n$ 也．此外則

$$t_k=t_{-k}=t_{n-k}=t_{n+k},$$

故如於 (13) 中設 $k=1, 2, 3, \cdots, m$, 則所得均為 t_k 之不相等的值．

7. 今設 $z=\dfrac{\pi x}{n}$, 則 $t=\sin^2\dfrac{\pi x}{n}$, 而按 (12) 及 (13), 卽得

$$\sin\pi x=n\sin\frac{\pi x}{n}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{n}}\right). \tag{14}$$

此外,將 (11) 與 (10) 同用時,得

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin^2\frac{\pi k}{n}=n.$$

今於 (14) 內使 $n\to\infty$ 以求其極限值,按 § 127 之 **3** 或用 $\sin\dfrac{\pi x}{n}$ 之級數時,可得

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi x}{n}=\pi x. \tag{15}$$

至於 (14) 中其他因子當 n 增加時之狀況,則頗不簡單,蓋在末後之因子方面, $\sin\dfrac{\pi k}{n}$ 中之 k 隨 n 而成為無窮大也．但如 k 為定值時,則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi x}{n}}{\sin\frac{\pi k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}}\cdot\frac{\frac{\pi x}{n}}{\sin\frac{\pi k}{n}}\cdot\frac{x}{k}=\frac{x}{k},$$

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{n}}\right)=1-\frac{x^2}{k^2}$$

因之,乘積

$$(17)\qquad Q_\mu(x)=\prod_{k=1}^{\mu}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{n}}\right)$$

(其中之μ先爲一定數)於增加的n可與乘積

$$P_\mu(x)=\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)$$

相比較.此項$P_\mu(x)$爲無盡乘積

$$P(x)=\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots\cdots$$

之部分乘積,而此無盡乘積則爲收斂者.蓋

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$$

按之§117之**5**.爲收斂者也.

8 試再設

$$(18)\qquad R_\mu(x)=\left(1-\frac{x^2}{(\mu+1)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(\mu+2)^2}\right)\cdots\cdots$$

則可知此無盡乘積亦爲收斂者.且因$P(x)$爲收斂者.故於充分大之μ,可與1任意接近.

今於(17)內先將μ視爲固定者,使n增加至無限,則按(16),得

(19) $$\lim_{n\to\infty} Q_\mu(x) = P_\mu(x),$$

倘再使 μ 亦增加至無限.則

(20) $$\lim P_\mu(x) = P(x).$$

他方面按 (14), 有

(21) $$\sin \pi x = n \sin \frac{\pi x}{n} Q_\mu(x) R_\mu(x),$$

於此，$$R_\mu(x) = \prod_{k=\mu+1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{n}}{\sin^2 \frac{\pi k}{n}}\right).$$

此乘積必小於1.吾人可將其與 R_μ 發生關係.

9. 按 § 127 之 **3**, 倘 z 在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間,則

$$\sin z < z < \operatorname{tg} z.$$

同時,吾人亦可知

$$\frac{z}{2} < \sin z.$$

蓋由 $z < \operatorname{tg} z$, 得

$$z \cos z < \sin z,$$

而於 $0 < z < \frac{\pi}{3}$ 時, $\frac{1}{2} < \cos z$, 故 $\frac{z}{2} < \sin z$. 於 $\frac{\pi}{3} \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}$ 時,此亦仍適用,蓋 $\frac{z}{2}$ 僅能增加至 $\frac{\pi}{4} = 0.785\cdots\cdots$, 而在 $z = \frac{\pi}{3}$ 時 $\sin z$ 已爲 $0.866\cdots\cdots$, 以後則恆增加,直至 $z = \frac{\pi}{2}$ 時爲止.

因之,倘 $k < \frac{1}{2}n = m + \frac{1}{2}$, 則

$$\sin\frac{\pi x}{n}<\frac{\pi x}{n},\quad \sin\frac{\pi k}{n}>\frac{\pi k}{2n},$$

故必
$$\frac{\sin\frac{\pi x}{n}}{\sin\frac{\pi k}{n}}<\frac{2x}{k}\ \text{及}\ 1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{n}}>1-\frac{4x^2}{k^2}.$$

但如是,則

$$1>R_\mu'(x)>\left(1-\frac{4x^2}{(\mu+1)^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{(\mu+2)^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{m^2}\right),$$

故按 (18), 必更

$$1>R_\mu'(x)>R_\mu(2x).$$

μ 爲充分大時, R_μ 可任意與 1 相接近,故 R_μ' 亦如此.而由 (21) 及 (15), 則可知 n 與 μ 充分大時, $Q_\mu(x)$ 可與 $\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ 任意接近.按 (19) 及 (20), $Q_\mu(x)$ 於 n 及 μ 爲充分大時,亦可任意與 $P(x)$ 相接近,故

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=P(x).$$

於是吾人得重要之乘積展開法如下:

$$\sin\pi x=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots\cdots$$

或

$$\text{(22)}\qquad \sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),$$

此乘積對於 x 之任何實值或複值均爲收斂者.

此種乘積與整函數之分解成爲根因子相當，$\sin \pi x$ 之無盡多的 0 點，卽 $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$，不難直接由此以見之[1].

10 今不難爲餘弦函數亦作一乘積以表之．於此，先可用

$$\sin 2\pi x = 2\sin \pi x \cos \pi x \tag{23}$$

一式以及

$$\sin 2\pi x = 2\pi x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{k^2}\right).$$

部分乘積

$$\Pi_{2n} = \left(1-\frac{4x^2}{1}\right)\left(1-\frac{4x^2}{4}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n)^2}\right)$$

可將其分解成爲二因子：

$$\Pi_{2n} = P_n Q_n,$$

其中 P_n 內所含者，爲奇分母之因子，Q_n 內則爲偶分母之因子：

$$P_n = \left(1-\frac{4x^2}{1}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).$$

$$Q_n = \left(1-\frac{4x^2}{4}\right)\left(1-\frac{4x^2}{16}\right)\left(1-\frac{4x^2}{36}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n)^2}\right)$$

或　$$Q_n = \left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

註：(1) 倘不欲 $\sin \pi x$，而欲 $\sin z$，則祇須設 $\pi x = z$，卽 $x=\frac{z}{\pi}$ 可矣．

如是則

$$2\pi x\lim \Pi_{2n}=2\pi x\lim P_n \lim Q_n.$$

此式之左端爲 $\sin 2\pi x$, 其右端則 $\pi x\lim Q_n=\sin\pi x$, 故按(23):

$$\cos\pi x=\lim P_n$$

或

$$\cos\pi x=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right). \tag{24}$$

由此乘積吾人亦不難直接認識 $\cos\pi x$ 之 0 點, 即

$$x=\pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{3}{2},\quad \pm\frac{5}{2},\cdots\cdots$$

是.

第二十二章　自然對數 反三角函數 三角級數

§ 130　自然對數及廣義乘方

1. 今試推廣 Bürg 及 Neper 之思想方法,將數目 e 選用爲一種對數系統之底(§ 125, **1**). 此種以 e 爲基數之對數吾人名之爲自然對數. 因之,倘

(1) $$w = e^z,$$

則 z 爲 w 之自然對數(log nat). 吾人寫之作

(2) $$z = \mathrm{l}_n\, w.$$

2. 廣之倘有一函數

(3) $$w = f(z),$$

俾於 z 之每一值有一 w 之確定值,則吾人亦可將此問題倒之,對於 w 之已知值,求 z 之值.如是,吾人將(3)視爲一方程.將其解後,可得 z 爲 w 之函數:

(4) $$z = \varphi(w).$$

此函數 φ 名爲函數 f 之倒或與 f 相反之函數.於是吾人可云:

自然對數爲指數函數之倒.

函數 f 與 φ 間之關係為相互間者.蓋 f 亦為 φ 之倒也

3. 按§41之**4**.一數目之自然對數及任何底的對數之間,有如次之關係:

$$\overset{b}{\log}\, u = \overset{b}{\log}\, e \cdot \ln u = \frac{\ln u}{\ln b} \tag{5}$$

因之,吾人由自然對數,可得常用之對數.祇須用以下之定數乘之便可:

$$\mu = \log e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289 \cdots\cdots$$

此數名為常用對數之率.

反之,倘欲得自然對數,則須用如次之數目,以乘常用對數:

$$\frac{1}{\mu} = \ln 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914 \cdots\cdots$$

4. 今仍以 z 表獨立變數,則函數 $\ln z$ 可以

$$z = e^{\ln z} \tag{6}$$

確定之.但由此式,吾人對於 $\ln z$ 不能得一確定之值.蓋右端之指數如加上 $2\pi i$ 之倍數後(見§127之**7**.),其值仍不變.故如 $\operatorname{Ln} z$ 為 z 之自然對數之一值,則凡與(6)相適當之一切值,可以

$$\operatorname{Ln} z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \tag{7}$$

表之.其中每個均可視為 z 之自然對數.換言之:

自然對數為無限多值的函數,倘欲得屬於 z 之函數值,祇須對於其中之一值任加以 $2\pi i$ 之倍數即可.

對於某一 k 所得的(7), 吾人名之爲自然對數之一支(Zweig).

設 z 爲一正實數,則恆有一實值 $\operatorname{Ln} z$, 能與(6)相適,而當 z 由 0 至於 ∞ 時, $\operatorname{Ln} z$ 經過 $-\infty$ 至 $+\infty$ 之一切值.吾人名 $\operatorname{Ln} z$ 爲自然對數之主要值.

5. 複數之對數亦可確定之.今設

(8) $$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}=e^{\ln r+i\varphi},$$

則 r 爲一正實數, φ 則可假定其

(9) $$-\pi<\varphi\leqq\pi.$$

如是則自然對數之無限多的值,可以

(10) $$\ln z=\ln r+i\varphi+2k\pi i$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

表之,其中對於 $\ln r$ 可取其主要值.吾人稱

(11) $$\operatorname{Ln} z=\operatorname{Ln} r+i\varphi \qquad (-\pi<\varphi\leqq\pi)$$

爲 z 之自然對數之主要值,而有

$$\ln z=\operatorname{Ln} z+2k\pi i.$$

例如 $z=-1=e^{\pi i}$, 則 $\ln(-1)=(2k+1)\pi i$, 而於任何一實負數 $-a$, 有

(12) $$\ln(-a)=\operatorname{Ln} a+(2k+1)\pi i.$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

負數之自然對數爲一複數,其虛數部分爲 πi 之奇倍

數[1].

6. 在簡易的對數算法方面(§ 1),所從事者爲正實數之對數,故可以主要值爲限.倘於負數或複數之對數方面亦如是,則乘積對數之定律已將不能普遍適用.蓋如在主要值

$$\operatorname{Ln} u_1 = \operatorname{Ln} r_1 + i\,\varphi_1,\quad \operatorname{Ln} u_2 = \operatorname{Ln} r_2 + i\,\varphi_2$$

方面,其和數

$$\varphi_1 + \varphi_2 > \pi,$$

則
$$\operatorname{Ln}(u_1 u_2) = \operatorname{Ln} u_1 + \operatorname{Ln} u_2 - 2\pi i$$

也.

7. 吾人今亦可進而確定複基數及複指數之廣義的乘方.

所謂廣義的乘方 $\{a^z\}$ 者,係指指數函數

(13)
$$\{a^z\} = e^{z \ln a}$$

而言.

於此,吾人對於 $\ln a$,須用其無限多之函數值,故

$$\{a^z\} = e^{z(\operatorname{Ln} a + 2k\pi i)}.$$

其主要值則可作

註: (1) 關於負數之對數,十八世紀時曾成爲爭端. Leibniz 以爲 $\log(-1)$ 係虛數, Joh. Bernoulli 則欲證明 $\log(-x) = \log x$. 直至歐拉(Euler)氏發現對數之無限多值性,此爭始告段落,但 1761 年時之 d'Alembert,尚以爲 Bernoulli 之說可用也.

$$(14)\qquad a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

按§126之(5),可得恆收斂之級數:

$$(15)\qquad a^z = 1 + z \operatorname{Ln} a + \frac{z^2(\operatorname{Ln} a)^2}{2!} + \frac{z^3(\operatorname{Ln} a)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

故廣義的乘方爲

$$(16)\qquad \{a^z\} = a^z \cdot e^{2kz\pi i}. \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

對於某一k,有一值$\{a^z\}_k$與之相當.設z爲一整數,則於任何k有$e^{2kz\pi i}=1$,故乘方僅有一值a^z.設$z=\frac{m}{n}$爲一分數,則有n個值.對於其他z之值(無理的或複數的),一切$\{a^z\}_k$均不相等,而$\{a^z\}$有無限多之值.故當z經過實數之列時,此廣義的乘方之情形殊爲複雜,時而僅有一值,時而有多值,時而其值多至於無限.同時,簡易的乘方算法上之定律,對於廣義的乘方,亦不能直接應用.例如同基數之二乘方之積,爲

$$\{a^u\}_k\{a^v\}_l = e^{(u+v)\operatorname{Ln} a + 2(ku+lv)\pi i}$$

$$= a^{u+v} \cdot e^{2(ku+lv)\pi i}.$$

故僅於$k=l$時,

$$\{a^u\}_k\{a^v\}_k = \{a^{u+v}\}_k.$$

8. 因之,尋常運算時,以乘方之主要值爲多,而因有(16),故亦不難隨時轉至於廣義的乘方,而所謂乘方者,則尋常所指卽爲其主要值.此值爲級數(15)所確定,爲指

數 z 之一值的解析函數於此,如簡易的乘方算法中所已知者,有以下之定律:

$$a^u\cdot a^v=a^{u+v},\quad a^u : a^v=a^{u-v},$$

$$a^0=1,\quad 1^z=1.$$

但同指數的二乘方之積,及乘方之乘方二者,則其定理卽不能無限制的適用.吾人今以實數指數爲例證明之.如 **6.**,設

$$\operatorname{Ln} a_1=\operatorname{Ln} r_1+i\,\varphi_1,\quad \operatorname{Ln} a_2=\operatorname{Ln} r_2+i\,\varphi_2,$$

則
$$a_1^z a_2^z=e^{z(\operatorname{Ln} a_1+\operatorname{Ln} a_2)}.$$

倘 $\varphi_1+\varphi_2>\pi$, 則

$$(a_1a_2)^z=e^{z\operatorname{Ln}(a_1a_2)}=e^{z(\operatorname{Ln} a_1+\operatorname{Ln} a_2-2\pi i)},$$

故
$$a_1^z a_2^z=(a_1a_2)^z\cdot e^{2z\pi i}.$$

又如

$$\operatorname{Ln} a=\operatorname{Ln} r+i\,\varphi.$$

則
$$\operatorname{Ln}(a^z)=\operatorname{Ln}(e^{z\operatorname{Ln} a})=z\operatorname{Ln} a+2m\pi i.$$

其中之整數 m 當如是決定之,使

$$-\pi<z\varphi+2m\pi\leqq\pi.$$

如是則 u 亦爲實指數時,有

$$(a^z)^u=e^{u\operatorname{Ln}(a^z)}=e^{uz\operatorname{Ln} a+2mu\pi i}$$

故
$$(a^z)^u=a^{uz}\cdot e^{2mu\pi i}.$$

9. 除(15)而外,二項式級數亦爲任何實指數的乘方

之另一代表法.但二項式級數所予吾人之乘方值,是否與(15)者相同,此則爲一問題.按之§124之**7**.,由二項式級數所得$(1+z)^n$之值,於$z\to 0$時連續的成爲1,故此問題之答覆,當不難得之.對於級數(15),其狀況亦如是,吾人祇須於其中將a易爲$1+z$,z易爲n即可.故

二項式級數

$$(1+z)^n=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots\cdots$$

所表者爲乘方之主要值.

§131　對數級數

1　由§130之(15),吾人推得一新級數

$$\frac{a^z-1}{z}=\mathrm{Ln}\,a+\frac{z(\mathrm{Ln}\,a)^2}{2!}+\frac{z^2(\mathrm{Ln}\,a)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

此級數對於任何實數或複數a均適用,爲z之連續函數,故其值於$z=0$時等於左端$z\to 0$時之極限值,而可知

任何一數之自然對數之主要值,可用極限值

(1)
$$\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}=\mathrm{Ln}\,a$$

以確定之[1].

註:(1)此極限值雖首見於Euler氏,但Kepler之計算對數,實已以此爲根據.Kepler求數目a之對數時,在計算一列比例中項,其第四數則爲固定者:$M=100000$,即

$$x_1=\sqrt{aM},\quad x_2=\sqrt{x_1M},\quad x_3=\sqrt{x_2M},\cdots\cdots,$$

此種定義,必須乘方a^z不用§130之(15)以確定之,乃能有意義可言,蓋後者中已先假定有自然對數也,故吾人僅可以二項式級數等確定之.按§130之**9.**,吾人知二項式級數所確定之乘方值,與用§130之(15)所確定者同.故如於(1)內將a易為$1+z$,z易為μ,則得

$$(2)\qquad \lim_{\mu\to 0}\frac{(1+z)^{\mu}-1}{\mu}=\mathrm{Ln}(1+z),$$

於此,

$$(1+z)^{\mu}=1+\binom{\mu}{1}z+\binom{\mu}{2}z^2+\binom{\mu}{3}z^3+\cdots$$

但須

$$(3)\qquad |z|<1.$$

由此,可得

對於第n個數目,有$x_n^{2^n}=aM^{2^n-1}=\frac{a}{M}M^{2^n}$,故$x_n=\sqrt[2^n]{\frac{a}{M}}M$.Kepler曾計算至$n=30$,卽$2^n=1073741824$,推得$M-x_n=\varepsilon_n$,而名$2^n\varepsilon_n$為$a$之對數.按之今日之見解,此對數可用極限值

$$\lambda(a)=\lim_{m\to\infty}Mm\left(1-\sqrt[m]{\frac{a}{M}}\right)$$

以確定之,或如以M為單位,則

$$\lambda(a)=\lim_{m\to\infty}m(1-\sqrt[m]{a})$$

$$=-\lim_{\mu\to 0}\frac{a^{\mu}-1}{\mu}=-\mathrm{Ln}\,a.$$

從可知Kepler之對數,實與Neper者相同.

$$\frac{(1+z)^\mu-1}{\mu}=z+\frac{\mu-1}{2}z^2+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3}z^3$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2\cdot 3\cdot 4}z^4+\cdots\cdots$$

而按 § 122 之 **4**, 此爲 μ 之連續函數, 故兩端均可使 $\mu\to 0$ 以得其極限值.按 (2), 即得極重要之對數級數如下:

(4) $$\operatorname{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\cdots,$$

此級數對於單位圓內之任何值均適用.

2. 此級數於 $z=1$ 時亦尙收斂,而按 Abel 之定理,其值乃等於 Ln 2, 即

(5) $$\operatorname{Ln}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

如是,前於 § 118 中已論及的有條件收斂級數之和, 今已得之;但在應用上,因其收斂甚遲, 故不宜於計算之用.

3. 級數 (4) 僅於 z 之小值尙有實用之意義.但吾人不妨由之以推得其他之級數, 對於計算對數上頗爲重要者.

今用 $-z$ 以代 z, 則

(6) $$\operatorname{Ln}(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots\cdots$$

而如將其由 (4) 減去之, 即得

(7) $$\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\cdots\cdots$$

設 p, q 爲二正數，幷設

$$z=\frac{p-q}{p+q}, \quad 則 \quad \frac{1+z}{1-z}=\frac{p}{q},$$

而有

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Ln} p-\operatorname{Ln} q=2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{3}+\cdots\cdots\right].$$

故於 $q=x, p=x+1$，有

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{Ln}(x+1)-\operatorname{Ln} x=2\lambda(2x+1),$$

於此，$\lambda(2x+1)$ 爲級數

$$\text{(10)} \qquad \lambda(2x+1)=\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^{3}}+\frac{1}{5(2x+1)^{5}}+\cdots$$

此級數於每一正數 x 及 <-1 之負數爲收斂者，而如使 x 繼續取 1, 2, 3,……諸值，則按 (9) 卽得 2, 3, 4,……之自然對數．例如於 $x=1$，有

$$\operatorname{Ln} 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^{5}}+\frac{1}{7\cdot 3^{7}}+\cdots\cdots\right)$$

此級數較之 (5) 之收斂爲速．

4. 用以下之方法，吾人可獲得收斂更佳之級數以計算 Ln 2, Ln 3 及 Ln 5：

於 (9) 內設

(1)　$x=15=3\cdot 5$，則 $x+1=16=2^{4}$，$2x+1=31$；

(2)　$x=24=2^{3}\cdot 3$，則 $x+1=25=5^{2}$，$2x+1=49$；

(3)　$x=80=2^{4}\cdot 5$，則 $x+1=81=3^{4}$，$2x+1=161$．

如是,卽得

$$4\,\mathrm{Ln}\,2-\mathrm{Ln}\,3-\mathrm{Ln}\,5=2\,\lambda(31)$$

$$-3\,\mathrm{Ln}\,2-\mathrm{Ln}\,3+2\,\mathrm{Ln}\,5=2\,\lambda(49)$$

$$-4\,\mathrm{Ln}\,2+4\,\mathrm{Ln}\,3-\mathrm{Ln}\,5=2\,\lambda(161).$$

右端之級數,其收斂甚速.倘僅取其三項,則在第一級數方面,其差已小於

$$\frac{2}{7\cdot31^7}\left(1+\frac{1}{31^2}+\frac{1}{31^4}+\cdots\cdots\right)=\frac{2}{7\cdot31^5(31^2-1)},$$

而此則$<\frac{1}{10^{11}}$.在其他二級數方面,其差尤爲小.

倘已將級數之值計算至若干位小數,則卽不難用以下之三方程以計算對數:

$$\mathrm{Ln}\,2=14\,\lambda(31)+10\,\lambda(49)+6\,\lambda(161)$$

$$\mathrm{Ln}\,3=22\,\lambda(31)+16\,\lambda(49)+10\,\lambda(161)$$

$$\mathrm{Ln}\,5=32\,\lambda(31)+24\,\lambda(49)+14\,\lambda(161)$$

吾人於是可計算 $\mathrm{Ln}\,10=\mathrm{Ln}\,2+\mathrm{Ln}\,5$, 而按 § 130 之 **3**, 亦可得對數率 μ. 又於 (9) 內設

$$x=4374=2\cdot3^7,\ \text{則}\ x+1=4375=5^4\cdot7,\ 2x+1=8749,$$

卽得

$$\mathrm{Ln}\,7=\mathrm{Ln}\,2+7\,\mathrm{Ln}\,3-4\,\mathrm{Ln}\,5+2\,\lambda(8749),$$

於此,級數之第二項對於第 11 位小數已無若何之影響.

如是, 2 至 10 一切整數之自然對數,吾人均已知之.

5. 試再一論級數([illegible]),并於其中設 $z=\frac{h}{x}$. 如是則

$$\operatorname{Ln}(x+h)-\operatorname{Ln} x=\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\cdots \tag{11}$$

倘 h 對於 x 而言爲極小者,則僅須計及級數之第一項卽可.吾人如轉至於常用對數,則有[1]

$$\log(x+h)-\log x\approx\frac{h\,\mu}{x}. \tag{12}$$

由此,吾人可推得表値之差式.在五位表內,x 爲四位之整數,其差 $h=1$,故上述之差爲

$$\Delta\log x=\log(x+1)-\log x=\frac{\mu}{x}. \tag{13}$$

欲將其用第五位小數之單位表出之,可用 10^5 以乘之,故表上 x 處對數之差

$$\Delta\log x=\frac{43429}{x}\text{ 第五位小數之單位.}$$

例如 $x=2000$, $\Delta\log x=21.7$, 故此處之表差等於 22.

6. 由近似式(12),可知眞數發生極小之變化 h 時.對數之變化係與 h 相比者.應用對數表時之插入法,實以此爲根據(參觀 §91);今試一觀所可得之差誤爲何.今設 x 爲表中所含之眞數,卽在五位表內爲一四位整數;又設表內所屬之値爲 $\log^* x$,其正確之對數,則當爲

$$\log x=\log^* x+\lambda_0. \tag{14}$$

註: (1) 此符號意表"近於".

如是則 λ_0 爲差誤,因將 $\log x$ 之值簡至五位小數而發生者吾人可將其用第五位之單位以表出之,而有

$$|\lambda_0|<0.5$$

仿此,對於表內直接相繼之眞數 $x+1$,有

$$\log(x+1)=\log^*(x+1)+\lambda_1,$$

而

$$|\lambda_1|<0.5.$$

表差爲 $\Delta^*=\log^*(x+1)-\log^* x$, 眞對數之差爲

(15) $$\Delta=\log(x+1)-\log x=\Delta^*+\lambda_1-\lambda_0$$

按 (11), 有

(16) $$\Delta=\frac{\mu}{x}-\frac{\mu}{2x^2}+\frac{\mu}{x^3}-\cdots\cdots$$

今設 $x+h$ 爲 x 與 $x+1$ 間之眞數,則按 (11):

$$\Delta_h=\log(x+h)-\log x=\frac{\mu h}{x}-\frac{\mu h^2}{x^2}+\frac{\mu h^3}{3x^3}-\cdots\cdots$$

$$=h\Delta+\mu h\left(\frac{1-h}{2x^2}-\frac{1-h^2}{3x^3}+\frac{1-h^3}{4x^4}-\cdots\cdots\right).$$

倘設 $\Delta_h=h\Delta+\eta$, 則卽有

$$\eta=h(1-h)\left(\frac{\mu}{2x^2}-\mu\frac{1+h}{3x^3}+\mu\frac{1+h+h^2}{4x^4}-\cdots\cdots\right).$$

此處右端之級數於 $0<h<1$ 及 $x>1$ 爲無條件收斂者,故不妨將其項任意顚倒之,試將 h 等高之項綜合之,則得

(17) $$\eta=h(1-h)(\rho_1-h\rho_2+h^2\rho_3-\cdots\cdots),$$

於此,

$$\rho_1=\frac{\mu}{2x^2}-\frac{\mu}{3x^3}+\quad\cdots=\frac{\mu}{x}-\Delta,$$

$$\rho_2=\frac{\mu}{3x^3}-\frac{\mu}{4x^4}+\cdots\cdots=\Delta-\frac{\mu}{x}+\frac{\mu}{2x^2},$$

$$\rho_3=\frac{\mu}{4x^4}-\frac{\mu}{5x^5}-\cdots\cdots=\frac{\mu}{x}-\frac{\mu}{2x^2}+\frac{\mu}{3x^3}-\Delta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲(16)之餘級數.但此爲一更替級數,其項係減小者,故其部分和數更替的大於及小於Δ. ρ_1. ρ_2. ρ_3,……則爲正而以0爲極限值之向下的數目.因之,(17)中之級數亦爲更替級數,其項爲向下者.而

$$\eta<h(1-h)\rho_1<\mu\frac{h(1-h)}{2x^2}.$$

此中之分子$h(1-h)=\frac{1}{4}-\left(h-\frac{1}{2}\right)^2$於$h=\frac{1}{2}$時.其值最大,等於$\frac{1}{4}$.表中最小之眞數爲$x=1000$,故

$$\eta<\frac{\mu}{8\cdot10^6}<0.06\cdot10^{-6}.$$

是卽小於第五位之0.006單位.

7. 對於眞數$x+h$,由表值用插入法可得對數

$$\log^*(x+h)=\log^*x+[h\,\Delta^*],$$

此中之$[h\,\Delta^*]$爲$h\,\Delta^*$之最近的整數.今如設

$$\log^*(x+h)=\log^*x+h\,\Delta^*+\theta,$$

則

$$|\theta|\leqq0.5.$$

按 (14) 及 (15), 卽有

$$\log^*(x+h)=\log x-\lambda_0+h(\Delta-\lambda_1+\lambda_0)+\theta$$
$$=\log x+h\,\Delta-(1-h)\lambda_0-h\,\lambda_1+\theta$$
$$=\log(x+h)-\eta-(1-h)\lambda_0-h\,\lambda_1+\theta.$$

今設 $\log^*(x+h)=\log(x+h)-\lambda_h$, 則有

$$|\lambda_h|\leqq(1-h)|\lambda_0|+h|\lambda_1|+|\theta|+|\eta|<1.006.$$

從可知應用對數表時,所得之差誤,有時可至於末位小數之一單位,此於五位或七位之表均然.

例如設 $x+h=65765.46=N$. 則用七位表時,用插入法可得 $\log N=4.8179978$. 但如用10位, 則有

$$\log N=4.8179978622,$$

故七位者當作 4.8179979.

§132. 反三角函數

1. 反三角函數,卽爲三角函數之倒. 設

(1) $$z=\sin\varphi,$$

則 φ 作爲 z 之函數時,名爲 z 之弧正弦 (Arcussinus), 寫作

(2) $$\varphi=\text{arc}\sin z.$$

因之,吾人將 φ 視爲角度,而 arc sin z 之意義,則爲一弧,其正弦爲 z. 例如

$$\text{arc}\sin 0=0,\ \text{arc}\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\ \text{arc}\sin 1=\frac{\pi}{2},$$

故以 1 爲半徑之圓周之四分之一其長等於 arc sin 1 因其與圓之量法有密切之關係,故 arc sin 及其相關之函數亦稱爲圓度函數 (zyklometrische Funktionen)

(1) 與 (2) 中有其一,亦必有其二.

2. 對於 sin 之一値 z, 其弧之値自不一而足.因 $\sin\varphi=\sin(\varphi+2k\pi)$, $\sin\varphi=\sin(\pi-\varphi)$, 故對於 z 之一値除某弧而外,尙有此弧加以 2π 之倍數所得之弧,及其與 π 補充之値.換言之,

函數 arc sin 爲無限多値的函數,倘於某一 z 其一値用 $\text{Arc}\sin z$ 表之,則於此 z, 可由

$$\text{arc}\sin z=\text{Arc}\sin z+2k\pi \tag{3}$$

及

$$\text{arc}\sin z=-\text{Arc}\sin z+(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

以得其一切値

3 於實 φ 恆有

$$-1\leqq z\leqq 1,$$

故僅對於 z 之此項値,乃有 arc sin 函數之實値.而如 φ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $+\frac{\pi}{2}$ 時,z 卽經過一切此項値.因之,關於 z 之一切値中,吾人可選取其一,在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 之間者:

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\text{Arc}\sin z\leqq\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

此值名爲 arc sin 函數之主要值.

4 仿此,吾人亦可將

$$z=\cos\varphi$$

倒之,以得

$$\varphi=\operatorname{arc}\cos z$$

例如 $\operatorname{arc}\cos 0=\frac{\pi}{2},\ \operatorname{arc}\cos 1=0,\ \operatorname{arc}\cos(-1)=\pi.$

但 $$\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

故 $$\operatorname{arc}\cos z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\sin z.$$

緣此,吾人實無採用 arc cos 函數之必要.

5. 但如

(5) $$z=\operatorname{tg}\varphi,$$

則反之,即有

(6) $$\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg} z,$$

是即 φ 爲一弧其正切等於 z 例如

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} 0=0,\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} 1=\frac{\pi}{4},\ \operatorname{arc}\operatorname{tg}\infty=\frac{\pi}{2}.$$

因 $$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi+\pi),$$

故於某一值 z 有無限多之弧值,可由其中之一加 π 之倍數以得之:

函數 arc tg 爲無限多值者.有

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} z + k\pi.$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots)$$

於此,其主要值 Arc tg z 於實 z 可用

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} z \leqq \frac{\pi}{2}$$

以決定之.

6 此外,尚有

$$z = \operatorname{ctg} \varphi$$

之倒
$$\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} z.$$

但因
$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

故亦可歸於 arc tg 函數:

$$\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} z.$$

§133. Arc tg 級數及 π 之求法

1 反三角函數所有之級數中,今僅以推求 arc tg 者為限.吾人試由 tg φ 之指數函數式出發:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{i} \frac{e^{2i\varphi} - 1}{e^{2i\varphi} + 1} = z.$$

則得
$$e^{2i\varphi} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

因之, φ 或

(1)
$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

是卽 arc tg 函數可歸之於自然對數.對於 ln 函數之無限多的分支,與之相當者爲 arc tg 函數之無限多的分支.今試取其主要值,卽

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,tg} z \leqq \frac{\pi}{2},$$

則對於 ln 有

$$-\pi < \frac{1}{i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \leqq \pi.$$

按 (1), 對於實數 z $\ln \dfrac{1+iz}{1-iz}$ 爲純虛數[1], 故按 § 130 之 **5.**, 可知

與 arc tg 函數之主要值相當者,爲自然對數之主要值.

2. 因之按 § 131 之 (7), 卽可得級數展開法如下:

$$\operatorname{Arc\,tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots\cdots, \tag{2}$$

註: (1) 吾人亦可如是以知之: 設

$$\ln \frac{1+iz}{1-iz} = a + ib,$$

於此, a 與 b 爲實數, 則

$$\frac{1+iz}{1-iz} = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

倘將分數用 $1+iz$ 乘之, 將兩端之實數部分與虛數部分相等之, 則得

$$e^a \cos b = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$e^a \sin b = \frac{2z}{1+z^2}.$$

二者之平方之和爲 $e^{2a}=1$, 故必 $a=0$.

此級數對於單位圓內之每一z均爲收斂者.

此級數對於$z=\pm 1$亦爲收斂者.而按Abel之定理其值於$z=1$時爲$\operatorname{Arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}$.故得著名之級數如下:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots \tag{3}$$

惟在實用上,吾人亦殊難用此級數以推算π之值耳.

3. 倘用$\operatorname{arc\,tg}$函數之相加定理則可得較佳之級數展開法以推求π之值.

設
$$x=\operatorname{tg}\varphi,\quad y=\operatorname{tg}\psi,$$
則
$$\varphi=\operatorname{arc\,tg} x,\ \psi=\operatorname{arc\,tg} y,$$
按相加公式,可得
$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=\frac{x+y}{1-xy},$$
故
$$\varphi+\psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$$
或
$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}. \tag{4}$$

此式對於主要值亦仍適用.惟如左端之和超出間段$\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$,則此端須加或減$\pi$.

4. 今決二眞分數x與y,使$\frac{x+y}{1-xy}=1$,則按(4)

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arc\,tg} x+\operatorname{Arc\,tg} y.$$

例如取$x=\frac{1}{2}$,則$y=\frac{1}{3}$,即得Euler氏之式如下:

(5) $$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

倘於其中按 (2) 將級數代入之,則所得之級數,其收斂較 (3) 爲速.

5. 倘於 (4) 內再加上一函數 $\operatorname{arc\,tg} z$, 并再用此式,則得

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y+\operatorname{arc\,tg} z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$$

試仍決定 x, y, z 爲眞分數,使

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=1,$$

則有 $$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arc\,tg} x+\operatorname{Arc\,tg} y+\operatorname{Arc\,tg} z.$$

例如吾人取 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{8}$, 卽得

(6) $$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

Dase 氏曾用此式,求 π 之値至200位小數.

6 尙有一較佳之式, 1706 年時 John Machin 已曾用以推求 π 之値至100位小數. Machin 氏由一銳角 α 出發:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5},$$

故 $$\alpha=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{5}.$$

如是則 $$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2(2\alpha)} = \frac{120}{119},$$

而 $\operatorname{tg} 4\alpha$ 與 1 已極相近, 4α 僅稍大於 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ 但

$$4\alpha = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{120}{119} = 4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5}.$$

吾人於 (4) 內設

$$x = 1 \quad \frac{x+y}{1-xy} = \frac{120}{119},$$

則 $$\frac{1+y}{1-y} = \frac{120}{119}, \quad y = \frac{1}{239},$$

因之, $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{120}{119} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

或

(7) $$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

Shanks 氏曾用此式推算 π 之值至 707 位小數.取其 32 位時,有

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50\cdots\cdots$$

7. 以上兩節內所論之函數,一方面爲指數函數及三角函數,他方面爲其倒,即對數及反三角函數,吾人名之爲簡易超絕函數.此項函數之理論,其中心在於 Euler 氏式 (§ 127, **5.**).蓋三角函數與指數函數間之關係,以及反三角函數與對數間之關係,均可由此以得之也.

§ 134. 三角級數

1. 今設

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots \tag{1}$$

爲一乘方級數,其係數爲實數,其收斂半徑爲 R. 今將 z 之極式

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2}$$

用入,則此級數於 $r < R$ 時爲收斂者.

將乘方

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

用入,幷將實數與虛數部分分開,則級數 (1) 卽分成爲二級數:

$$\begin{aligned} A(r, \varphi) &= a_0 + a_1 r\cos\varphi + a_2 r^2\cos 2\varphi + \cdots\cdots \\ B(r, \varphi) &= \quad\quad a_1 r\sin\varphi + a_2 r^2\sin 2\varphi + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

此二級數按之 § 119 之 **4**, 與 (1) 在同樣條件下收斂,卽於 $r < R$ 及 φ 之每一值.

如是,吾人所得之級數,爲某角之倍數之正餘弦所成者.此項級數,名爲三角級數,或因其首爲數學家 Fourier 氏所研討,確立其理論基礎,故亦名 Fourier 氏級數.

2. 茲僅以得自二項式級數之三角函數稍詳論之.於級數

$$(1+z)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}z + \binom{\mu}{2}z^2 + \cdots\cdots \tag{4}$$

中,將 z 之極式(2)代入.設

(5) $$1+z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

則 $$\rho^2=(1+r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi=1+2r\cos\varphi+r^2,$$

故

(6) $$\rho=\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2}.$$

方向角 θ,可由

$$\cos\theta=\frac{1+r\cos\varphi}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{r\sin\varphi}{\rho}$$

以決定之,或亦可用

(7) $$\operatorname{tg}\theta=\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}.$$

由此,θ 之決定,僅在相差 π 之倍數範圍內,故可設

$$\theta=\theta_0+k\pi,\text{ 其中 } -\frac{\pi}{2}<\theta_0\leqq\frac{\pi}{2}.$$

但按(5),有

(8) $$(1+z)^\mu=\rho^\mu(\cos\mu\theta+i\sin\mu\theta)$$

且於 $z=0$ 時,此當爲 1. 於 $z=0$ 時,$r=0$,故按(6)及(7) $\rho=1$, $\operatorname{tg}\theta=0$. 因之,$\theta=k\pi$,而由(8),得

$$\sin\mu k\pi=0.$$

倘此式對於任何 μ 均適用,則必 $k=0$. 蓋如 k 不等於 0,則於 $\mu=\frac{1}{2k}$ 時,將有 $\sin\mu k\pi=1$ 矣.如是,θ 之值已不二的決定,惟須取其得自(7) $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 中之值,而按 § 133 之 **1**., 可

知 θ 爲 arc tg 之主要值:

(9) $$\theta = \operatorname{Arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}.$$

3. 今於 (4) 之右端按 **1.** 將 z 之乘方代入,并將兩端之實數部分與虛數部分各相等之,則卽得三角級數

(10)
$$\rho^\mu\cos\mu\theta = 1+\binom{\mu}{1}r\cos\varphi+\binom{\mu}{2}r^2\cos 2\varphi+\cdots\cdots$$
$$\rho^\mu\sin\mu\theta = \binom{\mu}{1}r\sin\varphi+\binom{\mu}{2}r^2\sin 2\varphi+\cdots\cdots$$

此中之 ρ 及 θ, 由 (6) 及 (9) 決定之.此二級數與 (4) 相同,在 $r<1$ 之條件下收斂.

4. 按 (10), 有

$$\frac{\rho^\mu\cos\mu\theta-1}{\mu} = r\cos\varphi+\frac{\mu-1}{2}r^2\cos 2\varphi$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3}r^3\cos 3\varphi+\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho^\mu\sin\mu\theta}{\mu} = r\sin\varphi+\frac{\mu-1}{2}r^2\sin 2\varphi$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3}r^3\sin 3\varphi+\cdots\cdots$$

右端之級數爲 μ 之連續函數.故可兩端均使 $\mu\to 0$. 今於左端用 $\cos\mu\theta$ 之級數

$$\cos\mu\theta = 1-\frac{\mu^2\theta^2}{2!}+\cdots\cdots,$$

則
$$\frac{\rho^\mu\cos\mu\theta-1}{\mu}=\frac{\rho^\mu-1}{\mu}-\frac{\mu}{2}\rho^\mu\theta^2+\cdots\cdots$$

故按 § 131, **1**：

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\rho^\mu\cos\mu\theta-1}{\mu}=\mathrm{Ln}\,\rho=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+2r\cos\varphi+r^2).$$

又按 § 127, **3**

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\rho^\mu\sin\mu\theta}{\mu}=\lim_{\mu\to 0}\frac{\sin\mu\theta}{\mu}=\theta=\mathrm{Arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi},$$

故如於以上之級數內設 $\mu=0$, 則得

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+2r\cos\varphi+r^2)=r\cos\varphi-\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi-\cdots\cdots$$

(11)
$$\mathrm{Arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=r\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi-\cdots\cdots$$

此中之第一級數於 $\varphi=0$ 時成爲 $\mathrm{Ln}(1+r)$ 之級數.於 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 時則第二級數成爲 $\mathrm{Arc\,tg}\,r$ 之級數.

5. 倘按 § 117 之 **3**. 注意及此項級數於 $r=1$ 時亦尚收斂.則卽得可注意之結果,今於該節定理內設

$$c_1=1,\ c_2=\frac{1}{2},\ c_3=\frac{1}{3},\ c_4=\frac{1}{4},\cdots\cdots,$$

幷試證明

$$U_n = \cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots\cdots \pm \cos n\varphi$$

$$V_n = \sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \cdots\cdots \pm \sin n\varphi$$

恆在有限之界內.然此則不難由公式

$$2\cos\frac{\varphi}{2}\cos n\varphi = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$$

$$2\cos\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi = \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$$

以知之.今將此項公式用於各項,卽得

$$\begin{aligned}2U_n\cos\frac{\varphi}{2} &= \left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{3}{2}\varphi\right)-\left(\cos\frac{3}{2}\varphi+\cos\frac{5}{2}\varphi\right)\\ &\quad+\cdots\cdots\pm\left(\cos\frac{2n-1}{2}\varphi+\cos\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\\ &=\cos\frac{\varphi}{2}\pm\cos\frac{2n+1}{2}\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2V_n\cos\frac{\varphi}{2} &= \left(\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3}{2}\varphi\right)-\left(\sin\frac{3}{2}\varphi+\sin\frac{5}{2}\varphi\right)\\ &\quad+\cdots\cdots\pm\left(\sin\frac{2n-1}{2}\varphi+\sin\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\\ &=\sin\frac{\varphi}{2}\pm\sin\frac{2n+1}{2}\varphi.\end{aligned}$$

此處所須除去者,爲 $\cos\frac{\varphi}{2}=0$, 卽 $\varphi=\pm\pi$ 之一事例.倘將此事例除去,則因 $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$ 及 $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$ 於增加的 n 僅變化於 -1 及 $+1$ 之間,故由以上之公式,可知 U_n 與 V_n 不能超出某種界限之上

在所除去之事例方面,卽於 $\varphi=\pm\pi$ 時,U_n 之一切項均將等於 -1, 故 U_n 將於增加的 n 成爲負的無限大.他方面,V_n 之項則均將成爲 0, 故其本身亦成爲 0.

6. 吾人旣知其爲收斂,則可按 §122 **2**, 對於 $r=1$ 求(11)之値,使其左端之 r 成爲 1. 如是,卽有

$$\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2}=\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$$

$$=2\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

$$=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2}.$$

此式內 $-\pi<\varphi<\pi$, 故 $\cos\frac{\varphi}{2}$ 爲正者,$\frac{\varphi}{2}$ 在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 之間.因之,吾人由(11), 得如次之展開法:

$$\operatorname{Ln}\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)=\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots\cdots$$

(12)

$$\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots\cdots$$

至於在所除外之事例方面,卽 $\varphi=\pi$, 則在第一級數內收斂卽不成立.左端亦將爲無限大.在第二級數方面,收斂固仍舊,但和數之値不等於 $\frac{\pi}{2}$ 而爲 0.

7. 今於 (12) 之第二式內設 $\varphi=x$, $\varphi=\pi-x$, 則得二公式:

(13)
$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots$$
$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots$$

於此.第一式於

(14)
$$-\pi<x<+\pi$$

內適用,第二式則於

$$0<x<2\pi$$

內適用.故可知此二式有一共同之適用區域:

(15)
$$0<x<\pi.$$

倘將其加之,則於此間段有

(16)
$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots$$

因之吾人可見一極堪注意之結果,卽右端之收斂級數,其項爲 x 之連續函數.但其和則與 x 無關.於 $x=\frac{\pi}{2}$ 時,此級數卽成爲 Leibniz 之級數.

8. 關於此項級數之狀況,吾人可作一幾何的圖象.今設

(17)
$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots$$
$$\varphi(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots,$$

則因右端之級數不僅於(14)及(15)內收斂,按 **5.** 且於一切 x 均爲收斂者,故(17)實決定一 x 之函數,其值於(15)內由(13)及(16)所決定.

對於每一整 n, 有

$$\sin(-nx) = -\sin nx,$$

$$\sin n(x+2\pi) = \sin nx,$$

故 $f(x)$, $\varphi(x)$ 能充適如次之條件:

$$f(-x) = -f(x), \qquad \varphi(-x) = -\varphi(x),$$

$$f(x+2\pi) = f(x), \qquad \varphi(x+2\pi) = \varphi(x).$$

此外,

$$f(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0,$$

$$f(\pi) = 0, \qquad \varphi(\pi) = 0,$$

而於 $0<x<\pi$:

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{4}.$$

由此,於 x 之一切值, $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 之值均已確定.

今將 x 之值作爲橫坐標畫出之, $y=f(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 爲其所屬之縱坐標,則得此項函數之圖解,如圖24中之粗線爲 $f(x)$ 之代表,圖25中所表者則爲 $\varphi(x)$.

由此可見 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 爲不連續之函數,惟級數之項,則固爲連續函數耳.

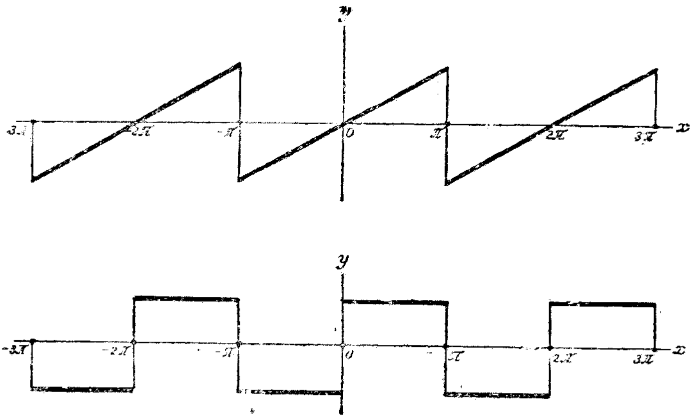

圖 24 及 圖 25

9　此項不連續性之發生可由圖 26 以得一明確之觀念.於此四部分中,所畫出之曲線,由方程

$$y=\sin x,\quad y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x,$$

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x,$$

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x$$

表出之,其虛線所表者則爲個別之項.此項曲線均經過 0 點, $\pm\pi$ 點, $\pm 2\pi$ 點,……,爲連續之曲線.但其中每一在後者較之在其前者於 $x=k\pi$ 處上升爲峭,且以波形之曲折,與圖 26 中所示之形式相接近.

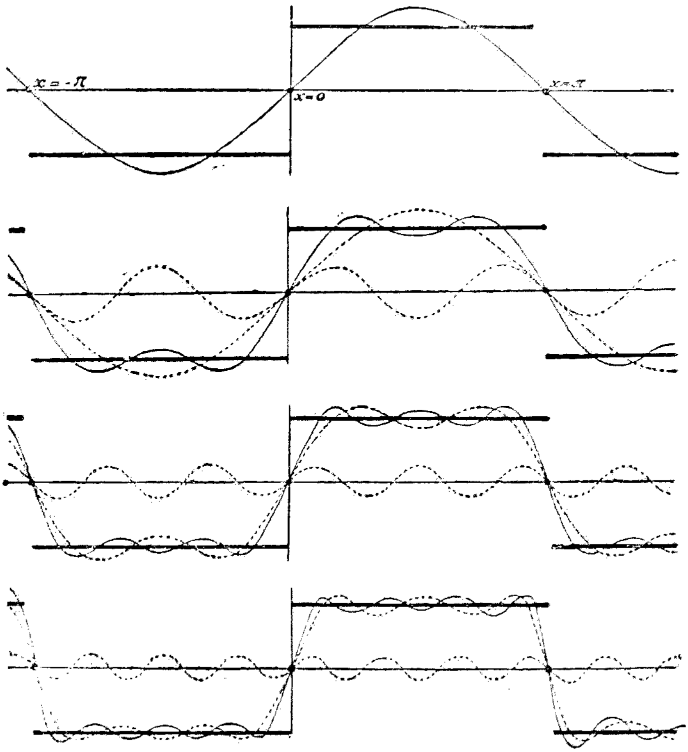

圖 26

10. 此項三角級數,當十八世紀之中,已曾因數理物理上之問題而遇見之,彼時對於其可注意之現象,亦已注意及,其一部分吾人於以前諸段內亦既見及.如連續函數所成之級數,可代表一不連續之函數.適用於某一間段內之式.不必適用於他間段內,以及用某種步驟而不用公式表出之所謂隨意函數,亦可用三角級數以表

出之等等.此項級數至今日尚爲數學探討上之重要對象.對於純粹數學及應用數學同其重要.當十八世紀時,Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler d'Alembert, Lagrange 等諸數學家曾從事之,但精湛廣大之理論,則至 Fourier 氏之大作 Théorie analytique de la Chaleur (1822) 問世,乃始完成.三角級數之謹嚴的探討,實始於 Dirichlet 之名著(見 Journ. f. Math. 4, 1828), 且今日一般所用之函數概念,亦首見於此名著中,蓋適以上述之現象爲根據而構成者也.

今玆所及者僅三角級數之概念及其最簡單之例而已.至於眞正之理論,主要者如級數之決定(亦卽係數之決定)以及探討何種函數可用 Fourier 氏級數以表之,此則完全爲積分算法上之事也.

第二十三章　π 之乘積表法　乘方和數 $\zeta(2n)$　歐氏常數

§ 135　π 之乘積表法　斯氏公式

1.　於 $\sin \pi x$ 之乘積式內設 $x=\frac{1}{2}$, 則得

$$(1)\quad \begin{aligned}\frac{2}{\pi}&=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\cdots\\&=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots\cdots,\end{aligned}$$

故

$$(2)\quad \frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdots\cdots$$

此式卽平常所知之 Wallis 氏乘積[1].

(1) 之式亦可作

註: (1) John Wallis, Arithmetica infinitorum, Oxford 1655. 乘積 (1) 與 (2) 在此種寫法下爲無條件收斂者. 但如寫作

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots,$$

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots,$$

則僅爲有條件收斂者.

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}P_n,$$

於此,

$$P_n=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots\cdots2n\cdot2n}.$$

因之,

(3)
$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)},$$

故可得

(4)
$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots\cdots$$

公式(3)亦可作

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots\cdots(2n)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots\cdots(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

而如右端用$\lim\dfrac{2n+1}{2n}=1$乘之,則得

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots\cdots(2n)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots\cdots(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n}.$$

試用$\dfrac{\pi}{2}$以除之,開其方,卽有

$$\lim\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}=1,$$

而如再用$2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n=2^n\cdot n!$乘其分子分母,則得

(5)
$$\lim\frac{(n!)^2\cdot2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}}=1.$$

2. 吾人可用此極限值以推得一重要之公式,俾於較大之n,可以之近似的求

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n=n!$$

之值.

試由§131之(9)出發,設$x=n$,即可得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots,$$

因而

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\cdots$$

$$<1+\frac{1}{3(2n+1)^2}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\cdots\right].$$

但

$$\frac{1}{(2n+1)^2}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\cdots\right]=\frac{1}{(2n+1)^2-1}$$

$$=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

故 $$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)},$$

而如將其用爲e之指數,即有

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}}. \tag{6}$$

今試取一列數目

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{7}$$

則

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

故按(6)

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此,吾人可得二列不等式:

$$a_n>a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots\cdots$$

及

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}<\cdots\cdots.$$

故可知前者成爲一向下數列,後者則爲向上之數列.而當n增大時,每二個相當數目之差,可小於任何小之數目因之,此爲二相關數列而有極限值

$$\lim a_n=a \tag{8}$$

存在,且恆

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n.$$

如是,吾人可設

$$a_n=a\,e^{\frac{\theta}{12n}},$$

其中

$$0<\theta<1.$$

按之(7)於是有

(9) $$n! = a\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

此處,吾人尙須決定與n無關之因子,卽a是.

3. 今用$2n$以代n,則

$$(2n)! = a(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{\theta'}{24n}},$$

於此,仍爲

$$0<\theta'<1.$$

此外,

$$(n!)^2 = a^2 n^{2n+1} e^{-2n+\frac{\theta}{6n}},$$

故
$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = a\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{\theta}{6n}-\frac{\theta'}{24n}},$$

因而

$$a = \lim \frac{(n!)^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

或按(5),

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

於是吾人得此結果卽

(10) $$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

於此,θ爲未經詳細決定之正數<1,故於較大之n,可設

(11) $$n! = \sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

此卽爲著名之斯氏公式(Stirlingsche Formel) 凡函數論

或然算法及數理物理上有須約計大數之處,恆須用及之.經Γ函數論之詳細探討時,可知(10)中之θ,於增大的n可向1收斂.故如欲較爲近似,則不用(11)而用下式:

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}. \tag{12}$$

將此公式用於較小之n時,已可得頗精確之結果.例如$n=10$時,有:

	log
$\sqrt{2\pi}$	0.3990899
$n^{n+\frac{1}{2}}$	10.5
e^{-n}	-4.3429448
$e^{\frac{1}{12n}}$	0.0036191
	6.5597642

由此可得之數爲3628810,但$10!=3628800$.

§ 136 乘方和數$\zeta(2n)$

1 吾人曾將正弦函數之乘積展法,與整函數之分解成爲根因子相比較,今試將此項類似性推求之,使其及於根之乘方和數之推算法.

試將乘積

$$P_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \tag{1}$$

算出之,則得一 $2n$ 次之整函數:

$$P_n=1+a_1x^2+a_2x^4+\cdots\cdots+a_nx^{2n} \tag{2}$$

其中之 $-a_1, a_2, -a_3, a_4, \cdots\cdots, \pm a_n$ 爲 n 個根

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\cdots\cdots,\ \frac{1}{n^2}$$

之對稱基本函數.

按§97,可知乘方和數

$$s_k=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^{2k}}$$

與對稱基本函數間,有如次之關係:

$$\begin{aligned}&s_1+a_1=0\\&s_2+a_1s_1+2a_2=0\\&s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

2. 今使 n 增加至於無限,則 P_n 成爲 $\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$,而按§127之 **5**,有如次之級數展開法:

$$1-\frac{\pi^2x^2}{3!}+\frac{\pi^4x^4}{5!}-\frac{\pi^6x^6}{7!}+\cdots\cdots$$

故

$$\begin{aligned}&\lim a_1=-\frac{\pi^2}{3!},\quad \lim a_2=\frac{\pi^4}{5!},\\&\lim a_3=-\frac{\pi^6}{7!},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{4}$$

他方面，s_k 即轉成為無盡級數

$$\lim s_k = 1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots\cdots \qquad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

而如 §117 之 5. 中所已知者，此項級數均收斂且有一定之數值．但吾人亦可將此項和數視為一複變數 u 之某種函數之值[1]：

$$\zeta(u)=1+\frac{1}{2^u}+\frac{1}{3^u}+\frac{1}{4^u}+\cdots\cdots \tag{5}$$

此函數對於每一 u（其實數部分 >1）為此級數所決定，而有

$$\lim s_k = \zeta(2k). \qquad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

為簡單計，吾人暫將其寫作 ζ_{2k}，而如於 (3) 內使 $n\to\infty$，則按 (4)，有

$$\begin{aligned}
&\zeta_2-\frac{\pi^2}{3!}=0\\
(6)\qquad &\zeta_4-\frac{\pi^2}{3!}\zeta_2+\frac{2\,\pi^4}{5!}=0\\
&\zeta_6-\frac{\pi^2}{3!}\zeta_4+\frac{\pi^4}{5!}\zeta_2-\frac{3\,\pi^6}{7!}=0.
\end{aligned}$$

由此，吾人即不難一一計算 $\zeta_2, \zeta_4, \zeta_6, \cdots\cdots$ 而得

註：(1) 將此級數作為複變數之函數用之，實創於 Riemann 氏（見其關於某一定數下質數之數的著名論文），故亦稱為 Riemann 氏 ζ 函數．凡與質數之分配有關之問題方面，此函數均關重要．

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

(7) $$\zeta(4)=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6)=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

3. 此項和數與柏氏數目間,有密切之關係.將 π^{2n} 除 (6) 中之第 n 方程,則

$$\frac{1}{(\ n-1)!}\frac{\zeta_2}{\pi^2}-\frac{1}{(2n-3)!}\frac{\zeta_4}{\pi^4}+\frac{1}{(2n-5)!}\frac{\zeta_6}{\pi^6}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\zeta_{2n}}{\pi^{2n}}=\frac{n}{(\ n+1)!}$$

今用 $(2n+1)!$ 乘之,并設

$$\frac{\zeta_2}{\pi^2}=\frac{C_1}{2!},\quad \frac{\zeta_4}{\pi^4}=-\frac{C_2}{4!},\quad \frac{\zeta_6}{\pi^6}=\frac{C_3}{6!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\quad \frac{\zeta_{2n}}{\pi^{2n}}=(-1)^{n-1}\frac{C_n}{(2n)!},$$

則有

$$\binom{2n+1}{2}C_1+\binom{2n+1}{4}C_2+\binom{2n+1}{6}C_3+\cdots\cdots$$

$$+\binom{2n+1}{2n}C_n=n.$$

由此吾人不難於 $n=1,2,3,\cdots\cdots$——計算 C_n 之值.但如兩端用 2^n 乘之,則即得 § 128 中之循環式 (13),而因按 (7) 之第一級數 $C_1=\frac{1}{3}=2B_1$,故有

$$C_n = 2^{2n-1} B_n$$

於是吾人對於和數

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\cdots$$

有[1]

(8) $$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n.$$

4.　§ 128 中之級數 (5)

(9) $$\frac{z}{2} \frac{e^z+1}{e^z-1} = 1 + \frac{B_1}{2!} z^2 + \frac{B_2}{4!} z^4 + \cdots\cdots,$$

其收斂區域之問題,彼時未能解決者.今亦可解決之.由(8),可得

$$\lim \sqrt[2n]{\frac{B_n}{(2n)!}} = \frac{1}{2\pi}$$

故按 § 121 之 **2**：

級數 (9) 在一圓內收斂,此圓以 O 點爲心,以 2π 爲半徑.

爲級數所表出之函數 $\frac{z}{2} \frac{e^z+1}{e^z-1}$ 於 $z = 2\pi i$ 時爲無限.但於與 O 點較此爲近之點則不致如此.

5.　此外由 (8),吾人亦可對於 n 爲大數時之柏氏數目之值,有所推論.$\zeta(n)$ 於充分大之 n 可任意與 1 相接近.故用 § 135 之 (12) 時,可近似的得

註：(1) Euler 曾欲將變數爲奇值時之 ζ 函數亦用已知之常數以表出之,但此事至今尚未成功.

(10) $$(-1)^{n-1}B_n=4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}e^{\frac{1}{24n}}.$$

例如於 $n=62$ 時,可得

$$\log(-B_{62})=108.50459,$$

故與 Adams 氏表上之數相合,為一 109 位的數字,其開首諸位為 31958……

6. 與 $\zeta(2n)$ 相關者尚有其他之級數,今亦不難求其和數.吾人先一論乘方和數

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\cdots\cdots\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

因此級數亦與 $\zeta(2n)$ 同為無條件收斂者,故可寫作

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\cdots-\frac{2}{2^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\zeta(2n),$$

而由 (8),可知

(11) $$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\cdots\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n}(2^{2n-1}-1)P_n}{(2n)!}.$$

今再取奇數之乘方之倒,作其和數

$$1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\cdots$$

則此級數與

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots\cdots-\frac{1}{2^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n)$$

全相等.故按§128之(11),有

$$1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\cdots$$

(12) $$=(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}{2(2n)!}B_n$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n}}{4(2n)!}A_n$$

於 $n=1$ 時,按(11)及(12),得

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

§137 歐氏常數

1. 乘方和數

(1) $$\zeta(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots$$

與某一種極限值間有密切之關係,此種極限值則在積分算法及高等整數論上,有重要之關係.

吾人已知調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

爲發散者關於此種發散之性質,有下列之定理:

調和級數之部分和數,係如是增大者,即,差數

$$D_q=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{q}-\ln q \tag{2}$$

於$q\to\infty$時向一有限之極限值收斂

因之,吾人可云此項部分和數以與自然對數相同之程度增加.

2. 欲證明此定理,可作

$$D_q-D_{q-1}=\frac{1}{q}-\ln q+\ln(q-1)=\frac{1}{q}+\ln\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

或如用$\ln\left(1-\frac{1}{q}\right)$之級數時:

$$D_q-D_{q-1}=-\frac{1}{2q^2}-\frac{1}{3q^3}-\frac{1}{4q^4}-\cdots\cdots \tag{3}$$

故可知

$$D_q-D_{q-1}<0,$$

而

$$D_{q-}>D_q>D_{q+1}>\cdots\cdots \tag{4}$$

是即D_q構成一向下數列.

3 他方面,試觀

$$D'_q=D_{q+1}-\frac{1}{q+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{q}-\ln(q+1), \tag{5}$$

則可知

$$D'_q - D'_{q-1} = \frac{1}{q} - \ln(q+1) + \ln q = \frac{1}{q} - \ln\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

或

$$(6)\qquad D'_q - D'_{q-1} = \frac{1}{2q^2} - \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{4q^4} - \cdots\cdots,$$

故

$$D'_q - D'_{q-1} > 0,$$

而

$$(7)\qquad D'_{q-1} < D'_q < D'_{q+1} < \cdots\cdots$$

此即 D'_q 爲一向上數列.

試注意 D'_q 恆小於 D_q. 其差 $D_q - D'_q = \ln\left(1+\frac{1}{q}\right)$ 向 0 收斂, 則可知 (4) 及 (7) 爲二相關數列,決定一數目

$$\gamma = \lim D_q = \lim D'_q,$$

且恆

$$(8)\qquad D_q - \frac{1}{q} < \gamma < D_q.$$

因之, **1** 中之定理已經證明.

數目

$$(9)\qquad \gamma = \lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{q}-\ln q\right)$$

名爲歐氏常數.

4. 由公式 (3) 及 (6), 吾人可推得級數以計算 γ 試於 $q=2, 3, 4, \cdots\cdots, q$ 作公式 (3):

$$D_2-D_1=-\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}-\cdots\cdots$$

$$D_3-D_2=-\frac{1}{2\cdot 3^2}-\frac{1}{3\cdot 3^3}-\frac{1}{4\cdot 3^4}-\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_q-D_{q-1}=-\frac{1}{2q^2}-\frac{1}{3q^3}-\frac{1}{4q^4}-\cdots\cdots$$

且爲簡單計設

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{q^k}=S_k(q),$$

$D_1=1$, 則經相加後得

(10) $$D_q=1-\frac{1}{2}S_2(q)-\frac{1}{3}S_3(q)-\frac{1}{4}S_4(q)-\cdots\cdots$$

此級數爲若干收斂級數之和,故亦爲收斂者按(8), 對於任何之q,卽有

$$1-\frac{1}{q}-\frac{1}{2}S_2(q)-\frac{1}{3}S_3(q)-\cdots\cdots<\gamma<1-\frac{1}{2}S_2(q)-\frac{1}{3}S_3(q)-\cdots\cdots$$

於$q\to\infty$時, $\lim S_k(q)=\zeta(k)-1=\zeta_k-1$, 故如於(10)內逐項取其極限,則卽得一級數:

(11) $$\delta=1-\frac{1}{2}(\zeta_2-1)-\frac{1}{3}(\zeta_3-1)-\frac{1}{4}(\zeta_4-1)-\cdots\cdots$$

今試證明$\delta=\lim D_q$, 卽$\delta=\gamma$. 吾人先可見者,爲級數之收斂,蓋按§117之6,有

$$\zeta_k < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{k-1}}} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1},$$

故
$$\zeta_k - 1 < \frac{1}{2^{k-1}-1},$$

$$\frac{1}{2}(\zeta_2-1)+\frac{1}{3}(\zeta_3-1)+\cdots\cdots<\frac{1}{2(2-1)}+\frac{1}{3(2^2-1)}$$
$$+\frac{1}{4(2^3-1)}+\cdots\cdots,$$

此處右端之級數較之 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots$ 收斂更速.

今用(10)及(11)作 $D_q-\delta$, 幷設

$$(\zeta_k-1)-S_k(q)=\frac{1}{(q+1)^k}+\frac{1}{(q+2)^k}+\cdots\cdots=\sigma_k(q),$$

則
$$D_q-\delta=\frac{1}{2}\sigma_2(q)+\frac{1}{3}\sigma_3(q)+\cdots\cdots$$

但
$$\frac{1}{(q+1)^2}<\frac{1}{q(q+1)}=\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1},$$

$$\frac{1}{(q+1)^2}<\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2},\cdots\cdots,$$

故 $\sigma_2(q)<\frac{1}{q}$. 又因 $\sigma_k(q)<\frac{1}{q^{k-2}}\sigma_2(q)$,

故
$$\sigma_k(q)<\frac{1}{q^{k-1}}.$$

因之,

$$D_q-\delta<\frac{1}{2q}+\frac{1}{3q^2}+\frac{1}{4q^3}+\cdots\cdots$$

$$<\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{q-1}$$

而在事實上 $\lim D_q=\delta$. 故對於歐氏之常數,有

(12) $$\gamma=1-\frac{1}{2}(\zeta_2-1)-\frac{1}{3}(\zeta_3-1)-\frac{1}{4}(\zeta_4-1)-\cdots\cdots$$

5 由方程 (6) 倘用 $q=2, 3, 4,\cdots\cdots q$ 構成之,并將其相加,則有

$$D'_q-D'_1=\frac{1}{2}S_2(q)-\frac{1}{3}S_3(q)+\frac{1}{4}S_4(q)-\cdots\cdots$$

而按 (5) $D'_1=1-\ln 2$, 故

$$D'_q=1-\ln 2+\frac{1}{2}S_2(q)-\frac{1}{3}S_3(q)+\cdots\cdots$$

經相似之考慮後可由對於一切 q 適用之不等式

$$D'_q<\gamma<D_q+\frac{1}{q+1},$$

於 $q\to\infty$ 時,得

(13) $$\gamma=1-\ln 2+\frac{1}{2}(\zeta_2-1)-\frac{1}{3}(\zeta_3-1)+\cdots\cdots$$

最後,復可由 (12) 及 (13) 用加減以得如次之展開法:

(14) $$\gamma=1-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{3}(\zeta_3-1)-\frac{1}{5}(\zeta_5-1)-\cdots\cdots$$

$$\ln 2=(\zeta_2-1)+\frac{1}{2}(\zeta_4-1)+\frac{1}{3}(\zeta_6-1)+\cdots\cdots$$

在此諸級數中,以(14)爲最適於計算γ,但須先詳知$\ln 2$之值而後可.但此外亦尚有較速收斂之級數,可用以計算γ至多位小數.吾人有

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90\cdots\cdots.$$

第二十四章　e與π之超絕性

§188. 問題之所在　史實

1. 前於第四章內已提出代數數目之概念.所謂代數數者,係指一數目ω,為有理係數的方程

(1)
$$C_0+C_1\omega+C_2\omega^2+\cdots\cdots+C_n\omega^n=0$$

之根.於此,吾人恆可假定C_0與C_n非為0,且$C_0, C_1,\cdots\cdots, C_n$為整數,無有公因子者.

關於實代數數目.吾人已知其將數目之列,無所不密的填滿.但不能謂其已盡數目之列.代數數之羣係可計點者,但一切實數之羣則為不可計點者,故除代數數而外,必尚有其他之數目也.

非代數的數目,名為超絕數.因之,所謂超絕數者,係指一種數目,不能為(1)種類的方程之根者.超絕數之羣,係不可計點者.

今茲所欲從事者,在證明e及π之超絕性.

2. 倘將一數目視為一線段,而可由單位線段用直線及圓以作之,則此數自必為代數數.且尚有特殊之性

質,蓋此項數必可用一串二次方程以決定之也.故如能證明 π 之超絕性,則自古代所傳來之著名問題,即所謂求圓之方者,即可以解決矣.蓋吾人可知與圓等面積的平方之邊,決無法用直線及圓規由圓徑以作之也.

3. 關於數目 e, 吾人不難根據級數

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\cdots$$

以證明其爲無理數.蓋如 e 爲一有理數, $e=\frac{p}{q}$, 則在 $1!, 2!, 3!, \cdots\cdots$ 中必有一 $n!$ 可爲 q 所除盡.如是則 $n!e$ 將爲一整數.但他方面

$$n!e=N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots,$$

其中之 N 爲一整數.其餘數

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{n},$$

故
$$N<n!e<N+\frac{1}{n}.$$

如是則可見 $n!e$ 非爲整數.故如假定 e 爲有理數,則必得一矛盾.

其後 Liouville 氏復證明 e 不能爲整係數的二次方程之根.至 Hermite 氏,始證明其爲超絕數.

4 關於數目π, Lambert氏曾首先證明其爲無理數其所用者爲正切函數之連分式.最先證明π之超絕性者實爲Lindemann氏,其後Weierstrass氏曾將其證法化爲簡單,但晚近來Hilbert, Hurwitz, Gordan, Vahlen等諸氏復將e及π之證法如是簡易之,使吾人可無須藉助於高等數學,即已能爲之.今玆所用之證,實脫胎於Gordan氏,但不用其符號記法.

§139 指數函數之屬性

1. 以下吾人須用及整函數之引申一概念,而在高次引申方面,亦須採用§88, **11**內之記法.

今設ν爲一正整數,幷用$\nu!$以乘適用於任何實數或複數x之指數函數

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\cdots\cdots$$

則得

$$(1)\qquad \nu!e^x=\nu x^{\nu-1}+\nu(\nu-1)x^{\nu-2}+\cdots\cdots+\nu!+U_\nu,$$

於此,U_ν爲無盡級數

$$(2)\qquad U_\nu=x^\nu+\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+\frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots\cdots$$

(1)中在U_ν前之整函數之項,實爲x^ν之逐次的引申,故可作

$$\nu!e^x=D_1x^\nu+D_2x^\nu+\cdots\cdots+D_\nu x^\nu+U_\nu,$$

或

(3) $$\nu ! e^x = \sum_{a=1}^{m} D_a x^\nu + U_\nu.$$

此處之和號字母 a, 可由 1 至任何一整數 $m \geqq \nu$, 蓋一切 $D_a x^\nu$, 於 $a > \nu$, 則必為 0 也.

2. 今於 $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots, m$ 作方程 (3), 按次序以不定因子 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_m$ 乘之,並將其相加,則得

$$e^x(1!\gamma_1 + 2!\gamma_2 + \cdots\cdots + m!\gamma_m)$$

(4) $$= \sum_{a=1}^{m} D_a(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots\cdots + \gamma_m x^m)$$

$$+ \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots\cdots + \gamma_m U_m.$$

試用入一記法

$$\varphi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots\cdots + \gamma_m x^m,$$

則 $\varphi(x)$ 為適合 $\varphi(0) = 0$ 一條件之整函數, 但此外別無所限制, 而如設

(5) $$\varphi'(x) + \varphi''(x) + \cdots\cdots + \varphi^{(m)}(x) = \phi(x)$$

則 $$\phi(0) = \gamma_1 + 2!\gamma_2 + 3!\gamma_3 + \cdots\cdots + m!\gamma_m.$$

又如設

$$U(x) = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots\cdots + \gamma_m U_m,$$

則方程 (4) 卽成為

(6) $$e^x \phi(0) = \phi(x) + U(x).$$

此式為以後一切推論之基礎,其中之 $\phi(0)$ 係與 x 無關,

$\phi(x)$ 爲 x 之 $m-1$ 次的整函數,而 U 則爲用無盡級數以表出的 x 之函數.

3. 對於絕對值 $|U|$,吾人可有一上界.於每一正數 ν,有

$$\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}<\frac{1}{1\cdot 2},$$

$$\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}<\frac{1}{3!},\cdots\cdots,$$

故如 r 爲 x 之絕對值,則由 (2),可知

$$|U_\nu|<r^\nu\left(1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

或

$$|U_\nu|<r^\nu e^r.$$

故如以

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\cdots\cdots,\ c_m$$

表

$$\gamma_1,\ \gamma_2\ \cdots\cdots,\ \gamma_m$$

之絕對值,則由 $U(x)$ 之定義,有

$$|U(x)|<(c_1r+c_2r^2+\cdots\cdots+c_mr^m)e^r,$$

或如設

(7) $$F(r)=c_1r+c_2r^2+\cdots\cdots+c_mr^m,$$

則得

(8) $$|U(x)|<F(r)e^r.$$

此處之 $F(r)$ 與 $\varphi(x)$ 之構造相同,惟將後者中之 x 及 γ_1, $\gamma_2,\cdots\cdots,\gamma_m$ 易以 r, c_1, $c_2,\cdots\cdots c_m$ 而已.

§140　e之超絕性

1.　欲證明e之爲超絕數可間接爲之.試假定e爲n次方程

$$(1)\qquad C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots\cdots+C_ne^n=0$$

之根,於此,C_0 C_1, C_2 …… C_n爲整數,且C_0及C_n不等於0.蓋如$C_0=0$,則可用e之乘方以除方程(1),所得仍爲同形式之方程,但其中與e不相關之項已不等於0.

2.　今於§139之基本式([illegible])內設$x=1, 2,\cdots\cdots n$,則得

$$e\phi(0)=\phi(1)+U(1),$$

$$e^2\phi(0)=\phi(2)+U(2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^n\phi(0)=\phi(n)+U(n).$$

試用$C_1, C_2,\cdots\cdots, C_n$乘此項方程,將其加之并於兩端加上$C_0\,\phi(0)$,則因(1),可得

$$\begin{aligned}(2)\qquad &C_0\,\phi(0)+C_1\,\phi(1)+C_2\,\phi(2)+\cdots\cdots+C_n\,\phi(n)\\ &+C_1U(1)+C_2U(2)+\cdots\cdots+C_nU(n)\\ &=(C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots\cdots+C_ne^n)\phi(0)=0,\end{aligned}$$

或可作

$$(3)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}C_\nu\,\phi(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu U(\nu)=0.$$

按§139之(7),

$$\phi(\nu)=\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^{(\mu)}(\nu), \tag{4}$$

於此 $\varphi(x)$ 爲適合 $\varphi(0)=0$ 一條件但其他隨意之整函數，$\varphi^{(\mu)}(x)$ 則爲 $\varphi(x)$ 之 μ 次引申.

3 倘能證明，對於隨意的係數 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_m$ 作任何假定亦即對於隨意函數 $\varphi(x)$ 作任何假定時，方程 (3) 必不可能則方程 (1) 亦必不可能，而 e 爲超絕數.

吾人今對於 $\varphi(x)$ 作如是之用法，即

1. 第一和數 $\Sigma C_\nu\phi(\nu)$ 爲一不等於 0 之整數，

2. 第二和數 $\Sigma C_\nu U(\nu)$ 就其絕對值而論小於 1. 如是則二和數之和自不能爲 0 矣.

4 今取一質數 p，大於 n 者，幷設

$$\varphi(x)=\frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots\cdots(x-n)^p}{(p-1)!},$$

則 $\varphi(0)=0$ 之條件已適合.

此函數之次數 m 爲 $np+p-1$. 試設想將此函數展開之，可按 x 之升冪序或 $x-1, x-2, \cdots\cdots, x-n$ 之冪亦可，則得如次之數式：

$$\begin{aligned}(p-1)!\,\varphi(x)&=x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots\cdots(x-n)^p\\ &=a_{p-1}x^{p-1}+a_px^p+\cdots\cdots+a_mx^m \qquad (5)\\ &=b_p(x-\nu)^p+b_{p+1}(x-\nu)^{p+1}+\cdots\cdots+b_m(x-\nu)^m\end{aligned}$$

$(\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots n)$

因 $\varphi(x)$ 可爲 x^{p-1} 及 $(x-1)^p, \cdots\cdots, (x-n)^p$ 等所除,故 x 及 $x-\nu$ 之較低的乘方,此中不能有;又此中之 $a_{p-1}, a_p, \cdots\cdots, a_m, b_p, b_{p+1}, \cdots\cdots, b_m$ 均爲整數.

5. 由 (5), 用 x^{p-1} 除之後,可得

$$(x-1)^p(x-2)^p\cdots\cdots(x-n)^p$$

$$=a_{p-1}+a_px+\cdots\cdots+a_mx^{m-p+1},$$

而如於其中設 $x=0$, 則有

$$a_{p-1}=\pm 1^p\cdot 2^p\cdots\cdots n^p=\pm(n!)^p.$$

因 p 爲質數且大於 n, 故不能用以除$1, 2\cdots\cdots n$諸數,因而以上之數亦不能爲p所除盡,且爲整數.

又因 $\varphi(x)$ 之首項已爲 x 之 $(p-1)$ 次方,故

$$\gamma_1=0,\cdots\cdots,\ \gamma_{p-2}=0,$$

$$\gamma_{p-1}=\frac{a_{p-1}}{(p-1)!},\quad \gamma_p=\frac{a_p}{(p-1)!},\cdots\cdots,\quad \gamma_m=\frac{a_m}{(p-1)!}.$$

因之,倘按§88之(20)作 $\varphi(x)$ 之引申,設 $x=0$, 則有

$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=0,\cdots\cdots,$$

$$\varphi^{(p-2)}(0)=0,\ \varphi^{(p-1)}(0)=a_{p-1},$$

$$\varphi^{(p)}(0)=\frac{p!a_p}{(p-1)!}=pa_p,$$

$$\varphi^{(p+1)}(0)=p(p+1)a_{p+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(m)}(0)=p(p+1)\cdots\cdots ma_m.$$

故可知一切 $\varphi^{(\mu)}(0)$ 均爲整數, $\varphi^{(p-1)}(0)$ 不能爲 p 所除,其他之 $\varphi^{(\mu)}(0)$ 則或爲 0, 或可爲 p 所除,因而其和 $\phi(0)=\Sigma\varphi^{(\mu)}(0)$ 爲一不能爲 p 所除之整數.

6. 今於 § 88 之 (21)

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\,\varphi'(x)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

內設 $x=\nu$, $h=x-\nu$, 則有

$$\varphi(x)=\varphi(\nu)+(x-\nu)\varphi'(\nu)+\frac{(x-\nu)^2}{2!}\varphi''(\nu)+\cdots\cdots+\frac{(x-\nu)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\nu);$$

而由 (5) 中之第三式,於 $\nu=1, 2,\cdots\cdots n$ 時, 有

$$\varphi(\nu)=0,\ \varphi'(\nu)=0,\cdots\cdots,\ \varphi^{(p-1)}(\nu)=0,$$

$$\varphi^{(p)}(\nu)=pb_p,\ \varphi^{(p+1)}(\nu)=p(p+1)b_{p+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(m)}(\nu)=p(p+1)\cdots\cdots mb_m,$$

故可知一切 $\varphi^{(\mu)}(\nu)$ 或爲 0, 或則爲可爲 p 所除盡之整數因之, $\phi(1), \phi(2),\cdots\cdots, \phi(n)$ 亦均爲可爲 p 所除盡之整數.

7. 由此, 并可知

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu\,\phi(\nu)=C_0\,\phi(0)+C_1\,\phi(1)+\cdots\cdots+C_n\,\phi(n)$$

亦爲一整數,而如取如是大之 p, 使 C_0 不能爲 p 所除,則此和數亦不能爲 p 所除,故必不等於 0.

按 **3.**, 此亦卽爲證法之第一部.

8. 證法之第二部係關於 U 者,吾人不妨根據 § 139 之

(8) 以爲之.於此,可先作函數 $F(r)$, 即,將 $\varphi(x)$ 中之 $x, \gamma_1, \gamma_2,$ $\cdots\cdots, \gamma_m$ 易以絕對值 $r, c_1, \cdots\cdots, c_m$.

倘有各項符號迭爲正負之函數

$$x^k - a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} - \cdots\cdots,$$

以 $x-b$ 乘之,則所得之函數其項仍迭爲正負:

$$x^{k+1} - (a_1+b)x^k + (a_2+ba_1)x^{k-1} - \cdots\cdots$$

反之,倘將二因子內之符號均易爲相同者,即將 $x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots\cdots$ 與 $x+b$ 相乘,則所得之積

$$x^{k+1} + (a_1+b)x^k + (a_2+ba_1)x^{k-1} + \cdots\cdots,$$

其號自亦均相同.

9. 倘將此簡單之定理反復用之,則可知算出後之乘積

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots\cdots(x-n)^p}{(p-1)!},$$

其符號迭爲正負,故如將一切係數盡易以正號,則即成爲

$$F(x) = \frac{x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^p\cdots\cdots(x+n)^p}{(p-1)!},$$

換言之,即所求之函數

$$F(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p\cdots\cdots(r+n)^p}{(p-1)},$$

而按 § 139 之 (8), 有

(6) $$|U(x)| < F(r)e^r.$$

10. 爲簡單計,設

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots\cdots(\nu+n)=\rho_\nu,$$

則按(6),

$$|U(\nu)|<\frac{\rho_\nu^p}{\nu(p-1)!}e^\nu.$$

因 e^x 之級數於一切 x 均爲收斂者,故於 m 傾向無限大時,其普通項 $\frac{x^m}{m!}$ 於任何 x 傾向於0.因之吾人可取如是大之質數 p,使

$$\frac{\rho_\nu^{p-1}}{(p-1)!}$$

爲任意小,而因 $e^\nu\rho_\nu:\nu$ 爲有限者,故 $|U(\nu)|$ 亦可爲任意小,而和數 $\Sigma C_\nu U(\nu)$ 自亦可隨而任意小,尤不難使其小於1.

按**3.**,此卽爲證法之第二部,故吾人已證明

e 爲一超絕數.

§141. π 之超絶性

1. π 爲超絕數之證法,其根據亦相同,且以

$$1+e^{i\pi}=0 \tag{1}$$

爲其根本.

倘 π 爲一代數數,則 $i\pi$ 亦爲一代數數.蓋如 $\xi(\pi)=0$ 爲一有理方程,爲 π 所能充適者,則亦 $\xi(\pi)\xi(-\pi)=0$.今設 $y=i\pi$,則 $\xi(iy)\xi(-iy)=\psi(y)=0$.而 $\psi(y)$ 之係數則爲實有理數也.

2. 今設 ψ 之次數爲 ν,

(2) $$y_1,\ y_2,\ y_3,\cdots\cdots,\ y_\nu$$

爲其根,πi 亦在其中.如是則因(1),有

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})\cdots\cdots(1+e^{y_\nu})=0,$$

或將其乘出之:

(3) $$1+\Sigma\, e^{y_i}+\Sigma\, e^{y_i+y_k}+\Sigma\, e^{y_i+y_k+y_l}+\cdots\cdots=0.$$

此中之 $\Sigma\, e^{y_i}$,係及於一切根(2),$\Sigma\, e^{y_i+y_k}$ 則包括每二個根 y_i+y_k 之一切結合(無有重複),$\Sigma\, e^{y_i+y_k+y_l}$ 包括每三個之結合,等等.

3. ν 個 y_i 之對稱函數,按吾人所設,爲有理數(整數或分數),至於此 ν 個數之本身,則能充適方程 $\psi(x)=0$

$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ 個數 y_i+y_k 之對稱函數(例如其乘方和數),同時亦爲 y_i 之對稱函數,故亦爲有理數.因之,y_i+y_k 等亦爲一有理方程 $\psi_1(x)=0$ 之根.

$y_i+y_k+y_l$ 諸和數亦然,其數之多爲 $\frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu-2)$,且亦爲一有理方程 $\psi_2(x)=0$ 之根.其餘仿此.

如是則乘積

(4) $$\psi(x)\psi_1(x)\psi_2(x)\cdots\cdots$$

爲 x 之整函數,倘使 x 取

(5) $$y_i,\ y_i+y_k,\ y_i+y_k+y_l,\cdots\cdots$$

中之一數,則即成爲0.

4. 在以上之數目(5)內,0可一次或多次含於其中

今設 0 含於其中共 $C-1$ 次,則 C 爲一正整數,至少 $=1$, 且唯有 (5) 內不含有 0, C 乃等於 1 也.

倘如是則 (4) 中含 x 因子共 $C-1$ 次,而如吾人將其分離之,幷用公分母 N 乘其係數,則均成爲整數, 而得一係數爲整有理數之函數:

$$\chi(x)=Nx^{1-C}\psi(x)\psi_1(x)\cdots\cdots, \tag{6}$$

其次數以 n 表之,其根爲

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots,\ x_n \tag{7}$$

爲 (5) 中不等於 0 之數,而按 (3), 則能充適方程

$$C+e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n}=0. \tag{8}$$

因 0 不在 (7) 內,故 $\chi(0)$ 不能等於 0.

(7) 內之數是否有重復者,此不成爲問題, 但 πi 則必在其中.

5 今再一用 § 139 之方程 (5):

$$e^x\phi(\ \ )=\phi(x)+U(x), \tag{9}$$

於其中繼續設 $x=x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n$ 將其相加, 幷於兩端加 $C\,\phi(0)$, 則按 (8), 有

$$\begin{aligned} &C\ \phi(0)+\phi(x\ )+\phi(x_2)\cdots\cdots+\phi(x_n)\\ &\quad+U(x_1)+U(x_2)\cdots\cdots+U(x_n)\\ &\quad=\phi(\ )(C+e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n})=0 \end{aligned} \tag{10}$$

此下之證法,其根本思想與 § 140, **3** 中者完全相同, 故在

證明,對於 $\varphi(x)$ 可如是用之,使

(1)　$C\,\phi(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)$ 爲一不等於 0 之整數,

(2)　$\sum_{\nu=1}^{n}U(x_\nu)$ 小於 1.

倘如是則方程 (10) 卽不可能,而 π 爲代數數之假定卽不能用.

6.　(6) 中之函數 $X(x)$ 作

$$X(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

之形式,其係數爲整數,a 與 a_n 不等於 0,幷可假定 a 爲正數.今用 a^{n-1} 乘之,幷設

$$ax=z,\ a_1=b_1,\ aa_2=b_2,\ a^2a_3=b_3,\cdots\cdots,\ a^{n-1}a_n=b_n,$$

則得一函數

(11)　$$a^{n-1}X(x)=\theta(z)=z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots\cdots+b_n,$$

其係數均爲整數,其根

(12)　$$z_1,\ z_2,\ z_3,\cdots\cdots,\ z_n$$

爲乘積

(13)　$$ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\cdots\cdots,\ ax_n.$$

7.　今對於 $\varphi(x)$ 作一假定:

(14)　$$\varphi(x)=\frac{z^{p-1}[\theta(z)]^p}{(p-1)!}=\frac{a^{np-1}x^{p-1}[X(x)]^p}{(p-1)!}$$

其中之 p 爲一充分大之質數.$\varphi(x)$ 之次數 m 爲

$$np+p-1,\ \varphi(0)=0.$$

按 z 之乘方整列時，設

$$[\theta(z)]^p=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots\cdots$$

$$=A_0+A_1ax+A_2a^2x^2+\cdots\cdots,$$

此中之 $A_0, A_1, A_2,\cdots\cdots$ 均爲整數，而如設 $z=0$，則得

$$A_0=b_n^p,$$

故 A_0 不等於 0. 此外則

$$(p-1)!\varphi(x)=A_0a^{p-1}x^{p-1}+A_1a^px^p+\cdots\cdots,$$

故 $$\varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=0,\cdots\cdots,\ \varphi^{(p-2)}(0)=0,$$

$$\varphi^{(p-1)}(0)=A_0a^{p-1}=b_n^pa^{p-1},$$

$$\varphi^{(p)}(0)=pA_1a^p,$$

$$\varphi^{(p+1)}(0)=p(p+1)A_2a^{p+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

今取 p 大於 a, b_n 二數中之大者，則 $\varphi^{(p-1)}(0)$ 不能爲 p 所除，但其餘之 $\varphi^{(\mu)}(0)$ 或則爲 0，或則可爲 p 所除．故

$$\phi(0)=\sum_{\nu=1}^{m}\varphi^{(\nu)}(0)$$

爲不能爲 p 所除之整數．

8. 按 § 88 之 (21)，因 $\theta(z_1)=0$：

$$\theta(z_1+h)=h\,\theta'(z_1)+\frac{h^2}{2!}\theta''(z_1)+\cdots\cdots$$

故如設 $h=z-z_1$，則

$$\theta(z)=(z-z_1)\theta'(z_1)+\frac{(z-z_1)^2}{2!}\theta''(z_1)+\cdots\cdots$$

此中之係數 $\theta'(z_1),\cdots\cdots,\theta^{(n)}(z_1)$ 爲 z_1 之整函數,其係數亦爲整數.今再取其 p 次方,用

$$z^{p-1}=[z_1+(z-z_1)]^{p-1}$$

乘之,然後按 $z-z_1$ 之升冪序列之則按(14),得

$$(p-1)!\varphi(x)=(z-z_1)^pB_1(z_1)+(z-z_1)^{p+1}B_2(z_1)+\cdots\cdots$$

$$=a^p(x-x_1)^pB_1(z_1)$$

$$+a^{p+1}(x-x_1)^{p+1}B_2(z_1)+\cdots\cdots$$

此中之係數 $B_1(z_1),B_2(z_1),\cdots\cdots$ 爲 z_1 之整函數,其係數亦爲整者.

於是吾人得

$$\varphi(x_1)=0,\quad \varphi''(x_1)=0,\cdots\cdots,$$

$$\varphi^{(p-1)}(x_1)=0,\quad \varphi^{(p)}(x_1)=pa^pB_1(z_1),$$

$$\varphi^{(p+1)}(x_1)=p(p+1)a^{p+1}B_2(z_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故如設

$$Q(z_1)=a^pB_1(z_1)+(p+1)a^{p+1}B_2(z_1)+\cdots\cdots$$

則

$$(15)\qquad \phi(x_1)=\sum_{\nu=1}^{m}\varphi^{(\nu)}(x_1)=pQ(z_1),$$

於此 $\qquad Q(z_1)=Q_0+Q_1z_1+Q_2z_1^2+\cdots\cdots$

爲 z_1 之整函數,其係數亦均爲整數.

倘將 x_1, z_1 易以 $x_2, z_2, \cdots\cdots, x_n, z_n$, 此項方程亦均可用.

9. 試將得自 (15) 之式加之,則有

$$\sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu) = nQ_0 + Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + \cdots\cdots,$$

於此, $s_1 = \Sigma z_\nu, \quad s_2 = \Sigma z_\nu^2, \quad s_3 = \Sigma z_\nu^3, \cdots\cdots$

但由 (11), 按牛頓氏式:

$$s_1 + b_1 = 0,$$

$$s_2 + b_1 s_1 + 2b_2 = 0,$$

$$s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3b_3 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故可知其爲整數.由之可知:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \phi(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu)$$

爲可爲 p 所除之整數.

故如取 p 大於 C, 則按 **7**., 可知

和數

$$C\,\phi(0) + \phi(x_1) + \phi(x_2) + \cdots\cdots + \phi(x_n)$$

爲一不能爲 p 所除之整數,故決不能爲 0.

按 **5**, 可知證法之第一部已完成.

10. 解決證法之第二部時,須用函數 $F(r)$, 此亦即將

$\varphi(x)$ 中之 x 及其係數易以其絕對值而成.

爲此目的,可設

$$\gamma(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n),$$

則按 (14), 得

$$(p-1)!\,\varphi(x)=a^{np+p-1}x^{p-1}(x-x_1)^p\cdots\cdots(x-x_n)^p.$$

此式之係數由

$$a,\quad -x_1,\quad -x_2,\cdots\cdots,\quad -x_n$$

經加及乘而得,均其絕對值不能大於此項數目之絕對值

$$a,\ r_1,\ r_2,\cdots\cdots,\ r_n$$

所構成之相當數.亦即不能大於

$$a^{np+p-1}x^{p-1}(x+r_1)^p(x+r_2)^p\cdots\cdots(x+r_n)^p$$

之係數.

故如設

$$f(r)=a^{n+1}r(r+r_1)(r+r_2)\cdots\cdots(r+r_n),$$

則於每一正數 r

$$F(r)\leqq\frac{[f(r)]^p}{ar(p-1)!},$$

今如使 p 充分大則必可小於任何小之數.

因之,按 §139 之 (8), $U(x_\nu)$ 之絕對值可任意小,因而 $\sum_{\nu=1}^{n}U(x_\nu)$ 之絕對值亦可任意小,自可使其小於 1. 如是,則

5. 中之第二點亦已完成,而已證明

π 爲超絕數

於是自古來所著名之求圓面積之問題,乃完全解決矣