萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(一)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（一）

牛頓 著

鄭太朴 譯

漢譯世界名著

原　　序

古人在自然研究方面，把力學看得很重要，近人則拋棄了物性形式及潛在屬性的理論以後，已開始將自然現象歸宿到數學定理上去．所以本書內，於物理學的範圍中儘量將數學演出，看來是有意義的事．

古人用兩種方法演述力學，其一是純理的，用論證精確的前進，其一是實用的．一切技術方面的事均屬於後者，力學之名實在亦由此得來．技術家之工作不能十分精確，故力學與幾何學即被分開，凡精確者均歸之幾何學，較不精確者則歸之力學．不過所遇的差失，實在不能盡歸之技術，而當歸之技術家．蓋凡工作不精確的，是不完全的力學家，其能極精確的工作者，方是完全的力學家．

直線與圓之演述，爲幾何學之基礎，但亦屬於

力學範圍.在幾何學上,我們不能知道此項線如何作成,祇當作已知先假定好而已.初學者沒有開始正式的幾何學之前,必須先學習此項線之精確作法.幾何學上所敍者,是如何用此項方法以解決問題.至於如何作成直線與圓,這是力學上的問題,非幾何問題.幾何學上教人應用此項線,故幾何學能應用極少的別處來的原則以收這許多成就,這眞是可稱頌的.所以幾何學之基礎在實用力學方面,而幾何學爲廣大力學之一部分,能建設並證明其方法.

因爲技術上的事主要的在物體運動方面應用到,故普通將幾何學與量相關連,而力學則屬於運動.在這個意義上,純理力學爲極精確演述出來而且已證明的科學,其任務在研究如何由某種力發生運動,以及反之,某種運動所需要的力如何.古人於五種力內曾從事過於此.古人之視重力(因爲不是人手之力)除重量以外沒有其他.但我們的研究不在技術而在科學,不在人手之力而在自然之

力，故必須主要的研究關於重，輕，彈力，流體抵抗力以及其他吸引的運動的力之狀況；所以我們的研究是自然理論之數學的原理．

物理學上的一切困難，看來是在於這裏：由運動的現象以推論自然之力，再由此項力以說明其他的現象．關於此，有好些普遍的定理，於第一及第二編中論之．第三編內是其應用，將宇宙系統說明了．於此，由天空中所發見的現象，用前二編內數學上所已證明的定理，推論出重力，此力能使物體傾向太陽及行星接近．同此，我們並用數學定理由此項力以推論行星，彗星，月球，海洋之運動．

或者自然中之其他現象，亦可如是由數學原理中推論出來罷！好多理由使我發生一種推想，以為此項現象均與某項力有關．由此項力，物體之分子，以某種尙未知的原因，互相傾向而成為正則的物體，或亦可相離而飛散．一直到現在，物理學者尙無法用此項力以說明自然．我希望本書內所樹立的原則能對於此項或其他正確的方法作一先

引.

本書之出版,哈雷 (*Edmund Halley*) 君,這位深刻而博學的學者,盡力極多.他不僅負校閱及畫圖之責,而且他實在是推動我作這書的人.他要我證明天體軌道之形狀,請我將此證明報告給皇家學會,由其要求於是使我想到編著本書.我開始時先從事於月球運動上之差失,即從事於重力之定律及量以及其他的力,物體按照某種定律被吸引時所作之軌道,若干物體本身間之運動,物體在有抵抗的中介物內之運動,此項中介物之力,密度及運動,以及彗星之軌道,及其相似的研究,等等.我曾想,這書的編著必須俏待若干時,乃能將其他的補充與開始的研究相合發表.關於月球之運動(實在不很完備),我將其總括在 § 107 之系內,俾別人家不要以爲我太將零碎的事多敍了,特別將其提出來,使其餘的定理之系統爲之混亂.後來發見的零碎事實甯可將其按插在不適當的處所,免得將定理及所引之數目改變.

希望一切能得到人們的細心閱讀，在這樣的困難材料方面，有缺點之處，其可責備當較之可引起新研究及有趣的補充爲多！這是我所極屬望於讀者的．

一六八六年五月八日於劍橋．

伊薩克　牛頓．

第二版序言

在這第二版內，好多已訂正，並增入了好多．第一編之第二章內，我已將能使物體在一定軌道內運動的力之決定法較容易較詳盡的敍出．第二編之第七章內，流體之抵抗力的理論我亦已較詳細的研究過，並有新的試驗爲之證明．第三編內之月球理論及歲差則更完備的由其原則中推出，並引入好多精確算好的軌道之例以證明彗星之理論．

一七一三年三月二十八日於倫敦．

伊薩克　牛頓．

第三版序言

這第三版是由這方面極有經驗的人，亨利，丕姆白爾頓(*Heinrich Pemberton*)所備就，其中第二編內之論中介物之抵抗力，已較前爲詳盡，並有關於重物之抵抗力的新試驗增入．第三編內月球因重力而保持其軌道的理由已更詳盡的敍出；增加入的，有旁德(*Pound*)氏所得關於木星對徑之相互關係的新觀察．此外，這裏新添入若干對於1680年所出現的彗星之觀察，係由德人開而希(*Kirch*)所作，最近纔入於我們之手．由此可知彗星運動方面拋物線的軌道是如何的接近．該彗星之軌道亦按照哈雷的推算較前更詳細的以橢圓表出，可知彗星經過九個宮在此橢圓的軌道內進行，與行星在天文學上所測定的橢圓軌道內運行差不多的正確．1723年所出現的彗星之軌道亦按照巴

得來(*Bradley*)的推算增加入了.

一七二五年正月十二日於倫敦.

伊薩克 牛頓.

目　　次

第三冊

第四冊

第五冊

第六册

第七册

第八册

第九册

第十册

說　　明

<u>說明 1.</u>　物質之量，以其密度及體積聯合度之。

倍大空間內倍密之空氣，其量加四倍；雪或塵埃同此，可經融化或壓使其加密。一切物體方面亦均如此，可由某種原因以種種方法使其加密。至於可自由透入各部分間空隙之中介物，這裏我沒有計入。

此項物質之量，以後我將以物體或質量名之，所由以知之者，則爲各該物體之重量。至質量與重量之爲相比的，此則我曾以很精確的擺錘試驗得之，其詳見後。

<u>說明 2.</u>　運動之量，以速度及物質之量聯合度之。

全體之運動，爲其各部運動之和。故速度等而物體倍大，則運動量加倍，速度與物體均加倍，則運動量加四倍。

說明 3. 物質有抵抗之能力;故每個物體,如其所已然者,保持其靜止狀況或等速的直線運動.

此項力恆與物體爲比例,其與物質惰性之差,祇是看法之不同而已.物質之惰性,能使每個物體不易出離其靜止的或運動的狀態,故此項爲物質所固有的力,亦可用"惰性力"這個很確切的名稱以稱之.因此,物體祇在改變其狀態時,纔顯出其此項力,而其狀態則可由一其他外來與之接觸的力影響之,且由不同的觀點看來,前者或爲抵抗力或爲進攻力.如物體爲保持其狀態對於外來的力相抗,則爲抵抗的;如物體對於當前的障礙力不易退讓,而欲使後者之狀態變動,則爲進攻的.尋常均以抵抗力屬之靜的物體,進攻力則屬之動的物體;不過如尋常所說的動與靜,則其區別祇在關係之方式,而尋常所視爲靜的,實際上不一定是靜的物體.

說明 4. 外來的力是對於物體所施的推動,使其

狀態改變，此狀態可爲靜止或等速的直線運動.

此項力祇在推動中,及其施出後,並不留於物體中. 蓋物體之保持其新狀態，祇爲惰性力之作用.此附加的力其來源不一,例如由於撞,壓,向心力.

說明 5. 向心力之影響，使一物體向一爲心的任何點被吸引或被推開，或以任何方式求達到該處.

屬此者有重力，能使物體求與地球之中心接近;磁力,能將鐵向磁極吸引;以及尙有一種力,不問其爲何，能使行星恆離開直線運動而以曲線進行.一塊在投石器內旋轉的石,有離開使其旋轉的手之企圖；因此，這石使投石器緊張,且其旋轉愈速,則緊張愈甚,如將他釋放,則卽飛去.與該項飛去企圖相反的力,能使石恆不離開手而在圓上者,我名之爲向心力,因此力以手爲圓之中心而向之.在圓上旋轉的物體均是如此. 此項物體均有離開

軌道中心之企圖，如無一與此相反的力，使物體受牽制不能出離其軌道，則必循一直線以等速運動脫去；此力我名之爲向心力．一拋出之物，倘不受重力之牽制，則不會向地轉下，而以直線向天空飛去，且如沒有空氣之阻力，其運動爲等速的．祇因重力之故，使其離開了直線運動而傾向地球，而其強弱之度，則與其重量及速度有比例．與物質之量相比其重量愈小，拋出時的速度愈大，則其離直線的軌道愈少，保持直線的軌道愈久．假如一鉛的球以一定的速度循一地平的線由山巔上放射出來，在曲線上進行，於二英里外始落地，則速度加倍或加十倍，所及之遠亦約加倍或加十倍，不過須假定空氣之抵抗力於此不生作用．將速度增加，即可任意的增加所及之遠并減少所作軌道之曲度，使其於10 或 30 或 90 里距離以外纔落下，或使其繞地球運動，或向天空脫去以至於無限．所拋之物可使其入一軌道繞地球運行；同樣的，月球如有重量，則亦可由重力使其離開直線道路傾向地球入於他

的軌道內，不則亦可由一種其他壓迫月球的力使其如此.如無此項力，即不能使其守此軌道.倘此力比較上太小，卽不足使月球離開其直線道路，反之，如太大，則將超過傾向地球繞之以行之度.故此力必須恰恰適當纔好.數學的任務，是在求出這個力，能使一物體在已知的軌道內以一定的速度繼續保持其狀態者；反之，一物體自一已知的處所以一定的速度出發為一已知的力所迴折時，要求得其曲線的道路，此亦為數學之任務.

向心力之量分為三種：絕對的，加速的以及運動的.

說明 6. 向心力之絕對量，卽是其較大或較小之分量，視其發生作用的根源為定，而此則由中心點向其四周的部分發出.

例如磁力在各個磁石方面不同，視磁石之大小以及其力之強弱而定.

說明 7. 向心力之加速量，與其在一定時間內所產生之速度相比.

例如同一磁石之力，距離近則力大，距離遠則力小．重力在深谷較大，於高山之巔較小（此則由擺錘試驗所證明），而於離地較遠之處更小（此於後明之）．在距地相等之處重力均相等，因將以太之抵抗力消去後，重力所給予一切下墜物體（重或輕，大或小者）之加速，其強均相等．

說明 8.　向心力之運動量，與其在一定時間內所產生之運動相比．

例如大物體之重量大，小物體之重量小，而於同等的物體方面則近地球時大，在空中遠地時小．此力即是全物體之向心傾向（可說是）他的重量．而由與此相反相等能阻此物體下墜之力乃能知之．

爲簡單計，此項分作三種研究過的力之量，可名之爲絕對的，加速的以及運動的力，并可將其彼此分別與向中心的物體，物體之處所以及力之中心相屬．運動的力對於物體，爲一整個之向心的企圖及傾向，而此心則由各部之傾向合成．加速力對

於物體之處所，爲發生作用之根源，由中心出發向其四周之各處所發出，推動在其中之物體.絕對的力則對於中心，而此則帶有一根源，沒有這個，運動力便不會透過四周的空間而發出。此根源可爲任何一中心物體(如磁石之在磁力中心，地球之在重力中心)或因某種關係爲不可見者.這至少是數學上的概念，而物理上的根源及力之所在則我此處不欲論之。

因此，加速力之與運動力猶如速度之與運動.動運之量於速度乘質量之積求之，運動力則於加速力乘質量之積，而加速力在物體之各部中所生作用之和則爲全物體之運動力.所以，在地面之附近，加速力，即重力，於一切物體方面均等，重力之運動力或重量卽與物體一致.試攀登至重力之加速力減少的處所，則重量亦即相當的減少，而恆與重力之加速力乘物體之積相比。例如在加速力減半之處，物體之重量亦減半.又，吸引與推開我用之與加速的運動的同其意義.所謂吸引，推開或傾

向中心這幾個名稱，我沒有分別混雜的用之，蓋我之研究此項力，純就其數學的意義而非物理的．所以讀者由此項解釋中不能推論出來，說我欲說明作用之種類及方式或物理的根源，而如我說及中心點吸引或有中心力時，亦不能說我對於中心點（這是幾何的點）附加了眞實的物理的力．

附　　說

一直到現在，我所欲說明的，是以後所欲用的不習慣名稱，其意義是如何．時間，空間，處所及運動是人所共知，我不須解釋了．我祇須說明，此項量平常是藉官覺來感知的，故不免發生某種偏見，而爲免此項偏見起見，可適當的將其分別爲絕對的與相對的，眞的與貌似的，以及數學的與尋常的．

I.　絕對的，眞的及數學的時間，是自身在那裏流，而因其性質，是等速的且不與外界任何對象

有關係.此時間亦可名之爲綿延(*Dauer*).

相對的,貌似的及平常的時間,是綿延之可感的及外界的度量,可精確或不齊,而尋常則多用此而不用眞時間,如年,月,日,鐘點均是.

II. 絕對的空間,因其性質且無關於外物,恆爲等的且不動的.

相對的空間爲前者之度量或其動的一部分,而由其與其他物體之對待,吾人之感覺乃有以標識之,且尋常即視之爲不動的空間.例如地面內之一部分空間;大氣之一部;天空之一部,以其與地球相對之位置爲定.就類與量而言,絕對的與相對的空間相同,但就數而論則不必恆如此.例如地球運動,則大氣之空間,對於地球而言雖不變,但在絕對空間中則屢易其位置,隨其所至而爲絕對空間之此部分或彼部分.

III. 處所爲物體所佔的空間之部分,就空間之相關可爲絕對的或相對的.

處所爲空間之部分,但並非物體之位置或地

位，亦非其四圍之面．蓋等的固體之處所恆相等，但其面則因形狀可有不同，故不必相等．物體之地位實在幷沒有量可言，謂之爲處所，不如謂之爲處所之關係．全體的運動與其各部運動之和相同，故全體的處所改變，與其各部的處所改變之和相同．故處所在全物體之內．

IV. 絕對運動是物體由一個絕對處所至一個其他的絕對處所之轉移．相對運動則爲由一相對的處所至其他一相對的處所之轉移．

在行駛的舟中，物體之相對的處所即爲其於舟中所在之處，亦即是物體所佔據的舟中空間之一部因而與舟同時進行者．所謂相對的靜止，即是物體繼續在此舟中同一的地方，所佔的舟中之空間部分不變．眞的靜止，則爲物體繼續在不動的空間中之同一的部分，舟本身以及舟所佔之空隙及其一切內容，亦均在此不動的空間中運動．故如地球爲靜止的，則對於舟爲相對靜止的物體，將實在的絕對的與舟以同樣的速度運動．但如地球亦爲

運動的，則該物體之眞的絕對的運動，即由各部所構成，其中有舟在地球上之相對運動，地球在不動空間中之眞運動，以及物體在舟中之運動等．由舟在地球上之運動及物體在舟中之運動二者，可得物體在地球上之相對運動．

例如舟所在之地球部分向東運動，其速度爲 10010，舟則以風力及駛力向西運動，速度爲 10，而舟上的舟子則以速度 1 向東行，如是則舟子實在的絕對的在不動空間中以速度 10001 向東行，而對於地球則相對的以速度 9 向西行．

在天文學上，絕對時間與相對時間用時間方程來區別．自然的日子，尋常用之爲時間的度量是看作相等的，但實際上並不相等．天文學家於是按照準確的時間以測量天體運動，因而改正此項不相等．用以準確測量時間的等速運動，簡直可爲沒有的事，這是可能的；一切運動可有加速或退遲；惟絕對時間之流則不能有所改變．一切事物的存在，均有此項相同的綿延及保持，不問其運動爲速

爲遲或爲零.又,此項綿延可與其感覺所能知的度量區別,而用天文的方程則可由之推得.此方程於測定現象上之必要,在應用擺錘鐘方面,以及木星之衞星有蝕時,均可證明.

與時間段落之次序相似,空間部分之次序亦不變.試將其由其處所運動之,則(可說)將與其自己相離.時間與空間爲其自己的及一切事物的處所;在時間中,所對是相繼次序,在空間中則爲一切事物之位置.空間之真相,在其爲處所中;說原來的處所運動了,這是不合理的.所以這些是絕對的處所,而絕對運動則爲由一處所至其他一處所之轉移.

因此項空間之部分旣不能見亦不能藉我們感官之力區分之,故我們不取此而取可見的度量.由事物之位置及其與我們所視爲不動的物體間之距離,我們說明一切處所.我們估量一切運動亦均對於固定的處所而言,蓋我們看見物體之離開這些處所.故我們在人事方面,不用絕對的處所及運動

而用相對的，這不能說不當；但在自然研究上，則必須由感官抽象出來．眞正的靜止物體，可用以作爲處所及運動之標識者，事實上很可以沒有．

絕對的及相對的靜止，運動，由其屬性，原因及作用區別之．絕對靜止之屬性在於這裏，即，眞正靜止的物體本身間靜止着．不過很可以有這樣的事，一任何物體在恆星之附近或在其很遠以外絕對的靜止着，祇因我們附近物體間相互位置之關係，遂不能知道是否其中之一對於該遠處的仍保持其原有的位置；如是，眞正的靜止，由此項物體本身間不能推得．

運動之一屬性在於這裏，即，對於全體保持其原有位置的諸部分，參加其全體之運動．旋轉的物體之一切部分均有離開其運動的軸之傾向，而運動的物體之撞擊，則爲其各部分之聯結的撞擊所成．故如運動的物體旋轉，則對於物體爲相對靜止的諸部分亦均運動．因此，絕對的眞正的運動不能自離開視爲靜止的物體之附近中推論得．外界的

物體，我們不能僅視之爲靜止的，必須眞爲靜止的纔可；不則一切包含在內的部分，除非將脫離旋轉者之附近的，均將參與後者之眞正的運動．如無此項脫離，則亦不能爲眞的靜止，祇是視爲靜止而已．蓋旋轉的部分之與包含在內的，猶如全體之外部與其內部或如皮殼之與心核．如皮殼運動則心核亦動，不脫離皮殼之附近，爲整個之部分亦然．

與上述屬性相關者有這樣的屬性．倘如一處所運動，則在其中的物體亦與之運動．脫離一運動的處所之物體，亦參與其處所之運動．因之，一切由運動的處所出發之運動，祇爲整個的及絕對的運動之部分．每個整個的運動，是由物體從其第一處所之運動，該處所自其原來處所之運動，等等所構成，而其最後者則爲一不動的處所，如前所舉舟子之例．所以整個的及絕對的運動祇能用不動的處所來說明，故我將其與不動的處所相屬而相對的運動則與動的相屬．但不動的處所祇有那些永遠保持其同一的相互位置者纔是，故恆爲不動的，

並構成一空間，我名之爲不動的空間.

眞正的與相對的運動之所以異，其原因在於影響物體使其發生運動的力.眞正的運動.祇當力影響及物體之本身時，纔能發生或改變；但相對的運動之發生或改變，則不必有力影響於物體上，祇須有力影響於其他與此物相關的物體上便行. 蓋如該其他物體後退，則其間之相關亦變，而此則即爲相對的靜止與運動之內容. 反之，倘受力影響，則眞正的運動必會改變，但相對的運動則不必改變.蓋如此力同時並影響該相關的其他物體，俾其相對的位置仍照原來不變，則由以發生相對運動之關係亦不變.故相對運動變時，眞正的運動可不變，而相對運動不變時，眞正的運動却可變. 故眞正的運動不在此類的關係中.

絕對運動與相對運動所由以分的根源，是離開運動軸之飛力.在僅僅爲相對的旋轉運動方面，此項力不存在；但此項力隨運動之量而小或大.

試懸一器皿於一很長的線上，而使其恆在圓

上旋轉,以至於線成爲很緊張.於是盛之以水而使其並水靜止. 如突然的因力之作用使其作相反的旋轉運動,而因線之鬆釋,此運動能保持許久,則水之表面初則爲平的,與器皿旋轉以前無異,繼則力漸漸的影響及於水,器皿使水亦開始旋轉了.於是可見水漸漸的脫離其中心而由器皿之壁上昇而成一中空的樣子.(此項試驗我自己曾做過).運動愈強則其昇亦愈高,以至於與器皿同速而與之相對的靜止.此項上昇可表明一種傾向,求與運動之軸相脫離,而由此項試驗,可認識水之眞正的絕對的旋轉運動並測量之;在相對的方面與此是不同的.在開始時候,水在器皿中之相對運動爲最大,但無此項求離開運動軸之傾向,水並不求緣壁上昇,而爲平的,故眞正的旋轉運動尙未發生.嗣後水之相對運動減退,則其緣壁上昇,可表明求離開軸之傾向,且由此傾向可看到水之眞正的旋轉運動繼續增加,以至於水在器皿中相對的靜止時,此項運動達於最高度.該項傾向,與水對於其四周物

體之移動無關，故眞正的旋轉運動不能用如是的移動以說明之.每個旋轉的物體之實在的運動，簡單的與該項傾向相呼應，爲其特殊的切當的作用.相對的運動，隨其與外物之複雜關係而爲無盡，僅爲關係之影跡，故無有若何眞正的作用，除非含有該項簡單的眞正的運動在內，則即不然.

所以照或種見解，我們的太陽系在恆星天內旋轉並有行星隨之行，行星與天體之各個部分，雖對於在其附近的部分爲靜止，實則是運動的.他們的相互位置變動（此與眞正靜止的方面不同），且與天體各部分之進行同時參與該項運動.他們既爲旋轉的整個系統之部分，故有離開其軸之傾向.

所以相對的量不是名副其實的量之本身，而是其可感知的度（眞的或錯誤的），我們恆用此以代度得的量.如欲由應用上以定字之義，則所謂時間，空間，處所及運動，實在所指爲可感知的度，倘取其度得的量，則語意即成爲異常而爲純粹數學的了.

有的人將此項名詞由其原來所用度得的量轉譯出來,實對於聖經有不合之處了,但將眞的量與其相對的尋常的度相混淆,此亦模糊了數學與自然理論.

欲認識各個物體之眞運動,並嚴格的與僞的相分開,固爲極難之事,蓋物體於其中作眞運動的不動空間之部分,非可由感官知之.不過此事亦非完全無望.所需要的工具,一部分可由與眞運動相別的僞運動得之,一部分則可由與眞運動不能相分而爲其原因的力得之.例如用一線將距離有定的兩球體相連結,而以其公共的重心爲中心旋轉之,則將見線緊張,球有離開運動軸之傾向,且可由此以計算旋轉運動之量.試同時於球之兩側施之以任意的但同量的力,使運動增大或減小,則由線之緊張之增加或減小,可知運動之增加或減小,且由此並可認識力必須由球之何側施入,乃能使運動增加最甚;即是,須由球之後側,或,於運動中居後之側施入乃可.但如能認識其後側以及在前

而與之相反之側，則亦必已知道了運動之方向了．如是，無限的空的空間中雖沒有可認識的外物在，足與球資比較，但我們用以上之法，即可認出該項運動之量及方向了．倘該空間中有若干距離很遠的物體，相互間有一定的位置，如天區內之恆星，則由球在該項物體間之相對運動上，不能辨別其運動者究爲此或彼．然如注意於線，觀其有無緊張，如球運動時所必有者，則不難由此推知球運動而其他物體爲靜止的，且可由球在物體間之運動，推論得運動之方向．由原因，作用及表面的區別以推知眞正的運動，以及反之，由眞正的或貌似的運動以推論原因及作用，此爲以下所欲詳明者．本書之作其目的亦在於是．

運動之基本定理或定律

<u>第一定律</u>. 每個物體倘非有外力影響之使其改變狀態，則該物體仍保持其原來靜止的或等速直線運動的狀態.

礮彈倘非爲空氣之阻力所滯礙及重力所改變方向,則仍保持其運動不失.陀螺之各部分，因其凝聚力關係，恆與直線運動相遠，但陀螺之旋轉，倘非空氣之阻力(及摩擦)有以滯礙之，則不會停止.不過行星及彗星等大的物體,在阻力較弱的媒介中,能保持較長時間的直進及循環運動.

<u>第二定律</u>. 運動之變化,與動力之作用相比,其所循方向則爲力施作用的方向.

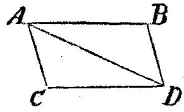
任何一力產生一運動時，其倍大之力產生倍大之運動,三倍者產生三倍,至此項力之作用爲一次同時的或爲相繼數次的可不問. 因運動所向之

目的,恆循產生此運動的力所定之方向,故如物體早即在運動中,則當方向一致時,即增加運動,而如其間有斜角時,則結果隨二方向之和.

第三定律. 作用恆與其反作用相等,或,二物體之相互作用恆等,方向則恰相反.

每個對象壓迫或吸引一其他對象時,必被該對象所同其強的壓迫或吸引.如人用手指壓一石,則手指亦受石壓.馬拽一繫於繩上之石時,馬對於石亦同其強的被後拽,因爲向兩端緊張的繩,能由使馬向石,石向馬的力鬆釋之;其阻止馬之前進與牽拽石之後退實同其強.設如一物體撞擊一其他者,使後者之運動變化,則前者自身之運動,亦必受後者之力(因二者之交互壓力相等)而變化,其方向恰相反.所與此項作用相等者,非爲速度而爲運動之變化(假如該物體不受其他的阻滯).至於速度之變化(向相反的方向),則因運動之變化相等,故與各該物體成反比.此定律在吸引方面亦適用,以下即有說明.

系 1. 二力連結時，物體卽循一平行方形之對角線，其所用時間，一如力單獨時循各邊所需者.



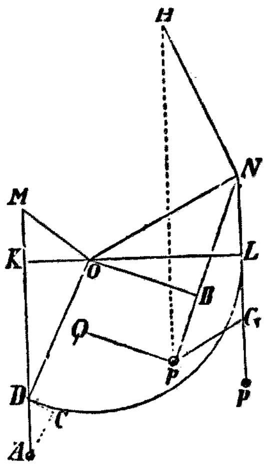
第一圖

假如一物體單受力 M 時由 A 引至 B，單受力 N 時由 A 引至 C，則可作平行方形 $ABDC$，如兩力連結，在同時間內該物體卽由 A 引至 D 了. 因 N 綫 AC 與 BD 平行生作用，故按第二定律，此力不能變化物體因 M 而向 BD 之速度. 緣此，不問 N 是否於此生作用，物體必仍於同時間內達到 BD，而在該時間之末，物體必落在 BD 之任何處. 仿此，並可知在該時間之末，物體亦必落在 CD 之任何處；故知該物體必在二線之交點 D 處. 按第一定律，該物體以直線由 A 至 D.

系 2. 由此，卽知以直線生作用的力 AD，可由任何二斜生作用的力 AB 與 BD 所合成；反之，直線的力 AD 亦可析成爲二任意的斜力 AB 與 BD. 此項合成與解析

在力學上可完全證實.

例如由輪之中心 O 作不等的半徑 OM, ON, 並用線 MA, NP 懸以重量 A 與 P, 則可一究此項重量推動該輪所產生之力.試作一直線 KOL 經過 O, 在 K 與 L 處, 此直線與 MA, NP 正交. 以 O 爲心, 於 OK, OL 二距離中取其長者 (此處爲 OL) 爲半徑作一圓, 與 MA 線相交於 D. 又作 OD 線, 以及與之垂直的 DC, 且 AC 與 OD 平行.線上 K, L, D 點是否固着於輪之平面



第　二　圖

內殊無關係, 故將重量繫於 K, L 或 D, L, 其作用均同.重量 A 之力用 AD 段表之, 並將其析成爲 AC 與 CD 二支力. AC 支力使 DO 半徑直線的離心, 故於旋轉輪子上無關, 但 DC 則垂直的推

動 DO，故其作用與垂直的作用於 $OL=OD$ 上同。故如

$$P : A = CD : DA,$$

則其作用卽與 P 之作用相等。因

$$\triangle ADC \sim \triangle DOK,$$

故有 $CD : DA = KO : OD = KO : OL.$

從可知 A, P 二重量，其相比適與在同一直線內之 OK 與 OL 之比相反，其強度則可相等因而成爲均勢。(此卽是我人所熟知的秤，槓杆及轆轤之屬性)。倘二重量中有一較大，不能與該比例相當，則其推動輪使其旋轉之力亦將較大。

設如重量 $p=P$ 一部分懸於 Np 線上，一部分則在斜面 pG 上，則可作 pH 與地平線垂直以及 NH 與 pG 垂直，p 力倘用 pH 表之，p 卽可析成爲 pN 與 HN 二支力。今如 pQ 平面與 pN 線垂直，並與 pG 面相交於與地平相平行之線上，又如 p 僅在 pQ 與 pG 二面上，則 p 對此二面之壓力爲 pN 及 HN。故如將 pQ 面撤去，俾重量能使線

緊張，則該線卽代替了所撤去的面，而其所受之力即爲前此壓 pQ 面之 pN. 因此，斜線 pN 之緊張，與 PN 之緊張相比，猶如

$$pN : pH.$$

設 OB 與 pN 垂直，而

$$p : A = OK : OB,$$

且同時
$$p : A = pH : pN,$$

則二者於旋轉輪子上其效用相等，因而成均勢，此則所易爲試驗者.

在二斜面上之重量 p, 其所處地位與楔子在已劈開的物體之內層中間相同，故名爲楔與椎之力. 楔子向 pQ 及 pG 之壓力，其與垂直的椎力相比，猶如

$$pN : pH,$$

以及
$$HN : pH.$$

因之，pQ 與 pG 所受之力其相比亦如

$$pN : HN.$$

螺旋釘之力，亦可以如是之分力法決定之，因

螺旋釘實爲一利用槓杆來推動的楔子.

此系應用之廣,於此可明;著作家用各種方法來敘述的全部力學,與上所述者均有關係,故該定理之眞理,實可由各方面證明之. 由此, 不難推知由輪子,槓杆,動的轆轤,旋螺釘,緊帶等等所構成的機器之力.至動物神經之力,由之以運動其骨骼者,亦同此理.

系 3. 自某一方向的運動之總和上, 減去其相反方向的運動之總和,所得的運動之量,不以物體之互相作用而有變.

按第三定律作用恆與其反作用相等, 而按第二定律, 則二者在運動中所引起之變化適相等相反.故如運動在同方向內進行,則其增加於在前的物體者,適於在後者減去, 而其總量不變. 若二物體相撞,則二者所失之運動等,而此向相反方向的二運動之差仍不變.

設如一球體 A, 大於一其他球體 B 三倍,前者之速度$=2$, 後者之速度則爲 10, 而後者隨着前

者，則A之運動量與B者相比，猶如

$$2\cdot3:1\cdot10=6:10,$$

其和爲16.二者相撞時，如A獲得3,4或5部分，則B亦必失去如許，因而A有9,10或11部分，B祇有7,6或5部分了，但其和則仍爲16.倘A獲得9,10,11或12部分，相撞後仍以同方向前進，其運動量則爲15,16,17或18了，則B亦失去如許，相撞後或則以1部分仍向原方向前進，或則靜止了，或則以1或2部分向後退，因其全部運動全失，且多失了1或2部分.二物體運動之和，於是爲

$$15+1,\ 16+0,\ 17-1,\ 或\ 18-2,$$

故仍爲16，與相撞前無異.

物體分開後前進之運動量如爲已知，則每物體之速度可求得，其方法在假定，相撞前後之速度與相撞前後之運動量爲相比的.舉例以明之.在上舉事實中，

相撞前A之運動量爲6

相撞後 A 之運動量爲 18

相撞前其速度爲 2

相撞後其速度爲 x

故 $6:18=2:x$, 即 $x=6$.

假如物體非爲球形者，或其運動所循直線不同，因而斜的相撞，則欲求其反擊後之運動時，必須先求在相撞點與二物體相切的平面之位置．於此，在二物體之運動方面須分別其二種，一與此平面相垂直一與之相平行者．因二物體祇在與平面相垂直的方向內互相作用，故後者在二物體方面相撞前與相撞後不變，但前者，即垂直的運動，則起了相等相反的變化，而向同目標的運動之和以及向相反目標的運動之差與前仍無異．

由於此項反擊，亦可發生物體繞中心之循環運動，但在下文內我不想研究此項事實，且欲將一切屬於此範圍內者證明之，亦太寬泛了．

系 4. 二物體或多物體之公共重心，不以物體本身間之作用而變更及其靜止或運動之

狀態，因而該重心（如無外來作用或阻礙）或則靜止或則以直線作等速運動．

例如有二點以等速直線運動前進，今按一定比例將其間之距離分之，則此分點或則靜止着，或則以直線作等速的運動．以後 §58 及系內，當證明其適用於同平面內之運動；用相同的方法，並可推廣之至於空間中之運動．故如有任何多的物體以直線作等速運動前進，則其中任何二者之公共重心或則靜止或則直線的等速前進，因爲連結該二物體之線，以一定比例爲其公共重心所分．仿此，此二物體及一第三者之公共重心或則靜止或則以直線等速的前進，因爲此重心將連結第三者之重心及前二者之公共重心的線以一定的比例分割了．此三物體之公共重心與一第四者其關係亦如此，等等，以至於無窮．

一系統的物體，既無相互間的作用亦無一切外來的作用，因而各個物體均以直線作等速運動者，則其公共的重心亦即或爲靜止或以直線作等

速運動.

在二物體所成之系統內，如二物體間有相互作用，則因二物體重心及其公共重心間之二距離相比與物體自身之相比適反，故其向公共重心或離此的相對運動亦必相等．因運動方面之相等相反的變化，亦即因此項物體相互間之作用，該重心既不會加速亦不會遲緩，且其靜止或運動的狀態亦不致受變化.在一多物體所成之系統內，如每二物體間有相互作用，其全系統的公共重心之靜止或運動狀態絕不會變化．因爲該項作用不能改變該二物體的公共重心之狀態，而其餘的重心則並不受其影響，蓋與此是無關的.此二特殊重心之距離，被所有全數物體之公共重心所分成爲段，而此項段則與物體之總和成反比．因該二重心之靜止或運動狀態仍保持，故所有全數物體之公共重心亦必如此.但在此項系統內，一切作用或則爲每二物體中間者，或則由此項每二物體間之作用所合成，故對於其公共重心之靜止或運動狀態不能發

生若何作用.因而該公共重心,如物體間無相互作用一樣,或則靜止或則以直線作等速運動前進,物體與物體自身間之作用,不能對之有所障礙,除非有外來的力將其狀態變更了. 所以在保持靜止或運動的狀態方面, 多物體所成的系統與單獨的物體適用同樣的定律. 不問單獨物體或多物體所成的系統, 其前進運動必須以其重心之運動爲估計之方.

系 5. 不問一空間靜止着或以等速作直線運動,但如不作循環運行,則該空間內所涵之物體,其本身間之運動,不受影響.

向同方向的各運動之差以及向異方向的運動之和,(按假定)開始時在二種狀況下相同,而由此項差或和發生運動及相撞, 由之即有物體間之相互作用.故按第二定律,在二種狀況下其相遇之作用必等, 所以一種狀況下本身間之運動與他種狀況下者仍相等.此可用試驗以明白的證明之.在舟內,不問舟靜止着或以直線作等速運動,其一切運

動均同等進行.

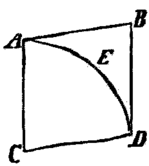
系 6. 倘物體本身間以任何方法運動，而有相等的加速力以平行的方向向之生作用，則物體本身間仍繼續以同法運動，一若未受此項力之作用者然.

該項力既同其強弱（與所推動的物體之量相比）且以平行的方向生作用,故對於一切物體（以速度而言）按之第二定律作相等的推動,因而不會變更其相互間之運動及位置.

附　　註

以上所敘的原理,均爲數學家所採取,而有各種試驗爲之證明的. 由第一第二二定律以及第一第二二系,加里賴 (*Galilei*) 曾發見重體之下墜與時間之平方相比,而拋出的物體則以拋物線運動;倘該項運動不受空氣抵抗力之阻滯，則與經驗即切合. 基於時鐘方面之日常經驗而作的擺錘振動

之歷久試驗，其證明亦與此項定律及系有關．當物體下墜時，整勻的重力即以等的力影響之(因在各個相等的時間段內，重力之作用相等)，因而產生相等的速度．在全部時間內，重力以全個的力影響之而產生全個的速度，二者均與時間相比．在相比的時間內所作之軌道相比，猶如速度與時間之合相比，即是，與時間之平方相比．倘將一物體向上拋擲，則整勻的重力對之發生影響，而減少其與時間相比的速度．上昇至最高度的時間其比猶如着着減少的速度，而該項所及之高度則如速度與時間之聯合，或可說與速度之平方相比．由拋擲所產生緣直線而發出的物體之運動，必與由重力而生的運動相組合．

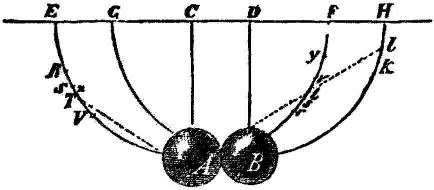


第　三　圖

倘單由拋擲的運動，一物體 A 於一定時間內能經過直線 AB，而單由下墜運動在同時間內能經過 AC，則在組合的運動方面，於該時間之末，物體即至 D 點．其所作的 AED 曲線，

是一拋物線，此線與 AB 相切於 A，其縱坐標 BD 則與 AB^2 成比例.由以上定律及第三定律，雷氏 (*Christoph Wren*)，華里士 (*Johann Wallis*) 及許金司 (*Christian Huygens*) 三人（本世紀最初的幾何學者）曾各不相謀的各自發見了兩物體相撞及反擊的規律，并差不多在同時向皇家學會提出，而關於其定律，則三人所發見者完全相同.先發表此的爲華里士，次爲雷氏，然後爲許金司，雷氏并給學會作了一個擺錘試驗以證明其所發見者之無誤，而著名的馬利亞 (*Mariotte*) 則認此試驗爲有價值.但欲知此試驗與理論之切合，必須顧及空氣之阻力以及相撞物體之彈性.

今懸二物體 A 及 B 於二相平行並相等的線



第四圖

CA 及 DB 上，下端在中心點 C 及 D. 由此中心點并用此項半徑作半圓 EAF 及 GBH, 各爲其半徑 CA 及 DB 所平分. 試將 A 移至 EAF 之任何點 R, 并將 B 移開，然後放之使下. 經一次振動後 A 或者回到 V 點，如是則 RV 即爲因空氣阻力所發生之沮滯. 今設 $ST=\frac{1}{4}RV$, 并在 RV 之中間，則

$$RS=TV,$$

以及

$$RS:ST=3:2,$$

而 ST 弧可很近似的表出由 S 至 A 時空氣阻力所發生之沮滯. 於是將 B 重復移於原處. 倘 A 由 S 下來，則其至反擊點 A 時之速度可無甚大差與在眞空中自 T 下來者相同. 此速度可以 TA 弦表之，蓋幾何學上有一定理，即擺錘在最低點之速度其比猶如所經過的弧上之弦. 此二物體相擊以後，A 到了 s, B 則至 k, 如將 B 移開，A 即由 v 下來，經過一次振動後回至於 r. 今如

$$st=\frac{1}{4}rv$$

且在 rv 之中間，俾

$$rs=tv,$$

則 sA 弦可近似的表出 A 反擊後在 A 點之速度，而 t 則爲 A 不受空氣阻力時所可達到的眞處所。用同法可修正 k 點，以得 l 點，爲不受空氣阻力時所可昇到者。如是，我們作試驗時，可彷彿如在眞空中一般。在決定剛剛相撞前物體 A 在 A 點之運動，須用代表其速度的弦 TA，至剛剛相撞後之運動則用 tA 弦。仿此，欲得 B 剛剛相撞後之運動，須用 lB 弦。

用同樣的方法，假如物體由不同的處所下來，我們就得考究兩物體在反擊前後之運動，再將其作一比較，以研究相撞之影響。

我曾用此法以 10 尺長的擺錘作過試驗，而且所用的物體有相等有不相等。於此，我曾這樣做法，使物體由很大的距離，8, 12 或 16 尺者，相撞，結果知道倘物體直接的互相碰到，則所得差率沒有一次有 3 寸者，不問兩物體運動向相反方向之變化爲如何大；他方面并知作用與反作用恆相等。

倘 A 以 9 成運動落於靜止的 B 上，經反擊後失去 7 成而以 2 成前進，則 B 必以 7 成躍回.

設如 A 以 12 成，B 以 6 成相遇，而 A 以 2 成倒回，則 B 即以 8 成回去，兩方同失去 14 成. 蓋如 A 失去 12 成，則已無餘者，再失去 2 成，即向相反的方向以 2 成運動了；同此，B 失去 14 成後所負爲 8，故以 8 成向相反的方向運動.

倘兩物體向同方向運動，A 較速以 14 成，B 較遲以 5 成，前者相撞後以 5 成仍向前進，則 B 之運動，即成爲 14，因 A 之 9 成轉讓於 B 了，等等. 兩物體相撞後，運動之量絕不會有所變，此則可由同向的運動之和以及異向的運動之差知之；縱有 1 至 $2''$ 之錯，我甯可歸之於不容易精細審量各節目的困難上. 例如欲將擺錘同時放下，俾二物體於最低點 A, B 相遇，以及將相撞後物體所昇到的 s, k 點畫出，這些都是難事. 即球的本身，亦有各部分密度不勻以及由其他原因而產生的組織之差等等，可發生差失於其間.

因爲或有人要反對，說此項試驗所欲證明的規律，實在是先假定了絕對堅硬或至少完全彈性的物體，而在自然中則此項物體是沒有的，所以我須補明，即，該項所述的試驗在柔的或硬的物體方面均可，與硬的條件實無關係．倘用不完全硬的物體作試驗，則須按彈力之大小減少其反擊至一定比例．雷氏及許金司之理論中，絕對堅硬的物體以相遇時之速度相折回．在完全彈性的物體方面可更確的證明之．在不完全彈性的物體方面，折回的速度須同時與彈力減少，蓋此（除非物體之部分在相撞時受傷，或如在椎下之受擴張）爲確定的，其影響則使物體以或種相對的速度折回，此速度與相撞之相對速度有一定之比．我曾用球試驗過此，球爲棉所製成，但已經壓之甚堅．

我先將擺錘釋去，量其反擊之量，即得彈力之量．用此力再求別的相撞方面反擊之量，試驗結果完全相符．球折回時之相對速度與相撞之速度相比約如 5：9.

在鋼球方面,其速度與此略同,但在柔木所製者方面,則較少了.在玻璃的方面,約略爲

15 : 16.

用此項方法,第三定律之關於撞擊及反擊者,已爲理論所證明,經驗所得亦與之切合.

在吸引的方面,此事我如下的指明之.我們設想在互相吸引的二物體 A 與 B 中間,有一阻物存在,因而使此二物體不能相遇.倘 A 向 B 較強的被吸引,則阻物之被 A 所壓較之被 B 所壓爲甚,因而不能成均勢.如是,一面過重的壓力能使此三者(二物體及其間之阻物)所成之系統向 B 的方向運動,在無阻的空間內,其加速的運動可直至於無限.然此爲不合理之事,與第一定律相乖違;蓋按第一定律,此系統必保持其靜止或等速直線運動之狀態.緣此,可知二物體之壓其中間阻物,力必相等,是即相吸之強亦相等.我曾用一磁石及鐵條作過一試驗.這磁石與鐵條均各置於器皿中,將其浮在靜止的水上,相距不遠,於是二者

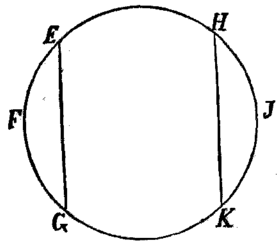
不相排斥，而因互相吸引的關係，漸漸的相接近，及至均勢狀態下，二者均靜止了.地球與其部分間之交互重力作用亦是如此. 試設想用一平面 EG 將地球 FJ 切成爲 EGF 與 EGJ 之二部，如是則其交互的重量必相等.試用一其他平面

$$HK \text{ 與 } EG \text{ 相平行，}$$

將大的部分 EJG 切成爲 $EGKH$ 及 HKJ 二部，使

$$HKJ = EGF,$$

則其中間的部分 $EGKH$ 因其本身的重量不會向兩旁之任何一部相傾，而在其中間以均勢浮着并靜止着. 但其一旁的 HKJ 則以其全部重量置在此中間之部分上，推之使其向其他一旁的 HGF. 因此，$HKJ+EGKH$ 或即 EGJ 全部傾向 EGF 而被其吸引的力，必等於 HKJ 之重，即是，等於 EGF 之重.所以 EGJ 與 EGF 兩部分



第五圖

之交互的重量是相等的.要不然,則在無阻的以太中浮着的地球必對於較大的重量退讓,而飛入無限遠去了.

物體之速度其比如其內在的力之反者,當撞擊及反擊時其所含之能性相等;在機械的器物中其運動的力亦是如此,倘速度之比如力之反,則在相反的傾向下,即互相成爲均勢.兩個重量能同樣的動秤之桿,祇須在後者振動時,其比如其上下速度之反,即是,以直線上下的兩個重量,倘其比與其懸點與軸間距離之比相反,則此兩重量之能性相等.倘在斜面或其他對象上斜的上昇或下降,而如其比如垂直的上昇下降之反,則亦爲能性相等,至於須垂直者,則因此爲重力之方向.在轆轤或槓杆機械方面,拉住繩索及使重物不下墜的手之力,假使其與直上或斜上的重物之反比,猶如手之速度與垂直上升的重物之速度相比,則亦如上所說之理.在小輪所構成的機器如鐘錶及類此之具方面,推動輪子前進及其阻力,倘其比如輪子速度之

反,則即相互成均勢．壓力機之螺旋釘,其力與旋轉此釘之手力相比．猶如後者之旋轉運動與壓力機向物體施壓之速度相比．楔子向已劈開的木內兩面所施之壓力,與椎擊楔之力相比,猶如後者施擊方向內之速度與木之部分離楔而開之速度相比.一切機械之動作均如是.機械之效用即在於減少速度以增加力,以及反之,因而每種適當的器械能解決這問題：用一已知的力以運動一已知的重物,或,用一已知的力以制勝任何一已知的阻力．

倘機械如是構造，使作用的部分之速度與阻滯的部分之速度相比,猶如力之反比,則作用的力即與阻力成均勢,而如前者較大,即能將後者制勝了．如能充分的較大,俾可制勝一切阻力,如相觸物體及相摩物體之摩擦阻力，相接物體或須相分開的物體之結合阻力，以及所欲舉起的重量之阻力等,則每種制勝後所存之餘力,即產生與自己相比的加速,此加速之一部分在機械之各部,一部分則在阻力的物體方面發現出來．

這裏的用意,并不想將力學拿來研究,我們祇想指出這第三定律之所及範圍及其所至之確定性.蓋如我們就其發生作用的原因,力及速度聯合的以量此作用,而就各部之速度,及由摩擦,結合力,重量及加速等所產生之阻力以量其反作用,則每種機械之應用方面,此作用與其反作用恆相等.不問發生作用的原因藉機械之媒介而能推及如何的遠,以及後來能及於何種阻力的物體,但就最後的計量言之,恆與其反作用爲相等的.

論物體之運動

第一編

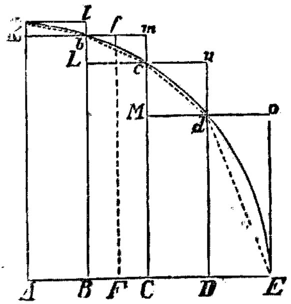
第一章　論首末比之方法

用此可證明以後之理者

§1. 補題. 量以及量之比，在一定時間內恆趨向相等且在該時間末修以前能互相接近，至於其差小於任何已知之量者，最後必相等.

設如不然，可設其最後之差爲D.如是則其互相接近之度決不能超過此已知之差，此則與所設不合.

§2. 補題. 設$AacE$爲任何一圖形，由Aa, AE直線以及曲線acE所構成，今於



第　六　圖

其上作若干長方形 $Ab, Bc, Cd,$ 等等,其底線 $AB,$ $BC, CD,$ 等等均相等,其邊爲 $Bb, Cc, Dd,$ 等等;又作若干長方形 $aKbl, bLcm, cMdn,$ 等等.倘將此項長方形之底線 $AB=BC=CD$ 等等縮小,同時並增加其長方形之數以至於無限,則最後該內切形卽與其外切形及原來的曲線形相等,卽是

$$AKbLcMdD=AalbmcndoE=AabcdE.$$

蓋內切形與外切形之差爲

$$aKbl+bLcm+cMdn+dDEo=AalB,$$

因爲 $AB=BC=CD=DE$. 將 AB 減小至無限小時,$AalB$ 卽小於任何可知之數,所以(按§1.)內切形與外切形最後相等,而在其中間的曲線形更可相等了.此卽所欲證者

§ 3. 補題. 卽使 $AB, BC, CD,$ 等等不相等,祇須將其減小至無限時,該三個圖形之最後比率亦仍相等.

設 AF 爲最大之底線,則可完成 $FAKf$ 長方形.此長方形固較內切形及外切形之差爲大,但如

將 AF 減小至無限，則此長方形亦即小於任何可作的長方形了．此即所欲證者．

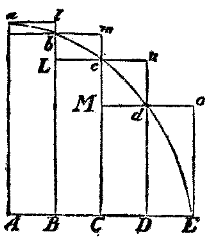
系 1.　所以將成為零的各長方形之最後總和，在任何關係下恆與原來之曲線形相合．

系 2.　並且，各該弧之所屬弦 $ab, bc, cd,$ 等等所包含之直線形，亦與曲線形最後相合．

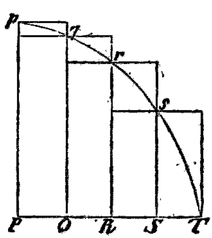
系 3.　與弦相當的切線所構成的直線形亦適用此理．

系 4.　所以就其周 acE 言之，這些最後的圖形不是直線的，而是直線之曲界．

§ 4. 補題．　倘於 $AacE$ 及 $PprT$ 二圖形內，仿前作二列長方形，其多寡之數相等，並將其底線減



第七圖



第八圖

小至無限，而如其一圖形內各個長方形與他圖形內各個之最後比均相同，則 $AacE$ 與 $PprT$ 二形之相比亦同此。

蓋各個長方形之和其比與長方形之比同，而按 §3. 每個圖形內長方形之和與圖形本身爲相等，故二形亦同此相比。

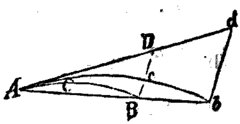
系. 所以將二個任何種類之量，分之爲同多的部分，而如將其數增加至無限，將其量減小至無限時，此項部分間，即第一個對第一個，第二個對第二個，等等，其比有定，則整個量之相比亦同此。

蓋如將以上補題內圖形之長方形作爲此處所論之部分，則該項部分之和亦可視爲長方形之和。所以當其數增加至無限，長方形之大減小至無限時，此項和之比與長方形之比同，亦即是一個部分與他部分之最後比(按照所設)。

§5. 補題. 相似形之相當邊均爲相比的，直線的與曲線的均然，而其面積相比則如邊之平方相比。

§6. 補題. 設位置已完的一弧 ACB 爲其弦 AB 所綳緊，而在其某一點 A，在連續的曲率之中，有一直線 AD 與之相切，則如 A 與 B 二點相接近而終至相合時，該弦與切線間之角 BAD 即減小至無限終至於成爲零.

蓋如該角不成爲零，則 ACB 弧與 AD 切線間必含有角，而此與直線所成者相等，如是則 A 點之曲率即不連續，與所設相違. 亦可如是明之：將 AB 引長至 b，AD 引長至 d，則當 A，B 相合時，Ab 已無 AB 部分在曲線內，故必 Ab 與 Ad 相合或 Ab 在 Ad 與曲線之間，後者與曲率之性質相違，故祇能爲前者，此卽所欲證者.



第九圖

§7. 補題. 在同樣的假定下，弦，弧及切線間相互之最後比爲相等的比.

當 B 向 A 接近時，試將 AB 及 AD 各向 b 及 d 引長，並作

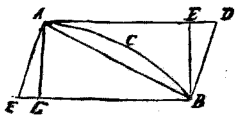
$$bd \text{ 與 } BD \text{ 相平行,}$$

而且恆

$$ACB \backsim Acb.$$

今如 A 與 B 相合,則按 § 6. dAb 角即成爲零,因此,Ab, Ad 及在其間的 Acb 弧即相合而相等.所以與此相比的直線 AB, AD 及 ACB 弧亦即成爲零,而其最後的比即爲相等的,此即所欲證者.

系 1. 倘作



第 十 圖

$$BF \text{ 與 } AD \text{ 相平行,}$$

而如 BF 與 AF 相交於 F, 則 BF 與將成爲零的 AB 弧之比最後爲相等的比.蓋如將 $AFBD$ 平行方形作成後,即有

$$BF = BD.$$

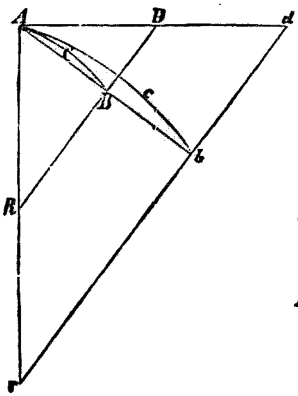
系 2. 經過 B 與 A 作若干直線 BD, BE, AF, AG, 與切線 AD 及與此平行的直線 BF 相交於 D, E, F, G, 則一切橫段 AD, AE, BF, BG 及 AB 弦以及 ACB 弧之最後比爲相等的比.

系 3. 所以在任何一個關於此項最後比之證明方面，此項直線每條均可代其他一條而應用之。

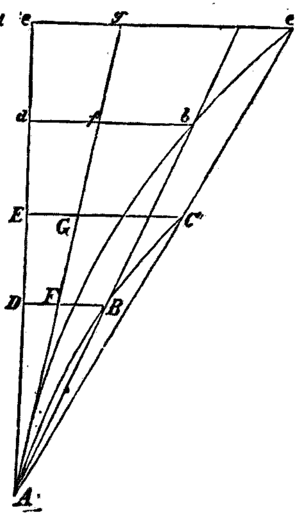
§ 8. 補題. 設已知直線 AB, BR 與 ACB 弧，AB 弦及 AD 切綫作成以下之三角形：

$$ACBR,\ ABR,\ ADR,$$

而 A 與 B 點互相接近，則其最後形式必成為相似，而其最後比則為相等的比。



第十一圖



第十二圖

試將 AB, AD, AR 引長至 b, d, r, 並作

$$rbd \text{ 與 } RBD \text{ 平行,}$$

以及

$$\frown Acb \backsim \frown ACB.$$

今如 A 與 B 相合,則 bAd 角即成爲零,故

$$Acbr,\ Abr,\ Adr$$

三個三角形即相合,而與之相似的三角形

$$ACBR,\ ABR,\ ADR$$

亦即相合.此即所欲證者.

系. 所以凡論其最後比之處,此項三角可不分彼此通用.

§ 9. 補題. 位置已知的曲線 ABC 及直線 AE 相交於 A, 與橫坐標 AD, AE 相當的有縱坐標 DB, EC. 今使 B 及 C 點向 A 接近,則三角形 ADB 及 AEC 相比,最後成爲邊之平方相比.

試於引長的線 AD 上取二點 d 及 e, 使

$$AD : AE = Ad : Ae,$$

則相當的即有

$$DB : db = EC : ec.$$

又將 AC 引長至 c, 作

$$Abc \backsim ABC,$$

並作 Ag 切線於二曲線,與縱坐標相交於

$$F, G, f, g.$$

今如 B 及 C 與 A 相合,則 cAg 卽成爲零,而曲線形

$$Abd, \quad Ace$$

卽與直線形

$$Afd, \quad Age$$

相合.按 § 5. 其比卽如

$$Ad^2 : Ae^2.$$

但 Abd, Ace 之面積恆與 ABD, ACE 之面積相比, Ad, Ae 邊亦恆與 AD, AE 邊相比.故其最後比爲

$$ABD : ACE = AD^2 : AE^2.$$

此卽所欲證者.

§ 10. 補題. 物體受某種有限的力之作用而作

軌道時，不問該力爲一定不變的或爲恆增或恆減的，其所作軌道在開初運動時與時間之平方相比.

蓋如將時間用 AD, AE (前圖)表出，所產生的速度則以 DB, EC 表之，則 ABD 與 ACE 面積卽表出以此項速度所作的軌道，而此則在運動之始(按 § 9.)與時間 AD, AE 之平方相比. 此卽所欲證者.

系 1. 由此不難得以下之推論：在相比的時間內，物體作出相似形之相似部分，而如有同等的力在該項部分以相似的方法侵入，則產生軌道之更動，其量法則可以圖形方面(倘無該項力侵入)物體本來所可達的處所爲出發.所以此項更動之比，約略如產生此項更動的時間之平方相比.

系 2. 但由相比的力以相似的方法侵入者，其更動之比，如力與時間之平方二者並用之比.

系 3. 物體在各種力之作用下所作的任何空間均適用此.此項空間，在運動之開始，其比如力及時間之平方二者並用之比.

系 4. 所以在運動之開始，力之比如所作的軌道之正而如時間之平方之反。

系 5. 又,時間之平方如所作之軌道之正,如力之反。

§ 10a. 附註. 如將不同種類的不定量相比較，而說:其中某一個之比猶如其他一個之正或反比，則此語之意義當如是了解之:前者之增加或減小，其比猶如後者或其倒數.又如說: 其中之一,其比猶如其他二個或多個之正比或反比;則其意義爲:前者增加或減小之比，爲後者或其倒數的增加或減小之諸比之組合. 例如 A 之比，如 B 之正，C 之正，D 之反,則 A 之增加或減小,其比如

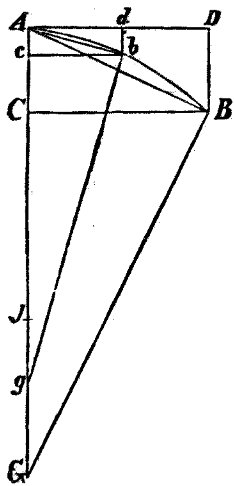
$$BC\cdot\frac{1}{D},$$

此即是說，A 與 $\frac{BC}{D}$ 之間有一定的比.

§ 11. 補題. 設 AD 爲 AbB 曲線上之切線，BD 則爲自 B 所作之任意直線,如是則 BD 當成爲零時，最後與其所屬弦 AB 之平方相比.

第一事. 設 BD 與 AD 相垂直,試作 BG 與

AB, AG 與 AD 垂直，使此二垂直線於 G 相交．於是使 D, B, G 點向 d, b, g 點退，J 則為 D 與 B 向 A 接近時 AG 與 BG 二線之最後交點．於此，不難知 GJ 可小於任何可知之數．



第十三圖

試設想經過 A, B, G 及 A, b, g 各作圓，而因 B, b 處有直角，故 AG, Ag 為其半徑；如是則

$$AB^2 = AC \cdot AG = BD \cdot AG,$$

$$Ab^2 = Ac \cdot Ag = bd \cdot Ag,$$

因而

$$AB^2 : Ab^2 = AG \cdot BD : Ag \cdot bd. \qquad (A)$$

但 JG 可使其小於任何可知之數，故亦可使 AG 與 Ag 之差小於任何小之數，故按 (A)

$$AB^2 : Ab^2$$

與

$$BD : bd$$

之差亦可小於任何可知之數.故按 § 1. 最後即得

$$AB^2 : Ab^2 = BD : bd. \tag{B}$$

此即所欲證者.

第二事. 使 BD 線對於 AD 線取一任意的位置,例如 BD', 則如 bd' 與 BD' 平行,有

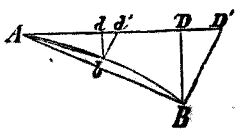
$$BD' : bd' = BD : bd,$$

因而亦有

$$AB^2 : Ab^2 = BD' : bd' \tag{C}$$

此即所欲證者.

第三事. 倘 D 角非爲已知者,而 BD 線向一某點收斂,或按一某種定律而作者,則 D 與 d 二角仍互相接近,其差可小於任何已知數.故按 § 1. 二者最後必相等,而 BD 與 bd 之比仍如前.此即所欲證者.



第十四圖

系 1. 因切線 AD, Ad,

弧 AB, Ab,

以及正弦 BC, bc,

最後均與弦 AB, Ab 可相等，故其平方最後相比亦如

$$BD : bd.$$

系 2. 因

$$\triangle ADB : \triangle Adb = AD \cdot DB : Ad \cdot db,$$

而最後 $AD^2 : Ad^2 = DB : db,$

故最後亦即有

$$(D)\begin{cases} ADB : Adb = AD^3 : Ad^3 = DB^{\frac{3}{2}} : Db^{\frac{3}{2}} \\ ABC : Abc = BC^3 : bc^3. \end{cases}$$

系 3. 因最後

$$DB \text{ 與 } Db \text{ 平行},$$

而 $DB : db = AD^2 : Ad^2.$

故曲線形 ADB, Adb，按之拋物線之性質，為直線形 ADB, Adb 之 $\frac{2}{3}$，而其段 AB, Ab 為同三角形之 $\frac{1}{3}$. 故此項曲線形以及此項段之比，猶如

$$AD^3 : Ad^3 = \frown AB^3 : \frown Ab^3 = \text{弦 } AB^3 : \text{弦 } Ab^3.$$

§ 12. 附註. 在一切這些命題內，我們均預先假定，相切角既非無限的大於亦不無限的小於圓

與其切線所作之相切角，即是說，A 點之曲率既不爲無限大亦不爲無限小，而 AJ 距離則爲有盡的．

我們亦可設 DB 與 AD^3 相比，如是則不能經過 A 點在切線 AD 與曲線 AB 之間作一圓，而相切角將較圓方面之相切角爲無限小．由同樣的理由，倘依次的使 DB 與

$$AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, \text{等等}$$

相比，即得依次直下至於無窮的一列相切角，其在後的每一個較之在其前的爲無限小．反之，倘使 DB 依次的與

$$AD^2,\ AD^{\frac{3}{2}},\ AD^{\frac{4}{3}},\ AD^{\frac{5}{4}}, \text{等等}$$

相比，則所得之一列相切角，其第一個與圓方面者相同，其第二個以下，每個較在其前者大無限．但在每二個此項角之中間，我們還可以作一其他的列加入，此列向二方均伸入無限，其中每在後的一個較之其前者大無限．例如在 AD^2 與 AD^3 之間，可插入

$$AD^{\frac{13}{6}},\ AD^{\frac{11}{5}},\ AD^{\frac{9}{4}},\ AD^{\frac{7}{3}},\ AD^{\frac{5}{2}},\text{等等}.$$

在此列之每二項中間又可插入一新列，爲介在中間的角所成，相差可無限。於此，自然界中實沒有限制。

在曲線及其所圍的面積方面所已證明者，均不難應用之於固體的曲面及固體本身。我所以將這些補題先證出，是要避免以後之冗長的所謂矛盾證法，如古代之幾何者所應用的。用不可分的量這個方法，論證實可簡略多了。但不可分的量這個方法較爲生硬，被看作較遠於幾何的，故我之證以下諸定理，甯可用將成爲零的量之最後和數及比率，以及用正增加的量之最先和數及比率；所以我將該項界限之論證儘簡單的先一述之。凡用不可分的量之法所可得者，此亦可得之；我們對於旣得原則之應用，亦更可確實。

又，以下我們將量看作由極微的部分所成，或不用直線而用無限小的曲線，則我的意思，在指將成爲零的小部分而非爲不可分的部分，在用和數

及比率之極限而非確定的部分之和數及比率；我希望常常回到以前諸補題方面所用之方法以求此項證法之核心.

或者有人可以批評，所謂將成爲零的量之最後比是沒有的，因爲在成爲零之前，即非最後，而在旣成爲零以後，則又簡直無所謂比了.但根據同樣的理由，我們亦可說，一個向某處進行的物體，沒有最後的速度，因爲在未達該處之前，即非最後，在旣達之後則又沒有速度了.對於此項批評的回答甚簡.所謂最後速度，是物體在達到該處取消其運動以前所不能有的運動之速度，不是在達到以後之速度，而是剛剛在達到該處時的速度，物體於以接觸該處而停止其繼續運動者.同此，所謂將成爲零的量之最後比，是指以此成零，而非在成零之前或後的.又所謂方產生的量之最先比，亦即是以此纔產生量的比；而所謂最先及最後和數則爲以此開始或以此終止的和數（或將成爲較大或較小）.在運動之末，其速度有一界限，爲此所不能超

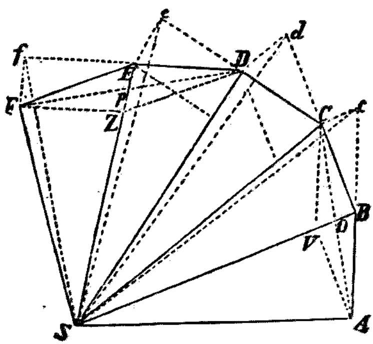
出者;此即是最後速度.在一切正開始將終止的量及比方面,亦有此項界限.因爲此界限是固着而有定的,故求此項界限乃是眞正的幾何上之職務.但一切屬於幾何的,均可在旁的幾何求法或證法方面適當的應用之.

或者亦可以說,倘將成爲零的量之最後比已知,則其最後量亦必已知,因而每一量均由不可分的部分所成,但歐几里得在他所著的提要之第 10 卷中剛剛有相反的證明.但是這一個批評,實在樹立在不正確的假設上.量與之成爲零的最後比,在事實上並非爲最後量之比,而爲某種界限,爲恆向減小的量之比所恆向之接近者,其接近之度,可使其差小於任何可知之數,但終不能超出此界限,且在此項量減小至無限以前,亦不能早先達到此界限.在無限大的量方面,此理較爲易見.倘二個量之差已知,而此二量均增加至無限,則其最後的比亦已知,即相等的比;但該項量之最後或其極大量則非已知(惟其比則爲上述的已知者).

所以我以後爲便利敘述計而用極小的，將成爲零的或最後的量，則所指並非爲其量已定的量，而爲必須無限減小之的量。

第二章　論向心力之求法

§13. 定理. 倘物體在軌道內運動，而其半徑恆向不動的力之中心，則其所作的面，在固定的平面內而與時間相比.



第十五圖

試將時間分爲均段，則因有力影響之，故物體在時間之第一段內作一線 AB. 倘沒有什麼其他阻礙，即此物體在第二時間段內即直線的向 c 進

行,而

$$Bc = AB;$$

今作 AS, BS, cS 半徑向力之中心S,則

$$(A) \qquad \triangle ASB = \triangle BSc.$$

但當物體到 B 時,向心力很強的影響之,使其不循直線 Bc 而由 B 前進.今作

$$cC \text{ 與 } BS \text{ 平行},$$

並使 cC 與 BC 相交於 C, 則在第二時間段之末(按定律,系 1)物體即到 C 點,且與 SAB 在同一平面內.今再作 SC, 則因

$$cC \text{ 與 } BS \text{ 平行},$$

故
$$\triangle SBC = \triangle SBc.$$

按前(A)有

$$SBc = ASB,$$

所以

$$(B) \qquad \triangle SBC = \triangle SAB.$$

同樣的理由,向心力依次在 C, D, E 等等各點發生作用,故物體在各段時間內,依次作 CD, DE 等

諸線.此項線均在同平面內,且

$$(C)\qquad \begin{cases}\triangle SCD=\triangle SBC,\\ \triangle SDE=\triangle SCD,\quad \text{等等.}\end{cases}$$

所以在等的時間段內,不動的平面內作成了相等的面積,將此項面積組合時,即知 $SACS$, $SAES$ 面積相比,猶如作此的時間相比.今將此項三角形之數增加至無限,並將其底線減小至無限,則按 §3 之系 4,其周 ADE 卽成爲一曲線.所以向心力之作用不絕(由於此向心力物體乃恆離開曲線上切線之方向),而與時間相比的面積 $SABCS$, $SABCDES$, 於此亦仍與之相比.此即所欲證者.

系 1. 在無阻力的空間中恆向一不動的中心而運動的物體之速度,其比猶如由該中心至軌道上切線的垂線之反比.在 A,B,C,D 諸點,其比猶如 AB,BC,CD,DE, 而此則與其高爲反比.

系 2. 物體在無阻力的空間中所作的弧上之弦 AB, BC, 今補充之使成爲一平行方形 $ABCV$, 試

將其對角線 BV 如是引長之，且使其位置成爲弧減小至無限時最後所取者，則該對角線即經力之中心。

系 3. 試將弦 AB,BC 以及 DE,EF 補充成爲平行方形 $ABCV, DEFZ$，則當該項弧成爲無限小時，B 與 E 處之力相比，猶如 BV, EZ 對角線之最後比。

蓋 BC,EF 二運動是由 Bc,BV 以及 Ef, EZ 所合成，而 $BV=Cc, EZ=Ff$ 二運動，則按本節之證是由 B 及 C 點之向心力所產生；所以與之相比。

系 4. 使物體在無阻的空間中不能直線運動而作曲線軌道的力，其相比如等時間內所作弧之矢相比，當弧減小至無限，此項矢即向力之中心收斂，並平分其弦。

此處所謂矢，蓋即是前系中所稱之對角線之半。

系 5. 此項力與重力之比，猶如此項矢與(同時間內拋物所作的)拋物線弧之垂直矢相比。

系 6. 倘物體在其內運動的平面以及其中的中心非爲靜止而以直線作等速運動，此一切按之運動定律均仍適用。

§ 14. 定理. 在任何一曲線上運動的物體，倘其半徑向着一靜止的或以直線作等速運動的點，且環此點掠過與時間相比的空間，則此物體爲一向該點的向心力所推動。

第一事. 在曲線上運動的物體，按第一定律必有外來的力影響之，纔使其離開直線的軌道。使物體離開直線軌道並使其不能不以不動的點 S 爲中心而於等時間內作甚小而相等的三角形

$$SAB, SBC, SCD, SDE, \text{等等},$$

的這個力，在 B 點所發生的作用，其方向係沿着與 cC 相平行的線（按提要第一卷，定理 40，以及第二定律），即是，沿着 BS 線；在 C 點則沿着 CS 線，等等。所以該力之作用，恆沿着向固定點 S 的線，此即所欲證者。

第二事. 按定律，系 5，物體在其內作曲線形

運動的面，不問其爲靜止或與物體及其所作圖形並中心點 S 以直線作等速運動，均無關係。

系 1. 在無阻的媒介內，倘所掠過的面積不與時間爲比例，則其力亦不向各半徑之交點，並且倘運動加速，則向運動的方向前傾，如不加速而遲緩則後傾。

系 2. 且在有阻力的媒介內，倘運動加速，則力之方向亦離開半徑所相交的點而傾於運動的方向。

§ 15. 附註. 物體所受之向心力可由數個力所組成；如是，則該項定理須如此看法，即，由各個力所組成的力是向中心點 S 的。

倘一個力的作用恆向着與所作的面相垂直的一方向，則其影響必使物體離開其軌道所在的平面；不過所作的面之大小則不以此而有所增加或減小，所以在力之組成一方面可以略之不計。

§ 16. 定理. 任何物體，倘有一半徑向着一其他運動的物體之中心點而繞之掠成爲面積，且此

項面積與時間成比例者，此物體必爲一種力所推動，此力由傾向該其他物體的向心力以及推動該其他物體的全個加速力所組成。

蓋如此二物體 L 與 T 受其他新的力所推動，此新的力與推動第二物體的力相等相反，因而在平行的方向內生作用，則按定律，系 6，該第一物體 L 仍如前的繞 T 作成面積，無有變動。但此新的力能將原來推動第二物體的力抵消，所以按第一運動定律，T 將自由而可靜止着或以直線作等速運動，而 L 則爲二力之差所推動仍繞第二物體作成與時間相比的面積，按 § 14. 可知此力之差是以 T 爲中心而傾向之。

系 1. 倘物體 L 有一半徑向着一其他物體 T，而作成與時間相比的空間面積，則如由推動 L 的全力（此可爲單純或按定律，系 2 爲諸力所合成者）上，減去推動 T 的加速力，所餘的力即完全以後者爲中心而傾向之。

系 2. 倘所作之面積儘接近的與時間相比，則

所餘的力亦儘接近的傾向第二物體 T.

系 3. 反之，倘所餘的力儘接近的傾向第二物體，則所作的面積亦儘接近的與時間相比.

系 4. 倘物體 L 有一半徑向着一第二物體 T，但其所作面積與時間相較甚不相稱，而 T 則為靜止或以直線作等速運動，則向第二物體之向心力或則為零，或則與其他力之很強的作用相和雜，而此由各力（倘存在）所組成的整個的力，傾向着一其他動或不動的中心，面積的掠成，即以此為中心等速的進行. 倘該第二物體 T 作任何的運動，亦是如此，不過所謂向心力應指該項力，即，除去影響 T 的一切力後所得之餘力.

§ 17. 附註. 由等速的掠成面積，可知有一中心存在，對於物體生作用最強的力即向着此心，所以可說每個循環的運動必繞着一個中心，而由此中心的力，物體乃離開直線的運動而保持其軌道. 但是我們在下面為什麼不把等速的掠成面積看作為有中心存在而為循環運動所環繞的標識?

§18. 定理. 以等速運動作成不同的圓的諸物體之向心力,其方向係向着此項圓之中心,其相比,則與等速作成的弧之平方爲正比,與半徑爲反比.

按 §14 及 §13, 系 2, 此項力係向着中心點,而其相比,則如極小而相等的時間內所作弧之矢相比(按 §13, 系 4)即是,如該項弧之平方爲圓之徑所除(按 §7)相比.但此項弧之比,猶如任何相等時間內所作弧之相比,而徑之相比,則如半徑相比,所以該項力與任何等時間內所作弧之平方,爲圓之半徑所除,相比.此即所欲證者.

系 1. 因弧與速度相比,故向心力相比,猶如速度之平方爲圓之半徑所除相比.

系 2. 因環繞之時間,與半徑爲複合的正比,與速度爲反比,故向心力之比,與環繞時間之平方相反,與半徑爲正.

系 3. 倘環繞的時間相等,則向心力與速度均與半徑爲同比;反之亦然.

系 4. 倘環繞時間之平方,及速度之平方其比

如半徑,則向心力均相等;反之亦然.

系 5.　倘環繞時間與半徑相比,則向心力相比與半徑相比爲反;反之亦然.

系 6.　倘環繞時間之平方與半徑之三方相比,則向心力之相比,與半徑之平方相反,但速度則與半徑之平方根相比爲反.反之亦然.

系 7.　廣之,倘環繞時間與

$$R^n$$

相比,於此, n 爲一任何數,則速度之比,與

$$R^{n-1}$$

相反,而向心力則與

$$R^{2n-1}$$

相反.

系 8.　物體作成相似圖形之相似部分(其中心點之位置亦相似)時,其所須時間,速度,及力亦均適用以上之定理;祇須應用以上之證法於此,即能推得.在應用時,須用恆相等的面積之掠成以代等速運動,用物體與中心點間之距離,以代半徑.

系 9.　由同樣的證法中並可知道，物體受向心力之作用在一定時間內等速的所作之圓弧，爲圓徑與高(在此同時間內物體受該力所可墜下之高)之中比。

§ 19. 附註.　系 6 內所述之事項，在天體運動方面發生(此爲雷氏 *Wren*, 霍克 *Hook* 及哈雷最初所發見的)，所以關於向心力以半徑之平方減少的一事，以下我將較詳細的研究之。

又，應用上述定理及其系時，我們亦可推論到向心力與某種已知力如重力之比。蓋如物體因其重力而於與地球同心的圓上運動，則可知重力即爲其向心力。按 § 18 系 9，可由物體之下墜，以知環繞的時間，以及所作的弧。許金司在他所作論擺錘鐘的名著中，即是用類此的定理將重力與環行的物體之離心力相比較。

上所述的亦可如是明之。試設想於圓內作一內切多邊形，其邊數任多。倘物體緣此項邊運動，而在各個角被圓所反擊，則反擊時物體所影響於

圓的力其比如速度之比．所以一定時間內力之總和，其比如速度及反擊之次數的組合，即是，倘多邊形之性質已知，則如該已知時間內所作之軌道，用圓之半徑來除．因而此總和之比，猶如其軌道之平方用半徑來除．倘將多邊形之邊數增加至無限，俾與圓相合，則總和之比，猶如弧之平方用半徑來除．但此總和卽爲物體影響於圓上之力，故與圓反擊物體使其恆向中心的力相等相反．

§ 20. 問題． 物體受力之作用作成一已知的形，此項力均向一共同的中心，其運動之速度則均已知；今欲求得此中心．

設已知的圖形有三切線 PT, TQV 及 VR, 與圖形相切於 P, Q, R 三點，此三切線並相交於 T 及 V. 今於切點作三垂線，PA, QB, RC 與切線相垂直，且與該項點處之速度成反比．倘用 $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$, $\varphi(R)$ 表三點 P,Q,R 處之速度，則有

$$\varphi(Q):\varphi(P)=PA:QB,$$

$$\varphi(R):\varphi(Q)=QB:RC.$$

經過 A, B, C 作

AD 與 PT 相平行，

CE 與 RV 相平行，

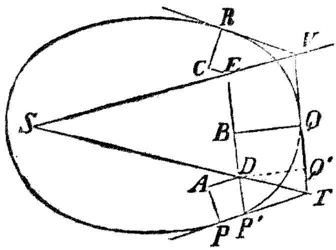
並延長 TD, VE 使其相交於所求之中心。

由中心點 S 向 PT 及 QT 所作之垂線，按 § 13，系 1，其相比為物體在 P, Q 之速度相比之反，所以如

$AP : BQ$

之正，亦卽是如

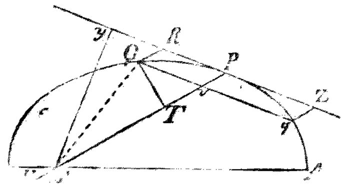
$DP' : DQ'$,



第十七圖

於此，DP', DQ' 為由 D 至切線之垂線。由此，卽不難知 S, D, T 三點均在一直線上。仿此，並可證明 S, E, V 三點亦均在一直線上，所以中心點 S 必在二線之交處。此卽所欲明者。

§ 21. 定理。 一物體於無阻力的媒介中運動，繞一不動的中心，其軌道任意。在很小的時間內，此物體作成一弧，其矢為 Pv，將該弧之弦平分，



第十八圖

並將其延長後經過力之中心．如是則弧中心之向心力與矢爲正比，與時間之平方爲反比．倘作成 QPq 弧之時間爲 t，則該力卽與

$$\frac{Pv}{t^2}$$

相比。

蓋按 § 13, 系 4, 在一定時間內 Pv 之比如力之比，而弧之增加則與時間之增加爲同率，但(按 § 11, 系 2 及 3) Pv 矢則與時間之平方同增加，所以與力及時間之平方相比．反之，亦可知力與矢成正比，而與時間之平方成反比。用 § 10, 系 4 亦易明此。

系 1. 物體繞中心 S 作成一曲線 APQ, ZPR 直線則與該曲線相切於 P. 今自一其他任意點 Q 作

QR 與 SP 相平行，

並使 QT 與 SP 相垂直，則向心力與

$$\frac{SP^2\cdot QT^2}{QR}$$

成反比。

蓋 $$QR=Pv.$$

即，等於 PQ 弧二倍之矢，P 在其中間。但三角形

$$SQP=SP\cdot QT$$

與作成弧 PQ 之二倍的時間相比，故可視爲代表時間者。

系 2. 倘 SY 與切線 PR 相垂直，則向心力爲

$$\frac{SY^2\cdot QP^2}{QR}$$

之反比。

蓋（弧將成爲零時）

$$SY\cdot QP=SP\cdot QT.$$

系 3. 倘軌道本身爲一圓，或與圓作同心的相切或相交，即是，軌道所有與圓之切角或交角儘可能的小，且在 P 點之曲率及曲率半徑均相同；又，PV 爲該圓之弦，由物體經過力之中心者，則向心力與

$$SY^2 \cdot PV$$

成反比.

此理蓋可由

$$PV = \frac{QP^2}{QR}$$

知之.

系 4. 在同樣的條件下，向心力與速度之平方成正比，與垂線 SY 成反比(按 §13, 系 1).

系 5. 倘有任何曲線形 APQ 及在其內的一點 S 已知，向心力則恆向該點，則可求得後者之定律，物體恆受此定律之支配而離開其直線的軌道，在該形之邊上運動.

欲知此，我們可計算

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = SY^2 \cdot PV,$$

蓋此與力為反比者.以下之問題內含有此項例.

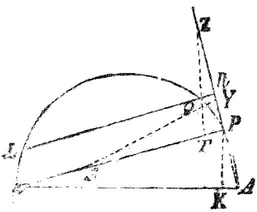
§ 22. 問題. 一物體在圓之周上運動，試求向心力之定律，此向心力則向着一任意點.

今設 $VQPA$ 為圓之周，S 為向心力之中心，在周上運動的物體在 P 點，Q 則為其即可達到的

處所.今於 P 點作圓之切線 PRZ, 並作弦 VP 經過 S, 以及徑 VA, 且將 A 與 P 連結.今使

PK 與 VA 垂直,

QT 與 VP 垂直,



第十九圖

又作 LR 經過 Q 與 VP 平行,而前者與圓之交點則爲 L, 與切線 PR 之交點爲 R. 又如將 QT, PR 延長而其交點爲 Z, 則

$$\triangle ZQR \sim \triangle ZTP \sim \triangle VPA,$$

因而 $$RP^2 : QT^2 = VA^2 : VP^2.$$

又因 $$RP^2 = RQ \cdot RL,$$

故 $$QT^2 = \frac{RQ \cdot RL \cdot VP^2}{VA^2}.$$

試用 $$\frac{SP^2}{QR}$$

乘上方程之兩端,則有

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = \frac{SP^2 \cdot VP^2 \cdot RL}{VA^2}.$$

在 P 與 Q 相合時,

$$RL=VP,$$

故 $$\frac{SP^2\cdot QT^2}{QR}=\frac{SP^2\cdot VP^3}{VA^2}.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 可知向心力與

$$\frac{SP^2\cdot VP^3}{VA^2}$$

成反比，或因 VA 為常數，與

$$SP^2\cdot VP^3$$

成反比。

第二證. 今作 PR 之垂線 SY, 則因

$$\triangle SYP\sim\triangle ZTP\sim\triangle VPA,$$

$$AV:VP=SP:SY,$$

故 $$SY=\frac{VP\cdot SP}{AV},$$

而 $$\frac{SP^2\cdot VP^3}{AV^2}=SY^2\cdot VP.$$

按 § 21, 系 3 及 5, 即知向心力與

$$\frac{SP^2\cdot VP^3}{AV^2}$$

成反比，或因 AV 為常數，故與

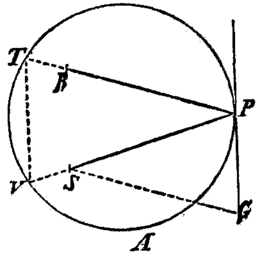
$$SP^2\cdot VP^3$$

爲反比.

系 1. 倘 S 在圓周上與 V 相合,則向心力即與

$$SP^5$$

成反比.



第二十圖

系 2. 使物體在圓周上以 S 爲中心而繞行的力，與能使物體在同周上於同時間內以他心作繞行的力相比,如

$$RP^2 \cdot SP : SG^3,$$

於此，SG 爲自 S 至切線 PG 之線,與 RP 相平行.

按此節第一力與第二力之比,如

$$RP^2 \cdot PT^3 : SP^2 \cdot PV^3,$$

即是,如

$$SP \cdot PR^2 : \frac{SP^3 \cdot PV^3}{PT^3}.$$

但因 $\triangle PGS \sim \triangle PTV,$

故　$$PT : PV = PS : SG,$$

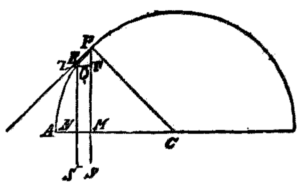
因而　$$\frac{SP^3 \cdot PV^3}{PT^3} = SG^3.$$

系 3. 使物體在任何軌道上以 S 爲中心運動的力，與使物體在同軌道上以同的環繞時間但與中心 R 相當的力相比，如

$$SP \cdot PR^2 : SG^3.$$

此處所用 SP, PR, SG 之意義，在任意的軌道上與在圓上相同。任何軌道上之力與曲率相等的圓上者相同。

§ 23. 問題． 一物體在 PQA 圓上運動，試求向心力之定律，此向心力向着一甚遠的點 S, 故一切向此的直線 PS, RS 可視爲互相平行者．



第二十一圖

今由圓心 C 作一半徑 CA, 與該項平行線垂直的交於 M, N, 並將 C 與 P 連結之。

因　$$\triangle CPM \sim \triangle TPZ$$

而按 § 8

$$\triangle CPM \sim \triangle TPQ,$$

故 $$CP^2 : PM^2 = PQ^2 : QT^2.$$

按 § 7

$$CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2,$$

又按圓之性質

$$PR^2 = QR(RN + QN).$$

倘 Q 與 P 相合,則

$$RN + QN = 2PM,$$

故此處

$$CP^2 : PM^2 = 2PM \cdot QR : QT^2,$$

以及 $$\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2},$$

並 $$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2}.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 即知向心力與

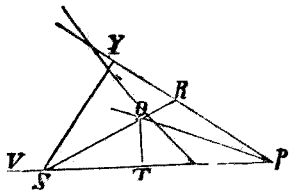
$\frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2}$ 或 PM^3 $\left(\text{因 } \frac{2SP^2}{CP^2} \text{ 爲常數}\right)$

相反比.

由 § 22 亦不難得此項結果.

§ 24. 附註. 用無多異的方法，可以知道在橢圓，拋物線或雙曲線上運動的物體，其所受的向心力，與向很遠的力之中心的縱線成反比.

§ 25. 問題. 一物體在盤旋線(*Spirallinie*) PQ 上運動，其一切半徑 SP, SQ, 等等均與之以一常角相交. 今求向着該旋線中心 S 的向心力之定律.



第二十二圖

設不定小的角 PSQ 爲已知，則因其他角亦爲已知，故卽知該形之形狀，而 $\frac{QT}{QR}$ 亦卽爲已知，而因其形狀爲已知，$\frac{QT^2}{QR}$ 與 QT 卽 SP 相比.

今將 PSQ 角變動之，則 QR 線(與切角 QPR 相對者)亦變，按 § 11, 其率爲 PR 之倍.故

$$\frac{QT^2}{QR}$$

爲常數而等於 SP, 並知

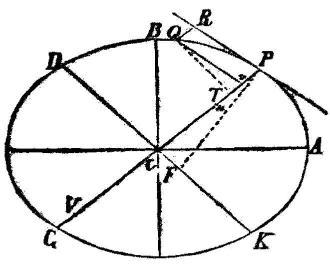
$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} \text{ 與 } SP^3 \text{ 相比.}$$

按 § 21, 系 1 及 5, 卽是與向心力成反比。

第二證. 垂在切線上之垂線 SY, 以及與旋線同心而相交的圓上之弦 PV, 與半徑 SP 之比爲常,故 SP^3 與 $SY^2 \cdot PV$ 爲相比,而按 § 21,系 3 及 5 亦卽是與向心力成反比.

§ 26. 補題. 一切外切於橢圓的平行方形均相等.在雙曲線內作於其徑上的平行方形亦如是.此二者均在圓錐曲線理論方面所已知者.

§ 27. 問題. 一物體在一橢圓上運動; 試求向橢圓中心點的向心力之定律.



第二十三圖

今設 CA 與 CB 爲橢圓之半軸, GP 與 DK 爲其二共軛徑, PF 及 QT 則爲垂於後者之垂線,而以 GP 爲橫坐標時, Q 之縱坐標爲 Qv. 今作成 $QvPR$ 一平行方形,則按圓錐曲線之理論,有

$$(A)\qquad Pv\cdot vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2.$$

但
$$\triangle QvT \sim \triangle PCF,$$

故
$$(B)\qquad Qv^2 : QT^2 = PC^2 : PF^2,$$

而如將此二個比例連結之,卽有

$$(C)\qquad Pv\cdot vG : QT^2 = PC^2 : CD^2\cdot PF^2,$$

或
$$(D)\qquad vG : \frac{QT^2}{Pv} = PC^2 : \frac{CD^2\cdot PF^2}{PC^2}.$$

按 § 26,

$$(E)\qquad \begin{cases} CD\cdot PF = BC\cdot CA, \\ Pv = QR, \end{cases}$$

而如 P 與 Q 相合,則

$$(F)\qquad vG = 2\cdot PC.$$

今將(E)與(F)內之值,代入(D)內,則有

$$(G)\qquad \frac{QT^2\cdot PC^2}{QR} = \frac{2BC^2\cdot CA^2}{PC}.$$

故按 § 21, 系 5, 向心力與

$$\frac{2BC^2\cdot CA^2}{PC}$$

成反比,而因 $2BC^2\cdot CA^2$ 爲常數,故與 $\frac{1}{PC}$ 爲反

比，或卽與 PC 成正比。

第二證。 在 PQ 線上與 T 相反之側取一點 u，使

$$Tu=Tv,$$

以及一點 V，使

$$uV:vG=DC^2:PC^2.$$

按圓錐曲線理論，

$$Qv^2:Pv\cdot vG=DC^2:PC^2,$$

故
$$uV:vG=Qv^2:Pv\cdot vG,$$

或
$$Qv^2=Pv\cdot uV.$$

今於此方程之兩端加

$$uP\cdot Pv=uP\cdot Pv,$$

卽有
$$VP\cdot Pv=PQ^2.$$

從可知與圓錐曲線相切於 P 的圓，經過 Q 亦經過 V. 今如 P 與 Q 相合，則

$$uV:vG\,(=DC^2:PC^2)$$

一比，卽成爲

$$PV:PG \text{ 或 } PV:2PC.$$

所以有

$$PV:2PC=DC^2:CP^2$$

而
$$PV=\frac{2DC^2}{PC}.$$

由此可知，使物體在橢圓上運動的力，與

$$\frac{2DC^2\cdot PF^2}{PC}$$

成反比，而因 $2DC^2\cdot PF^2$ 爲常數，亦即與 PC 成正比.

系 1. 從可知力與物體距離橢圓心之距離相比，而如力與離心之距離相比，則物體在橢圓上運動，其圓心即爲力之中心，或在一圓上，此圓能爲橢圓所轉成.

系 2. 同心的一切橢圓上之環繞時間均相等. 在相似的橢圓方面，該項時間均相等，此則按 § 18，系 3 與 8 所可知. 在大軸相同的橢圓方面，其環繞時間相比，如全個面積之正，而爲同時間內所作該項面積部分之反，即是說，爲小軸之正，爲大軸終點物體速度之反，或亦可說，爲小軸之正，爲以

大軸爲橫坐標軸的縱坐標之反．所以因正反比之相等，如 1：1.

§ 28. 附註． 倘橢圓之中心在無限處，則橢圓變成爲拋物線，而物體在拋物線上運動；向無限遠處中心點之力亦成爲常．此即是加里賴的定理．

倘拋物線成爲一雙曲線，則物體在雙曲線上運動，而向心力成爲離心力．