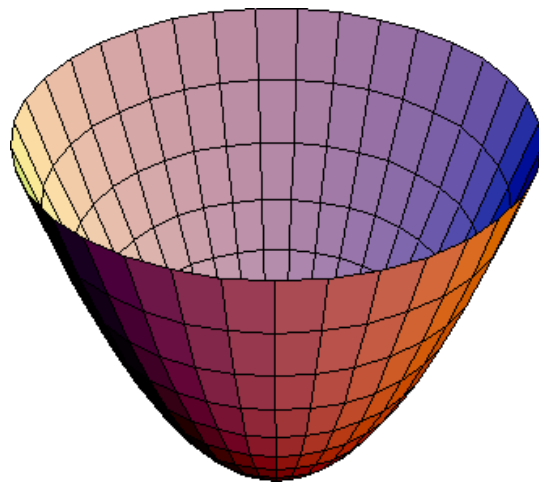


# Cálculo

---

*Volume 1*



*Produzido no wikilivros,  
para a “biblioteca wikilivros”*

Copyright © 2008 autores do Wikilivros.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

# Prefácio

Todos aprendemos, até este ponto, a matemática elementar, com ela podemos lidar com inúmeras de nossas necessidades mais corriqueiras do dia a dia. A partir de agora, teremos a oportunidade de dispor de recursos mais sofisticados.

O **Cálculo**, em conjunto com outras disciplinas, faz parte do aprendizado da matemática de nível superior. Ele é uma valiosa ferramenta de análise, muito utilizada em ciências exatas. Esta ferramenta recebeu o nome cálculo, como forma abreviada da expressão „Cálculo Infinitesimal” ou „Cálculo Diferencial e Integral”. Este livro explora a parte inicial do estudo de cálculo básico, presente nos cursos de nível superior mais voltados às ciências exatas e suas ramificações. Por ter um caráter introdutório, permite ao estudante fazer gradativamente uma transição do pensamento de nível médio para nível universitário. Com ele iremos navegar pelas análises algébricas, numéricas e geométricas, lidando com valores tão pequenos que podem ser considerados relativamente ínfimos. Ao mesmo tempo, iniciaremos as análises de quantidades, desses elementos infinitesimais, tão numerosas que poderíamos chamá-las de populações gigantescas.

Este livro utiliza as notações e as siglas mais encontradas nos livros didáticos de **Cálculo** no Brasil, algumas notações comuns em livros „on-line” seguem o padrão norte-americano e por isso estão fora dos objetivos desta publicação, que foi idealizada para ser instrumento de aprendizado para nativos da língua portuguesa, alguns exemplos de notações são encontradas principalmente nas funções trigonométricas, como o **seno** que simbolizamos  $sen()$  enquanto que em outros livros verificamos  $sin()$ , ou **tangente** que notamos  $tg()$  enquanto que em outros vemos  $tan()$ .

Dividimos o estudo de **Cálculo** em 3 (três) livros, que não são necessariamente indicados especificamente para as subdivisões do estudo feito nas universidades, embora tenhamos alguns cursos onde há uma divisão da disciplina em até 6 (seis) módulos. Para aproximar a seqüência dos tópicos à dos cursos mais conceituados, fizemos uma pesquisa e adequamos os índices ao cronograma destes cursos, para isso pesquisamos universidades públicas e privadas no Brasil, obviamente, seria impossível adequar a seqüência dos tópicos para todos os cursos que se utilizam deste estudo, acredito que está próxima da média de adequação.

Para sequenciar os capítulos e indicar a sua aplicação foi incluída uma tarja cinza no topo de cada página dos livros desta série, que tem o objetivo de orientar a que nível de dificuldade se destina o conteúdo, o cronograma adotado é o mais completo, portanto, algumas partes dos livros podem ser retiradas do currículo do curso, conforme a instrução do tutor ou mestre que o formulou.

Espero que todos nós, autores e leitores, tenhamos um bom aproveitamento advindo do desenvolvimento ou do estudo do conteúdo deste e dos outros livros sobre este tema.

[en:Calculus/Introduction](#)



# Créditos

Este livro é resultado do conhecimento, do empenho e da dedicação de várias pessoas, que acreditam que o conhecimento deve ser de todos os que aspiram obtê-lo, sendo a doação um ato que é recompensado pela satisfação em difundir o saber.

Dentre os editores que participaram da criação deste livro, damos crédito pelas seguintes competências:

## Ajustes de formatação

## Autores

- [João Jerónimo](#)
- [Marcos Antônio Nunes de Moura](#)

## Categorização

- [Atoj](#)
- [HeldergeovaneBot](#)
- [Jorge Morais](#)
- [LeonardoG](#)
- [Marcos Antônio Nunes de Moura](#)

## Conteúdo

- [Albmont](#)
- [Heldergeovane](#)
- [Marcos Antônio Nunes de Moura](#)
- [Mateus Zanetti](#)
- [Thiago Marcel](#)

## Correções

- [Albmont](#)
- [Edudobay](#)

- Fernando Aguirre
- Fredmaranhao
- Heldergeovane
- Lou cai
- Marcos Antônio Nunes de Moura
- Thiago Marcel

**Proteção do conteúdo**

- Dante Cardoso Pinto de Almeida
- David Stress
- SallesNeto BR

# Sumário

|   |            |
|---|------------|
| <b>Prefácio</b>                               | <b>i</b>   |
| <b>Créditos</b>                               | <b>iii</b> |
| Autores . . . . .                             | iii        |
| <b>1 Conceitos básicos (funções)</b>          | <b>1</b>   |
| Conceitos básicos . . . . .                   | 1          |
| <b>2 Limites e Continuidade</b>               | <b>5</b>   |
| Limites . . . . .                             | 5          |
| Continuidade . . . . .                        | 14         |
| Notas . . . . .                               | 15         |
| <b>3 Derivadas</b>                            | <b>17</b>  |
| Derivadas . . . . .                           | 17         |
| Introdução (coeficientes angulares) . . . . . | 17         |
| Definição . . . . .                           | 18         |
| Diferenciabilidade . . . . .                  | 20         |
| Regras básicas . . . . .                      | 20         |
| Derivadas algébricas simples . . . . .        | 23         |
| Diferenciação implícita . . . . .             | 25         |
| <b>4 Aplicações das derivadas</b>             | <b>27</b>  |
| Aplicações das derivadas . . . . .            | 27         |
| Taxas . . . . .                               | 27         |
| Máximo, mínimo e médio . . . . .              | 29         |
| Análises de declive e concavidade . . . . .   | 32         |
| Esboço de gráficos . . . . .                  | 34         |
| <b>5 Integrais</b>                            | <b>37</b>  |
| Integrais . . . . .                           | 37         |
| Antiderivadas e antidiferenciais . . . . .    | 37         |
| Definições . . . . .                          | 38         |
| Operações básicas . . . . .                   | 39         |
| Introdução a equações diferenciais . . . . .  | 41         |
| A integral indefinida . . . . .               | 43         |
| A integral definida . . . . .                 | 43         |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>6</b>  | <b>Análise de funções elementares (1)</b>                 | <b>53</b>  |
|           | Logarítmicas . . . . .                                    | 53         |
|           | Exponenciais . . . . .                                    | 55         |
|           | Logarítmicas com outras bases . . . . .                   | 59         |
|           | Trigonométricas I . . . . .                               | 61         |
| <b>7</b>  | <b>Análise de funções elementares (2)</b>                 | <b>73</b>  |
|           | Trigonométricas II . . . . .                              | 73         |
|           | Inversas das trigonométricas . . . . .                    | 81         |
|           | Hiperbólicas . . . . .                                    | 87         |
|           | Inversas das hiperbólicas . . . . .                       | 94         |
| <b>8</b>  | <b>Técnicas de integração</b>                             | <b>103</b> |
|           | Considerações iniciais . . . . .                          | 103        |
|           | Por partes . . . . .                                      | 103        |
|           | Funções racionais com denominadores lineares . . . . .    | 115        |
|           | Funções racionais com denominadores quadráticos . . . . . | 118        |
|           | Por substituição hiperbólica . . . . .                    | 120        |
|           | Funções racionais trigonométricas . . . . .               | 122        |
|           | Tabela de integrais . . . . .                             | 126        |
| <b>9</b>  | <b>Indeterminação e integrais impróprias</b>              | <b>127</b> |
|           | Indeterminação . . . . .                                  | 127        |
|           | Formas indeterminadas . . . . .                           | 127        |
|           | T42 — Valor médio de Cauchy . . . . .                     | 128        |
|           | T43 — Regra de L'Hôpital . . . . .                        | 130        |
|           | Integrais impróprias . . . . .                            | 131        |
|           | T44 — Fórmula de Taylor . . . . .                         | 133        |
| <b>10</b> | <b>Aplicações das integrais</b>                           | <b>135</b> |
|           | A integração na prática . . . . .                         | 135        |
|           | Áreas . . . . .   | 135        |
|           | Volumes . . . . .   | 138        |
|           | Pressão dos líquidos . . . . .                            | 146        |
|           | Comprimentos de curvas . . . . .                          | 147        |
|           | <b>Bibliografia</b>                                       | <b>149</b> |
|           | <b>Informações sobre o histórico</b>                      | <b>151</b> |
|           | Historia . . . . .  | 151        |
|           | Informações sobre o PDF . . . . .                         | 151        |
|           | <b>GFDL</b>   | <b>153</b> |
|           | PREAMBLE . . . . .  | 153        |
|           | APPLICABILITY AND DEFINITIONS . . . . .                   | 153        |
|           | VERBATIM COPYING . . . . .                                | 155        |
|           | COPYING IN QUANTITY . . . . .                             | 155        |
|           | MODIFICATIONS . . . . .                                   | 155        |
|           | COMBINING DOCUMENTS . . . . .                             | 157        |
|           | COLLECTIONS OF DOCUMENTS . . . . .                        | 157        |
|           | AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS . . . . .              | 158        |



|  |     |
|--|-----|
| TRANSLATION . . . . .                                | 158 |
| TERMINATION . . . . .                                | 158 |
| FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE . . . . .           | 159 |
| How to use this License for your documents . . . . . | 159 |



# Capítulo 1

## Conceitos básicos (funções)

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I*

### Conceitos básicos

#### Definições iniciais:

Para uma melhor compreensão do conteúdo subsequente, sugerimos observar o tópico: Funções, no livro: Matemática elementar, pois o estudo completo de funções foge do escopo deste livro. Neste capítulo iremos destacar princípios e notações que nos serão úteis ao longo deste livro.

#### Função, domínio e imagem

Seja um conjunto de pontos **A**, cujos membros são os números em

$$R \Rightarrow \{-\infty, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots, +\infty\}$$

então tomamos  $x$  e denominamo-la **variável independente**, visto que, arbitrariamente, lhe podemos atribuir qualquer valor em  $R$  e portanto dizemos que:

**A** é o domínio da variável  $x$ .

Da mesma forma, admitamos um conjunto de pontos **B**, cujos membros são números que são obtidos única e exclusivamente por um conjunto de regras matemáticas  $f$ , quando números arbitrários em **A** lhe são transferidos; visto que há um único valor assumido para cada valor arbitrário transferido a  $f$ , dizemos que:

**B** é função de **A**.

Sendo **B** obtido através das regras de  $f$  :

**A** é domínio da função  $f$ .

Da mesma forma, como **B** é restrito aos valores definidos por **A** e às regras definidas por  $f$ , os seus elementos espelham estas condições, portanto, podemos dizer que:

**B** é imagem da função  $f$ .

**Extensões de domínios**

Observemos a expressão

$$\sqrt{12-x}$$

Note que assim que atribuirmos valores a  $x$ , a mesma assumirá valores inválidos, valores de raízes quadradas de números negativos, para sanar este problema, poderemos atribuir uma faixa de valores válidos para o domínio de  $x$ , então teremos:

$$\sqrt{12-x}, x \leq 12$$

Assim, teremos um domínio restrito a valores iguais ou menores que 12, portanto, incluindo-o, este extremo ao qual pertence o valor 12 chamamos de **extremo fechado**.

Temos uma situação semelhante, porém com uma sutil diferença, quando temos que fazer  $\log x$ , neste caso, temos que restringir o valor 0 e todos os números abaixo dele, desta forma:

$$\log x, x > 0$$

Poderemos atribuir apenas valores maiores que 0, uma vez que este valor não pertence ao conjunto de números que podem ser atribuídos à variável, chamamos este de **extremo aberto**.

**Notações**

O conjunto de números  $\mathbf{B} \{-\infty, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots, +\infty\}$  dos quais  $y_n$  dependem do conjunto  $\mathbf{A} \{-\infty, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots, \infty\}$  de onde temos  $x_n$ , estabelecemos o par de números  $\{x_n, y_n\}$ , ou simplesmente:

$$(x, y)$$

Este é chamado de **par ordenado**.

Sendo também  $f$  a representação dos valores de  $(x, y)$ , então podemos dizer que:

$$y = f(x)$$

Sendo  $f(x)$  o valor de  $y$  quando definido pelas operações em  $f$ .

Faixas de valores que delimitam os domínios podem ser representados com desigualdades, como nos exemplos abaixo:

$$-2 < x < 4; -12 \leq x < 8$$

Porém, os extremos podem ser colocados em um par entre delimitadores de forma que, para os extremos fechados usamos os delimitadores  $[$  ou  $]$ , para os extremos abertos usamos  $($  ou  $)$ , habilitando-nos a identificar os extremos mais claramente, desta forma podemos identificar os domínios do exemplo acima desta forma:

$$(-2, 4); [-12, 8)$$

Também é comum usar colchetes invertidos para extremos abertos:

$$]-2, 4[; [-12, 8[$$

## Operações com funções

Consideremos duas funções  $f$  e  $g$ ; admitindo que as duas são, intuitivamente, expressões que se traduzem em valores, podemos dizer que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f : g)(x) = f(x) : g(x)$$

Sendo  $D(f)$  o domínio da função  $f$  e  $D(g)$  o domínio da função  $g$ , o domínio da função resultante das operações acima é sempre:

$$D(f) \cap D(g)$$

[en:Calculus/Functions](#)



## Capítulo 2

# Limites e Continuidade

Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I

## Limites

### Breve explanação

Vejam os gráfico a seguir:

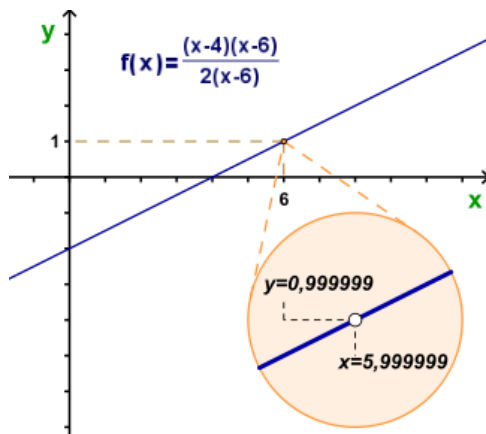


Figura 1

O gráfico representa a função  $f : R \setminus \{6\} \rightarrow R$  definida pela regra:

$$y = f(x) = \frac{(x - 4)(x - 6)}{2(x - 6)}$$

Esta função não está definida para  $x = 6$ , pois não faz sentido escrever  $y = \frac{0}{0}$ . No entanto, podemos calcular  $f(x)$  para valores de  $x$  muito próximos de 6. Observe a tabela:

|            |      |     |       |            |       |     |      |
|------------|------|-----|-------|------------|-------|-----|------|
| $x$        | 5,5  | 5,8 | 5,99  | 6          | 6,05  | 6,2 | 6,5  |
| $y = f(x)$ | 0,75 | 0,9 | 0,995 | $\nexists$ | 1,025 | 1,1 | 1,25 |

Se fizermos  $x = 5,5$  temos  $y = 0,75$ ; se agora fizermos  $x = 5,8$  teremos  $y = 0,9$ ; depois fazendo  $x = 5,99$  teremos  $y = 0,995$ ; portanto quando nós aproximamos  $x$  de 6, vemos que também aproximamos  $y$  de 1. Intuitivamente faremos o mesmo usando valores maiores que 6: se tivermos  $x = 6,5$  teremos  $y = 1,25$ ; e para  $x = 6,2$  teremos  $y = 1,1$ ; finalmente, se  $x = 6,05$  teremos  $y = 1,025$  e vemos que o mesmo acontece .

O que isto quer dizer?

Acontece que, quando *aproximamos*  $x$  de 6,  $y$  *se aproxima* de 1, o que indica uma *tendência* de se igualar a 1. Perceba que quando  $x$  *se aproxima* de 6, de forma a alcançar o **limite** entre ele e o número mais próximo a ele, inevitavelmente faz com que  $y$  também alcance um número ainda mais próximo de 1. Então dizemos que: se  $f(x) = y$  então, o **limite** de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 6 é igual a 1.

Como veremos mais adiante, isto é representado pela seguinte notação:

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 1$$

Como pode ver, acabamos de caracterizar o conceito de limite a partir da noção intuitiva de aproximar um número de outro.

Mas como podemos dizer “se aproximar” em termos matemáticos?

Se levarmos em consideração que ao aproximar duas coisas, a distância entre elas diminui, fica fácil perceber que será necessário medir a distância entre os números. Sendo assim, vale a pena recordar que a distância entre dois números reais é dada pela fórmula  $d(a, b) = |a - b|$ . Assim, usando essa fórmula podemos dizer que, por exemplo:

- Se  $\delta$  é um número pequeno e  $|x - a| < \delta$  então  $x$  está *próximo de*  $a$  ;
- Se diminuirmos gradativamente o valor de  $\epsilon$ , e ao mesmo tempo escolhermos  $y$  satisfazendo  $|y - L| < \epsilon$ , podemos dizer que estamos *aproximando*  $y$  de  $L$ ;

Com isso em mente, vamos retomar o nosso exemplo. A dependência entre a variação de  $x$  e a variação dos valores assumidos pela função  $f(x)$  pode agora ser expressa de uma forma bem simples. Como é mostrado na tabela, é possível fazer  $f(x)$  ficar extremamente próximo de 1, bastando escolher valores de  $x$  suficientemente próximos de 6. Assim, se queremos fazer  $d(f(x), 1)$  ficar menor que  $\epsilon$ , é suficiente encontrar um valor de  $\delta$  pequeno o bastante e fazer escolhas de  $x$  que satisfaçam  $d(x, 6) = |x - 6| < \delta$ , ou seja, basta escolher  $x$  próximo de 6.

## Analizando as condições

Seja a função  $f(x)$ , onde  $x \in R$ . Façamos isto apenas para restringir o escopo da análise a funções mais simples e assim, que isto permita-nos colocar as condições dentro de parâmetros mais fáceis de analisar.

Sendo  $f(x)$ , definido ou não em um determinado ponto do domínio, verificamos a existência de valores que tendem a se aproximar de um valor  $L$ , próximo aos valores trivialmente encontrados para a função em pontos próximos e com valores conhecidos. Então, arbitramos um número  $\epsilon$ , delimitando uma região em  $f(x)$  de forma que as condições sejam suficientes para garantir que:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Ao tomarmos um subintervalo em  $f(x)$  com extensão  $\epsilon$ , o efeito esperado é que tenhamos delimitado um valor  $\delta$  correspondente para  $x$ . Consideramos que temos um



número  $a$ , neste intervalo, para todo  $\delta$  que obtemos quando arbitramos um  $\epsilon$  na função. Da mesma forma que temos um esperado valor em  $f(x)$  devemos ter um número  $x$  no domínio, tal que:

$$0 < |x - a| < \delta$$

Devemos ter o cuidado de observar que a afirmativa acima exige que o valor da diferença não seja nulo, caso contrário a relação de correspondência dos valores na função e no domínio não existiria.

Caso as condições acima sejam satisfeitas e a relação entre os valores seja possível, dizemos que  $L$  é o **limite** de  $f(x)$  quando  $(x)$  tende a  $(a)$ .

## Definição

Adotamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

para dizer que a função possui a seguinte propriedade:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

De agora em diante, para indicar que uma função tem esta propriedade, usaremos indiferentemente qualquer das seguintes alternativas:

- $L$  é o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende para  $a$ , ou que
- $f(x)$  tende  $L$  quando  $x$  tende para  $a$

ou com símbolos:

- $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

## Observação

Para aqueles que também se interessam por lógica e fundamentos da matemática, podemos reescrever a definição anterior usando as notações do cálculo quantificacional clássico. Assim, dado  $a \in \mathcal{R}$ , diremos que  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , quando:

$$\exists L \forall \epsilon (\epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| \wedge |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)))$$

## Propriedades

Uma vez motivada a definição do conceito de limite, e apresentada sua caracterização formalmente, é muito útil garantir que os limites satisfazem certas *propriedades operatórias*, no sentido de que pode-se fazer operações com as expressões que representam limites. As principais propriedades válidas para *limites* são apresentadas nos teoremas T1 até T6.

Resumidamente, T1 garante que o limite de uma função em um ponto (ou no infinito) é único. Isso significa que quando duas pessoas se propõem a calcular um limite (que exista), elas chegarão *obrigatoriamente* a um mesmo resultado. Isso justifica por exemplo o uso da expressão **o limite de  $f(x)$  no ponto  $a$**  em vez de **um limite de  $f(x)$  no ponto  $a$** .

O teorema T2 estabelece a somatividade dos limites: para somar dois limites que existem, podemos somar as duas funções e calcular apenas o limite desta soma. Uma propriedade análoga vale para a diferença entre limites.

Os teoremas seguintes (de T3 até T6) exploram o mesmo tipo de propriedade para as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de limites. Observe que tradicionalmente estas operações são definidas para números reais. No entanto, talvez por causa de sua simplicidade, podem ser facilmente estendidas para operações entre funções.

Considere, por exemplo, o caso da potenciação. O teorema T5 — (Potência), mostra que para se calcular o limite da (função)  $n$ -ésima potência de  $f(x)$  que tem limite no ponto  $a$ , é suficiente calcular a  $n$ -ésima potência do (número dado pelo) limite de  $f(x)$  no ponto  $a$ .

### T1 — (Unicidade)

#### Demonstração:

Proponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ , mas  $L_1 \neq L_2$ .

Logo, pela definição de limite, teremos que admitir que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1$  tal que:

$$|f(x) - L_1| < \epsilon$$

para todo  $x$  que satisfaz  $0 < |x - a| < \delta_1$

Além disso, existe  $\delta_2$  para o qual vale

$$|f(x) - L_2| < \epsilon$$

sempre que  $x$  verifica a desigualdade  $0 < |x - a| < \delta_2$

Como  $L_1$  e  $L_2$  não são iguais, a diferença  $L_1 - L_2$  é não nula.

Da desigualdade triangular:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Se tivermos um  $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$  e  $0 < |x - a| < \delta$ , serão válidas as condições:

$$|f(x) - L_1| < \epsilon$$

$$|f(x) - L_2| < \epsilon$$

Teremos em consequência que:

$$|L_1 - L_2| < 2\epsilon$$

para todo  $x$  para o qual  $0 < |x - a| < \delta$ .

Como podemos arbitrar  $\epsilon$ , teremos, ao fazer  $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ , que:

$$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Mas isto é contraditório, portanto  $L_1 = L_2$ .

**T2 — (Soma e diferença)****Demonstração:**

Faremos a demonstração apenas para o caso da soma de funções, deixando a cargo do leitor verificar que a propriedade análoga para a diferença de funções pode ser provada de forma parecida.

Tomando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , devemos, pela definição, provar que:

Dado qualquer  $\epsilon$  positivo, existe algum  $\delta$  positivo, para o qual  $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \epsilon$  sempre que  $x \in D_f$  satisfaz  $0 < |x - a| < \delta$

Posto que existem os limites de  $f(x)$  e  $g(x)$  em  $a$ , já sabemos que para quaisquer  $k$  e  $p$  positivos, existem  $\delta_1$  e  $\delta_2$  positivos satisfazendo:

- $|f(x) - A| < k, \forall x \in D_f$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_1$
- $|g(x) - B| < p, \forall x \in D_f$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_2$

e pela desigualdade triangular:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$$

Então, ao arbitrar  $\epsilon = p + k > 0$ , existe  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , de modo que se  $0 < |x - a| < \delta$  vale:

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| < k + p = \epsilon$$

ou seja:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon$$

**Observação** Ao provar a propriedade para a diferença de funções, a principal mudança é no passo onde é utilizada a desigualdade triangular. Em tal caso, deveríamos observar que:

$$|f(x) - g(x) - (A - B)| = |f(x) - A + (-g(x) + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$$

**T3 — (Produto)****Demonstração:**

Consideremos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ .

Queremos verificar se para cada  $\epsilon$  positivo, existe algum  $\delta$  positivo, tal que

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| < \epsilon$$

para todo  $x \in D_f \cap D_g$  que verifica  $0 < |x - a| < \delta$

Considerando que existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , é possível encontrar certo  $\delta_1 > 0$ , para o qual

- $|f(x) - L| < 1^{(1)}$  sempre que  $x \in D_f$  e  $0 < |x - a| < \delta_1$ .

do que podemos concluir que, para estes valores de  $x$ , vale  $|f(x)| < |L| + 1$ .

Mas para qualquer  $\epsilon = p + k$ , com  $p > 0$  e  $k > 0$ , também existem valores positivos  $\delta_2$  e  $\delta_3$ , de modo que

- $|g(x) - M| < \frac{p}{|L|-1}$  <sup>(2)</sup>, quando  $x \in D_f$  e  $0 < |x - a| < \delta_2$  e
- $|f(x) - L| < \frac{k}{|M|+1}$  <sup>(3)</sup>, se  $x \in D_f$  e  $0 < |x - a| < \delta_3$ .

Então, se  $\delta < \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , e  $0 < |x - a| < \delta$ , valem as desigualdades **(1)**, **(2)** e **(3)**.

Vamos então trabalhar com a expressão  $|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M|$  para concluir que ela é fica menor que  $\epsilon$  para estes valores de  $x$ . Primeiramente, observe que

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| = |f(x) \cdot (g(x) - M) + M \cdot (f(x) - L)|$$

Usando a desigualdade triangular nesta última expressão, e observando que  $|M| < |M| + 1$ , obtemos

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - M| + (|M| + 1) \cdot |f(x) - L|$$

Aplicando as desigualdades **(1)**, **(2)** e **(3)**, resulta  $|f(x)| \cdot |g(x) - M| + (|M| + 1) \cdot |f(x) - L| < |f(x)| \cdot \frac{p}{|L|-1} + (|M| + 1) \cdot \frac{k}{|M|+1}$

Como  $\frac{|f(x)|}{|L|-1} < 1$ , concluímos que

$$|f(x)| \cdot |g(x) - M| + (|M| + 1) \cdot |f(x) - L| < p + k$$

Portanto,  $|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| < \epsilon$ , o que confirma a validade do teorema.

#### T4 — (Razão)

##### Demonstração:

Seja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ . Basta mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ , e aplicar a regra do produto para  $f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ .

Queremos verificar se para cada  $\epsilon$  positivo, existe algum  $\delta$  positivo, tal que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon, \text{ para todo } x \in D_g \text{ que verifica } 0 < |x - a| < \delta$$

Mas esta expressão pode ser reescrita como:

$$\left| \frac{M - g(x)}{Mg(x)} \right| < \epsilon$$

A ideia agora é mostrar que, na fração acima, temos que o denominador é um número não muito pequeno, enquanto que o numerador é um número pequeno.

Como  $g(x)$  se aproxima de  $M$ , vamos forçar o denominador a ser um número maior (em módulo) que  $\frac{M^2}{2}$ , e vamos, portanto, forçar o numerador a ser um número menor (em módulo) que  $\frac{\epsilon}{2M^2}$ . Assim, a razão dos dois será menor (em módulo) que  $\epsilon$ .

##### • Denominador

Pelo fato de  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ , temos que para o número positivo  $\frac{|M|}{2}$  existe um  $\delta_1 > 0$  tal que  $\forall x, (|x - a| < \delta_1 \implies |g(x) - M| < \frac{|M|}{2})$ .

Mas isto implica, em particular, que  $|g(x)| = |M - (g(x) - M)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}$ .

Portanto, temos que  $|Mg(x)| = |M| |g(x)| > |M| \frac{|M|}{2} = \frac{M^2}{2}$ .

- Numerador

É imediato, pela propriedade da subtração de limites, que, como  $\lim_{x \rightarrow a}(M - g(x)) = 0$ , temos que existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $\forall x, (x < \delta_2 \implies |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2M^2}$ .

- Fração

Agora basta tomar  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , e observar o resultado desejado.

### T5 — (Potência)

#### Demonstração:

De fato, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \dots)$$

O que, pelo teorema do produto, nos leva a:

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \dots \right)$$

E portanto, estabelece o que pretendíamos demonstrar.

### T6 — (Radiciação)

#### Demonstração:

#### Conseqüentes para funções algébricas:

Estas propriedades são verificadas rapidamente a partir da definição.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Além disso, as regras a seguir são conseqüências diretas dos teoremas relacionados acima:

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b \text{ sendo } m \neq 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx^n + px + \dots + b) = (ma^n + pa + \dots + b) \text{ sendo } m \neq 0;$$

## Limites laterais

Consideremos a função

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

. Podemos notar que nenhum valor de  $x$  menor que 2 está no domínio da função, ou seja, ela não está definida no intervalo  $(-\infty, 2)$ . Esta indefinição também se refletirá nos limites dos valores da função neste intervalo, pois não faz sentido falar de “limites” em valores nos quais a função não esteja definida (neste exemplo, uma certa faixa de números reais).

O que poderíamos fazer para analisar os valores válidos da função?

Como o seu domínio é apenas  $[2, \infty)$ , devemos restringir o cálculo de limites a este intervalo; quando um conjunto (no caso, um intervalo) de números precisa ser excluído do domínio da função, ou quando já se sabe que a função não está definida em tal conjunto, podemos também, excluir certa faixa de valores durante o cálculo de limites; Por exemplo, ao analisar o comportamento de  $f(x)$  nas proximidades do ponto  $a$ , se quisermos adotar apenas números maiores que  $a$  na análise, podemos simbolizar

isto desta forma  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , da mesma forma poderemos adotar apenas números menores que  $a$ , representando a restrição da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

No primeiro caso dizemos que o **limite lateral pela direita** da função é o valor para o qual a função tende quando  $x$  se aproxima de  $a$  pela direita. No segundo caso dizemos que o **limite lateral pela esquerda** da função é o valor para o qual a função tende quando  $x$  se aproxima de  $a$  pela esquerda.

### Limite lateral pela direita

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , quando:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \forall \quad 0 < x - a < \delta$$

### Limite lateral pela esquerda

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ , quando:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \forall \quad -\delta < x - a < 0$$

## Infinitos

Já lhe perguntaram o que é o *infinito*? Certamente alguém lhe deu uma resposta poética a respeito e de fato no sentido poético, o *infinito* é algo fascinante... Agora imagine um número absolutamente tão alto quanto é possível você conceber... Conseguiu? Pois bem, por maior que seja o número escolhido, ele não é *infinito*. Aqui, falaremos do *infinito* como sendo algo tão inatingível que nenhuma mente humana poderia imaginar. **Infinito** é uma tendência, uma forma de representar algo que é tão alto que jamais poderíamos atingir. É como se fosse um caminho sem fim, como o destino de um corpo sem obstáculos e atrito no espaço sem fim.

No início deste capítulo, discutimos como analisar o comportamento de uma função (sua tendência) quando a variável se aproxima de um determinado número. Nesta seção, discutiremos duas situações novas:

- O que acontece com os valores de  $f(x)$ , quando  $x$  é muito grande?
- O que fazer quando, ao aproximar  $x$  de um ponto  $a$ , os valores de  $f(x)$  ficam cada vez maiores?

Usaremos o termo “infinito” sempre que for preciso lidar com “números gigantes”. Deste modo, também poderemos representar as duas situações acima usando conceitos de *limite*. Para isso, quando realizarmos um cálculo, podemos tratar o *infinito* como se fosse um *número*, embora ele seja um ente matemático que nunca poderemos alcançar. Por exemplo, caso a variável  $x$  esteja *tendendo ao infinito*, e apareça em uma expressão, podemos imaginar o que aconteceria com a expressão caso  $x$  fosse um número suficientemente grande. Então façamos um estudo de como podemos avaliar o comportamento das funções quando a variável *tende a infinito*.

Considerando uma função definida como:

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

Pensemos na melhor maneira de variar  $x$  para aumentar sucessivamente o valor desta função. Isto é possível fazendo com que  $|x|$  forneça valores que diminuam até zero. É importante notar que quanto mais  $|x|$  diminui, mais os valores da função  $f(x)$  aumentam.

Obviamente existem inúmeras formas de criar funções que aumentam seu valor sucessivamente. Usaremos esta pois nos ajuda a evitar expressões como *quociente de funções complicadas* ou *composição de várias funções*, e assim eliminamos dificuldades desnecessárias na análise dos resultados que veremos logo adiante.

Vejamos alguns exemplos numéricos de como a função aumenta sucessivamente os seus valores, quando a variável se aproxima de zero. Acompanhe a tabela:

|            |        |       |     |      |        |           |            |         |        |     |      |         |
|------------|--------|-------|-----|------|--------|-----------|------------|---------|--------|-----|------|---------|
| $x$        | -2500  | -200  | -10 | -0,5 | -0,002 | -0,000016 | 0          | 0,00008 | 0,0025 | 2,5 | 250  | 4000    |
| $y = f(x)$ | 0,0004 | 0,005 | 0,1 | 2    | 500    | 62500     | $\nexists$ | 12500   | 400    | 0,4 | 0,04 | 0,00025 |

Vemos que ao aproximar  $x$  de zero, os valores de  $y = f(x)$  tendem a ficar muito grandes. No entanto, se tivéssemos utilizado a função  $g(x) = \frac{1}{x}$  em vez de  $f(x) = \frac{1}{|x|}$ , teríamos um comportamento ligeiramente para valores negativos de  $x$ : Ao fazer  $x$  se aproximar de zero,  $g(x)$  decresceria indefinidamente (tenderia a  $-\infty$ ).

Levando em conta a discussão anterior, formalizaremos expressões intuitivas como “os valores da função vão para o infinito”, “ $f(x)$  tende ao infinito” e outras do gênero, com a notação  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ , que será definida precisamente mais adiante.

Isto é um exemplo do que chamamos de *infinito matemático*.

### Tendências infinitas

Neste ponto, nosso interesse é tratar da possibilidade de  $f(x)$  se aproximar de um certo número real, quando escolhermos valores cada vez maiores para  $x$ . Um ótimo exemplo é a função apresentada acima. De acordo com a tabela, vemos que parece ser razoável escrever:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

Isso se justifica, pois os valores de  $f(x)$  ficam muito pequenos (próximos de zero), quando  $|x|$  é muito grande.

Este é um conceito importantíssimo na análise, no cálculo e em diversos campos das ciências exatas. Iremos aprofundar este conceito para formar ferramentas que serão úteis em diversos estudos. Para isso, considere a função  $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-1}$ . Pode-se mostrar que o seu valor jamais será maior que 1 quando tomamos valores de  $x$  maiores que 1 (verifique!).

Fazendo sucessivas aproximações vemos que:

$$x = 1,5 \Rightarrow f(x) = (0,2)$$

$$x = 2,5 \Rightarrow f(x) = (0,809523)$$

$$x = 3,5 \Rightarrow f(x) = (0,911111)$$

$$x = 5,0 \Rightarrow f(x) = (0,985333)$$

$$x = 10 \Rightarrow f(x) = (0,989898)$$

$$x = 100 \Rightarrow f(x) = (0,999899)$$

De fato temos uma *tendência* do valor da função se igualar a 1 quando levamos  $x$  para números muito altos, embora ela nunca alcance o valor 1. Chamamos isso de **limite no infinito**, ou **tendência infinita**, e dizemos que  $f(x)$  tende a 1 quando  $x$  tende ao infinito.

Podemos simbolizar a tendência de  $f(x)$ , quando  $x$  fica cada vez maior, usando uma destas formas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x)$$

O mesmo pode acontecer quando o valor da variável independente tende ao infinito negativo ( $-\infty$ ), então podemos representá-la assim:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x)$$

A partir das noções apresentadas anteriormente, podemos definir de forma rigorosa as *tendências infinitas* e os *limites infinitos*.

### Definição

Chamamos o número  $L$  de **limite lateral no infinito positivo** se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que vale a implicação } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ou seja,  $L$  é o número para qual uma função  $f(x)$  tende a se igualar quando a variável independente  $x$  ultrapassa o número positivo  $N$ .

Do mesmo modo, chamamos o número  $L$  de **limite lateral no infinito negativo** se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N < 0 \text{ tal que vale a implicação } x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Os números são escolhidos de forma a fornecerem o maior valor possível dentro do domínio da função, que portanto deve necessariamente ser ilimitado.

### Limites infinitos

Se nos depararmos com uma função onde o denominador decresce vertiginosamente até zero, o que podemos fazer?

Esta é a típica forma de funções que crescem até o infinito, neste caso adotamos o valor da definição de infinito, visto que não é possível colocar qualquer valor. Adotamos  $+\infty$  ou  $-\infty$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , como já definimos anteriormente.

## Continuidade

O básico conceito de continuidade expressa da ausência de quebras na regularidade da forma da função, quando apresentamo-la sob a forma gráfica. O que temos que ter em mente é que a função contínua em um intervalo do seu domínio é suavemente descritível, cada valor é precedido de outro menor ou maior, mas com uma discreta variação.



Ao definir o conceito de **continuidade**, o objetivo é identificar uma propriedade comum a diversas funções: a ausência de *quebras* ou *saltos* em seu gráfico. Geralmente exemplifica-se esta característica dizendo que uma função contínua é aquela “cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel”. Mas é importante ter em mente que isso é apenas uma *interpretação* do conceito, e que este é muito mais amplo.

**Definição: (função contínua em um ponto)**

Se  $f(x)$  é definida num intervalo aberto contendo  $c$ , então  $f(x)$  é dita ser **contínua em  $c$**  se, e somente se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

Para exprimir em símbolos que uma função  $f(x)$  é **contínua** no ponto  $a$ , escreve-se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Isto significa que:

- $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Estas três condições estão presentes apenas em funções que não possuem irregularidades nas tendências e valores que produzem. As funções contínuas são muito comuns dentro do universo que analisamos, a condição de continuidade é exigida sempre que temos avaliar tendências a valores minúsculos.

## Notas

[en:Calculus/Limits](#)



## Capítulo 3

# Derivadas

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I*

## Derivadas

Funções são criadas para refletir o comportamento de certos entes físicos ou estados de valores, porém existe outro meio para analisar o comportamento dos números, que não conhecemos. Trata-se da **derivação**, um processo destinado a analisar as variações no comportamento de um conjunto de dados numéricos, largamente utilizado hoje em dia.

Vamos criar os conceitos, desde o início, para entender como estão fundamentados os princípios de derivação. Com estes teremos meios de analisar vários problemas sob a ótica infinitesimal (das pequenas variações).

---

## Introdução (coeficientes angulares)

Seja uma reta definida pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Existe uma relação entre as coordenadas dos dois pontos que expressa a *inclinação da reta*;

Definimos como **coeficiente angular** de uma reta, a seguinte razão:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

O resultado desta relação é um número que expressa quanto a reta está *inclinada* comparada com o eixo x (da variável independente), pois quanto maior for o coeficiente angular de uma reta, mais próximo ela estará de ser uma reta vertical.

O coeficiente  $m$  é constante para qualquer segmento de uma reta fixada, e é visivelmente igual à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x.

Agora imagine o que teríamos se ao invés de uma reta tivéssemos uma curva... Em uma função para a qual os pontos do gráfico não acompanham uma linha reta, geralmente temos diferentes valores de  $m$  para cada par de pontos que tomamos para fazer o seu cálculo. Isto se deve ao fato de que a inclinação varia ao longo da curva, o que nos sugere que cada pequeno segmento da curva possui um  $m$  diferente.

Considerando uma função  $f(x)$ , teríamos sobre o seu gráfico os pontos:

$$(x_1, f(x_1))$$

$$(x_2, f(x_2))$$

Podemos denotar a distância de  $x_1$  até  $x_2$  por  $\Delta x$ , e deste modo:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Logo, teríamos:

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Esta relação nos dá a inclinação de cada segmento de reta ligando um ponto  $(x, f(x))$  a outro estabelecido pela distância  $\Delta x$ , que nos fornece

$$(x + \Delta x, f(x + \Delta x)).$$

Imaginando que o gráfico da função seja uma "curva suave", podemos, a partir da equação anterior, encontrar os valores de  $m$  e verificar qual a inclinação aproximada da curva para cada ponto; note que quando diminuimos o módulo de  $\Delta x$  a equação se torna mais precisa, no sentido de fornecer uma melhor aproximação para o **coeficiente angular** de um pequeno trecho da curva, pois cada segmento que é analisado se torna menor, logo temos condições de analisar mais segmentos da curva.

## Definição

Imaginemos que para cada par de pontos tenhamos uma reta, com seu respectivo coeficiente angular  $m$ , como vimos anteriormente existe uma maneira de relacionar a *declividade* a cada ponto da curva...

Observe a figura a seguir, que mostra o gráfico da função  $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-3} + \frac{x-3}{10}$ , e algumas retas secantes, passando pelo ponto  $(x, y)$ , onde  $x = 2$  e  $y = f(x)$ .

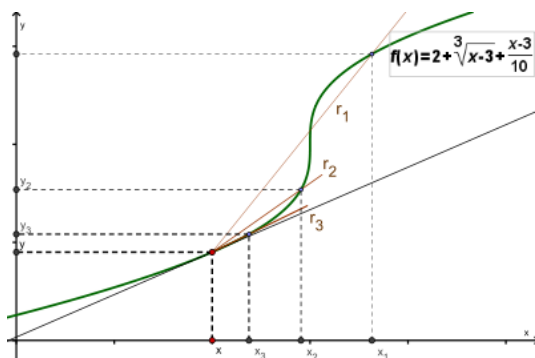


Figura 2

Podemos constatar que a função tem as seguintes características:

- A função  $f(x)$ , expressa pelo gráfico, apresenta uma *sinuosidade* no intervalo entre  $(x, y)$  e  $(x_1, y_1)$ ;

- A função não apresenta qualquer *ruptura* ou *salto* neste intervalo.

Dada uma sequência de pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$  cada vez mais próximos de  $x$ , traçamos as retas  $r_1, r_2, r_3, \dots$  partindo do ponto  $(x, y)$  fixado e passando pelos pontos correspondentes na sequência. Desta forma, podemos observar que, no caso da sequência apresentada na ilustração:

- A reta  $r_1$  possui uma inclinação maior que  $r_2$ ;
- Esta última possui uma inclinação maior que  $r_3$ ;

Além disso, observamos ainda que:

- Quase não se consegue distinguir a reta  $r_3$  do gráfico da função nas vizinhanças do valor  $x$  de seu domínio, ou seja, esta reta parece uma *boa aproximação* da função  $f$  em torno de  $x$ .

O que é importante saber é que os valores das inclinações das retas secantes se aproximam da inclinação de uma "reta tangente" ao gráfico da própria função no ponto  $(x, y)$ , a medida que diminui a distância entre um ponto  $x_i$  da sequência e seu limite  $x$ .

Vemos então que uma maneira de tornar a *inclinação da reta* mais próxima da *inclinação da função* é diminuir a distância entre os pontos até o limite de sua aproximação, ou seja, se tomarmos uma sequência de pontos  $x_i$  que ficam cada vez mais perto de  $x$ , o resultado é que a partir de algum momento, os pontos tomados para o cálculo de  $m$  estarão tão próximos que cada um se tornará quase idêntico ao seguinte. Uma vez que se obteve um valor de  $m$  para cada ponto da sequência, gostaríamos de definir **a inclinação de  $f$  em  $x_0$** , ou pra ser mais preciso, **a inclinação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$** , como sendo o limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Uma vez que tenhamos um valor deste limite para cada valor de  $x$  de um certo conjunto, podemos criar uma nova função, que chamamos de **função derivada de  $f$** , associando cada  $x$  deste conjunto (o *domínio* da função derivada) com o correspondente  $f'(x)$  (a inclinação de  $f$  neste ponto  $x$ ). A nova função é obtida através dos valores de  $f(x)$ , esse artifício de criar uma função que nos dá a declividade de uma outra função em cada ponto é chamado de **derivação**, uma vez que criamos uma função que é a **derivada** da primeira.

A diferença entre os valores de  $x_1$  e  $x_2$ , quando levada ao limite próximo de zero, também é chamada de diferencial  $dx$  e a diferença entre os valores de  $y_1$  e  $y_2$ , quando o diferencial  $dx$  é levado ao limite, é chamada de diferencial  $dy$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Por este motivo, esta operação é chamada de diferenciação, pois se refere à criação de variáveis diferenciais (usando as diferenças entre  $x_i$  e  $x$ ), neste caso  $dy$  e  $dx$ .

---

## Diferenciabilidade

Para que as diferenciais e por consequência, a derivada de uma função em um determinado ponto possam existir, certas condições devem ser cumpridas pela função. Verifica-se a partir da definição de  $f'(x)$  que:

- Em primeiro lugar, o limite da função no ponto **deve existir** (verifique!);
- A função deve estar **definida no ponto e seu valor ser igual ao limite**;

Isso nos lembra a definição de continuidade. De fato, as condições acima significam que quando a função é **diferenciável** em um ponto, ela é também **contínua** no ponto.

O fato de funções derivadas serem contínuas se deve a existência do limite e do valor da função no ponto, uma vez que torna-se possível a existência do  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)]$  nestes casos.

Portanto, podemos em primeiro lugar verificar a continuidade de uma função para sabermos se há possibilidade da mesma ser diferenciável: se esta não for contínua temos condições de afirmar que a mesma não é diferenciável.

## Regras básicas

Para simplificar os métodos de derivação algumas regras básicas são universalmente utilizadas, todas são consequências da definição e podem ser facilmente demonstradas através do limite que aparece na definição e dos teoremas sobre limites de funções.

### T7 — Soma e subtração

Derivada da soma e subtração

Seja a função  $F(x) = f(x) \pm g(x)$ ; sua derivada é:

$$F'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

**Demonstração:**

Pela definição temos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - f(x) \mp g(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) \pm g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

e portanto:

$$F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

**T8 — Multiplicação**

Derivada da multiplicação

Seja a função  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ , então sua derivada é:

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

**Demonstração:**

Pela definição temos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

Somamos e subtraímos  $g(x + \Delta x) \cdot f(x)$  na equação anterior:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - g(x + \Delta x) \cdot f(x) + g(x + \Delta x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)] \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$F'(x) = g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

e portanto:

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

**T9 — Razão**

Derivada da razão

Seja a função  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , então sua derivada é:

$$F'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

**Demonstração:**

Pela definição temos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x) \cdot \Delta x}$$

Podemos lançar mão de mais um artifício algébrico e somar e subtrair  $f(x) \cdot g(x)$ , o que nos dá:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - f(x) \cdot \left[ \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Depois que aplicamos os limites, resulta em:

$$F'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

### T10 — Natureza algébrica das diferenciais

Natureza algébrica das diferenciais

Se  $f'(x)$  existe, suas diferenciais podem ser tratadas como duas variáveis com características operacionais algébricas. Seja  $dy$  e  $dx$  as diferenciais de  $f(x)$ , sua derivada é:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Seja  $dy$  e  $dx$  as diferenciais de  $f(x)$  quando sua derivada é

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

Então:

**Demonstração:**

Pelo teorema da razão do limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}.$$

O que nos dá a possibilidade de fazer:

$$dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$$

$$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$$

Desta forma, os operadores  $dy$  e  $dx$  são limites e podem ser operados como tal, de forma que, obedecendo às regras das operações algébricas dos limites, podem ser separados.



**T11 — Regra da cadeia**

Regra da cadeia

Seja a função composta  $h(x) = f[g(x)]$ , sua derivada pode ser calculada por:

$$h'(x) = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

A função composta  $\{y = f(u) ; u = g(x)\}$  nos dá a possibilidade de generalizar diversas funções, permitindo a sua simplificação, a sua derivada pode ser conseguida pela relação  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Que pode ser verificada quase que imediatamente através das propriedades algébricas das diferenciais, de qualquer forma podemos demonstrá-la como segue:

Para simplificar a interpretação do conteúdo, usaremos a notação de derivada em relação à variável dependente; nesta notação colocamos um **D** e um sobescrito da variável dependente, ou seja, o símbolo  $D_t(z)$  indica a derivada de  $z$  em relação a sua variável  $t$ .

Adotando esta notação para as derivadas, temos:

$$D_u(y) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(\Delta u)}{\Delta u}$$

$$D_x(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(\Delta x)}{\Delta x}$$

queremos  $D_x(y)$  e sabemos que  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} f(\Delta u) = D_u(y) \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta u$ , para isso teríamos:

$$D_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta u)}{\Delta x}$$

$$D_x(y) = D_u(y) \cdot \frac{\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta u}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}$$

Quando  $\Delta x \rightarrow 0$  ocorre que  $\Delta u \rightarrow 0$ , pois as duas funções são contínuas e  $u$  depende de  $x$ , logo:

$$D_x(y) = D_u(y) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

então:

$$D_x(y) = D_u(y) \cdot D_x(u)$$

**Derivadas algébricas simples**

Podemos deduzir, a partir das regras comuns e da definição, equações que determinam a derivada para as funções mais comuns, adiante temos uma amostra destas equações e suas demonstrações.

**T12 — constante**

Derivada da constante

Seja a função  $f(x) = c$ , onde  $c$  é constante e portanto, independente de  $x$ , é demonstrável que sua derivada é nula, pois não existe variação do valor da função;

$$c' = 0$$

Conforme constatamos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) - f(c)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 0$$

**T13 — fator**

Derivada da função com fator

Seja a função  $f(x) = c \cdot g(x)$ , onde  $c$  é um fator constante e portanto, independente de  $x$ , é demonstrável que:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

**Demonstração**

Façamos o cálculo pela definição:

Admitindo, inicialmente, que o ponto onde pretendemos encontrar a derivada tem  $x = x_1$  e

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

, logo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x_2) - c \cdot g(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot [g(x_2) - g(x_1)]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

O que nos afirma a validade do teorema.

**T14 — Variável com expoente constante**

Derivada da função com expoente constante.

Seja a função  $f(x) = x^n$ , onde  $n$  é uma constante positiva e  $n \geq 1$ , sua derivada é:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

**Demonstração:**

Temos pela definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2}{2!} + \dots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ n \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)}{2!} + \dots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

Considerando o limite, temos:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Como única parte relevante, pois todas as outras terão valores nulos no limite, isto prova o teorema.

## Diferenciação implícita

Considerando que as diferenciais podem ser tratadas separadamente e que temos meios para tratar ambas as variáveis de uma equação, a partir da regra da cadeia, temos instrumentos para diferenciar qualquer equação que represente uma função contínua. O método de diferenciação implícita é muito útil como meio de simplificar a resolução de diferenciais onde a variável dependente é de ordem superior.

A idéia mestra deste mecanismo é tornar implícito o conteúdo da variável, sem que seja necessária a sua substituição por equivalente algébrico antes da resolução; Vejamos um exemplo para simplificar a explanação:

A função  $y^2 - 2y - 3 = x^3 - 3x^2$  é realmente complicada para ser diferenciada pelos métodos que vimos até agora, porém podemos esquecer a resolução da equação e considerar que a diferenciação pode, implicitamente, ser operada diretamente na equação inteira, desta forma:

$$2y \, dy - 2 \, dy = 3x^2 \, dx - 6x \, dx$$

A partir desta equação podemos operar as diferenciais algebricamente para encontrar o valor da derivada  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x}{2(y - 1)}$$

A equação que representa a função apresenta dois valores possíveis para y:

$$[y = (2 - x)\sqrt{x+1} + 1 \quad , \quad y = (x - 2)\sqrt{x+1} + 1]$$

O que nos dá duas derivadas, quando substituímos o valor de y na sua derivada:

$$\left[ \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x}{2(2 - x)\sqrt{x+1}} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x}{2(x - 2)\sqrt{x+1}} \right]$$

Simplificando:

$$\left[ \frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{x+1}}{2(x+1)} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x\sqrt{x+1}}{2(x+1)} \right]$$

Desta forma podemos encontrar qualquer diferencial implicitamente, reduzindo a complexidade na aplicação das regras de derivação.



## Capítulo 4

# Aplicações das derivadas

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I*

### Aplicações das derivadas

Vamos começar a colocar em prática esses conceitos que aprendemos até então, a derivada de uma função é utilizada para diversas finalidades, algumas delas vamos explorar neste capítulo, porém não é possível generalizar as aplicações que podemos atribuir às derivadas, muitos recursos podem ser criados a partir dos seus conceitos, bastando para isto, a criatividade de cada mente a se manifestar.

A derivada é a medida da declividade de uma reta tangente a cada ponto da função de onde surgiu, ela também é uma função que fornece valores relativos de muita utilidade, podemos também lembrar que o ângulo da reta tangente ao ponto da curva inicial pode ser encontrado através da derivada, pois a derivada fornece o valor da tangente deste ângulo.

Enfim, temos muito o que extrair das derivadas, elas nos fornecem vários artifícios para manipular os números em uma função, possibilitando diversas maneiras de extrair informações, elas trazem um novo meio, capaz de nos trazer novas formas de analisar dados numéricos, vejamos o que podemos aproveitar de imediato...

---

### Taxas

A maneira genérica de representar uma quantidade fracionada, o que nos leva a uma quantidade dentro de diversos conteúdos é a taxa ou relação; de maneira efetiva temos um total “ $x$ ” de porções “ $T$ ” em “ $n$ ” recipientes, esta simples representação mostra como uma taxa é estabelecida:

$$T = \frac{x}{n}$$

A taxa é uma relação linear, que pressupõe o comportamento de dependência direta entre os termos; se tivéssemos que representar esta taxa em um gráfico, onde variássemos a quantidade de recipientes “ $n$ ” e calculássemos o valor de “ $x$ ”, mantendo “ $T$ ” constante, teríamos uma reta. É plausível pensar que a taxa “ $T$ ” é constante, porém na natureza e no nosso cotidiano encontramos situações que raramente mostram

a constância que observamos nesta equação, o mais comum é que tenhamos uma taxa diferente para cada situação em que nos deparamos.

Um caso típico, é a medida de velocidade de um corpo em movimento, se imaginarmos um carro andando pelas ruas de uma cidade, é impossível visualizar uma situação em que o carro tenha que se manter em velocidade constante por todo tempo que se mova a fim de chegar a seu destino. Uma vez que temos um ponto inicial  $S_i$  e um final  $S_f$ , além de um instante inicial  $t_i$  e um final  $t_f$ , também podemos calcular a velocidade média desenvolvida pelo veículo neste trajeto, que é:

$$V_m = \frac{S_f - S_i}{t_f - t_i}$$

ou

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Agora imagine que tenhamos que medir tempos e distâncias cada vez menores, o que nos levaria a medir quase que instantaneamente os valores, então teríamos uma medida instantânea da velocidade, isto é equivalente a fazer com que o valor de  $\Delta t$  se aproxime de zero:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Isto não nos lembra algo conhecido? Exatamente, uma derivada; a velocidade medida a cada instante é uma taxa tomada quando os tempos de medição se aproximam do limite entre um e outro, então teremos o valor da velocidade para cada instante, tal qual teríamos se estivéssemos observando o velocímetro do carro...

A constatação acima nos fornece um meio de calcular, a partir de valores sugeridos, o valor da velocidade instantânea, precisamos apenas da função “ $s$ ” em função do tempo, depois podemos obter a derivada de “ $s$ ” com relação a “ $t$ ” e teremos:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Que é a velocidade instantânea de qualquer corpo que tenha seu deslocamento expresso pela função  $s(t)$ , todos os movimentos que um corpo físico pode desenvolver podem ser expressos sob este método de cálculo, uma vez que qualquer curva de deslocamento pode ser lançada na fórmula da derivada, podendo ser calculada em seguida.

Podemos ainda fazer o cálculo da aceleração do mesmo corpo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

O que nos dá a aceleração instantânea:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

ou

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Note que ao derivarmos a função  $s(t)$  duas vezes estamos criando uma derivação dupla, que podemos simbolizar desta forma:

$$a = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Esta expressão também é conhecida como “derivada segunda da função”, o termo “segunda” designa o que chamamos de ordem da derivada, que indica quantas vezes a primeira função foi derivada, portanto temos o termo ordinal sempre indicando quantas vezes foi calculada a derivada.

Note que a derivação consecutiva de funções puramente algébricas sempre leva a zero, isto ocorre porque o grau do polinômio decresce até que reste apenas uma constante, a qual resulta em zero no último cálculo diferencial subsequente.

## Máximo, mínimo e médio

Considerando que uma função não constante deve ter um valor máximo e outro mínimo em um segmento de seu domínio, quais são as possibilidades de análise que teríamos com as suas derivadas, visto que estas expressam tendências da declividade da função?

Vejam os que podemos extrair das derivadas de uma função, que são expressões da declividade da curva que a representa e nos intui a possibilidade de antever o curso dos valores da função ao longo do domínio.

### Extremos de um intervalo

Seja a função  $f(x)$  cujo domínio limitamos em  $[a, b]$ , a menos que  $f(x)$  seja constante,

(1) Há um número  $n_1$  cujo seu correspondente na imagem  $f(n_1)$  é menor que todos os outros no domínio.

(2) Há um número  $n_2$  cujo seu correspondente na imagem  $f(n_2)$  é maior que todos os outros no domínio.

### Números críticos:

Definimos por número crítico, o valor assumido pela variável independente, de forma que seu resultante na imagem da função derivada seja nulo ou inexistente, o que na maioria das vezes se apresenta como um limite infinito.

Ou seja:

$f(x)$  tem derivada  $f'(x)$  e  $c$  é um número crítico da função se:

$$f'(c) = 0$$

ou

$$f'(c) \nexists$$

**T15 — Valor extremo**

Valor extremo de uma função num intervalo:

Considere agora que existe um número  $c$ , de forma que  $c \in [a, b]$ , que é domínio da função  $f(x)$ , podemos provar que:

Se

$$f(c) \geq f(x)$$

ou se

$$f(c) \leq f(x)$$

então:

$$f'(c) = 0$$

Quando temos um número, dentro do intervalo, que obedece as condições acima, dizemos que é um “número crítico”; todas as vezes que uma função contínua tem um número cujo valor correspondente na imagem é maior ou menor que os valores dos outros, temos um máximo ou um mínimo no intervalo, intuitivamente, se a função é contínua e há um valor maior ou menor que os outros no mesmo intervalo é fácil concluir que a função terá que variar sua curva, variando a declividade de um valor positivo para outro negativo, o que nos leva a conclusão que, no limite entre os dois, ela terá que ser zero, fica claro então que quando há um extremo no intervalo, o valor numérico de sua derivada é nulo.

Vejamos a demonstração algébrica do teorema:

Seja os números  $\alpha < c < \beta$ , onde  $c$  é um número crítico do intervalo considerado, inicialmente, observando a derivada de  $f(c)$ , quando este valor é o maior no intervalo:

$$f'(c) = \lim_{\alpha \rightarrow c^-} \frac{f(\alpha) - f(c)}{\alpha - c} > 0$$

e da mesma forma:

$$f'(c) = \lim_{\beta \rightarrow c^+} \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} < 0$$

O que nos leva a concluir que:

$$0 < f'(c) < 0 \quad | \quad f(\alpha) < f(c) \quad \& \quad f(\beta) < f(c)$$

Por outro lado se  $f(c)$  é o menor valor do intervalo:

$$f'(c) = \lim_{\alpha \rightarrow c^-} \frac{f(\alpha) - f(c)}{\alpha - c} < 0$$

e da mesma forma:

$$f'(c) = \lim_{\beta \rightarrow c^+} \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} > 0$$

O que nos leva a concluir que:

$$0 < f'(c) < 0 \quad | \quad f(\alpha) > f(c) \quad \& \quad f(\beta) > f(c)$$

Logo em ambos os casos o limite que nos dá a derivada da função em  $c$  tem valor **nulo**.

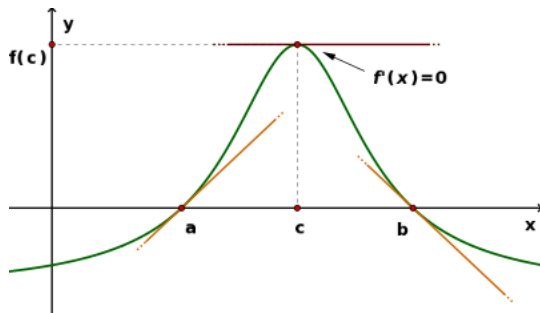
Portanto sempre que temos um valor de uma função que é extremo em um intervalo, seja maior ou menor, este terá sua derivada nula.



**T16 — Teorema de Rolle**

Este teorema serve de base para outras demonstrações e observações, também sendo importante para conclusões ao longo do estudo.

Observe o gráfico:



**Figura 3**

Teorema de Rolle

Considerando uma função  $f(x)$  e um intervalo fechado  $[a, b]$ , obedecendo as seguintes condições:

*I* —  $f(x)$  é contínua em  $[a, b]$ ;

*II* —  $f(x)$  é derivável em  $(a, b)$ ;

*III* —  $f(x)$  é diferenciável e subentendida em  $(a, b)$ ;

*IV* —  $f(a) = f(b) = 0$

Então é possível provar que existe pelo menos um número  $c$  no intervalo tal que:

$$f'(c) = 0$$

Em decorrência do fato que a função gera dois valores iguais para  $a$  e para  $b$ , além de ser derivável, isto implica na existência de um número crítico  $c$ , entre estes dois pontos, visto que o teorema T15 demonstra este fato, além de afirmar que este extremo tem derivada nula, provamos que o teorema é válido para  $f(x) \neq 0$ . Por outro lado se  $f(x) = 0$  a derivada de  $f(c)$  também é nula, visto que  $f(x) - f(c) = 0$  quando o limite  $\lim_{x \rightarrow c} (x - c)$  é alcançado, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

**T17 — Teorema do valor médio para derivadas**

Tomemos dois números em um intervalo fechado  $[a, b]$ , quando uma função  $f(x)$  é contínua neste intervalo temos pelo menos um número  $c$ , o qual projeta sobre a imagem da função um valor  $f(c)$  de forma que a sua derivada é igual ao valor da declividade da reta entre os pontos  $\{[a, f(a)]; [b, f(b)]\}$ .

A explicação deste fato é facilmente observada no gráfico de qualquer função contínua em um dado intervalo, uma vez que a curva não apresenta rupturas ao longo de seu traçado e entre os pontos há pelo menos uma sinuosidade simples ou uma reta, haverá uma progressão continuada da declividade de um ponto em direção à declividade do outro, neste caso a curva terá sempre que reproduzir valores de declividade de um extremo a outro, de forma que teremos inevitavelmente um ponto cuja reta tangente será paralela a reta definida pelos dois pontos citados.

Algebricamente:

O valor médio para derivadas

Se  $f'(c) = m$  onde  $m$  é o coeficiente angular da reta determinada pelos valores  $a, b$  e seus consequentes na imagem da função  $f(a), f(b)$  teremos:

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


---

## Análises de declive e concavidade

Uma interessante aplicação da derivada é a análise de tendências da função, o resultado desta derivada está ligado a declividade da reta “tangente ao ponto”, uma vez que a tangente, nos dois primeiros quadrantes do plano cartesiano, apresenta uma distinção clara devido à mudança de sinal, isso possibilita uma boa gama de informações para a análise de seu comportamento e por consequência, da função que a originou.

### T18 — Teste da derivada primeira

O coeficiente angular da reta que passa por um ponto da curva em uma função, nos revela uma tendência que varia conforme a tangente desta reta, tomando como referência o eixo  $x$ , quando a função é crescente os valores das derivadas para os mesmos, de  $x$  são sempre positivos, enquanto que quando a função é decrescente estes são sempre negativos. O que nos sugere o seguinte teste:

Teste da derivada primeira

Seja a função  $f(x)$  em um intervalo  $[a, b]$ , dizemos que a função é crescente quando:

$$f'(x) > 0$$

Ainda podemos afirmar que, quando a função é decrescente:

$$f'(x) < 0$$

E finalmente, se a função não apresenta tendências, permanecendo inalterada até o limite do ponto:

$$f'(x) = 0$$

É possível provar o teorema, pela análise da definição da função derivada, da seguinte forma:

Se  $f(x)$  é contínua, existe  $f'(x)$  tal que:

$$f'(x) = \lim_{x_b \rightarrow x_a} \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

onde  $x_b > x_a$ .

Admitindo que o denominador é positivo, ou seja, que  $x_b > x_a$ , nos resta analisar o sinal do resultado no numerador, se  $f(x_b) > f(x_a)$  e portanto, quando a função é crescente no intervalo, teremos  $f'(x) > 0$ , por outro lado se  $f(x_b) < f(x_a)$  teremos uma função decrescente no intervalo e  $f'(x) < 0$ .

No último caso, se  $f'(x) = 0$  então a reta que passa pelo ponto  $[x; f(x)]$  é paralela ao eixo  $x$ , o que indica um extremo ou um ponto de transição na tendência de crescimento da curva; explicando melhor: Se os valores da função estão crescendo e o ponto em questão tem derivada nula, ou a função atinge o maior valor no intervalo, ou atinge um ponto de transição na tendência de crescimento, passando de crescente para decrescente; quando a função está decrescendo passa de decrescente para crescente.

**T19 — Teste da derivada segunda**

Teste da derivada segunda

Seja a função  $f(x)$ , dizemos que  $f''(x)$  é a derivada segunda, com a qual podemos provar que:

Dado o intervalo  $[a, b]$ , onde existe um número  $c \mid f'(c) = 0$ :

Se  $f''(x) < 0$  então  $f(c)$  fornece o valor máximo no referido intervalo.

Ainda poderemos afirmar que:

Se  $f''(x) > 0$  então  $f(c)$  fornece o valor mínimo no referido intervalo.

**Análise:**

Consideremos a derivada segunda:

$$f''(x) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tomando o valor de  $[(x_2 - x_1) > 0]$  podemos verificar o que ocorre com o numerador:

- Se  $f'(x_2) < f'(x_1)$  sabemos que a declividade da curva em  $f(x_2)$  é menor que a declividade de  $f(x_1)$ , como em  $c$  temos um valor crítico, temos que concluir que este representa um máximo, visto que os valores estão diminuindo quando são diferentes de  $c$ , ou seja, todos os valores decrescem a medida nos deslocamos no eixo  $x$ , portanto  $f(c)$  apenas pode assumir o valor máximo no intervalo.
- Se  $f'(x_2) > f'(x_1)$  sabemos que a declividade da curva em  $f(x_2)$  é maior que a declividade de  $f(x_1)$ , como em  $c$  temos um valor crítico, temos que concluir que este representa um mínimo, visto que os valores estão aumentando quando são diferentes de  $c$ , ou seja, todos os valores crescem a medida nos deslocamos no eixo  $x$ , portanto  $f(c)$  apenas pode assumir o valor mínimo no intervalo.

**Concavidades**

Temos formas côncavas em todo gráfico que apresenta variações, a derivada segunda também pode nos revelar outra característica interessante quando fazemos seu cálculo e a relacionamos à concavidade em um intervalo da curva... Como a derivada segunda reflete a tendência de crescimento ou decréscimo da declividade, temos como verificar que o seu sinal indica se a concavidade do gráfico é para cima ou para baixo, ou seja:

- Se  $f''(x) > 0$  a concavidade da curva está voltada para cima.

Devido ao fato de que há uma tendência de crescimento da declividade naquele intervalo.

- Se  $f''(x) < 0$  a concavidade da curva está voltada para baixo.

Devido ao fato de que há uma tendência de decréscimo da declividade naquele intervalo.

## Pontos de inflexão

A inflexão é uma indefinição transitória das tendências da função em um determinado ponto, dizemos que o ponto onde a função passa da condição de tendência ao crescimento para tendência ao decaimento, ou vice versa, é chamado de ponto de inflexão. De forma geral, quando a função passa de uma taxa de variação positiva

$$f'(x) > 0$$

ou negativa

$$f'(x) < 0$$

ou vice versa, ela passa por um ponto de inflexão.

Considerando o número crítico  $c$ , para uma função  $f(x)$ , o ponto de inflexão é definido como aquele onde ocorre a inversão na tendência da declividade, ou seja, quando:

$$f''(x) > 0 \rightarrow x > c \quad \& \quad f''(x) < 0 \rightarrow x < c$$

ou

$$f''(x) < 0 \rightarrow x > c \quad \& \quad f''(x) > 0 \rightarrow x < c$$

Também é possível demonstrar que:

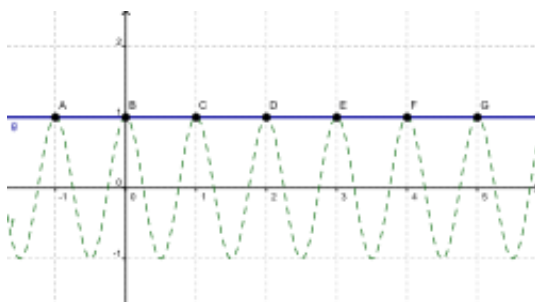
$$f''(c) = 0$$

O que torna possível identificar o número crítico do ponto de inflexão a partir da derivada segunda da função.

## Esboço de gráficos

Podemos aplicar os conceitos aprendidos neste capítulo para fazer esboços de gráficos, a prática deste artifício se mostra muito útil na análise de evoluções de grandezas, especialmente nas áreas de física, química e engenharia.

Para obter o gráfico de uma função qualquer pode-se usar de várias estratégias, entre elas: tabela de valores, uso de Cálculo, uso de [ferramentas computacionais](#) ou calculadoras gráficas.



Para usar o método da tabela, basta que num plano cartesiano sejam plotados pontos do gráfico da função em pequenos intervalos, unindo-os depois com uma linha “suave”. Esboçar um gráfico assim não é muito recomendado se não se sabe com antecedência qual é o comportamento da função, visto que grandes flutuações podem ficar ocultas entre um ponto e outro. Por exemplo, se uma função for periódica (como  $f(x) = \cos(2\pi x)$ , na figura ao lado) e o intervalo entre os valores for próximo ao do

período dessa função (no caso, o período da função e o intervalo entre os pontos do domínio é 1), o esboço indicará uma função não periódica ( $g(x) = 1$ ), mas constante, claramente um erro. Por isso quando se utilizar desse método se deve ter cuidado para não se equivocar.

Para utilizar o computador ou uma calculadora, além da necessidade de saber como lidar com esse instrumento é necessário que se tenha certeza de que a função a ser esboçada não gerará nenhum bug no instrumento. Valores muito pequenos ou muito altos podem, dependendo do *software*, criar erros apreciáveis, os quais serão transmitidos para o gráfico a ser construído. Algumas funções podem acabar sem partes do gráfico, já que o programa não calcula a fórmula inserida em uma parte do domínio, mesmo que exista, devido a falhas ou mesmo omissões no código do aplicativo. Sendo assim, antes de usar o método é bom ter conhecimento a respeito do formato do gráfico, até mesmo para evitar erros decorrentes de digitação.

Para se utilizar o cálculo é necessário lembrar dos teoremas já estudados e também de suas implicações. É importante lembrar que os números críticos verificados com o teste da derivada primeira são diferentes dos conseguidos com a derivada segunda, podemos adotar uma notação indexada para identificá-los, assim temos  $c_1$  para o primeiro caso e  $c_2$  para o segundo.

Para esboçar o gráfico de uma função desconhecida podemos extrair as raízes e o valor da função quando  $x$  é nula, além disso podemos verificar os pontos em que a função apresenta números críticos, extraíndo a derivada primeira, a derivada segunda e resolvendo as equações  $f'(x) = 0$  e  $f''(x) = 0$ , verificando os pontos onde as derivadas não existem; a partir de então podemos verificar as tendências de crescimento ou decaimento nos intervalos entre os números críticos, as raízes, pontos de inflexão e concavidades.

Obviamente, os resultados numéricos em pontos onde não existem números críticos não fornecem precisão para uma avaliação de valores, porém para a análise do comportamento da função e, em alguns casos, na visualização de formas geométricas, este método é bastante útil.

De um modo simplificado, pode-se estabelecer etapas para o esboço de gráficos com o uso de cálculo.

1. Expressar explicitamente a função a ser esboçada.
  2. Calcular (algebricamente ou numericamente) as raízes da função, se existirem.
  3. Procurar assíntotas horizontais, tomando o limite da função no infinito (tanto positivo quanto negativo)
  4. Derivar a primeira vez e encontrar os pontos críticos da função (igualando a derivada a zero)
  5. Derivar a segunda vez e testar os pontos críticos a fim de saber se são máximos ou mínimos locais (eventualmente globais) ou então se são pontos de inflexão.
  6. Estudar o sinal da segunda derivada a fim de conhecer as concavidades da função original.
  7. Representar as informações obtidas em um gráfico.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.



## Capítulo 5

# Integrais

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I*

## Integrais

Uma vez que podemos analisar a variação de determinados valores em uma função, como poderíamos reverter a análise, ou seja, se é possível criar uma função a partir de outra utilizando a diferenciação, o que teríamos se fizéssemos a operação inversa? Esta é uma questão que nos leva a mais um método do cálculo, a integração é uma forma de reverter a derivação, com ela temos um artifício para recuperar a função original a partir da sua derivada. Outra característica interessante da integral é que o valor numérico de uma integral definida exatamente em um intervalo é correspondente ao valor da área do desenho delimitado pela curva da função e o eixo  $x$  (abscissas). Vamos analisar em seguida como funciona o mecanismo básico de integração e nos capítulos seguintes nos aprofundaremos no tema, que é bastante vasto.

Uma breve introdução dos conceitos que detalharemos neste capítulo pode ser encontrada em: [Integral na wikipédia](#)

---

## Antiderivadas e antidiferenciais

Como procedemos para reverter a derivação? O princípio é verificado através da análise da inversão, da seguinte forma:

Considere a função  $F(x) = f(x) + C$  cuja derivada  $F'(x) = f'(x)$ , então dizemos que  $F(x)$  é a antiderivada de  $f'(x)$ , a nossa primeira constatação é que a função primitiva inclui uma constante, que durante o processo de derivação é descartada, já que sua derivada é nula, se fizermos o processo inverso para obter a função original teríamos  $f'(x)$  para operar e consegui-lo, isso nos leva a uma indefinição da função obtida através da antidiferenciação, a menos que conheçamos o valor da constante. Se quisermos obter a função original teríamos que operar  $f'(x)$  e zero, o primeiro requisito é, a princípio, plausível de ser conseguido, porém operar zero para obtenção de qualquer constante parece algo não concebível.

Podemos então dizer:

A antiderivação é o processo pelo qual operamos a derivada de uma função para encontrar a sua exata função primitiva.

O que nos leva a conclusão que a antiderivação exige que tenhamos meios para encontrar a constante que pertencia a função quando ela foi derivada, ou que deduções, a partir de suas características e dos fenômenos utilizados para sua formulação, possam fornecer a constante.

A antidiferenciação, opera apenas os processos para dedução de um esboço da função, o que chamamos de fórmula geral, no formato

$$f(x) + C$$

Como podemos encontrar diversas constantes, temos diversas funções, o que nos dá a possibilidade de operar, por exemplo as funções

$$f'(x) \quad ; \quad g'(x)$$

derivadas de  $f(x) + C$  ;  $g(x) + D$ , mesmo que  $f'(x) = g'(x)$ , ao operarmos as funções derivadas utilizando a antidiferenciação teremos  $f(x)$  ;  $g(x)$ , que não nos garante meios de encontrar as primitivas, visto que não conhecemos meios para deduzir as constantes.

## Definições

Ao operar a inversa da derivada, podemos fazer a análise com as diferenciais, ou seja, considere a função  $y = f(x) + C$ , então temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

, o que nos leva a algo muito interessante:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

O que nos lembra:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \Delta x$$

Temos ainda que  $y = f(x) + C$ , fazendo-nos deduzir que precisamos operar:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \Delta x$$

Para encontrar  $y$ .

Esta operação é chamada de antidiferencial e é simbolizada por:

$$\int f \cdot d$$

Onde ( $f$ ) é a função e ( $d$ ) é a diferencial da variável independente.

De forma mais completa a antidiferencial da função  $f'(x)$  é:

$$\int f'(x) \cdot dx + C$$

onde  $C$  é a constante que define a função primitiva.



## Operações básicas

A antidiferenciação é uma operação que tende a ser complicada na maioria das funções, ao longo do nosso estudo veremos métodos para simplificar o processo, porém existem formas de funções que não podem ser operadas nesse processo. Algumas das regras básicas para operação de antidiferenciais serão abordadas nas seções subseqüentes, outras regras serão abordadas nos próximos capítulos. Devido a complexidade que envolvem o processo, muitos dos métodos necessitam de alguma regra que ainda não estudamos; para não colocar questões que não possam ser esclarecidas neste capítulo teremos que deixá-las para o momento oportuno, quando todos os elementos necessários para a abordagem do assunto estejam bem claros.

### T20 — Diferenciais

Integração de diferenciais

A diferencial  $dx$  ao ser operada pela antidiferenciação, resulta:

$$\int dx = x + C$$

Com  $C$  constante.

**Comprovação:**

De fato se  $F(x) = x + C$ :

$$d F(x) = dx + 0$$

$$d F(x) = dx$$

### T21 — Constantes

Integração de constantes

A constante  $c$  é operada como coeficiente da variável independente, de forma que sua antidiferencial é:

$$\int c dx = c \cdot x$$

**Comprovação:**

Se fizermos

$$f(x) = c x$$

, teremos:

$$f'(x) = c$$

Conforme o teorema **T13** — **fator**.

**T22 — Adição**

Integral da adição de funções

Se  $f(x) = g(x) + h(x)$  então:

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$$

**Comprovação:**

Se  $f(x)$  é o resultado da soma de duas antiderivadas, logo:

1. Temos que admitir que  $g(x)$  e  $h(x)$  são diferenciáveis;

2. A soma de diferenciáveis admite que:

(a) Se  $g(x) = dm$  e  $h(x) = dn$ , temos:  $g(x) + h(x) = dm + dn$

(b) Sendo, portanto, possível fazer:  $g(x) + h(x) = d(m + n)$

(c) Além disso: Se  $(m + n) = p$  então, podemos fazer

$$f(x) = dp$$

Portanto, pela análise da reversibilidade, é possível constatar que a adição de duas antiderivadas pode ser operada distributivamente, o que atesta a regra que expomos.

**T23 — Variável com expoente constante (antiderivada)**

Antiderivada da função com expoente constante

Seja a função  $f(x) = x^n$  onde  $n$  é constante, sua antiderivada é:

$$U(x) = \int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

onde

$$n \neq -1$$

Onde  $C$  é constante.

**Comprovação:**

$$U'(x) = \frac{d \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}{dx}$$

$$U'(x) = \frac{1}{n+1} \frac{d(x^{n+1})}{dx} + \frac{dC}{dx}$$

$$U'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)(x^n) + 0$$

$$U'(x) = x^n$$

$$U'(x) = f(x)$$

**T24 — Regra da cadeia para antidiferenciais**

Seja as funções  $f(u)$  e  $u = g(x)$ , contínuas em seus domínios ou no intervalo a que se propõe a análise em questão. A antidiferencial da função composta  $f(u)$  com relação a  $x$  é:

$$\int f(u)dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx + C$$

Onde  $C$  é a constante que define a primitiva.

**Comprovação:**

Uma vez que:

$$u = g(x)$$

temos:

$$du = g'(x) \cdot dx$$

O que nos possibilita operar, por substituição:

$$\int f(u)du$$

obtendo:

$$\int f(u) \cdot g'(x) \cdot dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$$

para definir a antiderivada, usamos a constante  $C$ :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx + C$$

O que comprova a regra.

**Introdução a equações diferenciais**

Considerando a questão da indefinição criada pela diferenciação, o processo de antidiferenciação traz uma conseqüência indesejável para o processo de equacionamento de diferenciais. Quando uma equação diferencial é proposta, a constante de antidiferenciação faz com que o processo de resolução seja bastante prejudicado, o que exige que tenhamos técnicas especiais para tentar resolvê-la. Faremos agora uma breve introdução aos conceitos de equações diferenciais, porém, o estudo completo do tema demanda um aprofundamento maior por parte dos interessados, ao longo dos nossos estudos teremos meios para simplificar o processo, embora que a solução de muitas equações diferenciais quando não são impossíveis exigem muito esforço e dedicação.

## Diferenciais de primeira ordem

Seja a equação  $y = f(x) + a$ , a sua derivada é expressa como:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

sendo  $a$  uma constante arbitrária, definida pelas características das deduções que originaram a equação.

O que resulta na equação diferencial:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Esta equação é denominada: **Equação diferencial de primeira ordem**, visto que é originada de uma derivada primeira, o que permite facilmente separar as variáveis diferenciais. Por outro lado, como meio para reverter o processo de diferenciação, fazemos:

$$\int dy = \int f'(x) \cdot dx + C$$

Com  $C$  constante; lembre-se que  $C$  é uma constante não definida, a constante original é  $a$ .

Pelo exposto deduzimos que a equação assumirá a forma:

$$y = f(x) + C$$

Porém, como  $C$  é uma constante indefinida, temos uma função ainda indefinida.

## Constante antidiferencial

A constante resultante da indefinição na antidiferenciação é expressa na equação diferencial como observamos na seção anterior, para aumentar as possibilidades da análise, consideremo-la como variável, ao fazer isto temos um comportamento interessante para a função resultante; quando atribuímos valores a esta variável temos uma equação para cada valor assumido pela mesma, se observarmos mais atentamente, descobriremos que o gráfico da função mantém a forma, porém varia a altura em relação ao eixo das abscissas (variável independente), ou seja, a equação antidiferencial fornece um conjunto de curvas, o que possibilita uma infinidade de valores.

O que definiria a escolha de uma constante em particular? A constante definirá qual a curva que obedece o comportamento espelhado pelos números que compõem a curva a ser escolhida. De fato basta um par ordenado definido dentro do conjunto de números que obedecem à equação e teremos a definição da função exata. Em várias áreas onde podemos utilizar estas equações temos a definição deste par ordenado a partir do comportamento dos números que são observados ou deduzidos, na maioria das vezes este par de números é chamado de **estado inicial**, pois estabelece o comportamento da equação quando os valores das variáveis são conhecidos inicialmente.

No nosso caso da seção anterior coseguimos a fórmula geral:

$$y = f(x) + C$$

Certamente, podemos afirmar que:

Quando  $f(x) = 0$  temos  $y = a$  pois:

$$a = 0 + C$$

$$C = a$$

É uma afirmação fácil de ser encontrada, uma vez que conhecemos a equação original, porém se não a conhecemos, a observação e a dedução lógica devem ser usadas para encontrá-la. Algumas vezes podemos nos perguntar: Basta-nos conhecer o conjunto de equações ou precisamos de uma equação específica? O mérito desta questão deve ser avaliado de acordo com a necessidade da análise a ser feita, cabendo ao analista verificar quais são seus requisitos dentro do que se propõe a verificar.

---

## A integral indefinida

Seja a antiderivada:

$$\int f(x)dx$$

Observamos que a mesma corresponde a uma operação sobre pequenas seções de área, pois  $f(x)dx$  corresponde a multiplicação de um segmento numérico de largura,  $dx$ , pela altura, o valor da função aproximada ao limite em cada ponto.

A operação da forma que se apresenta estende-se de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Analisando qual a natureza desta operação, podemos tomar dois valores para  $dx$ , sejam  $dx_1$  e  $dx_2$ , sendo  $dx_2 > dx_1$ , quando analisamos este fato concluímos que a área do intervalo menor está dentro da área do maior, vemos que a operação comporta-se como uma soma de áreas, se somarmos todas as componentes de áreas ao longo da curva teremos uma área delimitada pela curva e o eixo  $x$ .

Chamamos esta operação de **integral**, seu símbolo é o mesmo da antiderivação, pois devido aos fatos acima introduzidos e ao teorema fundamental do cálculo, que discutiremos adiante, a operação de antiderivação pode ser chamada de **integral indefinida**.

---

## A integral definida

Aprofundando o conceito de que há uma soma de pequenos segmentos de área para cada ponto em uma curva, podemos delimitar uma seção da curva, através da adoção de um intervalo, desta forma teremos uma área definida, a qual chamamos de integral definida. Antes de detalhar o processo para encontrar a referida área faz-se necessário a observação de conceitos que serão úteis para seu desenvolvimento, o próximo tópico abordará a somatória, um procedimento que facilitará o estudo das somas sucessivas que propomos analisar.

### Somatórias

Considere a operação:

$$U = a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + \dots a_n$$

Chamamos esta operação de somatória, ela é simbolizada pela letra grega sigma ( $\Sigma$ ), utilizando a notação escrita como segue:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

O significado deste símbolo é facilmente compreendido: A variável  $i$  é chamada de índice, o número  $n$  é a quantidade de parcelas. Ocorre que, ao substituir estes valores na expressão  $a_i$ , fazemos de forma seqüencial, somando um valor ao anterior, como descrito na operação acima, o que resultará no valor final de  $U$ , pretendido na referida operação.

### Propriedades

#### T25 — Constante

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

com  $c$  constante.

**Comprovação:**

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + c + c + c + c + \cdots + c \Rightarrow$$

$n$  vezes.

#### T26 — Fator

$$\sum_{i=1}^n cf(i) = c \sum_{i=1}^n f(i)$$

com  $c$  constante.

**Comprovação:**

$$\sum_{i=1}^n cf(i) = cf(1) + cf(2) + cf(3) + cf(4) + cf(5) + cf(6) + \cdots + cf(n)$$

$$\sum_{i=1}^n cf(i) = c[f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + \cdots + f(n)]$$

onde:

$$[f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + \cdots + f(n)] = \sum_{i=1}^n f(i)$$

O que nos leva à propriedade anunciada.

**T27 — Adição**

$$\sum_{i=1}^n [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^n f(i) + \sum_{i=1}^n g(i)$$

**Comprovação:**

$$\sum_{i=1}^n [f(i) + g(i)] = [f(1) + g(1)] + [f(2) + g(2)] + [f(3) + g(3)] + \cdots + [f(n) + g(n)]$$

$$\sum_{i=1}^n [f(i) + g(i)] = [f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)] + [g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(n)]$$

**T28 — Exclusão de termo antecedente**

$$\sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$$

**Comprovação**

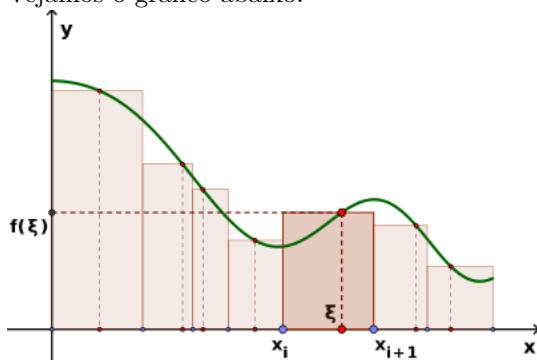
$$\sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + f(4) - f(3) - \cdots + f(n) - f(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = -f(0) + f(n)$$

## Definição da Integral de Riemann

O conceito de integral está ligado à necessidade de encontrar a área de curvas, as abordagens tomadas para solucionar o problema do cálculo de áreas curvas encontram sempre o mesmo resultado. Para não nos estendermos muito, faremos uma explanação do processo chamado: **Integral de Riemann**, o qual é um dos mais conhecidos.

Vejam os gráfico abaixo:



*Integral de Riemann*

**Figura 4**

O gráfico mostra uma função sinuosa, se fizermos seções retangulares para imitar o contorno das curvas teremos uma maneira grosseira de calcular a área delimitada pela curva e o eixo  $x$ , uma vez que temos a possibilidade de aumentar a quantidade de retângulos, podemos aumentar a precisão dos nossos cálculos... Se fizermos com que o número de retângulos aumente numa tendência ao infinito, teremos o valor da área.

Consideremos a função do gráfico

$$y = f(x)$$

, a sua integral entre os valores de  $x$ :  $a$  e  $b$  é:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Chamamos o intervalo  $[a, b]$  de **partição** e simbolizamos como

$$\Delta$$

. Ao dividirmos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  „pedaços” (seções) temos a possibilidade de definir o tamanho de cada um, porém a regra de Riemann é mais flexível e estabelece que podemos ter pedaços de tamanhos diferentes, de forma que tenhamos apenas que estabelecer os valores de  $x$  tal que

$$\{x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < \dots < x_n\}$$

. Uma vez que estabelecemos os valores dos  $x$ , podemos arbitrar um ponto intermediário entre eles para que seja o ponto onde definiremos o valor da função, este ponto será importante porque ele estabelecerá a altura do retângulo. O valor de  $x$ , que determinará o ponto da altura de cada retângulo é referenciado como  $(\xi)$ , referenciamos estes pontos como:  $[\xi_n, f(\xi_n)]$ .

A base dos retângulos é  $\Delta x_n$ , onde os valores podem variar livremente, porém há sempre um retângulo que possui a maior base, que chamamos de **norma** da partição  $[a, b]$ , simbolizada por  $\|\Delta\|$ .



Podemos somar todos os retângulos da partição, fazendo o cálculo aproximado da área, da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$$

A integral é obtida quando fazemos os retângulos tão pequenos que poderemos considerar suas bases quase nulas, para isso podemos dividir a partição em pedaços de  $[a, b]$ :

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{n}$$

O que nos permite delimitar a norma  $\|\Delta\|$  e definir a sua tendência a zero, também nos dá a possibilidade de definir a integral como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$$

### Propriedades da integral definida

Algumas propriedades são observadas a partir dos conceitos expostos sobre a integral, são regras para simplificar algumas operações, mas que podem ser úteis para o estudo de teoremas que veremos em capítulos mais adiante, vejamos as propriedades e suas comprovações:

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$ , funções contínuas no intervalo  $[a, b]$ , podemos afirmar que:

#### T29 — Limites iguais

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

##### Comprovação:

Podemos observar que, ao tomarmos o intervalo  $[a, b]$ , dividindo-o em  $n$  pedaços, teremos:

$$\Delta x = \frac{a-b}{n}$$

Sendo  $b = a$  teremos:

$$\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$$

então:

$$\Delta_i x = 0$$

e:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x = 0$$

O que comprova o teorema.

**T30 — Fator do integrando**

Sendo  $K$  constante:

$$\int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$$

**Comprovação:**

$$\int_a^b Kf(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Kf(\xi_i)\Delta_i x$$

que é igual a:

$$\int_a^b Kf(x)dx = K \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$$

O que comprova o teorema.

**T31 — Inversão dos limites**

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

**Comprovação:**

Novamente tomando o intervalo  $[a, b]$ , dividindo-o em  $n$  pedaços, teremos:

$$\Delta x = \frac{a - b}{n}$$

Portanto  $\Delta x$  é fator determinante do sinal. Se tomarmos a integral no intervalo  $[a, b]$  e invertermos a sua posição no cálculo, teremos:

$$\frac{a - b}{n} = - \frac{b - a}{n}$$

Logo, tomando  $a \rightarrow b$  como  $\Delta x$  é igual a tomar  $b \rightarrow a$  como  $-\Delta x$ .

O que comprova o teorema.

**T32 — Adição**

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

**Comprovação:**

Sendo a integral:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta_i x$$

logo:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i x$$

O que comprova o teorema.

**T33 — Seções complementares**

Seja  $c$  constante e  $a < c < b$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**Comprovação:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

Tomando o intervalo entre  $a$  e  $c$  e fazendo a relação:

$$\Delta = \frac{c - a}{k}$$

e

$$\Delta = \frac{b - a}{n}$$

O  $\Delta$  é um valor que pode ser atribuído às duas relações, portanto podemos fazer:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

Que é semelhante a propriedade da soma das áreas de dois objetos que formam um corpo maior, que costumamos usar na geometria e que prova o teorema.

**T34 — Valor médio**

Seja a seção  $[a, b]$  no domínio da função  $f(x)$ , dizemos que  $M$  é o valor médio da função neste intervalo, sendo seu valor definido como segue:

$$M = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

**Comprovação**

O valor médio de uma função é expresso pela função abaixo:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n}$$

Onde  $v_i$  representa um valor em particular. Sendo  $f(\xi_i)$  o valor da função para cada retângulo, podemos fazer a sua média da seguinte forma:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{n}$$

Por outro lado, podemos fazer com que o  $n$  seja:

$$n = \frac{b - a}{\Delta x}$$

logo:

$$M \approx \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a}$$

Uma vez que o  $\Delta x$  é um valor muito grosseiro, podemos encontrar o limite quando a norma da partição tende a ser nula, desta forma:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \left[ \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \right]$$

O que comprova o teorema.

---

### T35 — Teorema fundamental do cálculo

Seja a função  $f(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , a sua integral definida entre  $a$  e  $b$  é obtida pela operação que segue:

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

Onde:

$$g(x) = \int f(x) dx$$

Chegamos ao ponto culminante deste estudo inicial sobre as integrais, este teorema, chamado de **Teorema fundamental do cálculo**, é a base de nossas análises mais específicas nos próximos capítulos, ele afirma que a integral definida pode ser obtida através da antidiferencial da função, para tal, adotamos a seguinte notação :

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_a^b$$

#### Comprovação:

Devemos demonstrar que a derivada de  $g(x) \Big|_a^b$  é igual a  $f(x)$ .

Como podemos observar, quando calculamos o valor da integral definida, variamos o limite superior gradativamente de  $a$  até  $b$ , isto nos indica que podemos criar uma nova função, como escrito abaixo:

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

Observe que  $x$  é dita independente de  $u$ , pois a última constroi a curva da função, enquanto que a outra nos dá a integral de qualquer ponto com relação a distância da contante  $a$ , portanto, calculando sua derivada temos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(u) du - \int_a^x f(u) du}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(u) du + \int_x^{x+\Delta x} f(u) du - \int_a^x f(u) du}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(u) du}{\Delta x}$$

Conforme o teorema **T34**, a parte da equação operada pelo limite é um valor médio.

Observe que  $F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x)$ , ou seja, é o limite do valor médio quando o intervalo tende a ser nulo, o que resulta em  $f(x)$ , pois é equivalente a fazer uma média com apenas um elemento, o próprio valor de  $f(x)$ . Observemos ainda que o valor médio, aqui expresso, não é constante, visto que depende de  $x$ , o que quer dizer que temos um valor médio para cada seção da curva.

O valor médio dos valores entre  $f(x)$  e  $f(x + \Delta x)$  no mínimo é feito com os dois extremos apresentados, da seguinte forma:

$$M(x) = \frac{f(x + \Delta x) + f(x)}{2}$$

e

$$F'(x) = M(x)$$

no limite:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + f(x)}{2}$$

resulta:

$$F'(x) = f(x)$$

Portanto  $F(x)$  é antiderivada de  $f(x)$ .

Por outro lado ao fazer:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx - 0$$

então

$$g(x) = F(x)$$

que é a antiderivada de  $f(x)$ , logo:

$$g(x) = \int f(x)dx$$

O que comprova o teorema.



## Capítulo 6

# Análise de funções elementares (1)

**Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I**

O estudo das funções deste capítulo refere-se às funções não puramente algébricas, relacionadas a números transcendentais, algumas das quais já conhecemos da matemática elementar, porém é necessário um aprofundamento do tema para o ambiente acadêmico, onde temos que lidar com análises mais detalhadas e complexas.

### Logarítmicas

A integral da função algébrica  $f(x) = x^n$  traz uma indefinição quando  $n = -1$ :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}; n \neq -1$$

A existência desta indefinição nos leva a uma questão: Qual o procedimento para integrar a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ ? A resposta é dada na análise numérica, calculando a integral pelos métodos de análise algébrica podemos chegar a seguinte conclusão:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln |x|$$

A função  $\ln$  é chamada de logaritmo natural, a sua base é chamada de **número de Euler**, ele é um logaritmo conseqüente do cálculo da área sob a curva da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , que pode ser obtido numericamente usando a integral de Riemann e outras técnicas de cálculo numérico. Aproximações deste número são possíveis utilizando-se técnicas de aproximações sucessivas com o uso de séries, discutidas em **Cálculo (Volume 3)**.

Todos os teoremas para logaritmos, que estão incluídos nos cursos de nível médio, podem ser obtidos a partir da análise do logaritmo natural, também chamado de logaritmo Neperiano.

**Teoremas**

Vejam os principais teoremas para os logaritmos:

Nas citações abaixo, consideremos  $f(x) = \ln x$ ,

**T36 — Produto**

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

**Comprovação:**

Da definição:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{u} du$$

$$\int_1^a \frac{1}{u} du + \int_a^{ab} \frac{1}{u} du$$

fazendo  $u = at$ ,  $du = at$  e quando  $u = a$ ,  $t = 1$ :

$$\int_1^a \frac{1}{u} du + \int_1^b \frac{1}{at} at$$

$$\int_1^a \frac{1}{u} du + \int_1^b \frac{1}{t} dt$$

O que comprova o teorema.

**T37 — Razão**

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

**Comprovação:**

Sendo

$$a = \frac{a}{b} \cdot b$$

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

logo:

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$



**T38 — Potência**

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

**Comprovação:**

Sendo:

$$\ln a^b = \ln(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots)$$

b vezes, que é:

$$\ln a^b = \ln a + \ln a + \ln a + \ln a + \ln a + \ln a + \ln a + \ln a \dots)$$

b vezes, resultando:

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

**Derivadas**

Da definição do logaritmo natural e a partir do *teorema fundamental do cálculo*, podemos deduzir a derivada da função logarítmica natural, ou seja, se  $f(x) = \ln x$  que é a integral definida de  $\frac{1}{x}$ , então a derivada é:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

**Integrais**

Para integração de funções logarítmicas, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.

---

**Exponenciais**

A função  $f(x) = a^x$  é chamada de função exponencial na base  $a$ , todas as funções exponenciais são introduzidas a partir da definição do logaritmo natural  $\ln x$  como sua função inversa. As funções exponenciais são estas em que a parte variável é o logaritmo, ou seja:

Se

$$\log_a b = x$$

então:

$$a^x = b$$

O que implica  $b = f(x)$ , tornando-o uma função, na qual podemos atribuir valores a  $x$  e obter uma imagem. O número  $a$  é chamado **base**, este número é facilmente identificado nos logaritmos convencionalmente abordados na matemática elementar, mas qual é a base da função  $\ln x$  ?

Esta questão nos leva a um novo conceito abordado na próxima seção, **o número de Euler**.

### O número de Euler

A base do logaritmo natural é o número de Euler, simbolizado por:  $e$ , ele é obtido pela definição do logaritmo natural, esse número corresponde á área sob a curva da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , quando seu valor é unitário, ou seja:

$$\ln e = 1$$

Mais formalmente:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

O valor deste número pode ser encontrado por aproximação, utilizando-se os métodos de análise de seqüências e séries, encontrados no livro: **Cálculo (Volume 3)**.

A equação que fornece o valor do número de Euler é dada a seguir:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nesta equação podemos observar que quanto mais alto o valor de  $n$  mais preciso se torna o valor de  $e$ .

De maneira simplificada, com base nos conceitos até agora abordados podemos encontrá-la da seguinte maneira:

Se  $f(x) = \ln x$  então  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , logo

$$f'(1) = 1$$

Por outro lado, pela definição:

$$f'(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \alpha) - \ln x}{\alpha}$$

Para  $f'(1) = 1$ :

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha) - \ln 1}{\alpha}$$

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha}$$

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha)$$

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Sendo

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

e ainda:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

Concluimos que:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

### Teoremas

A maioria dos teoremas relacionados, têm origem nas conclusões obtidas no estudo do logaritmo natural, dos quais relacionamos os mais usados:

#### T39 — Soma

Seja a função  $f(x, y) = e^{x+y}$ , pode-se afirmar que:

$$f(x, y) = e^x \cdot e^y$$

#### Comprovação:

Considerando  $x = \ln a$  e  $y = \ln b$ ,

$$x + y = \ln a + \ln b$$

$$x + y = \ln ab$$

logo:

$$e^{x+y} = e^{\ln ab}$$

$$e^{x+y} = ab$$

sendo

$$a = e^x$$

e

$$b = e^y$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

O que comprova o teorema.

#### T40 — Subtração

De forma similar à análise anterior, sendo a função  $f(x, y) = e^{x-y}$ , pode-se afirmar que:

$$f(x, y) = \frac{e^x}{e^y}$$

#### Comprovação:

Considerando

$$x = \ln a$$

e

$$y = \ln b$$

$$x - y = \ln a - \ln b$$

$$x - y = \ln \frac{a}{b}$$

logo:

$$e^{x-y} = e^{\ln \frac{a}{b}}$$

$$e^{x-y} = \frac{a}{b}$$

sendo

$$a = e^x$$

e

$$b = e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

O que comprova o teorema.

#### T41 — Potência

Seja a função  $f(x, y) = (e^x)^y$ , pode-se afirmar que:

$$f(x, y) = e^{xy}$$

**Comprovação:**

$$f(x, y) = (e^x)^y$$

$$f(x, y) = e^{\ln(e^x)^y}$$

$$f(x, y) = e^{y \cdot \ln(e^x)}$$

$$f(x, y) = e^{y \cdot x}$$

O que comprova o teorema.

### Derivadas

Consideremos que  $f(x) = e^x$ , e conseqüentemente  $x = \ln f(x)$ , se derivarmos implicitamente esta expressão:

$$dx = \frac{1}{f(x)} df(x)$$

Curiosamente, teremos:

$$f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$f(x) = f'(x)$$

Ou seja, a função exponencial natural é invariável durante o processo de derivação, o que traz uma série de implicações simplificadoras para estas funções.

Por outro lado se  $f(x) = a^x$ , temos que:

$$a = e^{\ln a}$$

Fazendo  $u = x \cdot \ln a$  e  $f(x) = e^u$ , teremos:

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Se  $\frac{du}{dx} = \ln a$ , concluímos que:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Que é adotada como uma derivada mais genérica, pois pode ser empregada em qualquer exponencial, pois inclui correção para o fator da base.

## Integrais

Como não poderia ser diferente, o valor da integral da função exponencial natural  $f(x) = e^x$  é a própria função, conforme a regra da reversibilidade entre a derivada e a integral, apenas sendo necessária a devida observação da base, para eventual correção da diferencial e conseqüente introdução de fator de correção, nos casos em que a função torna-se composta.

Desta forma, temos:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Sendo  $C$  constante.

---

## Logarítmicas com outras bases

Como foi visto durante o ensino médio, os logaritmos têm uma definição direta e que denota a sua finalidade de expressar o valor do expoente em uma operação exponencial, a definição pura é dada da seguinte forma:

Se  $x = a^n$  então,

$$\log_a x = n$$

Onde:  $a$  é chamada base do logaritmo,  $x$  é o logaritmando e  $n$  é o expoente.

O logaritmo é, portanto, a operação pela qual se obtém o expoente necessário para que a base seja elevada, numa operação exponencial e se obtenha o número  $x$ .

A função logarítmica de base  $a$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(x) = \log_a x$$

O que nos possibilita encontrar um valor para cada  $x$  expresso na equação.

### Mudança de base

Analisemos agora a possibilidade de encontrar uma função logarítmica de uma base  $a$  e transformá-la em uma função logarítmica de base natural, ou outra base qualquer: Seja a função  $y = \log_a x$ , podemos dizer que:

$$x = e^{\ln x}$$

e que

$$a = e^{\ln a}$$

como

$$x = a^y$$

$$x = (e^{\ln a})^y$$

$$x = e^{y \cdot \ln a}$$

$$\ln x = y \cdot \ln a$$

O que nos possibilita afirmar que:

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

ou

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Note que a analogia serve para funções logarítmicas de qualquer base, visto que podemos substituir  $\ln x$  por  $\log_z x$  sendo  $z$  a base que substituirá  $e$  na análise anterior.

O que nos possibilita considerar que quando temos duas bases, sejam:  $a$  e  $b$ , podemos promover a troca das bases, de forma que:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

### Derivadas

A derivada da função logarítmica com base diferente de  $e$  pode ser feita por substituição da base. Considerando  $f(x) = \log_a x$ , temos que:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

logo:

$$f'(x) = \frac{d\left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d(\ln x)}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Que nos dá a derivada:

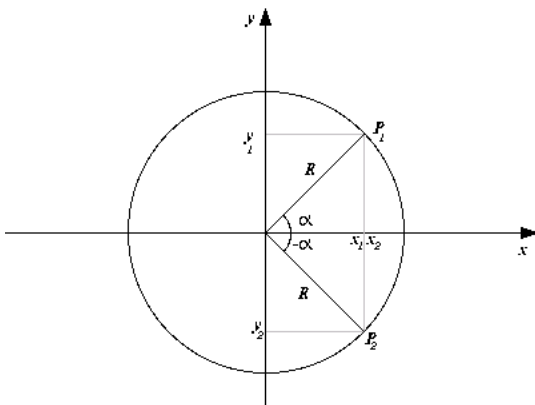
$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

## Trigonométricas I

A trigonometria, tal qual vista na matemática elementar, está relacionada com as relações métricas do triângulo retângulo e do ciclo trigonométrico, agora introduziremos o estudo infinitesimal das funções trigonométricas que são largamente utilizadas nas ciências exatas.

### Conceitos básicos (Radianos)

Em um plano definido pelos eixos  $x$  e  $y$  podemos estabelecer coordenadas cartesianas para cada ponto, o que nos permite identificar cada um dos pontos em qualquer posição do plano, existe outra maneira de encontrar um ponto neste plano; se quisermos estabelecer uma relação triangular podemos determinar a posição de cada ponto no plano da seguinte forma:



**Figura 5**

Imagine que cada ponto está numa distância  $R$  do ponto  $(0,0)$  em um plano cartesiano definido por pontos  $(x,y)$ , da mesma forma a reta  $R$ , que é definida entre os pontos  $(0,0) \rightarrow (x,y)$ , forma um ângulo com o eixo  $x$ , que chamaremos de  $\alpha$ , note que podemos identificar qualquer dos pontos no plano a partir de uma reta  $R$  e um ângulo  $\alpha$ .

Observemos que  $R$ , quando fixa, é uma reta que determina um conjunto de pontos em torno do ponto  $(0,0)$ , se fizermos  $\alpha$  variar em todos os valores possíveis teremos uma circunferência. Quando fazemos o valor de  $R$  variar teremos diferentes valores de  $x$  e  $y$ , porém a relação entre eles sempre será a mesma.

Curiosamente, há uma relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro, ela se apresenta constante qualquer que seja o raio do círculo; o resultado desta relação é um número transcendental chamado **PI**, representado pela letra grega de mesmo nome  $\pi$ . Resgatando esta relação para a nossa análise podemos dizer que, se chamarmos o perímetro da circunferência, formada no gráfico, de  $l$  e admitirmos um diâmetro de  $2R$ , então teremos:

$$\frac{l}{2R} = \pi$$

Que resulta em:

$$l = 2\pi R$$

Que é uma relação bastante esclarecedora, visto que nos mostra uma dependência linear entre o raio e o comprimento de um fio imaginário que pudesse ser usado para seguir o contorno da circunferência do gráfico. Se o raio for unitário teremos um valor de referência para  $l$ , que poderá ser usado para encontrar qualquer comprimento de circunferência no gráfico, bastando para isto multiplicá-lo pelo raio, este valor de referência está ligado à circunferência fechada. Por outro lado, se fizermos com que  $R$  se desloque de um ângulo nulo, ou seja, que saia do eixo  $x$  em direção a  $y$ , formando um ângulo  $\alpha$ , teremos pedaços de circunferência, que chamamos de **arcos**, considerando que temos um raio unitário e que percorremos um pedaço da circunferência para cada ângulo “ $\alpha$ ” que tomamos, temos uma correspondência entre **ângulo e arco**, ou seja: podemos nos referir a arcos como unidades de ângulos, esta unidade angular é chamada de **Radiano**. Qualquer círculo forma  $2\pi$  radianos e todas as relações entre os pontos da circunferência que o contorna e os eixos cartesianos podem ser referenciadas como relações entre partes desta medida.

Como o radiano é uma medida real, isto nos leva a outra questão: O que determina o sinal **negativo** ou **positivo** neste valor?

Acontece uma variação destes valores quando nos deslocamos de um ponto a outro da circunferência, quando saímos do eixo  $x$  em direção ao ponto  $P_1$  o ângulo cresce, portanto temos que concluir que é positivo, recuando-o de encontro ao eixo  $x$  os valores diminuem, portanto se ultrapassarmos o eixo  $x$  o valor deve ser menor que zero, nos revelando um ângulo negativo.

## Seno e cosseno

Temos, portanto, uma circunferência dentro do plano cartesiano e seus pontos relacionados ao raio  $R$  e ao ângulo  $\alpha$ , são referenciados pelas variáveis  $x$  e  $y$  no mesmo plano, agora imaginemos funções para que seja possível a partir do raio e do ângulo encontrar as variáveis, estas funções são o **seno** e o **cosseno**.

A função **seno**, simbolizada como:

$$\text{sen}(\alpha)$$

Nos dá o valor da variável  $y$ , ou seja, a altura do ponto em relação ao zero referencial, no encontro dos eixos, conforme espelhada no eixo  $y$ , quando o raio  $R$  é unitário, caso não seja fazemos  $y = R \text{sen}(\alpha)$ .

A função **cosseno**, simbolizada como:

$$\text{cos}(\alpha)$$



Nos dá o valor da variável  $x$ , ou seja, a distância do ponto em relação ao zero referencial, no encontro dos eixos, conforme espelhada no eixo  $x$  quando o raio  $R$  é unitário, caso não seja fazemos  $x = R \cos(\alpha)$ .

As funções **seno** e **coosseno** são periódicas, ou seja, pela natureza do ciclo trigonométrico, quando temos um valor em  $x$  maior que  $2\pi$  temos a representação de um ciclo completo mais um ângulo residual, na verdade o valor representa este ângulo residual, o que nos leva a constatação que sempre será calculado o valor do seno ou coosseno do resto da operação  $\frac{x}{2\pi}$  quando um ângulo maior que  $2\pi$  for sugerido para  $x$ .

---

**Atenção:**

---

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\sin x$ ,  $\cos x$  ou  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  para representação de seno e coosseno respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

---

Alguns valores de senos e coossenos de certos arcos são perfeitamente dedutíveis através da observação do ciclo, são eles:

|                             |          |                 |       |                  |
|-----------------------------|----------|-----------------|-------|------------------|
| <b>Ângulo:</b>              | <b>0</b> | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| <b>sen(<math>x</math>):</b> | 0        | 1               | 0     | -1               |
| <b>cos(<math>x</math>):</b> | 1        | 0               | -1    | 0                |

Tabela 6.1: Senos e coossenos notáveis

Observando o gráfico podemos também concluir que o sinal do seno é idêntico ao sinal do ângulo, enquanto que o coosseno não acompanha o sinal do ângulo, de forma que coossenos de ângulos negativos são iguais a coossenos dos valores absolutos dos ângulos, ou seja:

sendo  $a > 0$ ,

$$\text{sen}(-a) = -\text{sen}(a)$$

enquanto que:

$$\text{cos}(-a) = \text{cos}(a)$$

Outros senos e coossenos podem ser obtidos pelas relações métricas no triângulo e são largamente utilizados, são:

|                            |                      |                      |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                      |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| <b>Ângulo</b>              | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\frac{7\pi}{6}$      | $\frac{5\pi}{4}$      | $\frac{4\pi}{3}$      | $\frac{5\pi}{3}$      | $\frac{7\pi}{4}$      | $\frac{11\pi}{6}$    |
| <b>sen(<math>x</math>)</b> | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$       |
| <b>cos(<math>x</math>)</b> | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Tabela 6.2: Senos e coossenos mais comuns

**Identidades (1)**

As equações desta seção são consequência das características dos senos e cossenos, seu comportamento cíclico e sua relação com uma circunferência de raio unitário lhes conferem uma excelente operatividade, possibilitando-nos fácil intercâmbio entre as mesmas.

**I-1 Identidade relacional básica**

As funções seno e cosseno estão relacionadas pela equação:

$$\text{sen}^2(a) + \text{cos}^2(a) = 1$$

**Comprovação:**

Observando o ciclo trigonométrico, temos um triângulo cujos catetos são

$$\text{sen}(a)$$

e  $\text{cos}(a)$  e sua hipotenusa é 1, portanto a identidade é consequente do conhecido teorema de Pitágoras.

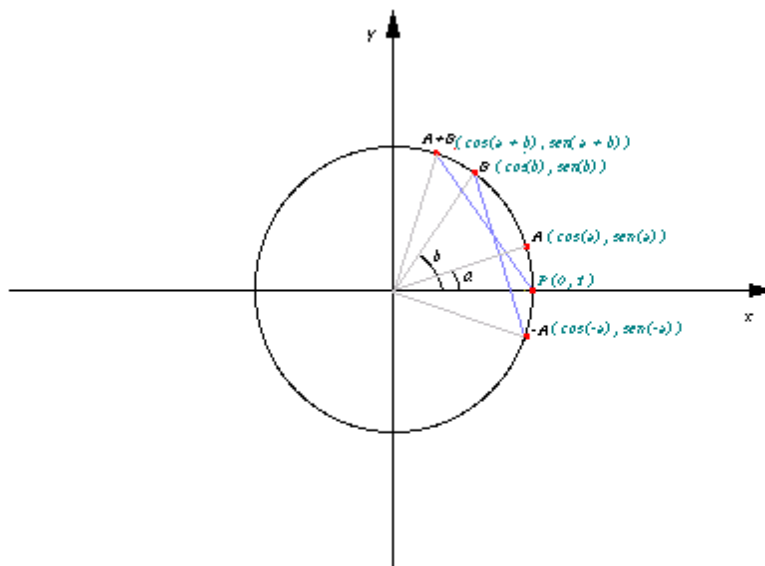
**I-2 Cosseno da soma**

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o cosseno de sua soma é<sup>1</sup>:

$$\text{cos}(a + b) = \text{cos}(a)\text{cos}(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

**Comprovação:**

Nos pontos  $A$  e  $B$  do ciclo trigonométrico, temos os arcos para os ângulos  $a$  e  $b$ :



**Figura 6**

<sup>1</sup>Ver também no [Wolfram Alpha](#)

A distância entre os pontos P e (A+B) é igual à distância entre -A e B, o quadrado das duas é:

$$[\cos(a+b) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(a+b) = [\cos(b) - \cos(-a)]^2 + [\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(-a)]^2$$

Da identidade básica:

$$\cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) = \cos^2(b) - 2\cos(-a)\cos(b) + \cos^2(-a) + \operatorname{sen}^2(b) - 2\operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}^2(-a)$$

$$\cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + 1 - \cos^2(a+b) = \cos^2(b) - 2\cos(-a)\cos(b) + \cos^2(-a) + \operatorname{sen}^2(b) - 2\operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}^2(-a)$$

$$-2\cos(a+b) + 1 + 1 = [\cos^2(b) + \operatorname{sen}^2(b)] - 2\cos(-a)\cos(b) + [\cos^2(-a) + \operatorname{sen}^2(-a)] - 2\operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b)$$

$$-2\cos(a+b) + 2 = 1 - 2\cos(-a)\cos(b) + 1 - 2\operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b)$$

$$-2\cos(a+b) = -2\cos(-a)\cos(b) - 2\operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(-a)\cos(b) + \operatorname{sen}(-a)\operatorname{sen}(b)$$

Como  $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$  e  $\cos(-a) = \cos(a)$  :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

O que comprova a identidade.

### I-3 Cosseno da diferença

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o cosseno de sua diferença é<sup>2</sup>:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

**Comprovação:**

Do cosseno da soma:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

Substituindo  $b$  por  $-b$ :

$$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

O que comprova a identidade.

---

<sup>2</sup>Ver também no [Wolfram Alpha](#)

**I-4 Equivalência angular**

Se o ângulo  $a$  é  $\frac{\pi}{2}$  e  $b$  é  $x$ , então:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 + 1 \cdot \sin(x)$$

logo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

Por outro lado, se:

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e

$$x = \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

obtemos:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)$$

**I-5 Seno da soma**

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o seno de sua soma é<sup>3</sup>:

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

**Comprovação:**

Sendo  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  e  $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin(a + b)$ , temos:

$$\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right]$$

$$\sin(a + b) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

O que comprova a identidade.

---

<sup>3</sup>Ver também no [Wolfram Alpha](#)

**I-6 Seno da diferença**

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o seno de sua diferença é<sup>4</sup>:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cos(a)$$

**Comprovação:**

Se

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cos(a)$$

Substituindo  $b$  por  $-b$ , temos:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b) \cos(a)$$

e  $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$  enquanto que  $\cos(-b) = \cos(b)$ , logo:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cos(a)$$

O que comprova a identidade.

**I-7 Produto de dois senos**

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o produto de seus senos é<sup>5</sup>:

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

**Comprovação:**

Considerando a identidade do *coseno da diferença de dois ângulos* e subtraindo de cada um de seus membros os membros correspondentes da identidade do *coseno da soma de dois ângulos*:

$$\begin{array}{r} \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \\ - \\ \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \\ \hline \cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \end{array}$$

O que comprova a identidade.

**I-8 Produto de dois cossenos**

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o produto de seus cossenos é<sup>6</sup>:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

**Comprovação:**

Considerando a identidade do *coseno da soma de dois ângulos* e somando a cada um de seus membros os membros correspondentes da identidade do *coseno da diferença de dois ângulos*:

---

<sup>4</sup>Ver também [no Wolfram Alpha](#)

<sup>5</sup>Ver também [no Wolfram Alpha](#)

<sup>6</sup>Ver também [no Wolfram Alpha](#)

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \\ &+ \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) &= +2\cos(a)\cos(b) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

### I-9 Produto de seno e cosseno

Sejam os ângulos  $a$  e  $b$ , o produto do seno de  $a$  pelo cosseno de  $b$  é<sup>7</sup>:

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$$

#### Comprovação:

Considerando a identidade do *seno da soma de dois ângulos* e somando a cada um de seus membros os membros correspondentes da identidade do *seno da diferença de dois ângulos*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b) \\ &+ \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b) \\ \hline \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2\operatorname{sen}(a)\cos(b) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

### I-10 Soma de dois senos

Sejam os ângulos  $p$  e  $q$ , a soma dos senos de  $p$  e de  $q$  é:

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

#### Comprovação:

Podemos dizer que:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a+b = p \\ + \\ a-b = q \end{cases} \\ \hline &2a = p+q \\ a = \frac{p+q}{2} &; \quad b = \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

substituindo na identidade:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2\operatorname{sen}(a)\cos(b) \\ \operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

---

<sup>7</sup>Ver também no [Wolfram Alpha](#)

**I-11 Soma de dois cossenos**

Sejam os ângulos  $p$  e  $q$ , a soma dos cossenos de  $p$  e de  $q$  é:

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**Comprovação:**

Seguindo a analogia anterior:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos(a) \cos(b) \\ \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

**I-12 Diferença de dois senos**

Sejam os ângulos  $p$  e  $q$ , a diferença dos senos de  $p$  e de  $q$  é:

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**Comprovação:**

substituindo  $q$  por  $-q$  em:

$$\begin{aligned} \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(-q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

**I-13 Diferença de dois cossenos**

Sejam os ângulos  $p$  e  $q$ , a diferença dos cossenos de  $p$  e de  $q$  é:

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**Comprovação:**

substituimos  $q$  e  $q$ , por  $\frac{p+q}{2}$  e  $\frac{p-q}{2}$  em:

$$\begin{aligned} \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \cos(a) \sin(b) \\ \cos(q) - \cos(p) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

O que comprova a identidade.

**Limite trigonométrico fundamental**

Precisaremos de um limite fundamental nas próximas seções, se trata de um limite que é utilizado na dedução das derivadas do seno e do cosseno, faremos sua dedução nesta seção. Considere o ciclo trigonométrico representado a seguir:

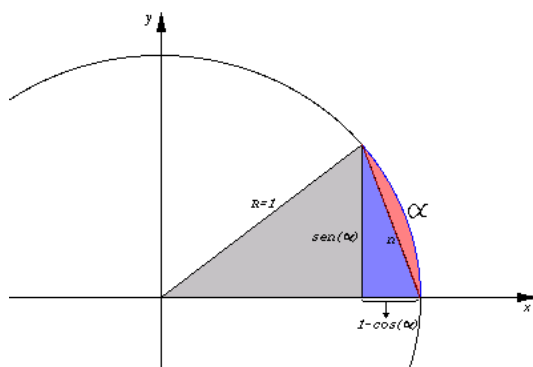


Figura 7

A **figura 7** mostra a representação de um ângulo  $\alpha$  no ciclo trigonométrico, o nosso propósito é deduzir o seguinte limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$$

Para isto, imagine o triângulo inscrito na circunferência, podemos dizer que o segmento de reta  $n$  é uma aproximação grosseira do arco  $\alpha$ , porém observe que quando o ângulo se aproxima de zero o segmento se torna mais parecido com o respectivo ângulo, algebricamente podemos expressar que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}$$

Por outro lado façamos o cálculo do valor do  $n$ ; observando o triângulo podemos dizer que:

$$n^2 = \text{sen}^2(\alpha) + [1 - \cos(\alpha)]^2$$

$$n^2 = 2[1 - \cos(\alpha)]$$

Logo:

$$\cos(\alpha) = \left(1 - \frac{n^2}{2}\right)$$

$$1 - \text{sen}^2(\alpha) = \left(1 - \frac{n^2}{2}\right)^2$$

Simplificando temos:

$$\text{sen}(\alpha) = n \left[1 - \frac{n^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Voltando para o nosso limite, temos que usar as nossas equações anteriores desta forma:



$$\left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \right] \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{n}$$

Substituindo o valor do seno no lado da equação relacionado ao  $n$ , teremos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{n^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

O que nos leva ao resultado:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$$

A interpretação desse limite é a seguinte:

Uma vez que o ângulo diminui até valores próximos de zero e o arco tende a se assemelhar a uma reta em regiões próximas do zero, o valor do seno é igual ao valor do arco no limite, quando o seu valor se aproxima de ser nulo.

### Derivada do seno

Agora podemos verificar qual a variação da função seno em relação ao seu ângulo, aplicando a definição da derivada ao seno, temos:

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

Aplicando o seno da soma:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)\cos(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{h}$$

Aplicando os limites:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \cos(x)$$

Temos, então, o limite fundamental que é igual a 1, logo:

$$f'(x) = \cos(x)$$

**Derivada do cosseno**

Também podemos verificar qual a variação da função cosseno em relação ao seu ângulo, aplicando a definição da derivada ao cosseno, temos:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Aplicando o seno da soma:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{h}$$

Aplicando os limites:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \operatorname{sen}(x)$$

Novamente temos o limite fundamental, logo:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

**Integral do seno**

Como consequência do resultado da derivada do seno, podemos deduzir que a sua integral, como operação inversa é:

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$

Cuja constante  $C$  é a constante devido a indefinição no processo de antidiferenciação, conforme já estudamos anteriormente.

**Integral do cosseno**

Segundo o mesmo princípio colocado no caso da integral do seno, podemos afirmar que a operação de integração do cosseno é definida por:

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$$

Cuja constante  $C$  é a constante devido a indefinição no processo de antidiferenciação

## Capítulo 7

# Análise de funções elementares (2)

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo I*

### Trigonométricas II

Esta seção é a continuação do estudo trigonométrico, iniciado no capítulo anterior, que foi criada após o aumento progressivo do conteúdo.

#### Tangente e secante

Quando definimos o seno e o cosseno fizemos a referência a seu significado no ciclo trigonométrico, da mesma forma introduziremos a tangente neste momento. Como já vimos anteriormente a derivada é uma função que representa a declividade de uma curva, da mesma forma podemos definir a tangente, pois essencialmente, ela representa a declividade do ciclo para cada ângulo em particular, ou seja, se traçarmos uma reta ortogonal a cada ponto do ciclo trigonométrico e relacionarmos ao ângulo que forma com o eixo  $x$ , teremos retas com declividades iguais às tangentes desses ângulos. Como cada ponto do ciclo é definido por  $[\cos(\alpha), \sin(\alpha)]$  e o valor inicial ( $\Delta x$ ) é sempre nulo, temos um valor de declividade tal que:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que é:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$$

**Atenção:**


---

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\tan x$ ,  $\sec x$  ou  $\tan(x)$ ,  $\sec(x)$  para representação de tangente e secante respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

---

Desta forma também podemos concluir que a tangente é a representação do cateto oposto ao ângulo quando mantemos o cateto adjacente constante e unitário, considerando este ponto de vista, qual seria o valor da hipotenusa?

Para definir  $h$ , a hipotenusa, façamos :

$$h^2(x) = 1^2 + \operatorname{tg}^2(x)$$

$$h^2(x) = 1^2 + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$h^2(x) = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Da identidade relacional temos:

$$h^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

portanto:

$$h(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Este valor é o que chamamos de **secante**, que é outra função importante para o estudo trigonométrico, então podemos dizer que:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Nas próximas seções veremos que a secante mantém íntimas relações com a tangente.

**Identidades (2)**

Como definimos as identidades entre seno e cosseno, incluiremos as identidades que incluem tangente e secante nesta seção, todas são algebricamente dedutíveis e intercambiáveis.

**I-14 Relacionando tangente e secante**

Seja  $x$  uma variável que expressa o ângulo em cada ponto do ciclo trigonométrico, entre  $\operatorname{tg}(x)$  e  $\sec(x)$  podemos afirmar que:

$$1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$$

Conforme visto nos conceitos iniciais logo acima, a relação é consequência direta das relações triangulares que definem as funções tangente e secante.

**I-15 Tangente da diferença**

Sendo  $a$  e  $b$  dois ângulos no ciclo trigonométrico:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(b)}$$

**Comprovação:**

Considerando a definição da tangente temos:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\operatorname{cos}(a - b)}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{sen}(a) \operatorname{cos}(b) - \operatorname{sen}(b) \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a) \operatorname{cos}(b)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)} - \frac{\operatorname{sen}(b) \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)}}{\frac{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)} + \frac{\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)}}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)} - \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{cos}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)}}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)} - \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{cos}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b)}}$$

Resultando em:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(b)}$$

O que comprova a identidade.

**I-16 Tangente da soma**

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(b)}$$

**Comprovação:**

Admitamos  $b = -b$  e teremos pela tangente da diferença:

$$\operatorname{tg}(a - (-b)) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(-b)}{1 + \operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(-b)}$$

Considerando que a tangente é:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$$

E que o seno é determinante para o sinal enquanto o cosseno não é, concluímos que o sinal da tangente é igual ao da variável, tal qual se comporta o seno, logo:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(b)}$$

O que comprova a identidade.

**Derivada da tangente**

Seja  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ , uma função contínua em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , visto que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty$ , o que nos obriga a excluí-lo do intervalo, podemos verificar que:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$$

logo, pela derivada da razão, **T9**:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{cos}(x) \operatorname{cos}(x) - \operatorname{sen}(x)[- \operatorname{sen}(x)]}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{cos}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

Portanto:

$$f'(x) = \operatorname{sec}^2(x)$$

**Derivada da secante**

Seja  $f(x) = \operatorname{sec}(x)$ , uma função contínua em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , visto que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sec}(x) = \infty$ , o que nos obriga a excluí-lo do intervalo, podemos verificar que:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}$$

logo, pela derivada da razão, **T9**:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{cos}(x) \cdot (0) - 1 \cdot (- \operatorname{sen}(x))}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}$$

O que nos revela:

$$f'(x) = \operatorname{tg}(x) \operatorname{sec}(x)$$

**Integral da tangente**

Seja a função  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ , definida contínua no intervalo onde seus valores estão sendo considerados, podemos deduzir que:

$$F(x) = \int \operatorname{tg}(x) dx$$

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} dx$$

Por outro lado, se:

$$u = \cos(x)$$

$$du = -\operatorname{sen}(x)dx$$

O que nos possibilita afirmar que:

$$F(x) = -\int \frac{du}{u}$$

$$F(x) = -\ln |\cos(x)|$$

$$F(x) = \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right|$$

Portanto:

$$F(x) = \ln |\sec(x)| + C$$

### Integral da secante

Seja a função  $f(x) = \sec(x)$ , dizemos que sua integral é a função  $F(x)$  e podemos deduzí-la através de substituições algébricas como segue:

$$F(x) = \int \sec(x)dx$$

multiplicando e dividindo  $\sec(x) + \operatorname{tg}(x)$ :

$$F(x) = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx$$

Por outro lado, se:

$$u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$$

$$du = [\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x)]dx$$

logo, por substituição, temos:

$$\int \frac{du}{u}$$

sendo  $u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$ , o que nos permite fazer:

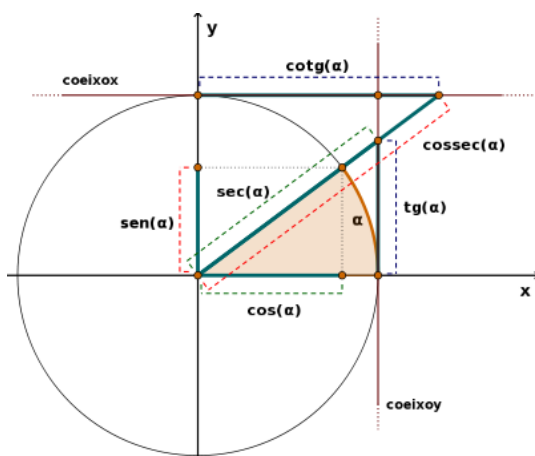
$$F(x) = \ln |u|$$

Portanto:

$$F(x) = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$$

## Cotangente e cossecante

Considerando a semelhança entre as definições das funções trigonométricas até aqui abordadas, observamos que para cada função, curiosamente há uma “co-função”, assim como temos um seno e um “co-seno” temos uma tangente e uma “co-tangente”. A função cotangente é definida tal qual a analogia adotada antes para seno e cosseno; podemos dizer que as funções estão relacionadas ao eixo  $y$  e as “co-funções” estão relacionadas ao eixo  $x$ , a imagem de um ponto no ciclo trigonométrico a partir do eixo  $x$  é o cosseno do ângulo e o seno é a imagem do mesmo ponto vista pelo eixo  $y$ . Para verificar essa relação observe o gráfico:



**Figura 8**

Se nós fizermos a mesma observação entre tangente e cotangente concluiremos que a tangente é a imagem deste ponto do ciclo trigonométrico no eixo paralelo ao eixo  $y$  traçado a partir da coordenada  $(1,0)$  e a cotangente é a sua “co-função” que espelha o ponto no eixo paralelo ao eixo  $x$  na coordenada  $(0,1)$ . Segundo o mesmo critério de analogia podemos dizer que a função cossecante é o valor da hipotenusa do triângulo formado entre o raio unitário do ciclo e a cotangente relacionada a um ponto do ciclo, da mesma forma que a secante é o valor da hipotenusa do triângulo formado entre o raio unitário do ciclo e a tangente do mesmo ponto.

Podemos deduzir a fórmula de definição da função cotangente fazendo uma análise de semelhança de triângulos, notamos no ciclo que:

$$\frac{1}{\cotg(x)} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

O que nos revela:

$$\cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$



**Atenção:**

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\cot x$ ,  $\csc x$  ou  $\cot(x)$ ,  $\csc(x)$  para representação de cotangente e cossecante respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

Da mesma forma podemos verificar uma relação de semelhança de triângulos para determinar a cossecante, vemos que existe a seguinte relação:

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{cotg}(x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}(x)} = \cos(x) \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Que define a cossecante como:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

**Identidades (3)**

Algumas identidades são conseqüentes das definições, apresentamos as mais usuais que poderão ser úteis nos demais capítulos deste livro, as identidades, de modo geral, são altamente intercambiáveis devido a natureza cíclica das funções trigonométricas, no nosso estudo abordamos as mais utilizadas.

**Conseqüentes das definições:**

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{cosec}(x) = 1$$

$$\cos(x) \sec(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}(x) \operatorname{cotg}(x) = 1$$

**Derivada da cotangente**

Seja a função  $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$ , considerando que:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Novamente usamos a regra da derivada da razão, **T9**:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)[- \operatorname{sen}(x)] - \cos(x) \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$f'(x) = - \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

Portanto:

$$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$$

### Derivada da cossecante

Seja a função  $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$ , considerando que:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Novamente usamos a regra da derivada da razão, **T9**:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) \cdot 0 - 1 \cdot \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Portanto:

$$f'(x) = -\cotg(x) \operatorname{cosec}(x)$$

### Integral da cotangente

Seja a função  $f(x) = \cotg(x)$ , considerando que:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Sua integral é:

$$F(x) = \int \cotg(x) dx$$

$$F(x) = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx$$

Sendo  $u = \operatorname{sen}(x)$ :

$$du = \cos(x) dx$$

Logo:

$$F(x) = \int \frac{du}{u}$$

E, por substituição:

$$F(x) = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C$$

**Integral da cossecante**

Seja a função  $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$ ,

Sua integral é:

$$F(x) = \int \operatorname{cosec}(x) dx$$

Sendo  $u = \cotg(x) - \operatorname{cosec}(x)$ :

$$du = [-\operatorname{cosec}^2(x) + \cotg(x) \operatorname{cosec}(x)] dx$$

Podemos então multiplicar e dividir  $u$  na equação da integral anterior:

$$F(x) = \int \frac{-\operatorname{cosec}^2(x) + \cotg(x) \operatorname{cosec}(x)}{\cotg(x) - \operatorname{cosec}(x)} dx$$

Logo:

$$F(x) = \int \frac{du}{u}$$

E, por substituição:

$$F(x) = \ln |\cotg(x) - \operatorname{cosec}(x)| + C$$


---

**Inversas das trigonométricas**

O conjunto de equações até o momento abordadas nos trazem uma nova questão: Quais as funções que nos permitem encontrar o ângulo a partir do resultado de uma função trigonométrica?

A resposta está nas inversas das funções trigonométricas, também chamamos de arc-funções. Uma arc-função é uma função na qual podemos inserir o valor da função e encontrar o arco que originou este resultado, por isto dizemos que a  $\operatorname{arcfunc}(x)$  é aquela que retorna o valor do arco cuja função resulta em  $x$ .

**arcseno e arccosseno**

Conforme o anteriormente exposto, temos que encontrar as funções que nos dão o valor do arco que forma um seno  $x$  e o arco que forma um cosseno  $x$ , para isto cabe uma observação:

O seno e o cosseno podem ser resultado de vários ângulos diferentes, devido a característica cíclica que os mesmos apresentam quando assumimos valores em  $(-\infty, \infty)$ , portanto não existem as funções inversas do seno e cosseno neste intervalo.

O exposto nos obriga a limitar o intervalo do seno e do cosseno dentro de uma faixa que possibilite encontrar apenas um arco para cada valor, é necessário que escolhamos um intervalo onde as funções sejam monótonas. Considerando a função seno dentro da faixa

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

podemos dizer que a condição de inversibilidade é satisfeita, da mesma forma a função cosseno dentro da faixa

$$[0, \pi]$$

também apresenta valores únicos para cada arco tomado.

Assim, dizemos que:

$$y = \arcsen(x) \exists \forall x = \sen(y) \ \& \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Da mesma forma que:

$$y = \arccos(x) \exists \forall x = \cos(y) \ \& \ y \in [0, \pi]$$

---

### Atenção:

---

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas inversas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\sin^{-1}x$ ,  $\cos^{-1}x$  ou  $\sin^{-1}(x)$ ,  $\cos^{-1}(x)$  ou  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  ou ainda  $\arcsin(x)$ ,  $\arccos(x)$  para representação de arcoseno e arccosseno respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

---

### Derivadas do arcoseno e arccosseno

Seja a função  $y = \arcsen(x)$ , sendo a sua inversa:

$$x = \sen(y)$$

podemos operá-la desta forma:

$$dx = \cos(y)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$$

Por outro lado:

$$\sen^2(y) + \cos^2(y) = 1$$

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sen^2(y)}$$

$$\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$$

O que nos dá:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$$

Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainda temos que a função  $z = \arccos(x)$ , sendo a sua inversa:

$$x = \cos(z)$$

podemos operá-la desta forma:

$$dx = -\operatorname{sen}(z)dz$$

$$\frac{dx}{dz} = -\operatorname{sen}(z)$$

Por outro lado:

$$\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sqrt{1 - \cos^2(z)}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sqrt{1 - x^2}$$

O que nos dá:

$$\frac{dx}{dz} = -\sqrt{1-x^2}$$

Logo:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

### Integrais do arcseno e arccosseno

Para integração das funções arcseno e arccosseno, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.

### Arctangente e arccotangente

Definimos a função:

$$y = \operatorname{arctg}(x)$$

arctangente de  $x$ , como a inversa da função:

$$x = \operatorname{tg}(y)$$

---

**Atenção:**

---

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas inversas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\tan^{-1}x$ ,  $\cot^{-1}x$  ou  $\tan^{-1}(x)$ ,  $\cot^{-1}(x)$  ou  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot}x$  ou ainda  $\arctan(x)$ ,  $\operatorname{arccot}(x)$  para representação de arctangente e arccotangente respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

---

tangente de  $y$ , para todo o intervalo  $(-\infty, \infty)$ , porque no mesmo há apenas um valor de tangente para cada arco.

Do mesmo modo podemos definir a função:

$$z = \operatorname{arccot}g(t)$$

arccotangente de  $t$ , como a inversa da função:

$$t = \cotg(z)$$

cotangente de  $z$ , para todo o intervalo  $(-\infty, \infty)$ , porque no mesmo há apenas um valor de cotangente para cada arco.

**Derivadas da arctangente e arccotangente**

Seja a função  $y = \operatorname{arctg}(x)$ , sendo a sua inversa:

$$x = \operatorname{tg}(y)$$

podemos operá-la desta forma:

$$dx = \sec^2(y)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2(y)$$

Por outro lado:

$$\sec^2(y) = 1 + \operatorname{tg}^2(y)$$

$$\sec^2(y) = 1 + x^2$$

O que nos dá:

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$

Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ainda temos que a função  $z = \operatorname{arccot}g(x)$ , sendo a sua inversa:

$$x = \cot g(z)$$

Por outro lado:

$$\operatorname{arccot} g(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arct} g(z)$$

O que nos dá:

$$\frac{dz}{dx} = 0 - \frac{d[\operatorname{arct} g(z)]}{dx}$$

Logo:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

### Integrais da arctangente e arccotangente

Para integração das funções arctangente e arccotangente, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.

### Arcsecante e arccossecante

Definimos a função:

$$y = \operatorname{arcsec}(x)$$

arcsecante de  $x$ , como a inversa da função:

$$x = \sec(y)$$

---

#### Atenção:

---

Este livro utiliza a notação de funções trigonométricas inversas da **língua portuguesa**, também é possível encontrar, em outros livros, as notações  $\sec^{-1}x$ ,  $\csc^{-1}x$  ou  $\sec^{-1}(x)$ ,  $\csc^{-1}(x)$  ou  $\operatorname{arcsec}x$ ,  $\operatorname{arccsc}x$  ou  $\operatorname{arcsec}(x)$ ,  $\operatorname{arccsc}(x)$  para representação de arcsecante e arccossecante respectivamente, utilizadas na língua inglesa.

---

secante de  $y$ , para os intervalos de  $x$

$$(-\infty, -1] \quad ; \quad [1, \infty)$$

onde, nos mesmos, há apenas um valor de secante para cada arco.

A função  $\operatorname{arcsec}(x)$  é relacionada a função  $\operatorname{arccos}(x)$  como segue:

$$\operatorname{arcsec}(x) = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Do mesmo modo podemos definir a função:

$$z = \operatorname{arccosec}(t)$$

arccosecante de  $t$ , como a inversa da função:

$$t = \operatorname{cosec}(z)$$

cosecante de  $y$ , para os intervalos de  $x$

$$(-\infty, -1] \quad ; \quad [1, \infty)$$

onde, nos mesmos, há apenas um valor de secante para cada arco.

A função  $\operatorname{arccosec}(x)$  é relacionada a função  $\operatorname{arcsen}(x)$  como segue:

$$\operatorname{arcsec}(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

### Derivadas da arcsecante e arccossecante

Seja a função:

$$y = \operatorname{arcsec}(x)$$

que tem correspondência em:

$$\operatorname{arcsec}(x) = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sendo:

$$\frac{d[\operatorname{arccos}(t)]}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

para  $|x| > 1$

### Integrais da arcsecante e arccossecante

Para integração das funções arcsecante e arccossecante, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.



## Trigonométricas inversas como integrais algébricas

Como resultado das derivadas de funções trigonométricas inversas algumas integrais de funções algébricas podem ser convertidas em “arc-funções”, são elas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(|x|) + C$$

Em todas, como é de costume, encontramos a constante de antidiferenciação  $C$ .

---

## Hiperbólicas

A hipérbole é uma das funções *cônicas* exploradas em geometria analítica e tem como característica uma íntima relação com as exponenciais  $e^x$  e  $e^{-x}$ , as funções desta seção são obtidas segundo o mesmo princípio das funções trigonométricas utilizando-se da hipérbole como função geratriz, ou seja, para cada ponto cartesiano de um gráfico da hipérbole podemos adotar a análise feita no ciclo trigonométrico, desta análise resultam as funções discutidas nesta seção.

As funções hiperbólicas são essencialmente exponenciais, portanto o seu estudo é simplificado nesta seção, visto que suas conseqüências são imediatamente dedutíveis pelos princípios já vistos na seção que trata de funções exponenciais.

### Seno e cosseno hiperbólicos

A função seno hiperbólico é obtida a partir da hipérbole da mesma forma que o seno no ciclo trigonométrico, sua definição pode ser obtida por análise geométrica do gráfico da hipérbole  $y = \frac{1}{2x}$ , onde encontramos:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

A função cosseno hiperbólico, que referenciamos ao cosseno no ciclo trigonométrico pode ser encontrado pela seguinte expressão:

$$\operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sendo obtida de forma similar a anterior.

O fato destas funções serem resultantes da soma e subtração de uma exponencial crescente  $e^x$  e uma exponencial decrescente  $e^{-x}$  lhes conferem propriedades únicas, do mesmo modo temos a possibilidade de fazer analogias para uma fácil assimilação dos seus conceitos. Estas funções também são largamente úteis devido ao fato de serem comuns em problemas reais na física, na química e nas engenharias.

**Relacionando seno e cosseno hiperbólico**

Considere a operação

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

Da definição temos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ & \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} \\ & \frac{e^{2x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-2x} + 4}{4} \\ & \frac{4}{4} \end{aligned}$$

logo:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

**Derivada do seno hiperbólico**

Seja a função seno hiperbólico  $y = \sinh(x)$ , podemos dizer que:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x}))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \cosh(x)$$

**Derivada do cosseno hiperbólico**

Seja a função cosseno hiperbólico  $y = \cosh(x)$ , podemos dizer que:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x}))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(x)$$

### Integral do seno hiperbólico

A integral do seno hiperbólico também é facilmente obtida pela definição:

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx \\ & \int \frac{1}{2} e^x dx - \int \frac{1}{2} e^{-x} dx \\ & \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \\ & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

### Integral do cosseno hiperbólico

A integral do cosseno hiperbólico também é facilmente obtida pela definição:

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx \\ & \int \frac{1}{2} e^x dx + \int \frac{1}{2} e^{-x} dx \\ & \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \\ & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

### Tangente e secante hiperbólicas

Da mesma forma que no caso trigonométrico a tangente e as outras funções hiperbólicas são definidas através do seno e do cosseno, ou seja, a tangente é definida como:

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ou

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)}$$

A secante hiperbólica é definida como:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ou

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)}$$

### Relacionando tangente e secante hiperbólicas

Vamos desenvolver a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tgh}^2(x) &= 1 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-2x} + 4}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cosh}^2(x)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

**Derivada da tangente hiperbólica**

Seja a função  $y = \operatorname{tgh}(x)$ , temos:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cosh^2(x)) - (\sinh^2(x))}{(\cosh^2(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(x)$$

**Derivada da secante hiperbólica**

Seja a função  $y = \operatorname{sech}(x)$ , temos:

$$y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x)$$

**Integral da tangente hiperbólica**

Seja a função  $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$ , temos:

$$F(x) = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx$$

Se fizermos:

$$u = \cosh(x)$$

$$du = \sinh(x) dx$$

verificamos:

$$F(x) = \int \frac{du}{u}$$

$$F(x) = \ln |u|$$

e finalmente:

$$F(x) = \ln |\cosh(x)| + C$$

### Integral da secante hiperbólica

Para integração da função secante hiperbólica, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.

### Cotangente e cossecante hiperbólicas

A cotangente hiperbólica é definida como:

$$\operatorname{cotgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

ou

$$\operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

A cosecante hiperbólica é definida como:

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

ou

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

### Relacionando cotangente e cossecante hiperbólicas

Vamos desenvolver a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} & 1 - \operatorname{cotgh}^2(x) \\ & 1 - \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^2 \\ & 1 - \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} \\ & \frac{e^{2x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-2x} - 4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} \\ & - \frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} \\ & - \frac{1}{\sinh^2(x)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$1 - \operatorname{cotgh}^2(x) = \operatorname{cosech}^2(x)$$

**Derivada da cotangente hiperbólica**

Seja a função  $y = \operatorname{cotgh}(x)$ , temos:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{senh}^2(x)) - (\operatorname{cosh}^2(x))}{(\operatorname{senh}^2(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2(x)$$

**Derivada da cossecante hiperbólica**

Seja a função  $y = \operatorname{cosech}(x)$ , temos:

$$y = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

e finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}(x) \operatorname{cotgh}(x)$$

**Integral da cotangente hiperbólica**

Seja a função  $f(x) = \operatorname{cotgh}(x)$ , temos:

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{cosh}(x)}{\operatorname{senh}(x)} dx$$

Se fizermos:

$$u = \operatorname{senh}(x)$$

$$du = \operatorname{cosh}(x) dx$$

verificamos:

$$F(x) = \int \frac{du}{u}$$

$$F(x) = \ln |u|$$

e finalmente:

$$F(x) = \ln | \sinh(x) | + C$$

### Integral da cossecante hiperbólica

Para integração da função cossecante hiperbólica, veja o capítulo de **técnicas de integração**, para uma completa abordagem do tema.

## Inversas das hiperbólicas

As funções hiperbólicas inversas são particularmente interessantes, elas estão ligadas ao logaritmo natural e por este motivo, sua análise é essencialmente exponencial, como a análise das funções hiperbólicas, deste fato nascem novas possibilidades para lidar com problemas relacionados a análises de estruturas não lineares.

### Análise da inversão das variáveis

As funções hiperbólicas são caracteristicamente analisadas de forma semelhante às trigonométricas, o que nos sugere a análise da inversão das variáveis das equações hiperbólicas da forma:

$$y = \text{func}(x)$$

Para a forma:

$$x = \text{argfunc}(y)$$

Isto é particularmente fácil de implementar para funções do tipo  $\sinh(x)$ , que são funções monótonas e contínuas, para as demais que restringem sua continuidade em um determinado intervalo, devemos adotar faixas para o domínio de cada uma em particular.

É importante notar que, embora as funções hiperbólicas sejam semelhantes às trigonométricas, estas funções se baseiam em ângulos que devem ser analisados de forma diferente dos trigonométricos, lembre-se que o raio de uma função circular é constante, o que não acontece com uma função baseada em uma cônica, neste caso a hipérbole, por isso escolhemos a nomenclatura de **argfunc(x)**, pois não podemos classificar os ângulos hiperbólicos como arcos.

### argsinh e argcosh

Agora consideremos a função  $t = \sinh(x)$ , então:

$$t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Podemos fazer  $e^x = u$ , logo:

$$t = \frac{u - u^{-1}}{2}$$



O que resulta na equação:

$$u^2 - 2tu - 1 = 0$$

cujas raízes são:

$$u = t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

Podemos apenas admitir

$$u > 0$$

consequentemente:

$$e^x = t + \sqrt{t^2 + 1}$$

Substituindo as variáveis  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ , temos a inversa de  $\sinh(x)$  que é:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$$

No caso de  $t = \cosh(x)$ , a dedução é similar:

$$t = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Podemos fazer  $e^x = u$ , logo:

$$t = \frac{u + u^{-1}}{2}$$

O que resulta na equação:

$$u^2 - 2tu + 1 = 0$$

cujas raízes são:

$$u = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

Podemos apenas admitir

$$u > 0$$

consequentemente:

$$e^x = t + \sqrt{t^2 - 1}$$

Substituindo as variáveis  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ , temos a inversa de  $\cosh(x)$  que é:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$|x| > 1$$

**Derivadas de  $\operatorname{argsenh}(x)$  e  $\operatorname{argcosh}(x)$** 

Considerando as fórmulas deduzidas acima, temos:

$$y = \operatorname{argsenh}(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$$

de onde deduzimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

resultando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$E \text{ para } y = \operatorname{argcosh}(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

de onde deduzimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

e finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$x > 1$$

**Integrais de  $\operatorname{argsenh}(x)$  e  $\operatorname{argcosh}(x)$** 

As integrais destas funções precisam de um tratamento diferenciado, utilizando-se os métodos do próximo capítulo: **Técnicas de integração**, proponho que o leitor as faça como exercício do mesmo.

 **$\operatorname{argtgh}$  e  $\operatorname{argsech}$** 

Considerando  $t = \operatorname{tgh}(x)$ , temos:

$$t = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se  $u = e^x$ :

$$t = \frac{u - u^{-1}}{u + u^{-1}}$$

o que resulta na equação:

$$(t - 1)u^2 + t + 1 = 0$$

Cujas raízes são:

$$u = \pm \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

Onde apenas podemos admitir  $u > 0$  e  $t < 1$ :

$$e^x = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

Substituindo  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ :

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Que é a inversa da  $\operatorname{tgh}(x)$ , portanto:

$$\operatorname{argtgh}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$|x| < 1$$

Ou,

$$\operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$|x| < 1$$

Considerando  $t = \operatorname{sech}(x)$ , temos:

$$t = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

se  $u = e^x$ :

$$t = \frac{2}{u + u^{-1}}$$

o que resulta na equação:

$$tu^2 - 2u + t = 0$$

Cujas raízes são:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-t^2}}{t}$$

Onde apenas podemos admitir  $u > 0$  e  $0 < t < 1$ :

$$e^x = \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t}$$

Substituindo  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ :

$$y = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right|$$

Que é a inversa da  $\operatorname{sech}(x)$ , portanto:

$$\operatorname{argsech}(x) = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right|$$

$$0 < x < 1$$

### Derivadas de $\operatorname{argtgh}$ e $\operatorname{argsech}$

Seja  $y = \operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $|x| < 1$

Deduzimos que sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\operatorname{argtgh}(x)]}{dx}$$

Que, depois de submetida à regra da cadeia e da razão, se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \left[ \frac{1-x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \left[ \frac{2}{(1-x)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{(1+x)(1-x)} \right]$$

e, finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$|x| < 1$$

Note que, devido à limitação do domínio imposto pela variável na função primitiva, a derivada herda a mesma limitação, uma vez que a função não existe fora deste domínio.

Seja  $y = \operatorname{argsech}(x) = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right|$ ,

Deduzimos que sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\operatorname{argsech}(x)]}{dx}$$

Que, depois de submetida à regra da cadeia e da razão, se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \left[ \frac{x \frac{-(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} - (1 - \sqrt{1 - x^2})}{x^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \left( \frac{x^2 - \sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \right)$$

e, finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

**Integrais de argtgh e argsech**

As integrais destas funções precisam de um tratamento diferenciado, utilizando-se os métodos do próximo capítulo: **Técnicas de integração**, proponho que o leitor as faça como exercício do mesmo.

**argcotgh e argcosech**

Considerando  $t = \text{cotgh}(x)$ , temos:

$$t = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

se  $u = e^x$ :

$$t = \frac{u + u^{-1}}{u - u^{-1}}$$

o que resulta na equação:

$$(1 - t)u^2 - t - 1 = 0$$

Cujas raízes são:

$$u = \pm \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$$

Onde apenas podemos admitir  $u > 0$  e  $t < 1$ :

$$e^x = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$$

Substituindo  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ :

$$y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Que é a inversa da  $\text{cotgh}(x)$ , portanto:

$$\text{argcotgh}(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$|x| > 1$$

Ou,

$$\text{argcotgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$|x| > 1$$

Considerando  $t = \text{cosech}(x)$ , temos:

$$t = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

se  $u = e^x$ :

$$t = \frac{2}{u - u^{-1}}$$

o que resulta na equação:

$$tu^2 - 2u - t = 0$$

Cujas raízes são:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+t^2}}{t}$$

Onde apenas podemos admitir  $u > 0$ :

$$e^x = \frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{t}$$

Substituindo  $x$  por  $y$  e  $t$  por  $x$ :

$$y = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \right|$$

Que é a inversa da  $\operatorname{cosech}(x)$ , portanto:

$$\operatorname{argcosech}(x) = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \right|$$

### Derivadas de $\operatorname{argcotgh}$ e $\operatorname{argcosech}$

Seja  $y = \operatorname{argcotgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ ,  $|x| > 1$

Deduzimos que sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\operatorname{argcotgh}(x)]}{dx}$$

Que, depois de submetida à regra da cadeia e da razão, se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left[ \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left[ \frac{2}{(x+1)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right]$$

e, finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$|x| > 1$$

Note que, devido à limitação do domínio imposto pela variável na função primitiva, a derivada herda a mesma limitação, uma vez que a função não existe fora deste domínio.

---

Seja  $y = \mathbf{argcosech}(x) = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \right|$ ,  
 Deduzimos que sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\mathbf{argcosh}(x)]}{dx}$$

Que, depois de submetida à regra da cadeia e da razão, se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \left[ \frac{x \frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}} - (1 - \sqrt{1+x^2})}{x^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \left( \frac{-x^2 - \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \left( \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \right)$$

e, finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$x \neq 0$$

### Integrais de $\mathbf{argcotgh}$ e $\mathbf{argcosech}$

As integrais destas funções precisam de um tratamento diferenciado, utilizando-se os métodos do próximo capítulo: **Técnicas de integração**, proponho que o leitor as faça como exercício do mesmo.





## Capítulo 8

# Técnicas de integração

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo II*

### Considerações iniciais

A integração é um processo que demanda certa habilidade e técnica, ele provê um meio indispensável para análises de cálculos diversos, além disso o meio de integrar certas funções deve ser exercitado até que sejamos capazes de absorver a sua essência. O problema da integração deve ser visto como uma análise que pode conduzir a resultados algébricos diversos, quando tomadas técnicas diversas, que concordam, porém, em resultado numérico.

Devido à necessidade de exercício dessas técnicas que apresentaremos, teremos mais exemplos neste capítulo, uma ótima maneira de introduzir o conteúdo enquanto a teoria é exposta. A natureza diversa das formas de integrais nos obriga a fazer este estudo a parte, pois certas funções são peculiarmente difíceis de serem analisadas antes da utilização de algum artifício que permita sua simplificação, este é o objetivo deste capítulo: trazer ao leitor os processos de integração e as diversas possibilidades de simplificação de funções para a aplicação destes processos.

### Por partes

A técnica de integração por partes consiste da utilização do conceito de diferencial inversa aplicado à fórmula da regra da diferencial do produto, ou seja:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Que após a antidiferencial se torna:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

E, portanto:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

A utilização desta fórmula para melhorar o processo de integração implica na necessidade de uma breve explanação, o processo consiste em observar a função a ser integrada como sendo uma integral  $\int u dv$ , ou seja, devemos separar a função em duas partes: uma, chamamos de  $u$ , que consideraremos função primitiva e outra  $dv$  que será uma diferencial, desta forma, faremos a integração da parte  $dv$  para encontrar  $v$  e depois subtrairemos a integral da mesma com relação a diferencial de  $u$ :  $du$ . Parece um tanto incomum a princípio, porém após o hábito no uso da técnica, esta se torna muito útil.

Outro fato deve ser explorado: como o processo demanda a integração da diferencial  $dv$  nos vem a questão sobre a necessidade de utilização da constante de antidiferenciação  $C$ , portanto façamos a verificação da fórmula utilizando-a:

$$\text{Se } v = \int dv + C,$$

$$\int u dv = u \left( \int dv + C \right) - \int \left( \int dv + C \right) du$$

$$\int u dv = u \left( \int dv \right) + uC - \left( \int \left( \int dv \right) du + uC \right)$$

$$\int u dv = u \left( \int dv \right) + uC - \int \left( \int dv \right) du - uC$$

$$\int u dv = u \left( \int dv \right) - \int \left( \int dv \right) du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ou seja, a constante é dispensável para o cálculo da integral que resulta em  $v$ .

### Exemplo 1 — Caso do logaritmo

Utilização da integração por partes na resolução da integral do logaritmo natural:

$$\int \ln(x) dx$$

Separamos a diferencial  $dx$  e a primitiva  $\ln(x)$ , procedendo as operações inversas:

$$v = \int dx = x$$

depois:

$$u = \ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Aplicando à fórmula de integração por partes:

$$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - \int dx$$

$$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\int \ln(x)dx = x[\ln(x) - 1] + C$$

Também há os que preferem simplificar mais, desta forma:

$$\int \ln(x)dx = x[\ln(x) - \ln(e)]$$

$$\int \ln(x)dx = x \left[ \ln \left( \frac{x}{e} \right) \right]$$

$$\int \ln(x)dx = \ln \left( \frac{x}{e} \right)^x + C$$

Sendo  $C$  a constante de antidiferenciação.

**Exemplo 2 — Caso do arcoseno**

Utilização da integração por partes para encontrar a integral do arcoseno:

$$\int \arcsen(x)dx$$

Separamos as partes e operamos para encontrar as respectivas inversas:

$$v = \int dx = x$$

Assim:

$$u = \arcsen(x)$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplicando à fórmula da integração por partes:

$$\int \arcsen(x)dx = x \cdot \arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

agora consideremos o seguinte:

$$z = 1 - x^2$$

$$dz = -2x dx$$

$$dx = -\frac{dz}{2x}$$

logo:

$$\int \arcsen(x)dx = x \cdot \arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{dz}{2x}\right)$$

$$\int \arcsen(x)dx = x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

$$\int \arcsen(x)dx = x \cdot \arcsen(x) + \sqrt{z}$$

Portanto:

$$\int \arcsen(x)dx = x \cdot \arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Sendo  $C$  a nossa tradicional constante de antidiferenciação.

### Exemplo 3 — Caso do arccosseno

Utilização da integração por partes para encontrar a integral do arccosseno:

$$\int \arccos(x)dx$$

Separamos as partes e operamos para encontrar as respectivas inversas:

$$v = \int dx = x$$

depois:

$$u = \arccos(x)$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplicando à fórmula da integração por partes:

$$\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

agora consideremos o seguinte:

$$z = 1 - x^2$$

$$dz = -2x dx$$

$$dx = -\frac{dz}{2x}$$

logo:

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left( -\frac{dz}{2x} \right)$$

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{z}$$

Portanto:

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

Sendo  $C$  a nossa tradicional constante de antidiferenciação.

**Exemplo 4 — Caso do arctangente**

Utilizando a integração por partes para encontrar a integral do arctangente:

$$\int \arctg(x) dx$$

Separando as partes e operando as inversas:

$$\int dx = x$$

e

$$\frac{d[\arctg(x)]}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Aplicamos a fórmula da integração por partes:

$$\int \arctg(x) dx = x \cdot \arctg(x) - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

Por outro lado:

$$u = 1 + x^2$$

$$du = 2x dx$$

onde podemos extrair:

$$x dx = \frac{du}{2}$$

voltando ao desenvolvimento da integral:

$$\int \arctg(x) dx = x \cdot \arctg(x) - \int \frac{du}{2u}$$

$$\int \arctg(x) dx = x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln |u|$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) dx = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

Portanto:

$$\int \operatorname{arctg}(x) dx = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \ln \sqrt{1 + x^2} + C$$

Novamente, temos  $C$  como contante de antidiferenciação.

### Exemplo 5 — Algébricas com exponenciais

Este é um exemplo que nos revela uma função claramente divisível em duas partes:

$$\int x^2 e^x dx$$

Considerando as partes:

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

e:

$$v = e^x$$

Substituindo na fórmula de integração por partes:

$$x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

O segundo lado desta expressão pode ser novamente simplificado, aplicando a integração por partes mais uma vez:

$$x^2 e^x - \left( 2e^x x - 2 \int e^x dx \right)$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

Portanto:

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

### Exemplo 6 — Secante com expoente maior que 2

Utilizando a integração por partes para resolução da integral de secantes com expoente maior que 2:

$$\int \sec^3(x) dx$$

Podemos fazer:

$$\int \sec(x) \cdot \sec^2(x) dx$$

E aplicar a integração por partes:

$$\int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) - \int \operatorname{tg}(x) [\sec(x) \operatorname{tg}(x)] dx$$

$$\int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) - \int \sec(x) \operatorname{tg}^2(x) dx$$

$$\int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) - \int \sec(x) [\sec^2(x) - 1] dx$$

$$\int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx$$

$$2 \int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \int \sec(x) dx$$

$$2 \int \sec^3(x) dx = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|$$

E finalmente:

$$\int \sec^3(x) dx = \frac{1}{2} \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{2} \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$$

Com  $C$  constante.

### Por substituição trigonométrica

A existência de relações algébricas que nos levam a arcos nos traz a possibilidade de converter uma expressão algébrica, conseqüentemente uma função algébrica, em uma função trigonométrica. A possibilidade de lidar com certas funções de forma trigonométrica nos traz a possibilidade de utilizar os artifícios das identidades para a simplificação dessas funções.

### Transformando expressões algébricas em trigonométricas

Três funções algébricas têm semelhanças com funções trigonométricas que são notoriamente úteis para a simplificação de algumas funções, elas são:

1.  $y = \sqrt{a^2 + x^2}$
2.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
3.  $y = \sqrt{x^2 - a^2}$

Sendo “ $a$ ” constante.

Note que as expressões são meramente relações quadráticas que descendem da relação quadrática entre todos os lados de um mesmo triângulo  $a^2 = b^2 + c^2$ , se escolhermos um par (variável, constante) e substituirmos na equação teremos as expressões acima como resultantes, teremos uma variável dependente para cada par

(variável, constante), por exemplo: se fizermos  $b = x$ ,  $c = constante(a)$  e  $a = y$  teremos a expressão (2) como resultante ( $y$ ).

Imagine que temos uma nova variável  $\theta$  e que:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Sendo

$$x = a \operatorname{sen}(\theta)$$

Podemos dizer que:

$$f(\theta) = \sqrt{a^2 - [a \operatorname{sen}(\theta)]^2}$$

$$f(\theta) = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}$$

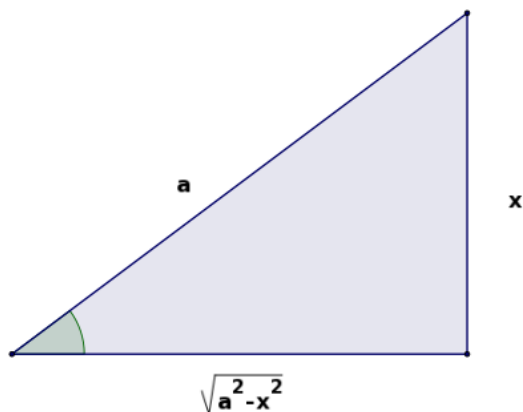
$$f(\theta) = a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}$$

$$f(\theta) = a \sqrt{\operatorname{cos}^2(\theta)}$$

Portanto:

$$f(\theta) = a \operatorname{cos}(\theta) \text{ quando } f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ e } x = a \operatorname{sen}(\theta)$$

O exposto acima encontra respaldo no fato de que a expressão é simplesmente a tradução da relação métrica de um triângulo retângulo para definição do cosseno a partir do seno, como segue:



Se fizermos a comparação entre as funções e o gráfico acima, substituindo as variáveis e constantes de acordo com a função dada, teremos o seguinte:

1. Na função  $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $x$  é uma tangente;
2. Na função  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x$  é um seno;
3. Na função  $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $x$  é uma secante.



O que nos dá as substituições:

| Expressão          | Substituição              |
|--------------------|---------------------------|
| $\sqrt{x^2 + a^2}$ | $x = a \cdot tg(\theta)$  |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \cdot sen(\theta)$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a \cdot sec(\theta)$ |

### A substituição trigonométrica na integração

Agora, considere o fato de que a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  tem como integral a função  $F(x)$ , então podemos fazer:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Uma vez, que pela análise anterior já sabemos que quando fazemos  $x = a sen(\theta)$  temos:

$$f(\theta) = \frac{1}{a \cdot cos(\theta)}$$

então:

$$F(\theta) = \int \frac{1}{a \cdot cos(\theta)} dx$$

Temos que encontrar  $dx$ :

$$x = a \cdot sen(\theta)$$

$$dx = a \cdot cos(\theta) d\theta$$

O que nos revela algo interessante:

$$F(\theta) = \int \frac{1}{a \cdot cos(\theta)} \cdot a \cdot cos(\theta) d\theta$$

$$F(\theta) = \int d\theta$$

Ou seja:

$$F(\theta) = \theta + C$$

Logo:

$$F(x) = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

**Exemplo 7 — Substituição por seno**

Seja a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

calculemos a sua integral por substituição trigonométrica:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Fazendo a transformação de variáveis:

$$x = 2 \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$dx = 2 \cdot \text{cos}(\theta)d\theta$$

A integral será:

$$F(\theta) = \int \frac{2 \cdot \text{cos}(\theta)d\theta}{\sqrt{4 - [2 \cdot \text{sen}(\theta)]^2}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{2 \cdot \text{cos}(\theta)d\theta}{2\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{\text{cos}(\theta)d\theta}{\text{cos}(\theta)}$$

$$F(\theta) = \int d\theta$$

$$F(\theta) = \theta$$

Como:

$$x = 2\text{sen}(\theta)$$

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Portanto:

$$F(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Sendo  $C$  a constante de antidiferenciação.

**Exemplo 8 — Substituição por secante**

Seja a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

calculemos a sua integral por substituição trigonométrica:

Se

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

Introduzimos a variável angular  $\theta$ , de forma que:

$$x = 3\sec(\theta)$$

e sua diferencial:

$$dx = 3\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta$$

Substituindo na equação anterior:

$$F(\theta) = \int \frac{3\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{\sqrt{9\sec^2(\theta) - 9}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{3\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{3\sqrt{\sec^2(\theta) - 1}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{\operatorname{tg}(\theta)}$$

$$F(\theta) = \int \sec(\theta)d\theta$$

$$F(\theta) = \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)|$$

Retornando a função ao domínio da variável  $x$ :

$$F(x) = \ln \left| \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} \right|$$

$$F(x) = \ln \left| \frac{1}{3} \cdot (x + \sqrt{x^2 - 9}) \right|$$

Portanto:

$$F(x) = \ln \left( \frac{1}{3} \right) + \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$$

Sendo  $C$  a constante de antidiferenciação.

**Exemplo 9 — Substituição por tangente**

Seja a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

calculemos a sua integral por substituição trigonométrica:

Se

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

Introduzimos a variável angular  $\theta$ , de forma que:

$$x = 4tg(\theta)$$

e sua diferencial:

$$dx = 4sec^2(\theta)d\theta$$

Substituindo na equação anterior:

$$F(\theta) = \int \frac{4sec^2(\theta)d\theta}{\sqrt{16tg^2(\theta) + 16}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{4sec^2(\theta)d\theta}{4\sqrt{tg^2(\theta) + 1}}$$

$$F(\theta) = \int \frac{sec^2(\theta)d\theta}{sec(\theta)}$$

$$F(\theta) = \int sec(\theta)d\theta$$

$$F(\theta) = \ln |sec(\theta) + tg(\theta)|$$

Retornando a função ao domínio da variável  $x$ :

$$F(x) = \ln \left| \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} \right|$$

$$F(x) = \ln \left| \frac{1}{4} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 16}) \right|$$

Portanto:

$$F(x) = \ln \left( \frac{1}{4} \right) + \ln |x + \sqrt{x^2 + 16}| + C$$

Sendo  $C$  a constante de antidiferenciação.

## Funções racionais com denominadores lineares

Denominadores de segundo grau ou mais são um pouco mais problemáticos quando queremos definir uma integral, por exemplo:

Seja a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

É possível demonstrar que a função pode ser fatorada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}$$

Onde  $A$  e  $B$  são os fatores a serem definidos; o processo para defini-los será explicado mais adiante e  $r_1, r_2$  são as raízes da equação formada a partir do denominador quando o igualamos a zero.

Porém a demonstração disto está fora do escopo deste livro, deve ser tratado na álgebra avançada.

Em todo caso, o teorema é bastante útil para a simplificação de tais funções.

## Conceito da fatoração de funções racionais polinomiais

As funções racionais do formato

$$f(x) = \frac{P_n}{P_d}$$

têm uma característica bem interessante, os seus denominadores  $P_d$ , quando fatorados em partes lineares e quadráticas permitem que possamos escrever a referida função como uma soma:

$$f(x) = \frac{x - a_1}{k_1 x^n + k_2 x^{n-1} + k_3 x^{n-2} + \dots + k_n}$$

$$f(x) = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2} + \frac{C}{x - r_3} + \dots + \frac{V_n}{x - r_n}$$

Seja a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ , podemos simplificá-la desta forma:

Considerando as raízes da equação  $x^2 + x - 2 = 0$ , podemos dizer que:

$$f(x) = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}$$

Os fatores  $A, B$  são calculados fazendo:

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A(x - 1) + B(x + 2)}{x^2 + x - 2}$$

$$1 = A(x - 1) + B(x + 2)$$

logo, as raízes permitem fazer

$$A(x - 1) + B(x + 2) = 1$$

então temos que admitir que, ao analisar cada raiz:

Quando  $x = -2$ :

$$A[(-2) - 1] = 1$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

Quando  $x = 1$ :

$$B[(1) + 2] = 1$$

$$B = \frac{1}{3}$$

então, podemos fazer:

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

### A simplificação de denominadores usada na integração

O artifício de encontrar componentes lineares para substituir os denominadores, como exposto no tópico anterior, permite uma boa simplificação de integrais com denominadores polinomiais de graus superiores, porém ainda depende da determinação das raízes do polinômio dos denominadores, o que limita a nossa capacidade de resolução aos polinômios biquadráticos. Sem levar em conta este fato, podemos simplificar a integral para uma boa parcela de problemas que apresentam estes formatos de expressões.

Vejamos o caso anterior:

A função:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

pode ser substituída por:

$$F(x) = \int \frac{dx}{3(x-1)} - \int \frac{dx}{3(x+2)}$$

O que nos permite fazer:

$$F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|^{\frac{1}{3}} + C$$

Com  $C$  Constante.

### Exemplo 10 — Decomposição do denominador em fatores lineares

Utilizando a decomposição de funções racionais em funções de denominadores lineares para a simplificação de integrais.

Seja a função:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 5}{x^2 + x - 6} dx$$

Encontremos a integral:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Devemos simplificar a função, para isto podemos efetuar a divisão polinomial, que resulta:

$$x - 5 + \frac{13x - 25}{x^2 + x - 6}$$

Ainda resta uma parte fracionária que podemos decompor usando o método que já vimos neste capítulo:

$$\frac{13x - 25}{x^2 + x - 6}$$

As raízes nos revelam que:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

logo podemos fazer:

$$\frac{13x - 25}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2}$$

ou

$$13x - 25 = A(x - 2) + B(x + 3)$$

Analisando os valores da equação quando  $x$  se iguala as raízes:

Para  $x = 2$  :

$$13 \cdot (2) - 25 = B(2 + 3)$$

$$B = \frac{1}{5}$$

Para  $x = -3$  :

$$13 \cdot (-3) - 25 = A(-3 - 2)$$

$$A = \frac{64}{5}$$

Podemos concluir que:

$$\frac{13x - 25}{x^2 + x - 6} = \frac{64}{5(x + 3)} + \frac{1}{5(x - 2)}$$

Desta forma temos a função simplificada:

$$f(x) = x - 5 + \frac{64}{5(x + 3)} + \frac{1}{5(x - 2)}$$

Podemos integrá-la:

$$\int f(x)dx = \int xdx - \int 5dx + \int \frac{64}{5(x + 3)}dx + \int \frac{1}{5(x - 2)}dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{64}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{5} \ln|x-2|$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \ln\left|(x+3)^{\frac{64}{5}}\right| + \ln\left|(x-2)^{\frac{1}{5}}\right|$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \ln\left|(x+3)^{\frac{64}{5}}(x-2)^{\frac{1}{5}}\right|$$

Portanto:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \ln\left|(x+3)^{\frac{64}{5}}(x-2)^{\frac{1}{5}}\right| + C$$

Sendo  $C$  a constante de antidiferenciação.

## Funções racionais com denominadores quadráticos

A segunda categoria de funções racionais às quais temos que nos aplicar são as que dão origem a denominadores quadráticos.

### Decompondo funções racionais em denominadores quadráticos

Quando não temos como encontrar as raízes de certos denominadores quadráticos podemos mantê-los e utilizar a seguinte substituição:

$$\frac{k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_0}{ax^2 + bx + c} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

O teorema que estabelece esta relação faz parte da álgebra avançada, portanto não entraremos em detalhe neste livro, porém faremos uso de suas consequências como forma de simplificação, como fizemos com a decomposição de denominadores em fatores lineares vista na seção anterior.

A melhor maneira de definir a parte  $Ax + B$  é substituir a variável  $x$  nesta fazendo-a igual a derivada do denominador, ou seja:

$$Ax + B = A(2ax + b) + B$$

$$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_0 = A(2ax + b) + B$$

No lado esquerdo da equação acima, se houver variáveis de expoente maior que o maior expoente do lado direito devemos proceder uma simplificação efetuando a divisão dos polinômios, caso contrário teríamos:

$$k_1 x + k_0 = A(2ax + b) + B$$

$$k_1 x + k_0 = 2aAx + Ab + B$$

Separamos cada fator de acordo com o grau da variável, obtendo:

$$\text{Para } x \rightarrow 2aA = k_1$$

$$\text{Para } x^0 \rightarrow Ab + B = k_0$$

logo:



$$A = \frac{k_1}{2a}$$

e

$$B = k_0 - \frac{k_1 b}{2a}$$

Porém em funções racionais mais comuns temos que lidar com funções com partes lineares e quadráticas, onde o processo de encontrar os valores para  $A, B$  depende das outras partes envolvidas, para verificar o processo, vejamos o próximo exemplo...

### Exemplo 11 — Decomposição de funções racionais em denominadores quadráticos e lineares

Utilizando a decomposição de funções racionais com denominadores quadráticos para simplificar o cálculo da integral.

Seja a função:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Calculemos a sua integral indefinida:

$$F(x) = \int \frac{x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

Antes de tudo façamos a simplificação dos polinômios, primeiro faremos a divisão simples do numerador pelo denominador:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Da divisão separamos a parte do resto:

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Procedendo a decomposição dos fatores:

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

Que nos permite fazer:

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B(2x) + C}{x^2 + 1}$$

$$x^2 + x = A(x^2 + 1) + [B(2x) + C](x - 1)$$

$$x^2 + x = (A + 2B)x^2 + (C - 2B)x + A - C$$

Quando separamos os fatores para cada variável de expoente correspondente em ambos os lados da equação, temos:

$$\begin{cases} A + 2B = 1 \\ C - 2B = 1 \\ A - C = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear temos:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Podemos escrever a função como:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

Agora podemos integrá-la:

$$F(x) = \int x dx + \int dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

Numa conclusão imediata podemos dizer que:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \arctg(x)$$

Porém em estudos onde se exige um tratamento mais algébrico com exponenciais e logaritmos, podemos adotar um formato como este:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Portanto:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left[|x-1| \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right] + C$$

Com  $C$  constante.

## Por substituição hiperbólica

Se podemos fazer substituições trigonométricas em funções algébricas e existem funções hiperbólicas, por que não utilizar o mesmo método de substituição com funções hiperbólicas? Temos mais esta possibilidade para simplificar a integração de funções algébricas; Detalharemos nesta seção as formas de substituição com funções hiperbólicas, que podem ser uma valorosa ferramenta para a integração de funções mais complexas.

### Integrais resultantes das hiperbólicas inversas

Como consequência das derivadas de funções hiperbólicas inversas, temos as seguintes integrais:

| Função:                          | Derivada:  | Integral relacionada:  |
|----------------------------------|--|--|
| $y = \operatorname{arcsenh} x$   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$               | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln  x + \sqrt{x^2+1} $        |
| $y = \operatorname{arccosh} x$   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},  x  > 1$      | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln  x + \sqrt{x^2-1} $        |
| $y = \operatorname{arctgh} x$    | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2},  x  < 1$             | $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$      |
| $y = \operatorname{arcsech} x$   | $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$  | $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ |
| $y = \operatorname{arccotgh} x$  | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2},  x  > 1$             | $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$      |
| $y = \operatorname{arccosech} x$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{ x \sqrt{1+x^2}}, x \neq 0$ | $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$ |

### Transformando funções algébricas em hiperbólicas

A técnica aqui exposta é semelhante à abordada na seção **Transformando expressões algébricas em trigonométricas**, a diferença básica está nas expressões a serem substituídas, uma vez que as identidades trigonométricas e hiperbólicas são sutilmente distintas, as expressões seguem a mesma tendência. Então vamos ver quais são as correspondentes algébricas para as funções hiperbólicas:

1. Na função  $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $x$  é um seno hiperbólico;
2. Na função  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x$  é uma tangente hiperbólica;
3. Na função  $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $x$  é uma cotangente hiperbólica.

O que nos dá as substituições:

| Expressão          | Substituição                               |
|--------------------|--|
| $\sqrt{x^2 + a^2}$ | $x = a \cdot \operatorname{senh}(\theta)$  |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \cdot \operatorname{tgh}(\theta)$   |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a \cdot \operatorname{cotgh}(\theta)$ |

Em todas as substituições consideramos um triângulo retângulo cujo vértice relacionado ao ângulo  $\theta$  faz parte de uma perspectiva hiperbólica, ou seja, o ângulo está em  $(-\infty, +\infty)$ , trata-se de uma abstração que pode ser comprovada em cálculo avançado, o nosso objetivo aqui é de fornecer as ferramentas necessárias para análises desse tipo.

### A substituição hiperbólica na integração

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

e que sua integral seja

$$F(x)$$

então teremos:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Concebemos uma nova variável  $\theta$  de forma que:

$$x = a \cdot \operatorname{senh}(\theta)$$

conseqüentemente, sua diferencial é:

$$dx = a \cdot \operatorname{cosh}(\theta)d\theta$$

Substituindo na equação inicial, temos:

$$F(x) = \int \frac{a \cdot \operatorname{cosh}(\theta)d\theta}{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{senh}^2(\theta) + a^2}}$$

$$F(x) = \int \frac{a \cdot \operatorname{cosh}(\theta)d\theta}{a \cdot \sqrt{\operatorname{senh}^2(\theta) + 1}}$$

$$F(x) = \int \frac{a \cdot \operatorname{cosh}(\theta)d\theta}{a \cdot \operatorname{cosh}(\theta)}$$

$$F(x) = \int d\theta$$

Ou seja:

$$F(x) = \operatorname{argsenh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Porém, devido a natureza exponencial das funções hiperbólicas inversas, ainda podemos transformar esta equação na forma puramente logarítmica:

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right)$$

Finalmente:

$$F(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$$

## Funções racionais trigonométricas

O problema da integração de funções racionais trigonométrica consiste, basicamente, na característica da complexibilização progressiva quando estas funções são submetidas às técnicas convencionais de substituição, no momento que tentamos substituir a expressão original temos que definir sua diferencial, o que implica na criação de mais um termo a ser incorporado a expressão original.

Digamos que tenhamos que integrar a função:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Ao adotarmos a linha tradicional de substituições teremos:

$$u = \operatorname{sen}(x)$$

e

$$du = \cos(x)dx$$

no entanto:

$$u^2 = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$1 - u^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - u^2$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - u^2}$$

logo teremos que integrar:

$$f(u) = \frac{1}{u}$$

de forma que:

$$F(u) = \int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}$$

Que, pelo menos, é uma função algébrica pura, mas que ainda demanda um certo trabalho para ser integrada... Portanto concluímos que o processo de substituição de variáveis e diferenciais não ajuda muito.

Nesta seção exporemos um método de substituição mais eficiente para estes casos.

### Usando as identidades trigonométricas

Apresentamos duas identidades que serão muito úteis para a simplificação de funções racionais trigonométricas, são elas:

1. Seno em forma algébrica
2. Cosseno em forma algébrica

Basicamente são resultantes de um processo de substituição mais bem estruturado, para possibilitar a simplificação da integração.

**I-17 Cosseno em forma algébrica** A identidade relacionada ao **Cosseno** é apresentada antes da relacionada ao **seno** pois será útil para a sua dedução.

Considere a seguinte definição:

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

logo, é dedutível que:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- **Demonstração:**

Considerando a identidade **I-2 Cosseno da soma**, temos, por consequência:

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u)$$

Se  $u = \frac{x}{2}$  :

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

ou

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Por outro lado:

$$t^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$t^2 = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(t^2 + 1) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + t^2}$$

Substituindo na identidade temos:

$$\cos(x) = 2\frac{1}{1 + t^2} - 1$$

que nos dá:

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

**I-18 Seno em forma algébrica** Ainda considerando a definição:

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

também é dedutível que:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

• **Demonstração:**

Da identidade anterior:

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Da **I-1 Identidade relacional básica**:

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

Fazendo as substituições:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= \sqrt{1 - \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \\ \operatorname{sen}(x) &= \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4 - (1-2t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}} \\ \operatorname{sen}(x) &= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \end{aligned}$$

logo:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{(1+t^2)}$$

## Integrando

Temos duas funções trigonométricas fundamentais na forma algébrica para substituir as originais na forma trigonométrica, porém para integrar as funções racionais substituindo-as por estas temos que encontrar uma diferencial correspondente para esta nova variável algébrica que criamos.

Da definição inicial:

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Diferenciando:

$$dt = \frac{1}{2} \operatorname{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Da identidade **I-14, Relacionando tangente e secante**:

$$dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

de onde concluímos que:

$$dx = \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

Agora podemos encontrar a integral proposta no início da seção:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

para  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ , temos:

$$F(x) = \int \frac{\frac{2dt}{(1+t^2)}}{\frac{2t}{(1+t^2)}}$$

ou seja:

$$F(x) = \int \frac{dt}{t}$$

*Não é incrível? !!!*

$$F(x) = \ln |t|$$

e

$$F(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

Jamais poderemos nos esquecer de  $C$ , a famigerada constante de antidiferenciação que tanto nos persegue.

## Tabela de integrais

Para auxiliar nos cálculos, consulte a [tabela de integrais na wikipédia en:Calculus/Integration techniques](#)



## Capítulo 9

# Indeterminação e integrais impróprias

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo II*

### Indeterminação

Nos deparamos constantemente com situações onde é necessário que algum grau de indeterminação seja considerado e analisado, na matemática elementar temos as formas indeterminadas que por séculos intrigou matemáticos e filósofos famosos, uma das mais comuns é a raiz  $\sqrt{-1}$ , porém lidar com esta indefinição em matemática elementar já sabemos, um estudo sobre números complexos será aplicado ao **Cálculo** nos livros subseqüentes. Para o presente estudo faremos a análise do cálculo em funções que geram valores indefinidos, mas que podem ser reavaliados por um limite infinitesimal. O artifício de analisar a função sob um limite pode nos revelar resultados bastante conclusivos, que podem sanar boa parte dos problemas que encontramos no uso do cálculo.

Que esteja bem claro que a análise dos valores aqui sugerida não traz um argumento definitivo para a indeterminação, apenas traz meios capazes de solucionar questões que passam pela indeterminação, mas que podem ser solucionados quando as tendências são suficientes para uma conclusão a respeito do problema dependente e não da indeterminação em si.

### Formas indeterminadas

Basicamente analisaremos as formas indeterminadas geradas pelo denominador nulo, das quais destacamos os seguintes casos:

- Forma  $\frac{0}{0}$
- Forma  $f(x) \rightarrow \infty$
- Forma  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Ainda temos:

- Forma  $f(x) = 0 \cdot \infty$
- Forma  $f(x) = \infty - \infty$

Na maioria dos casos temos a indeterminação em um ponto do domínio, onde o valor de um denominador é nulo para uma determinada função, desta forma podemos definir a razão como uma função composta da seguinte forma:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

De onde podemos fazer as seguintes considerações:

Dado um ponto  $[a, h(a)]$  onde:

- $f(a) = 0$
- $g(a) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Podemos dizer que  $h(x)$  apresenta uma forma indeterminada em  $[a, h(a)]$ , porém o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  pode ser determinado. Podemos fazer:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

A segunda forma de indeterminação acontece quando, dado um ponto  $[a, h(a)]$ , onde:

- $h(a) \notin \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow 0$

A terceira forma de indeterminação acontece quando, dado um ponto  $[a, h(a)]$ , onde:

- $h(a) \notin \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow \pm\infty$

## T42 — Valor médio de Cauchy

Valor médio de Cauchy:

Seja  $f(x)$  a função numerador e  $g(x)$  a função denominador em uma relação, então há pelo menos um valor  $(c)$  no intervalo  $[a, b]$  no qual esta relação é definida por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Demonstração**

Considere que em dois extremos (máximos ou mínimos) do intervalo tenhamos pontos definidos em ambas as funções, então poderemos traçar uma reta para cada par de extremos em cada função no intervalo. Assim, temos duas retas que nos possibilitam afirmar que, definidos apropriadamente os pontos que determinam as retas, há pelo menos um ponto de cada função neste intervalo com derivada igual a inclinação destas retas, por outro lado podemos criar condições para que a relação destas retas obedecam as condições do **T16, teorema de Rolle** e conseqüentemente o **T17, teorema do valor médio para derivadas**, uma nova função que traz esta possibilidade é esta:

$$h(x) = f(x) - m \cdot g(x)$$

onde:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Define-se tal função pois:

$$h(a) = h(b) = 0$$

Fato que torna válida a aplicação do teorema de Rolle.  
derivando a equação:

$$h'(x) = f'(x) - m \cdot g'(x)$$

Desta forma teremos pelo menos um ponto  $[c, h(c)]$  no intervalo onde a derivada

$$h'(x)$$

é nula,

$$h'(c) = f'(c) - m \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = m \cdot g'(c)$$

$$m = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Comentário: Observe que a demonstração acima poderia ter sido feita definindo-se  $h(x)$  como qualquer função da forma  $h(x) = f(x) - m \cdot g(x) + K$ , sendo  $K$  uma constante qualquer, tal constante não iria interferir na derivação e a validade das equações seriam mantidas pois o teorema de Rolle é válido não apenas para extremos onde  $h(a) = h(b) = 0$ , contanto simplesmente que  $h(a) = h(b) = K$  (CM)

**T43 — Regra de L'Hôpital**

Regra de L'Hôpital

Dada a função:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

indefinida em  $[a, h(a)]$ , é possível provar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso os limites existam.

**Demonstração do caso 1**

Se  $f(x) = g(x) = 0$

Temos do **T42**, Teorema do valor médio de Cauchy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Note que podemos fazer  $c = x$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uma vez que temos  $a < x < b$ . observamos que:

$$f(b) = f(a + \Delta)$$

e

$$g(b) = g(a + \Delta)$$

sendo  $f(a) = g(a) = 0$  conforme definimos,

$$\frac{f(a + \Delta) - f(a)}{g(a + \Delta) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se reduz a:

$$\frac{f(a + \Delta)}{g(a + \Delta)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Porém, se

$$\Delta \rightarrow 0$$

Então  $b \rightarrow a$

Daí  $x \rightarrow a$  pois  $x$  está no intervalo  $[a; b]$  Logo:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta)}{g(a + \Delta)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Demonstração do caso 2**

Se  $f(x) \rightarrow 0$  &  $g(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ ,

Uma vez que desejamos encontrar:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Podemos promover uma mudança de variável, ou seja, se o limite acima leva as funções a se anularem no infinito, então podemos fazer:

$$x = \frac{1}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})}$$

Desenvolvendo através da regra da cadeia temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{u^2} f'(u)}{-\frac{1}{u^2} g'(u)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

O que torna o limite independente da mudança da variável.

**Apresentação do caso 3**

Embora não seja apropriado para este estudo de „Cálculo I” a demonstração da regra para casos onde temos as indeterminações do tipo:

$$h(x) \rightarrow \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

A mesma regra também é válida, desde que as derivadas do numerador e do denominador não sejam nem nulas nem infinitas.

**Integrais impróprias**

Até agora lidamos com integrais definidas com limites de integração determinados, neste momento introduziremos os casos onde os limites de integração são indefinidos, mais especificamente quando estes limites tendem a infinitos ou valores nulos que geram infinitos na função a ser integrada. Embora grande parte das funções tenham valores indefinidos quando integrados com limites infinitos, uma boa parte fornece valores definidos nestas situações, agora definimos a **Integral imprópria** como segue:

1.  $F(x)|_a^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x)dx$
2.  $F(x)|_{-\infty}^b = \int_{-\infty}^b f(x)dx$

$$3. F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$4. F(x)|_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$5. F(x)|_{-\infty}^0 = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

Todos os casos acima são integrais impróprias onde o valor pode se mostrar definido mesmo se os limites de integração não sejam total ou parcialmente definidos.

Há também a forma imprópria das integrais que fazem a função se tornar indefinida no ponto do limite de integração, ou seja:

$$f(a) \quad \cancel{\exists}$$

$$f(b) \quad \cancel{\exists}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k_1$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = k_2$$

De forma que se os limites existem é possível que a integral possa ser definida.

### Limites infinitos

No caso em que os limites de integração se estendem a valores infinitos e que existe o limite da função para estes valores dizemos que a integral *converge* e que quando a função não apresenta definição para o limite dizemos que esta *diverge*, ou seja chamamos as integrais impróprias de *convergentes* ou *divergentes* de acordo com a possibilidade ou não da definição do limite que permite calcular o referido valor da integral.

Para esta abordagem podemos verificar que, se  $F(x)$  é a integral indefinida de  $f(x)$ , podemos estabelecer que quando:

$$F(x) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

podemos fazer o limite da função, o que nos revela:

$$F(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desta forma podemos adotar o método de eliminação dos coeficientes nulos no infinito, usados para o caso de cálculo de limites no infinito, ou seja:

1. Calcula-se a integral indefinida da função;
2. Fatora-se a função para encontrar os maiores expoentes;
3. Simplifica-se a mesma;
4. E aplica-se o **limite no infinito** para cada valor de **limite de integração** quando usamos o **T35, Teorema fundamental do cálculo**.

### Limites nulos

Para os casos onde o cálculo da integral definida em limites de integração nulos conduz a valores indefinidos a regra é semelhante à anterior;

Seja as integrais definidas:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx$$

$$\int_0^b f(x)dx$$

Sendo a integral indefinida:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Se  $F(0) \nexists$  &  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \exists$

Podemos calcular a integral definida fazendo:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-a}^b f(x)dx$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b f(x)dx$$

## T44 — Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor

Seja a função  $f(x)$  diferenciável no intervalo  $[a, x]$ , é possível demonstrar que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Onde  $\xi$  é chamado de abscissa do valor médio da derivada  $f^{(n+1)}$ , quando intui-se que quanto maior a ordem da derivada maior a quantidade de parcelas na equação e maior será a precisão da **síntese** da função  $f(x)$  através do polinômio.

Neste caso podemos dizer que o último termo da equação é o **resto**, dizemos que há convergência, o que torna a síntese possível, quando o resto diminui consecutivamente tendendo a zero, o que nos permite dizer que quanto menor o seu valor mais precisa a síntese da função.

**Demonstração:**

A função  $f(x)$  pode ser expressa, segundo o **T35, teorema fundamental do cálculo** como:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x (x-u)^0 f'(u)du$$

Podemos separar a integral não resolvida da equação fazendo:

$$z = \int_a^x (x-u)^0 f'(u) du$$

Se calcularmos a integral acima aplicando a integração **por partes**, teremos:

$$\begin{aligned} z &= -f'(u)(x-u)|_a^x + \int_a^x (x-u)f''(u) du \\ z &= [f'(a)(x-a) - f'(x)(x-x)] + \int_a^x (x-u)f''(u) du \\ z &= f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-u)f''(u) du \end{aligned}$$

logo:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-u)f''(u) du$$

Fazendo esta substituição sucessivamente obtemos a fórmula de Taylor facilmente, façamos mais um passo para que se evidencie com mais clareza:

$$\begin{aligned} z &= f'(a)(x-a) - \frac{f''(u)(x-u)^2}{2!} \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-u)^2}{2!} f^{(3)}(u) du \\ z &= f'(a)(x-a) + \left[ \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} - \frac{f''(x)(x-x)^2}{2!} \right] + \int_a^x \frac{(x-u)^2}{2!} f^{(3)}(u) du \\ z &= f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-u)^2}{2!} f^{(3)}(u) du \end{aligned}$$

O que nos dá:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-u)^2}{2!} f^{(3)}(u) du$$

A evolução da equação é notória e por indução de  $n$  integrações temos a referida fórmula.

Podemos definir o resto desta forma:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$



## Capítulo 10

# Aplicações das integrais

*Wikiversidade — Disciplina: Cálculo II*

### A integração na prática

Neste capítulo finalizamos o primeiro livro desta série do estudo do Cálculo, temos agora a noção da quase infinita gama de utilizações que podemos fazer com a integração, que é uma das ferramentas de estudo algébrico e numérico mais frutíferas dentro da matemática, a integração fornece meios de calcular e avaliar diversos problemas complexos. Das aplicações da integração teremos uma amostra das mais obviamente concebíveis, iniciaremos o estudo de áreas em superfícies planas delimitadas por curvas, depois calcularemos volumes de objetos curvos, determinar a pressão que um líquido exerce sobre objetos curvos nele mergulhados e poderemos também, calcular comprimentos de curvas definidas por funções em um gráfico de coordenadas cartesianas.

### Áreas

Talvez esta seja a mais óbvia aplicação para o cálculo de integrais, mas faremos algumas considerações sobre o estudo de áreas sob curvas que são importantes para que sejam evitados erros durante o processo de análise dos valores.

Como consequência direta da definição da integral temos a área sob da curva a ser integrada e o eixo das abscissas  $x$ , seja a função  $f(x)$ , considerando que a mesma pode assumir valores tanto positivos como negativos, o fato de este sinal ser determinante para o processo de somatórias consecutivas, próprio da integral definida, devemos considerar no cálculo a possibilidade da diminuição de valores no caso de haver áreas com valores negativos.

### Sinais

Da **definição da integral de Riemann** temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$$

Obviamente,  $\Delta_i x$  pode ser estabelecido e pode ser tomado como positivo se fizermos  $b > a$ , logo nos resta:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$$

Que é arbitrário pois depende da função  $f(\xi_i)$ , o que nos leva a concluir que o sinal da função determina o sinal da integral, ou seja, embora o módulo da integral represente a área delimitada pela curva e o eixo das abscissas, o seu valor relativo pode não expressar apenas valores positivos, o que nos indica que temos que analisar o sinal da função antes de calcular qualquer área através da integração.

### Calculando as áreas

Consideremos o caso da função:

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

Os valores do seno entre 0 e  $\pi$  são positivos e entre  $\pi$  e  $2\pi$  são negativos! Isto causa uma situação interessante, uma vez que as áreas entre a curva e o eixo  $x$  dos dois intervalos, quando observadas no plano cartesiano, são idênticas, a área das duas deveria ser o dobro de uma delas, entretanto a integral calculada no intervalo entre 0 e  $2\pi$  é nula! Esta é a razão pela qual devemos fazer o módulo das integrais em cada intervalo de mudança de sinal, para que os valores das áreas nestes intervalos não se subtraíam, provocando erro no cálculo.

Devemos verificar os intervalos onde a função se torna negativa e inverter o sinal antes de efetuar a soma de áreas em cada intervalo, assegurando assim o correto valor do total de unidades quadradas de área, delimitadas pela curva e o eixo  $x$ .

No caso da função acima, teremos:

$$A = \left| \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x) dx \right|$$

Sob diversas situações devemos verificar o comportamento do gráfico, para que possamos determinar a melhor maneira de calcular a área, no caso de áreas delimitadas por duas curvas podemos determinar a área de cada curva em relação ao eixo e verificar o comportamento das curvas no gráfico para determinar a forma de calcular. Na seção subsequente veremos como determinar a área delimitada por duas curvas.

### Exemplo 1

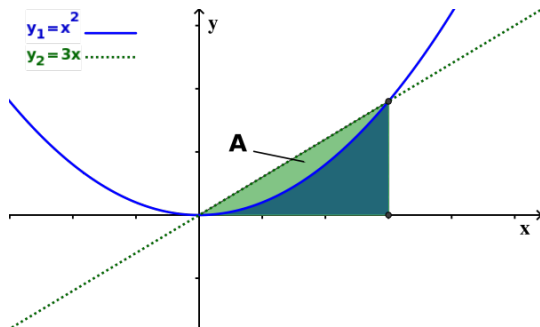
Sejam duas funções:

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = 3x$$

Vamos calcular a área da região delimitada pelas curvas entre as suas interseções. O gráfico abaixo representa as funções e a área que desejamos calcular, a qual chamamos de  $A$ :

Inicialmente verifiquemos os pontos onde as funções se encontram, ou seja, os pontos onde  $y_1 = y_2$ :



$$x^2 = 3x$$

Se  $x \neq 0 \implies x = 3$

Se  $x = 0$  em ambas as funções  $y = 0$ .

Condições que nos revela o intervalo entre:

$$(0, 0)$$

e  $(3, 9)$

Obviamente devemos proceder a subtração entre a área delimitada pela reta e a área delimitada pela parábola, no caso da reta poderíamos ainda fazer a área do triângulo formado pela mesma e o eixo das abscissas, porém façamos todo o processo utilizando integração para que possamos ter um processo universal para o cálculo de áreas desse tipo.

Calculemos as integrais:

$$A_1 = \int_0^3 y_1 dx$$

$$A_1 = \int_0^3 x^2 dx$$

$$A_1 = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$A_1 = \left[ \frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} \right]$$

$$A_1 = 9$$

e

$$A_2 = \int_0^3 y_2 dx$$

$$A_2 = \int_0^3 3x dx$$

$$A_2 = \left[ \frac{3x^2}{2} \right]_0^3$$

$$A_2 = \left[ \frac{3(3)^2}{2} - \frac{3(0)^2}{2} \right]$$

$$A_2 = 13,5$$

A área que queremos encontrar é:

$$A = A_2 - A_1$$

logo:

$A = 4,5$  unidades quadradas.

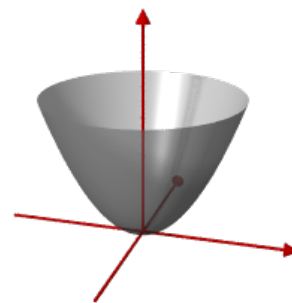
## Volumes

Considerando as diversas formas que encontramos na natureza, podemos verificar que muito poucas têm formas regulares, dificilmente poderíamos encontrar o volume de um corpo sólido encontrado comumente na natureza por meio da geometria euclidiana, as curvas são comuns no nosso mundo, muitas delas podem ser determinadas por equações, porém antes que a teoria do Cálculo fosse elaborada os volumes eram calculados por aproximações. Hoje podemos obter muitos dos volumes de corpos sinuosos pelo Cálculo, os métodos descritos a seguir são os mais básicos para curvas que podem ser determinadas matematicamente, no decorrer dos próximos volumes aprenderemos a calcular formas mais complexas. Por hora, os cálculos que aqui serão apresentados já fornecem uma gama de aplicações bem ampla no nosso mundo onde a indústria usa cada vez mais curvas em seus produtos, obviamente teremos curvas matematicamente determináveis para estes casos, uma vez que o homem geralmente usa métodos de computação para criar seus produtos hoje em dia.

### Curvas rotacionadas

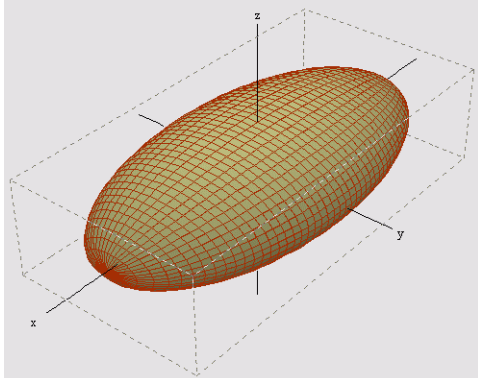
Imaginemos que tenhamos uma curva matematicamente determinável, uma parábola, por exemplo, e tenhamos a área delimitada pela mesma e o eixo  $x$ , se fizermos com que o eixo  $y$  servisse de mastro e girassemos a parábola em torno do mesmo, o que teríamos? Teríamos um sólido formado pelas infinitas lâminas em forma de parábola.

O efeito da rotação de uma parábola pode ser visualizada pelo gráfico tridimensional, o que vemos é o que chamados de parabolóide, um sólido semelhante ao recipiente de líquido de uma taça. Considerando a parte interna preenchida teremos um volume a



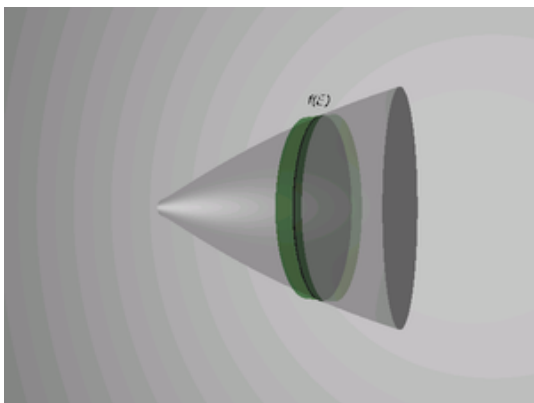
ser calculado, o que podemos fazer utilizando o “Cálculo” .

O efeito da rotação de uma elipse pode ser visualizada da mesma forma, o que nos possibilita ver o que chamados de elipsóide, um sólido semelhante a um ovo de réptil. O volume a ser calculado também pode ser conseguido através do “Cálculo”.



### Sólidos delimitados por uma curva

O método para cálculo de volumes delimitados por curvas rotacionadas, como expostas acima, consiste na divisão do sólido em discos com raio igual ao valor da função que está sendo rotacionada, ou seja, para cada ponto da função teremos um disco de raio determinado pela mesma, o que nos permite fazer uma somatória de discos que acompanham o contorno da curva, vejamos o desenho abaixo:



Temos a função variando ao longo do eixo  $x$ , o que nos permite dizer que uma reta perpendicular ao eixo que passa por um ponto do gráfico é um raio de um disco... Em um intervalo  $[a, b]$  onde  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \cdots \leq b$ , no qual  $f(x_n) \geq 0$ , agrupemos pares de valores nas abscissas, de forma que o valor médio da função seja  $f(\xi_n)$ . Tomando cada disco com um volume aproximado de:

$$V_d(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$$

Considerando que a precisão do cálculo aumenta quando os discos se tornam menos espessos, temos que admitir que existe uma norma de partição que pode ser definida para o intervalo que pretendemos calcular, portanto podemos fazer:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_d(\xi_i)$$

Onde temos um volume de disco para cada ponto da curva e a norma pode ser inversamente proporcional ao número  $n$ . Logo, verificamos que:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

ou

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

O intervalo  $[a, b]$  refere-se a uma parte do sólido, da qual queremos calcular o volume.

### Exemplo 2

Calcular o volume do sólido de revolução criado pela rotação da parábola  $y = x^2$  em torno do eixo das abscissas, no intervalo  $[0, 3]$ .

Aplicando a fórmula anteriormente vista temos:

$$V = \pi \int_0^3 (x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^3 x^4 dx$$

$$V = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^3$$

$$V = \pi \left( \frac{3^5}{5} \right)$$

O volume é:

$V \approx 152,68$  unidades cúbicas.

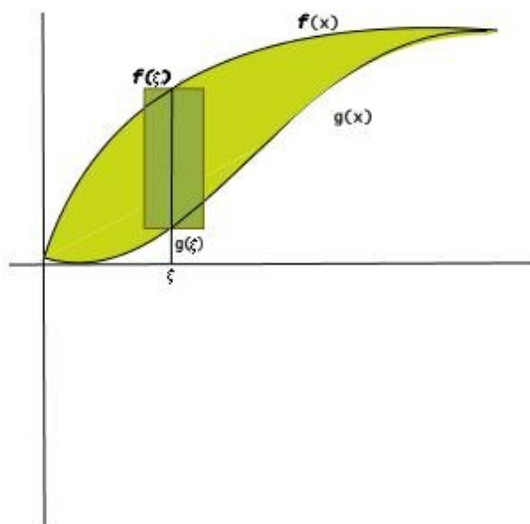
### Sólidos delimitados por duas curvas

Agora podemos definir um sólido “oco”, ou seja, para que um sólido tenha uma abertura devemos delimitar uma face externa e outra interna, o que nos pede que tenhamos uma curva para cada face.

Para a determinação das duas faces considere as duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  sendo que, para determinar o sólido de forma regular, estabelecemos o seguinte conjunto de regras:

1.  $f(x) \geq 0$
2.  $g(x) \geq 0$
3.  $f(x) > g(x)$

Observemos a ilustração a seguir:



Consideremos um corte que nos permita observar uma fatia do sólido, como podemos ver o retângulo que tomamos no centro do desenho representa uma fatia de um disco “oco”.

Agora podemos encontrar o volume ocupado pelo sólido, no espaço delimitado pelas duas funções, considerando que as duas sofrem rotação, mantendo o eixo  $x$  como base de rotação, conforme fizemos no caso do tópico anterior com uma função, a única diferença é que temos um volume que deverá ser subtraído do outro.

Segundo o mesmo raciocínio da análise anterior, verificamos que o volume de um disco de seção do sólido no intervalo  $[a, b]$  pode ser determinada como segue:

$$V_d(\xi_i) = \pi \{ [f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2 \} \Delta_i x$$

Inevitavelmente vemos a correspondência entre os dois casos, simplesmente há uma subtração de volumes, que veremos refletida no resultado final... Prosseguindo, façamos a somatória dos valores das seções dentro do intervalo  $[a, b]$  quando as parcelas diminuam infinitesimalmente:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_d(\xi_i)$$

Finalmente encontramos o volume:

$$V = \int_a^b \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

ou

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

**Exemplo 3**

Calcular o volume do sólido gerado pela rotação das curvas  $f(x) = 32\sqrt{x}$  e  $g(x) = x^3$  em relação ao eixo das abscissas, considerando o intervalo entre  $x = 0$  e o ponto de encontro das duas curvas.

Antes de tudo vamos encontrar o ponto de encontro das curvas, ou seja:

$$f(x) = g(x)$$

$$32\sqrt{x} = x^3$$

As curvas se encontram quando:

$$x = 4$$

Devemos encontrar o volume entre as duas curvas no intervalo  $[0, 4]$ :

$$V = \pi \int_0^4 \left[ (32\sqrt{x})^2 - (x^3)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (1024x - x^6) dx$$

$$V = \pi \left( 512x^2 - \frac{x^7}{7} \right)_0^4$$

$$V = \pi \left[ 512 \cdot (4)^2 - \frac{(4)^7}{7} \right]$$

Que nos fornece um volume aproximado de:

$V \approx 18382,81$  unidades cúbicas.

**Cilindros concêntricos**

Agora imaginemos um sólido cujo eixo se encontra nas ordenadas, ou seja, para cada ponto da função teremos uma circunferência, se traçarmos uma reta até o eixo das abscissas para cada ponto teremos cilindros concêntricos ao eixo das ordenadas.

Para definir o volume do cilindro consideremos:

1. O intervalo  $[a, b]$  para a espessura do cilindro em  $x$ ;
2. Chamamos de  $\Delta$  a partição:  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq b$ ;
3. Dentro de  $\Delta$  há sempre uma subpartição que é a maior, a qual chamamos de norma, identificando-a como

$$\|\Delta\|$$

4. Existindo os números  $\xi_i$  de forma que  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ;



O volume de um pequeno segmento do cilindro é:

$$V(x_i) = 2\pi x f(\xi_i) \Delta x_i$$

Somamos todos os segmentos para encontrar o volume total:

$$V = \sum_{i=1}^n V(x_i)$$

Se levarmos os subintervalos entre os valores de  $x$  a números cada vez menores teremos:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V(x_i)$$

ou seja:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi x f(\xi_i) \Delta x_i$$

Como podemos fazer:

$$n = \frac{b-a}{i}$$

Concluimos que:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

ou

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

#### Exemplo 4

Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação da curva  $f(x) = \sqrt{x-3}$ , cujo eixo de revolução é o eixo das ordenadas, no intervalo  $[3, 6]$  das abscissas:

Da fórmula do cálculo temos:

$$V = 2\pi \int_3^6 x \sqrt{x-3} dx$$

Podemos usar a integração por partes e chegar a:

$$V = 2\pi \left[ \frac{2x}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}} \right]_3^6 - \frac{2}{3} \int_3^6 (x-3)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$V = 2\pi \left[ \frac{2x}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x-3)^{\frac{5}{2}} \right]_3^6$$

$$V = 2\pi \left[ \frac{2(6)}{3} (6-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (6-3)^{\frac{5}{2}} \right]$$

Temos um volume aproximado de:

$V \approx 104,475$  unidades cúbicas.

### Lâminas paralelas

Os métodos anteriormente utilizados para o cálculo de volumes podem ser englobados em um conceito geral, no qual podemos fazer a soma de pequenos segmentos de um sólido encontrando o volume total, uma forma de fazer isso é utilizar o secionamento de forma a relacionar a área de cada seção à variável independente, ou seja, se temos seções trasversais perpendiculares ao eixo da variável independente e podemos relacionar a área de cada “lâmina” ao valor da variável, temos um meio de integrar todas as lâminas e encontrar o volume do sólido com uma somatória das mesmas.

Considerando:

$$A(\xi_i)$$

área da seção.

O volume é:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta x_i$$

Uma vez que quando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  temos  $\Delta x \rightarrow 0$  e que temos seções dentro do intervalo  $[a, b]$ , onde a maior é a norma, podemos concluir que a somatória é levada, no limite, a ser a integral:

$$\int_a^b A(x) dx$$

Ou seja, para que possamos encontrar a área nestes casos basta encontrar a integral definida da função área; sempre que for possível encontrar uma função contínua da área da seção em relação a variável independente, poderemos encontrar o volume do sólido integrando esta função área.

### Exemplo 5

Calcular o volume do sólido formado por um cilindro circular reto, cuja base tem centro na origem dos eixos cartesianos e é paralela ao plano  $(x, y, 0)$  dentro de um raio de 4 unidades, sendo secionado por um plano que passa pelos pontos  $(4, 0, 0)$  e  $(0, 0, 3)$  equidistante do eixo  $y$ :

Retiramos as informações do problema proposto, que nos diz que:

- A altura do cilindro para cada valor de  $x$  é igual a da reta determinada

pelos pontos que pertencem ao plano, uma vez que o plano é perpendicular ao plano  $(x, 0, z)$ :

logo:

$$m = \frac{3}{4}$$

que define a reta:

$$z = \frac{3}{4}x$$

- Seções do cilindro perpendiculares ao eixo  $x$  tem bases que crescem a medida

que o valor de  $x$  aumenta, cujo valor pode ser obtido por:

$$B = 2\sqrt{16 - x^2}$$

Diante disto podemos verificar que o sólido pode ser definido por seções triangulares, perpendiculares ao eixo  $x$ , portanto fazemos:

$$V = \left| \int_{-4}^0 \frac{B \cdot z}{2} dx \right| + \left| \int_0^4 \frac{B \cdot z}{2} dx \right|$$

Pois há faixas onde  $V_x < 0$  o que nos obriga a aplicar a correção. Agora vamos calcular a integral indefinida:

$$V_x = \int \frac{2\sqrt{|16 - x^2|} \cdot \frac{3}{4}x}{2} dx$$

$$V_x = \int \sqrt{|16 - x^2|} \cdot \frac{3}{4}x dx$$

Se tivermos:

$$u = 16 - x^2$$

$$du = -2x dx$$

$$x dx = -\frac{du}{2}$$

Substituímos:

$$V_u = \int \sqrt{u} \cdot \frac{3}{8} du$$

$$V_u = \frac{3}{8} \int \sqrt{u} \cdot du$$

$$V_u = \frac{3}{8} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$V_u = \frac{1}{4} \left( u^{\frac{3}{2}} \right)$$

Redefinindo:

$$V_x = \frac{1}{4} (16 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Ou seja:

$$V = \frac{1}{4} \left| (16 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{-4}^0 + \frac{1}{4} \left| (16 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^4$$

logo:

$$V = \frac{1}{4} \left| (16)^{\frac{3}{2}} \right| + \frac{1}{4} \left| (16)^{\frac{3}{2}} \right|$$

O volume é:

$v = 32$  unidades cúbicas.

## Pressão dos líquidos

Esta é uma aplicação bastante interessante... Considere que tenhamos que calcular a pressão que um líquido exerce sobre um objeto imerso em algum líquido, se o objeto é plano o cálculo dessa pressão e conseqüentemente a força total sobre a superfície é fácil de ser calculada, porém se o objeto é curvo e a força se distribui ao longo do corpo temos um problema complexo nas mãos. Investigaremos agora uma aplicação da integral para solução deste problema.

Adotemos as seguintes nomenclaturas para as definições que se seguem:

- $P_v$  — Pressão volumétrica;
- $P_s$  — Pressão superficial;
- $F$  — Força;
- $A$  — Área;
- $V$  — Volume;
- $h$  — Altura;

Então, da definição de Física, a pressão em um líquido contido num recipiente de volume  $V$  é:

$$P_v = \frac{F}{V}$$

Ou seja, se o volume do corpo for unitário, a força que atua sobre ele é igual a pressão volumétrica, porém se quisermos saber a pressão exercida pelo líquido sobre uma superfície fazemos:

$$P_s = \frac{F}{V}h$$

ou

$$P_s = \frac{F}{A}$$

Porém, imaginemos que o corpo é uma lâmina mergulhada verticalmente e desejamos obter a força total exercida pelo líquido sobre o mesmo... Inevitavelmente veremos que a força aumenta com a altura e sua somatória não será algo convencional se a área da superfície do objeto for curva.

Consideremos que a largura do objeto ao longo da linha vertical que define a altura seja  $f(x)$  e a altura seja  $x$ , se tomarmos uma partição  $\Delta$  onde tivermos diversos  $\Delta x_i$  dentro de um intervalo  $[a, b]$ . Ainda temos que, pelo princípio de Pascal, a pressão é a mesma em todas as direções em algum ponto do líquido, o que nos leva a concluir que:

$$F_x = P_v x A$$

logo:

$$F \approx \sum_{i=1}^n P_v \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

É uma boa aproximação do valor da força, porém se fizermos com que  $n$  seja cada vez maior até valores que tendam a infinito, podemos fazer:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_v \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

ou

$$F = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_v \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

O que nos leva a:

$$F = \int_a^b P_v x f(x) dx$$

### Exemplo 6

## Comprimentos de curvas

Esta é mais uma interessante aplicação das integrais, com elas podemos calcular o comprimento de curvas utilizando uma generalização da regra do cálculo da distância entre dois pontos, a qual já conhecemos da matemática de nível médio.

Sabemos que a distância entre dois pontos é:

$$D_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Se existe uma curva entre os pontos  $a$  e  $b$  podemos subdividir o intervalo entre os dois pontos de forma que tenhamos:

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}$$

e

$$\Delta y = \frac{y_b - y_a}{n}$$

Propomos um índice para que tenhamos:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

e

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

Para cada subintervalo dentro de

$$x_a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_b$$

e

$$y_a, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_b$$

Se defirmos o ponto médio para cada subintervalo, como sendo:

$$[\xi_i, f(\xi_i)]$$

A distância entre dois pontos dentro desse subintervalo é:

$$D_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Uma boa aproximação do comprimento da curva pode ser encontrada fazendo-se:

$$C \approx \sum_{i=0}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$
$$C \approx \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Definindo uma norma para a partição  $\Delta$  no intervalo, teremos:

$$C = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

logo:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

# Bibliografia

- Cálculo Volume 1 - Stewart, James - 5ª Edição - São Paulo - Editora Pioneira 2005 - ISBN 8522104794
- Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1 - Leithold, Louis - 5ª Edição - Editora Harbra 1994 - ISBN 8529400941
- Um curso de cálculo, Volume 1 - Guidorizzi, Hamilton Luiz - Editora LTC 2005 - ISBN 8521612591
- Cálculo, Volume 1 - Foulis, David J. - Editora LTC 1982 - ISBN 8521610548
- Calculus Demystified - Krantz, Steven George - Editora McGraw-Hill Professional 2002 - ISBN 0071393080





# Informações sobre o histórico

## Historia

[http://pt.wikibooks.org/wiki/C\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{a\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19a\egroup\spacefactor\accent@spacefactorlculo\\_\(Volume\\_1\).](http://pt.wikibooks.org/wiki/C\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{a\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19a\egroup\spacefactor\accent@spacefactorlculo_(Volume_1).)

## Informações sobre o PDF

[http://pt.wikibooks.org/wiki/Image:C\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{a\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19a\egroup\spacefactor\accent@spacefactorlculo\\_\(Volume\\_1\).pdf.](http://pt.wikibooks.org/wiki/Image:C\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{a\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19a\egroup\spacefactor\accent@spacefactorlculo_(Volume_1).pdf)



# GFDL

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc. 51  
Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA Everyone is  
permitted to copy and distribute verbatim copies of this license do-  
cument, but changing it is not allowed.

## PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or non-commercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of

the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- **A.** Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- **B.** List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- **C.** State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- **D.** Preserve all the copyright notices of the Document.
- **E.** Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- **F.** Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- **G.** Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- **H.** Include an unaltered copy of this License.
- **I.** Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- **J.** Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- **K.** For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- **L.** Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- **M.** Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- **N.** Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

- **O.** Preserve any Warranty Disclaimers. If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements."

## COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## **AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS**

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## **TRANSLATION**

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## **TERMINATION**

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.



## FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

## How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.