Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2016/2017

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 6

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 6.1. Auf der linken Tafel ist eine gewisse Anzahl von Äpfeln angemalt. Diese Anzahl soll durch eine Menschenkette in eine Strichfolge auf die rechte Tafel übertragen werden, wobei nur eine Person die Äpfel sehen darf. Es darf nicht gesprochen werden und niemand darf sich von der Stelle bewegen. Ebensowenig darf auf Zählkenntnisse Bezug genommen werden.

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.2. Man mache sich klar, in welcher Weise die in der Vorlesung angeführten Diagramme Abbildungen darstellen.

Aufgabe 6.3.*

Erstelle eine Wertetabelle, die für jede natürliche Zahl von 1 bis 10 ausgibt, mit wie vielen Eurozahlen die Zahl minimal darstellbar ist.

Aufgabe 6.4. Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ M = \{a,b,c,d,e,f,g\} \text{ und } N = \{R,S,T,U,V,W,X,Y,Z\}$$

und die Abbildungen $\varphi\colon L \to M$ und $\psi\colon M \to N$, die durch die Wertetabellen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	e	f	d	e	a	b	a

und

y	a	b	c	d	e	f	g
$\psi(y)$	X	Y	R	R	T	W	U

gegeben sind.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $\psi \circ \varphi$.
(2) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ injektiv?
(3) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ surjektiv?

Aufgabe 6.5. Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow M,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 6.6. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgabe 6.7.*

Es sei M eine endliche Menge und $\varphi\colon\, M \to M$ eine Abbildung. Es sei φ^n die n-fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst. Zeige, dass es natürliche Zahlen $m > n \geq 1$ gibt mit $\varphi^n = \varphi^m$.

Aufgabe 6.8. Welche Funktionsvorschriften kennen Sie aus der Schule?

Aufgabe 6.9. Welche bijektiven Funktionen $f\colon\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 6.10. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = 2x^2 - x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 6.11.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 6.12. Zeige, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ endlich mit n Elementen ist.

Aufgabe 6.13. Es seien L und M Mengen und es sei $F\colon L \to M$ eine bijektive Abbildung. Zeige: Wenn L endlich mit n Elementen ist, so ist auch M endlich mit n Elementen.

Aufgabe 6.14. Es seien S und T endliche Teilmengen einer Menge M. Zeige, dass dann auch die Vereinigung $S \cup T$ endlich ist.

Aufgabe 6.15. Mustafa Müller und Heinz Ngolo haben jeweils mit einer Strichliste $|||\ldots|||$ ihre Fußballbildchen gezählt. Sie wollen wissen, wer mehr Bildchen hat, die Listen sind aber ziemlich lang und beim Zählen kommen sie durcheinander. Mustafa macht den Vorschlag, in der Liste immer vier Striche durch einen Querstrich zusammenzufassen und dann diese Blöcke zu zählen. Heinz sagt, dass das nicht geht, da so Fünferblöcke entstehen und dadurch das Ergebnis verfälscht wird. Was sagt Gabi Hochster?

In der folgenden Aufgabe bezeichnet $\varphi(S)$ die Menge $\{\varphi(x) |\, x \in S\}$ und $\varphi^{-1}(T)$ die Menge $\{x \in L |\, \varphi(x) \in T\}$. Bestimme diese Mengen für die Heinonummierung für die Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $T = \{G, H, L, M\}$.

Aufgabe 6.16. Es seien L und M zwei Mengen und $\varphi\colon L \to M$ eine bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq L$ eine Bijektion $S \to \varphi(S)$ vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge $T \subseteq M$ eine Bijektion $\varphi^{-1}(T) \to T$ vorliegt.

Aufgabe 6.17. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.18. (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$
$$\text{und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen $\varphi\colon\ L \to M$ und $\psi\colon\ M \to N$, die durch die Wertetabellen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	i	a	g	d	e	h	b

und

y	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\psi(y)$	X	Z	Y	S	Z	S	T	W	U

gegeben sind.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $\psi \circ \varphi$.
(2) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ injektiv?
(3) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ surjektiv?

Aufgabe 6.19. (3 (1+1+1) Punkte)

(1) Kann eine konstante Abbildung bijektiv sein?
(2) Ist die Hintereinanderschaltung einer konstanten Abbildung mit einer beliebigen Abbildung (also die konstante Abbildung zuerst) konstant?
(3) Ist die Hintereinanderschaltung einer beliebigen Abbildung mit einer konstanten Abbildung (also die konstante Abbildung als zweites) konstant?

Aufgabe 6.20. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \longmapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Ist f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 6.21. (2 Punkte)

Es seien $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die nichtnegativen reellen Zahlen. Bestimme für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv und ob sie surjektiv sind.

(1)
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

(2)
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2.$$

(3)
$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

(4)
$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2.$$

Aufgabe 6.22. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und
$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$
Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung
$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$
Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Abbildungsverzeichnis