Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 25

> J'ai décidé d'être heureux parce que c'est bon pour la santé
>
> Voltaire

Trigonalisierbare Abbildungen

Definition 25.1. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie eine Scherungsmatrix zeigt (siehe Beispiel 22.9). Wir werden in Satz 25.9 sehen, dass eine lineare Abbildung genau dann trigonalisierbar ist, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Eine quadratische Matrix M heißt *trigonalisierbar*, wenn die dadurch definierte lineare Abbildung $K^n \to K^n$ trigonalisierbar ist. Dies bedeutet, dass es eine Basis gibt, bezüglich der die Abbildung durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, bzw., dass es eine invertierbare Matrix B (die Basiswechselmatrix) derart gibt, dass

$$BMB^{-1}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist eine Matrix genau dann trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. Das Auffinden einer Basis, bezüglich der obere Dreiecksgestalt vorliegt bzw. die Durchführung des Basiswechsels nennt man *Trigonalisierung*.

Beispiel 25.2. Wir behaupten, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist. Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit der inversen Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Nachweis der Trigonalisierbarkeit taucht die Übergangsmatrix B aus dem Nichts auf. Ein einsichtigerer Trigonalisierbarkeitsnachweis ergibt sich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und Satz 25.9. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X-3)(X-1)+1 = X^2-4X+4 = (X-2)^2,$$

zerfällt also in Linearfaktoren.

Lemma 25.3. *Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und*

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Dann ist φ genau dann trigonalisierbar, wenn dies für alle φ_i gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 25.5. □

Invariante Untervektorräume

Ein trigonalisierbarer Endomorphismus besitzt bezüglich einer geeigneten Basis die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften, die für eine solche obere Dreiecksmatrix gelten und die als eine Eigenschaft der linearen Abbildung beschreibbar, also unabhängig von einer gewählten Basis sind, müssen für eine trigonalisierbare Abbildung gelten. Solche Eigenschaften wollen wir verstehen. Durch eine obere Dreiecksmatrix wird der j-te Standardvektor e_j auf

$$Me_i = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{jj}e_j$$

abgebildet. Insbesondere ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert a_{11}. Charakteristisch für trigonalisierbare Abbildungen ist, dass der Untervektorraum

$$V_j = \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$$

durch M in sich selbst hinein abgebildet wird, d.h. die V_j sind M-invariante Untervektorräume, die ineinander enthalten sind und deren Dimension gleich j ist. Wir werden nach einigen Vorbereitungen zeigen, dass diese Eigenschaft trigonalisierbare Abbildungen charakterisiert.

LEMMA 25.4. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ. Dann gibt es einen φ-invarianten Untervektorraum $U \subset V$ der Dimension $n-1$.

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Lemma 22.1 besitzt die Abbildung $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ einen nichttrivalen Kern. Sie ist also nicht injektiv und nach Korollar 11.8 auch nicht surjektiv. Daher ist

$$B \,:=\, \operatorname{bild}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V) \,\subset\, V$$

ein echter Unterraum von V. Es gibt dann auch einen Untervektorraum $U \subset V$ der Dimension $n-1$, der B enthält. Zu $u \in U$ gehört wegen

$$\varphi(u) \,=\, \lambda u + (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)u \,\in\, U + B \,\subseteq\, U$$

das Bild zu U, d.h. U ist φ-invariant. □

Wenn $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum und $P \in K[X]$ ein Polynom ist, so ist U auch $P(\varphi)$-invariant, siehe Aufgabe 25.12. In dieser Situation gilt die folgende Gleichheit.

LEMMA 25.5. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Untervektorraum. Dann gilt zu jedem Polynom $P \in K[X]$ die Beziehung

$$P\left(\varphi|_U\right) \,=\, \left(P(\varphi)\right)|_U,$$

wobei hier $\varphi|_U$ die im Definitionsbereich und auch im Bildbereich eingeschränkte Abbildung bezeichnet.

Beweis. Dies überprüft man direkt für die Potenzen X^n und für Linearkombinationen davon. □

KOROLLAR 25.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Untervektorraum und

$$\varphi|_U \colon U \longrightarrow U$$

die Einschränkung auf U (auch im Bildbereich). Dann ist das Minimalpolynom zu φ ein Vielfaches des Minimalpolynoms von $\varphi|_U$.

Beweis. Es sei μ das Minimalpolynom zu φ. Für $u \in U$ ist nach Lemma 25.5

$$\mu\left(\varphi|_U\right)(u) \;=\; \mu(\varphi)(u) \;=\; 0.$$

Daher annulliert μ den eingeschränkten Endomorphismus $\varphi|_U$ und daher ist μ ein Vielfaches des Minimalpolynoms von $\varphi|_U$. □

Charakterisierungen für trigonalisierbar

Eine Fahne setzt sich aus dem Fußpunkt, der Fahnenstange, dem Fahnentuch und dem Raum, in dem das Tuch weht, zusammen.

Definition 25.7. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V.

Definition 25.8. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und

$$f \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

heißt *f-invariant*, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ ist für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Satz 25.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*

(2) *Es gibt eine φ-invariante Fahne.*
(3) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*
(4) *Das Minimalpolynom μ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix (es sei $n = \dim(V)$) $B \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Von (1) nach (2). Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt besitzt. Dann folgt durch direkte Interpretation der Matrix, dass die Untervektorräume

$$V_i := \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant sind und somit eine invariante Fahne vorliegt.

Von (2) nach (1). Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine φ-invariante Fahne. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle .$$

Da die Fahne invariant ist, gilt

$$\varphi(v_i) = b_{1i}v_1 + b_{2i}v_2 + \cdots + b_{ii}v_i .$$

Bezüglich dieser Basis besitzt die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt.

Von (1) nach (3). Das charakteristische Polynom von φ ist gleich dem charakteristischen Polynom χ_M, wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ist. Wir können also annehmen, dass M eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist nach Lemma 16.4 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen.

Aus (3) folgt (4), da das Minimalpolynom nach Korollar 24.3 ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist.

Von (4) nach (1). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei die Fälle

$$n = 0, 1$$

klar sind. Nach Voraussetzung und nach Satz 23.2 besitzt φ einen Eigenwert und damit auch einen Eigenvektor. Nach Lemma 25.4 gibt es einen $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum

$$V_{n-1} \subset V,$$

der φ-invariant ist. Es sei $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine Basis von V_{n-1}, die wir durch $v_n \in V \setminus V_{n-1}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis wird φ

durch eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix oben links beschreibt dabei die (beidseitige) Einschränkung $\varphi|_{V_{n-1}}$ von φ auf V_{n-1} bezüglich der gegebenen Basis. Nach Korollar 25.6 ist das Minimalpolynom von $\varphi|_{V_{n-1}}$ ein Teiler des Minimalpolynoms von φ und zerfällt daher wie dieses in Linearfaktoren. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\varphi|_{V_{n-1}}$ trigonalisierbar und damit auch φ selbst.

Der Zusatz ergibt sich wie folgt. Die trigonalisierbare Abbildung φ werde bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ durch die Matrix M beschrieben, und bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ durch die obere Dreiecksmatrix T. Dann gilt nach Korollar 11.11 die Beziehung $T = BMB^{-1}$, wobei B den Basiswechsel beschreibt. □

Satz 25.10. *Es sei $M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.9 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Beispiel 25.11. Wir betrachten eine reelle 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\,(xE_2 - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 - bc. \end{aligned}$$

Dieses Polynom zerfällt in (reelle) Linearfaktoren genau dann, wenn $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc \geq 0$ ist. Genau in diesem Fall ist die Matrix nach Satz 25.9 trigonalisierbar.

Abbildungsverzeichnis