

始

9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

航空工學講座  
翼の理論  
東京帝國大學教授  
工學博士  
和田小六

工政會出版部



318  
563

航空工學講座

翼の理論

東京帝國大學教授  
工學博士

和田小六

發行所寄



工政會出版部

318-563

## 目 次

緒 言.....1

### 流體力學の梗概

空 氣.....2

流體に働く力, 完全流體.....3

流 線.....5

流體力學の基礎運動方程式.....6

基礎運動方程式の積分.....9

ベルヌーイの方程式.....11

ピトー管.....12

循 環.....14

渦 動.....18

### 翼 の 理 論

翼のまはりの循環.....25

翼に働く力.....28

流體の粘性と渦動の發生.....31

翼のまはりの循環の生因.....34

假 定	39
線渦と其速度場	41
直線渦と誘導速度	42
馬蹄形渦	45
揚力分布と随伴渦層	49
迎角の變化, 有効迎角	51
誘導抗力	53
随伴渦による誘導速度	55
揚力及抗力	58
循環の方程式	59
楕圓型揚力分布	61
空氣力學的係數	65
寸法効果	66
縦横比と誘導速度の關係	68
縦横比の換算式	69
實 驗	73



## 緒 言

翼の理論に就てお話をいたします。是は可成り面倒な問題でありまして、短時間に精しく御話する譯には行くまいと思ひますから、大體の要領だけを述べる事とします。

飛行機とは何であるか、と申しますと、之を簡単に申しますれば、大氣中に或る重量を支へ、且其中を運動することの出来る機構であります。此重量を支へる爲めに必要なものが翼 (Aerofoil) であります。此翼が重量を支へる能力を得ますのは、之に或適當な形を與へ、之を適當な速さで空氣中を運動させます際に起りますところの、翼と空氣との間の力學的の作用によるものでありますから、本問題は流體動力學の應用であるのであります。オイラー (Euler)、ラグランジュ (Lagrange)、ヘルムホルツ (Helmholz)、ケルビン (Kelvin)、キルヒホフ (Kirchhoff) 等有名な學者によつて、其基礎を築かれた數學的流體力學を、此最も新しい工學的發達である飛行機の翼の理論的解析に應用し、見事に成功したのは、主として獨逸ゲツテインゲン (Göttingen)

大學教授プラントル (Prandtl) の賜であります。

此翼の理論を理解しますのには、數學的流體力學の大要を知らなければなりませんから、先づ是に就て御話を致し、次でプラントルの翼の理論に入つて述べることに致します。

## 流體力學の梗概

### 空 氣

只今申しました様に、吾々は飛行機の翼と流體との相互作用に就て論ぜんとして居るのでありますが、此場合の流體は、申す迄もなく空氣でありますから、吾々は先づ空氣の物理的性質を知らなければなりません。空氣の物理的性質には種々ありませうが、其密度 (Density) 及粘性 (Viscosity) を以て空氣の性質を代表するものとします。御承知の通り、密度は一般に壓力と溫度によつて變化するものでありますが、粘性の方は溫度のみによつて變化するものであります。

普通に吾々が用ひて居る空氣の標準状態は、大氣壓が水銀柱 760 耗で、溫度が攝氏 15 度の時でありまして、其時の密度  $\rho_0$  と粘性係數  $\mu_0$  は次の様なものであります。

$$\rho_0 = \frac{1.225}{\text{米}^3}$$

$$\mu_0 = 0.00001785 \text{ 米-耗-秒 (絶對單位)}$$

1 米<sup>3</sup>の空氣の質量

一般に大氣壓が水銀柱 H 耗で、溫度が攝氏 t 度の時の密度  $\rho$  及粘性係數  $\mu$  は次の様な式で與へられます。

$$\rho = \rho_0 \frac{288}{273+t} \cdot \frac{H}{760} \quad \text{ポイルズールと定律}$$

$$\mu = \mu_0 \{1 + 0.00276(t-15)\}$$

### 流體に働く力、完全流體

吾々は是から空氣の運動を論ずるのでありますが、其場合に空氣の極く小さな微粒子を掴へまして、それに一般の力學の根本法則を應用して、運動の状態を調べるのであります。

御承知の通り、物體の運動を支配するものは、其質量と、是に働く力であります。但し流體は獨立に存在して居る質點と異ひまして、物質の連続的存在でありますから、其周圍の流體から受ける影響に就て考へなければならぬのであります。

其影響はどんなものであるかと云ふと、今流體の或微粒子をとつて考へますと、其表面に周圍の流體が作用して居ります。その一つは普通に所謂壓力 (Pressure) でありまして、表面に垂直であります。もう一つは流體の粘性によるものでありまして、表面に平行に、即ち表面内に働くものでありまして、普通に内摩擦力 (Internal friction) と稱へられて居るものであります。是等は何れも流體の分子が境界面を出入りするために生ずる運動量の移動によつて説明出来るのであります。

即ち、流體の微粒子の質量と之に働く壓力及粘性による力と、もう一つ之に働く外力、例へば重力の様なものを知れば流體の運動を知る事が出来るのであります。

空氣の粘性は極く小さなものでありますから、後で述べます様な特別の場合を除いては、之を近似的に粘性のない流體と考へて差支へないものであります。即ち空氣の微粒子が其周りの空氣から受ける力は、其表面に垂直な壓力のみであると考へてよいのであります。

つまり吾々は此處に空氣を粘性のない一つの假想的の流體として取扱ふのであります。勿論斯様な流體は實際には存在しないのであります。問題の數學的取扱いを簡單にするために假定をするのであります。斯かる假想的流體を完全流體 (Perfect fluid) と稱して居ります。

又空氣は壓縮性 (Compressibility) を有つて居りますから、前に述べた様に、それが受ける壓力によつて密度が變化するものであります。吾々の取扱ひます多くの場合では、此壓力の變化は極く小さいものでありまして、特別の場合、例へばプロペラの翼端の様に非常に速い速度で動いて居る所を除ては、空氣を不壓縮性流體 (Incompressible fluid) と考へて差支ないものであります。

## 流 線

普通飛行機は靜止して居る空氣の中を運動するのでありまして、空氣は遠くの方、つまり飛行機の影響を受けない様な遠方では靜止して居ります。然し問題は空氣と飛行機の相對的の作用によるものでありますから、飛行機の方が停止して居て、空氣の方が動いて居ると考へても差支へないのであります。又其方が數學的の取扱いが簡單になると云ふ利益があるのであります。

空氣の微粒子の運動の有様を表はすに、流線 (Stream-line) なるものを考へます。此流線なるものゝ定義は

「流線とは其方向が何處でも流體の運動の方向である様に引いた線である」

と云ふのでありまして、つまり各々の時に其切線の方向が、其點の流體の其時の速度と一致するのであります。或點に於ける流體の速度は、一般に時と共に變りますから、此流線なるものの形も時と共に變るものであります。

此流線なるものを、流體のある微粒子の通過した道筋を示すものと誤つて考へる事がありますが、一般の場合に流線は決して微粒子の路を示すものではありません。

流體の或定つた微粒子を擷へますと、是は時と共に其位置を變へますから、一つの曲線を描きますが、之は流線の一般の定義に

當嵌まるものでありませんで、之を流體の道筋 (Line of flow) と稱へます。

然し特殊の場合としまして、流體の運動の有様が時と共に變らない事があります。例へば或一點を見て居りますと、其處では流體はいつも同じ速度並びに方向を有つて居るやうな場合があります。かゝるものを定常流 (Steady flow) と稱しまして、吾々の取扱ひますのは此特殊の場合のみであります。

此定常流の場合には、流體は常に一定の決つた線を描くのでありますから、流線と道筋とが一致する譯であります。

只今申述べました様に、流線上の各々の點に於ける切線は其點の流體の速度の方向を示すものでありますから、流線を表します微分方程式は

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1)$$

即ち、 $v dx - u dy = 0$

となります。茲に  $u, v$  は夫々速度の、座標軸  $x, y$  の方向の成分であります。

#### 流體力學の基礎運動方程式

次に流體の微粒子を擱へまして、其運動に就て考へて見ます。その速度は一般に時と場所とによつて異ふ値を有つて居ます。即ち之を數學的に申しますと、時 ( $t$ ) と、場所  $i$  を換へれば坐標

$(x, y)$  の函数でありますから、之を次の様を書く事が出来ます。

$$u = f_u(x, y, t)$$

$$v = f_v(x, y, t)$$

之をテイラーの公式で展開しまして、高次の微分を含む項を除去しますと、

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

となります。此式の兩側を  $dt$  で除して書きかへますと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} (2)$$

となります。

此式の左側は夫々流體の微粒子が運動するにつれ其速度の變化する割合を示すものでありますから、取りも直さず流體の微粒子の有つ加速度であります。流體は或一つの點に就て見れば、其速度は時によつて異つた値を有ち、又或一瞬を考へれば、それが位置を變へる爲めに速度の變化がありますので、加速度は此二つの項から成立つて居るのであります。然し吾々の考へてゐる定常流では各々の點に於ける速度は時に對して變化しないのでありますから、(2) 式に於て、時の變化に關する項  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}$  は零となり

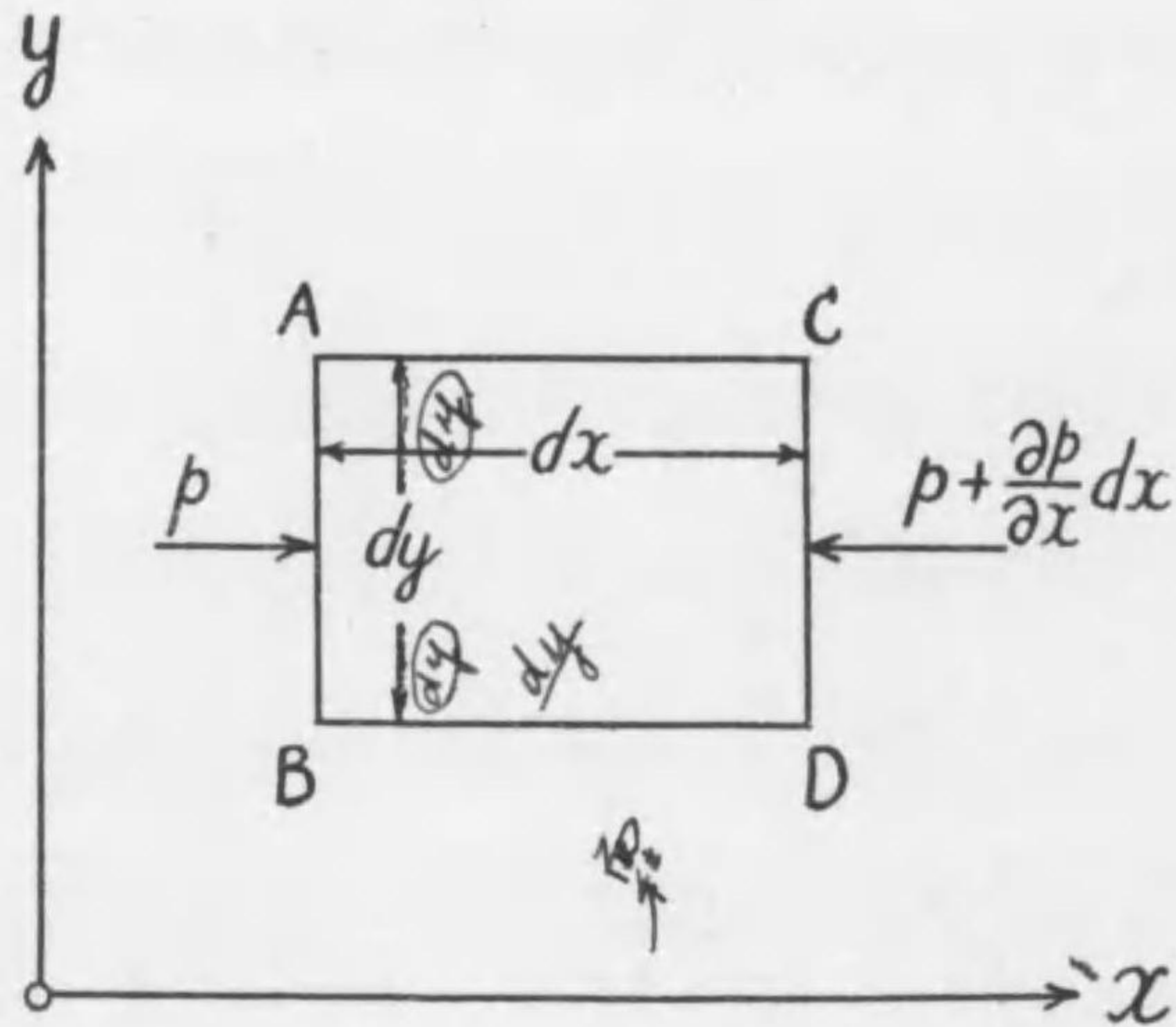


ます。

次に流體の微粒子をとつて、それに働く力を考へて見ます。

此流體の微粒子を矩形と考へて、先づ其四邊に働く壓力に就て考へて見ます。

第 1 圖



第1圖に示しました様にABDCを流體の微粒子とし、AB面に  $p$  なる壓力が働くとすれば、其反對側のCD面に働く壓力は、

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

で、此微粒子に其周囲の流體が及ぼす力の  $x$  方向の成分は、此二つの壓力の差に面積  $dy$  を乗じたものでありますから、

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy$$

となります。

又AC及BD面に就て同様の事が言へますから、 $y$  軸の方向の成分は

$$-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy$$

となります。

次に此粒微子の單位質量に働く力、例へば重力の様なものを  $X$   $Y$  なる成分を以て表はしますと、結局此流體の微粒子に働く力の座標軸の方向の成分は夫々次の様になります。

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 軸の方向に } & \left( \rho X - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \\ y \text{ 軸の方向に } & \left( \rho Y - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

先に流體の微粒子が有つ加速度を示す式(2)を得、只今之に働く力の式(3)を求めましたから、一般力學の法則を適用して其運動の方程式を次の様に書く事が出来ます。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

之をオイラーの基礎運動方程式と稱へます。

基礎運動方程式の積分

此基礎運動方程式を積分する爲めに、之を次の様に書き換へます。

(4)の第一式に  $v \frac{\partial v}{\partial x}$  を、第二式に  $u \frac{\partial u}{\partial y}$  を加へ、且つ減じて、少しく書き換へますと

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x} + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial y} - u \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \end{aligned} \right\} (5)$$

となります。茲に  $q$  は流體の合成速度 (Resultant velocity) を示すもので、

$$q^2 = u^2 + v^2$$

であります。

(5)式の各の式の兩側に夫々  $dx$ ,  $dy$  を掛けて加へ合せますと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} dq^2 + (vdx - udy) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ = -\frac{dp}{\rho} + Xdx + Ydy \end{aligned} \quad (6)$$

となります。

此式の左側を見ますと、其第二項は  $(vdx - udy)$  なる式を含んで居りますが、之は先に述べました流線の微分方程式 (1) の左側でありますから、今吾々が或一つの流線に就て考へて居ると假定すれば、其條件として流線の微分方程式 (1) が成り立たなければなりませんから、(6) 式の第二項は零となります。

又同じく (6) 式の左側の第二項の他の式  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  は、之は後に精しく申しますが、流體の微粒子が有つて居る廻轉速度の

二倍を示すものであります。流體の運動は其微粒子が廻轉運動 (Rotational motion) をして居る場合と、然らざる場合とに區別して考へられますが、廻轉運動が無いとしますれば、(6) 式の左側の第二項は矢張り零となります。

つまり流體の運動が非廻轉運動 (Irrotational motion) であるか、又は問題を一つの流線にのみ就て論ずる場合には、(6) 式の左側の第二項は零となるのであります。

そうしますと (6) 式は容易に積分する事が出来まして、之を次の様に書く事が出来ます。

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} - \int (Xdx + Ydy) = C \quad (7)$$

但し  $C$  は定數であります。

#### ベルヌーイの方程式

今流體を空氣と考へますと、其密度は極く小さいものでありますから、其質量に比例する力、即ち  $X$ ,  $Y$  と云う様なものは他の面積に比例する力、即ち壓力によるものに較べて極く小さいものでありまして、之を全く考へないで差支へないのであります。即ち (7) 式を次の様な簡単な形に書く事が出来るのであります。

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} = C \quad (8)$$

是をベルヌーイの方程式 (Bernoullis' equation) と申します。

是は空氣の單位質量の有つエネルギーの和が一定である事を示

して居ります。但し此時に空気を粘性のない完全流體即ち其運動にエネルギーの損失がないとして取扱つて居る事を忘れてはなりません。

此式は水力學に於て最も重要な關係を示すものでありまして、種々の方面に廣く應用されて居るものであります。

此式から直ぐ分ります事は、流體中で壓力が低い所では速度が大きく、高い所では小さいと云う事でありまして、つまり壓力と速度との關係が與へられたのであります。流體の運動の速度を知ることは吾々の屢々必要を感じますことで、殊に實驗航空學に於ては必要缺くべからざることでありまして、(8)式の關係から速度を知る爲めに壓力を測定してもいいと云う事になります。此壓力と速度との簡單な關係を直接に應用しましたのが、流體の速度を測定しますのに多く用ひられて居るピトー管 (Pitot-static tube) であります。

### ピトー管

今流體の速度が零の點に於ける流體の壓力を  $p_0$  としますと、(8)式から

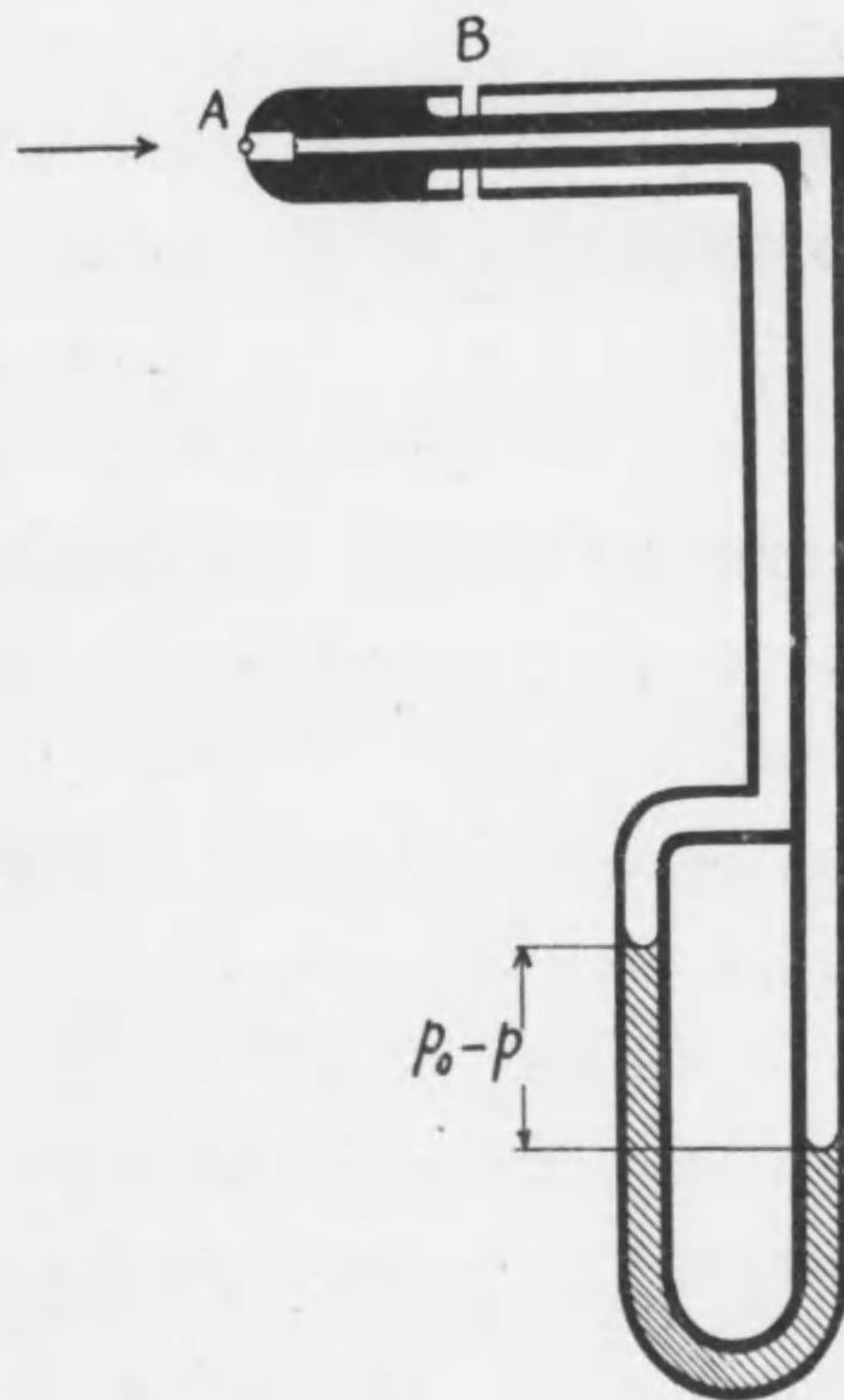
$$\frac{p_0}{\rho} = C$$

となります。此定數の値を (8) 式に適用すれば次の如き關係が得られます。

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho q^2 \quad (9)$$

ピトー管は第2圖に示した様な構造で、之を流體の流れの方向に平行に置きますと、Aは岐點 (Stagnation point) で、流體は靜止して居りますから、其處の壓力は  $p_0$  であり、又Bでは流體は  $q$  なる速度を有ち、其處の壓力は  $p$  でありますから、AとBとに

第 2 圖



於ける壓力の差が分れば、 $q$  なる速度を見出す事が出来るのであります。此B點の速度  $q$  は、流體の一般速度（相對的にはピトー管自身の速度）と略々一致して居ます。

### 循環

次に流體の循環（Circulation）と云うものを考へます。之は何んであるかと云ふと、概念が掴みにくいのでありますが、次の様に定義されたものであります。

「或閉曲線上にとつた次の如き線積分（Line integral）を此閉曲線のまはりの循環と稱へる」

$$\int (u dx + v dy) \quad (10)$$

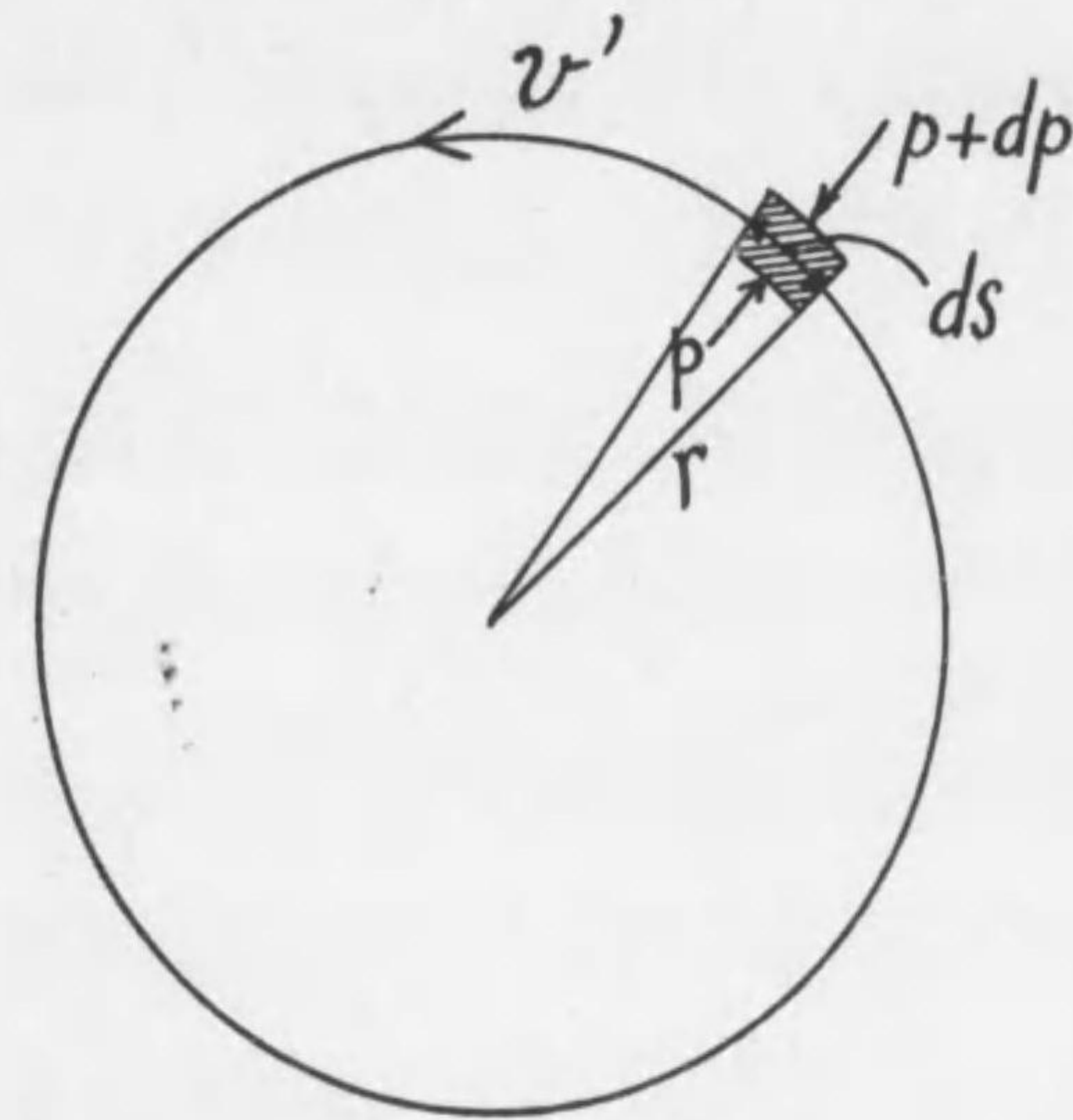
つまり或閉曲線のまはりの循環とは、其閉曲線を一周りしながら、各々の點で其處の線素片と線素片の方向の流體の分速度との積を作り、夫等を加へ合せたものであります。

此處に流體の微粒子が回轉運動なしに、定常速度  $v'$  で一つの圓を描いて居る場合を考へます。此速度  $v'$  は一般に此圓の半徑  $r$  のみの函數であります。

所で此微粒子が斯様に定常的に圓を描いて居る爲には、遠心力と周圍の流體が此微粒子に及ぼす壓力とが釣合はなければなりません。

壓力による圓の半徑の方向の力は、圖から直ちに分ります様に

第 3 圖



$$-\frac{dp}{dr} dr ds$$

であります。又遠心力は

$$\frac{\rho v'^2}{r} dr ds$$

でありますから、

$$\rho \frac{v'^2}{r} - \frac{dp}{dr} = 0 \quad (11)$$

なる關係が成立たなければなりません。

又流體には回轉運動がないと云ふ假定から、ベルヌーイの定數  $C$  は、一つの流線に限られない、共通の一般的定數であります。

此場合にベルヌーイの方程式は

$$\frac{1}{2}v'^2 + \frac{p}{\rho} = C$$

でありますから、之を  $r$  に就て微分しますと

$$\rho v' \frac{dv'}{dr} + \frac{dp}{dr} = 0$$

となります。

之に (11) 式の関係を入れますと

$$\frac{dr}{r} + \frac{dv'}{v'} = 0$$

となり、この簡単な微分方程式を解きまして

$$\log r + \log v' = \text{Const.} \quad (12)$$

或は

$$rv' = \text{Const.} \quad (12')$$

なる関係が得られます。

さて、只今述べました様な流體の微粒子が夫々回轉運動なしに圓を描いて居る場合に、圓の中心を含む或閉曲線のまはりの循環を考へて見ます。

圓周上の各々の點に於て、流體の有つ速度は  $v'$  でありますから、今圓周の線素片を  $ds$  としますと、前述の定義によりまして、循環は、

$$\int_C v' ds$$

であります。茲に  $C$  は圓周上に積分する事を示すものとします。

圓周上に  $ds$  なる線素片を跨ぐ二つの半徑の間の角を  $d\theta$  とし

ますと

$$ds = r d\theta$$

でありますから、循環は

$$\text{循環} = \int_C v' ds = \int_0^{2\pi} v' r d\theta \quad (13)$$

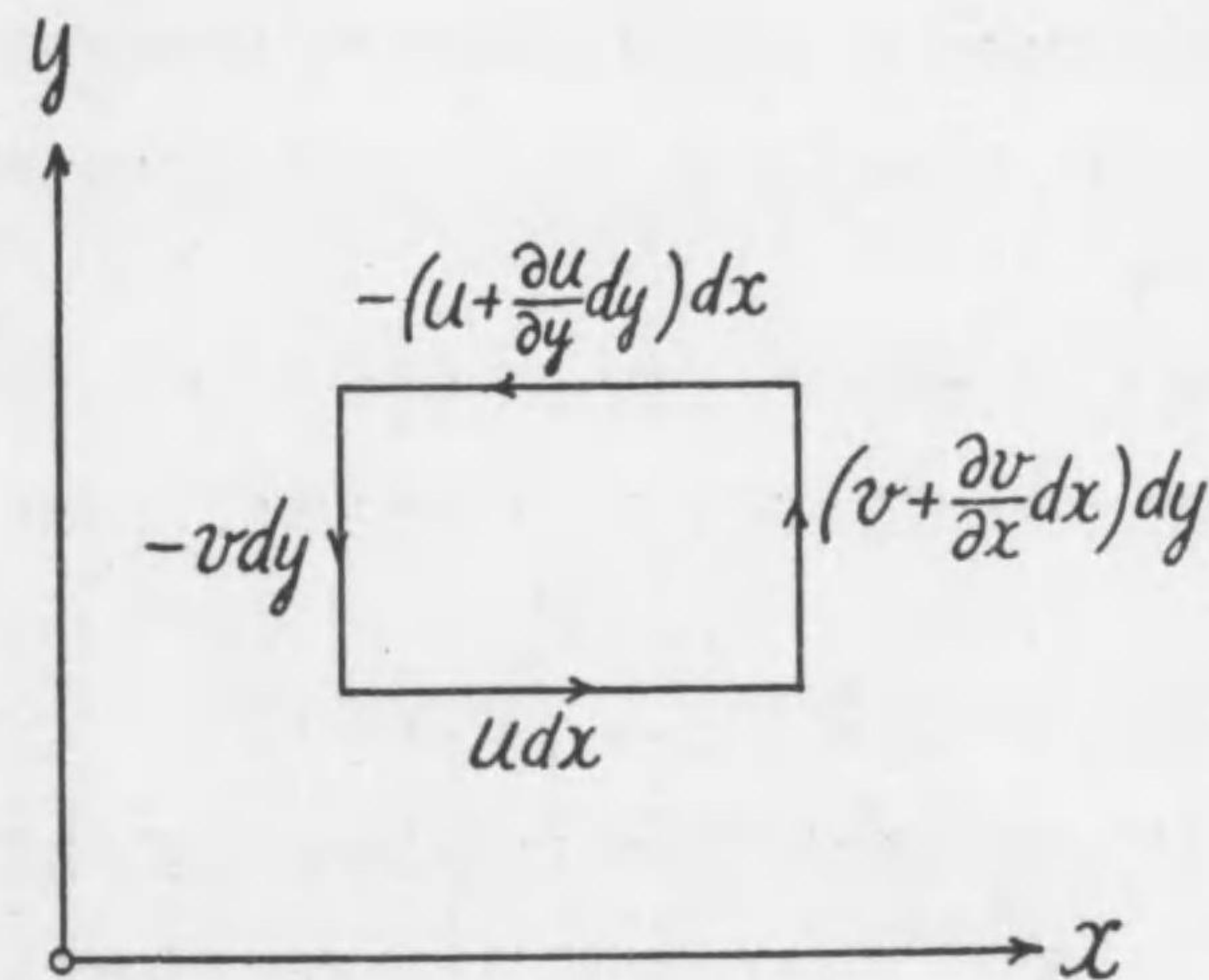
となります。所が (12') 式から  $rv'$  は定數である事が分りますから、(13) 式は次の如く書く事が出来ます。

$$\text{循環} = 2\pi v' r = \text{定數} \quad (14)$$

つまりかゝる運動をして居る流體の循環は一定であると云う事が分ります。

次に第4圖に示した様に、流體の極めて小さな矩形の部分をと

第4圖



つて、之に循環の定義を適用して見ます。

此矩形を時計と反対の方向に廻はつた時の循環を  $d\Gamma$  で表はしますと、圖から直ちに分ります様に次の如くなります。

$$\begin{aligned} d\Gamma &= udx + \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy \\ &\quad - \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx - vdy \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

然るに  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  は流體の小さな部分が有つ回轉速度を示すものでありますし、又  $dx dy$  は其面積を示すものでありますから、一般に流體の極く小さな部分の循環は、其回轉速度の二倍と面積の積で表はされる事になるのであります。

即ち今回轉速度を  $\omega$ 、面積を  $dS$  で表はしますと

$$d\Gamma = 2\omega dS \quad (16)$$

となります。

### 渦 動

此回轉して居る流體の部分を渦 (Vortex) と稱し、そのまはりの循環、即ち回轉速度の二倍と、面積の積を以て其強さを表はし、之を渦の強さ (Strength of Vortex) と申します。

只今流體の回轉運動に就て述べましたが、一般に流體の運動を大きく二つに分け、其微粒子が回轉運動を有つて居る場合と居な

い場合とに區別して考へる事が出来ます。前者を流體の回轉運動 (Rotational or Vortex motion of fluid) と稱し、後者を流體の非回轉運動 (Irrotational or Potential motion of fluid) と稱へます。

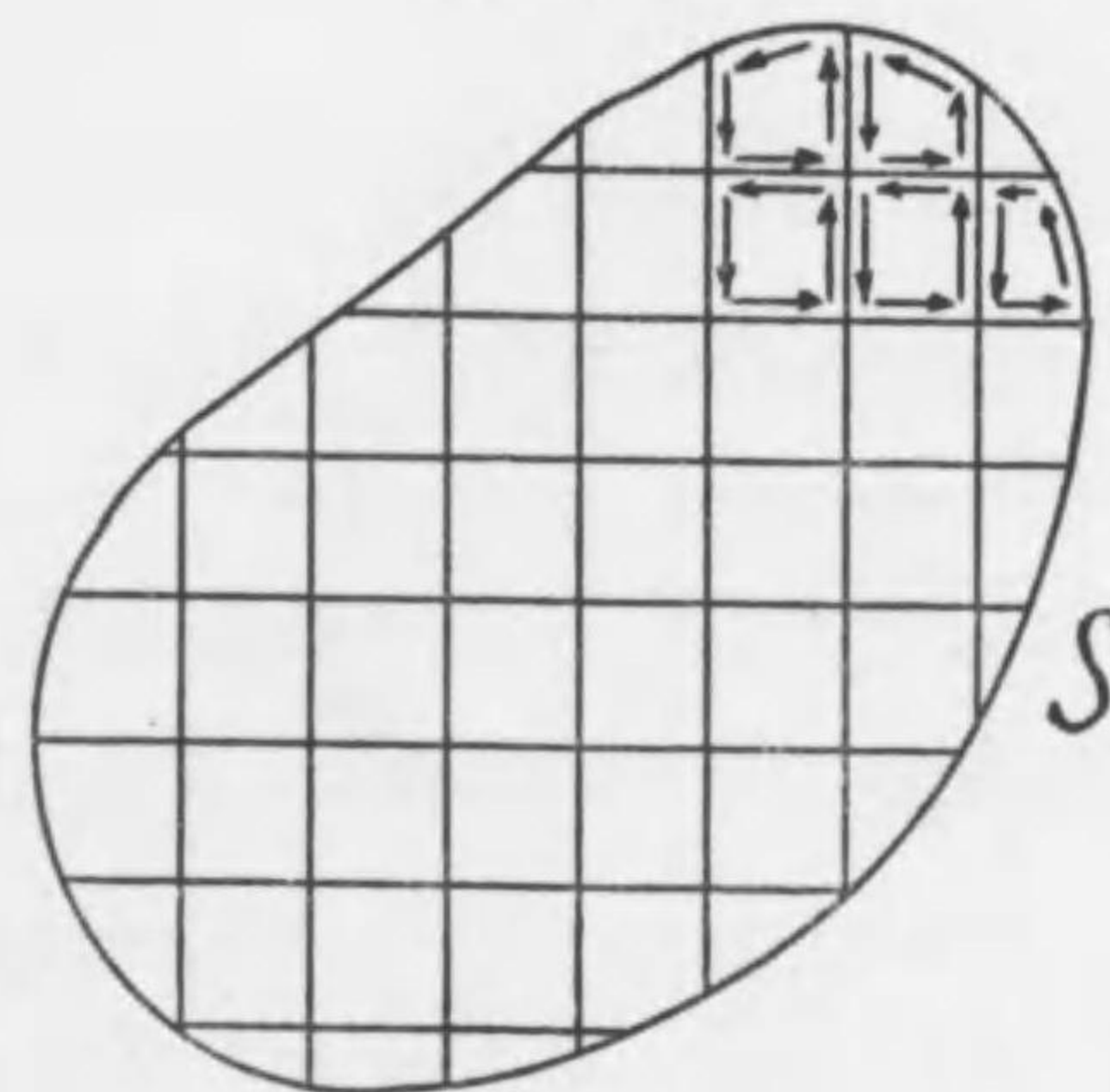
流體に回轉運動がある場合に、其流體は渦動 (Vortex motion) をして居ると稱し、其回轉速度の二倍即ち

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (17)$$

を渦度 (Vorticity) と云ひます。

でありますから、只今申した様に流體の小さな部分の循環は、渦度と面積との相乗積で表はされるのであります。之は流體の極く小さな部分に就て證明された事柄であります、之を次の様に

第 5 圖



して、任意の大きさの部分に應用する事が出来ます。

此處にSなる曲線で圍まれた或領域を考へます(第5圖)。

此領域内に在る流體は渦度を有つ部分もあり、又有たぬ所もあるとします。

今此領域の内部を圖に示しました様に極めて小さな碁盤目に分け、其各々の碁盤目に就て其まはりの循環を考へて見ます。之は前に述べました様に、各々の碁盤目のまはりにとつた速度の線積分でありまして、領域全體のまはりの循環は勿論境界線S上にとつた線積分であります。

然るに隣合せの二つの目に就て夫々循環を考へて見ますと、其境界線上即ち兩方の目に共通な線上では、積分をやる際に一つの目に就て行つた積分の方向と、も一つの目に就て行つた積分の方向は反對で、且つ其値は等しくありますから互に消し合つて、結局各々の目のまはりの循環は其二つの目を一つと考へて其まはりにとつた循環に等しく、逆に二つの目のまはりの循環は、之を二つに分け各々に就てとつた循環の和に等しい事になります。

此論法を進めて行きますと、領域内の各の目のまはりの循環の代數和は、領域の境界線Sのまはりの循環に等しくなります。所で碁盤目の各々に就てとつた循環は、其目を極く小さくとれば其面積と其處の渦度との積即ち渦の強さによつて表はされますか

ら、或有限の領域のまはりの循環が求められることになるのであります。

即ち或有限の面を境する閉曲線のまはりの循環は、其面内に存在する渦の強さの代數和に等しいことになります。

之を數式で書きますと、

$$\Gamma \equiv \int_S (u dx + v dy) = \iint_A \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (18)$$

となります。茲に $\Gamma$ はSなる曲線で圍まれた領域Aのまはりの循環で、線積分はSに就てとり、面積分はAに就てとるのであります。

ある閉曲線のまはりに循環があれば、夫が包んだ領域内の流體に渦が存在し、又循環が零である場合には、流體は渦がないか、又は渦があつても其強さの代數的和が零であるか、であります。

流體に渦があると云ふ事は、其小さな部分が回轉運動をして居る事なのであります。今考へ易い様に、此流體の微粒子の形を一つの圓として考へますと、其渦度、即ち回轉速度を變へ様とする力は、圓周上の切線の方向に働く力であります。即ち境界面内に働く力であります。然るにかゝる力は前にも述べました様に、流體の粘性に依つて生ずるものでありますから、只今論じて居る様な粘性のない完全流體に於ては、かゝる作用は起り得ないので

あります。即ち流體の有つ渦度は完全流體に於ては一定不變なものであります。言ひ換へれば、完全流體中に於て、渦度は一度與へられたならば變化する事なく、又渦度のない流體は、夫が完全流體である限りは決して渦度を持ち得ないのであります。

併し實際の現象として、吾々は屢々流體の渦動を見るのでありますが、此回轉運動が如何にして生ずるかと云ふことは、何れ後で申しますが、要するに完全流體なるものは實際に存在するものではなく、如何なる流體でも多少の粘性があるからであります。

今述べました様に、渦度と云ふものは流體の微粒子にくつ付いたものでありますから、夫と共に運動するものであると云ふ事は容易に考へられるのであります。

今此處に渦度を有つた流體の部分があるとしまして、之を包む曲線を考へますと、其まはりの循環は前に述べました様に、或値を有つて居ます。今此曲線は流體と共に運動するものであると考へます。即ち曲線の各々の點は定つた流體の微粒子に固着して居ると考へるのであります。然れば、流體の動くに従つて此曲線の形は變りますが、夫を形造つて居る流體はいつも同じものでありまして、流體の連続性から、此曲線は常に同じ流體を包んで居ると云ふ事が云へるのであります。言ひかへれば、或時此曲線内にあつた流體が、或時は曲線の外にあると云ふやうな事はないので

あります。

又只今述べました様に渦度と云ふものは、流體の微粒子にくつ付いたものでありまして、流體自身が一方へ行つて、渦度は他方へ行くと云ふ様なことは決してない。又渦度は一定不變のものでありますから、此流體と共に動く閉曲線には常に同じ渦度を其内に包んで居ります。又(18)式に示した關係から、かゝる曲線のまはりの循環は常に一定不變であると云ふ事がわかります。

でありますから、完全流體に於ては、流體と共に運動する或閉曲線のまはりの循環は一定不變のものであり、且つ其値は此曲線が包む流體中に存する渦の強さの代數和に等しいのであります。

此處で間違へないやうにしなければならぬ大切なことは、この曲線が流體と共に動くことと云ふこととあります。流體の運動と無關係に考へた曲線に就ては此議論は勿論成り立たないのであります。

次に此處に渦があるとし、前の場合とは異つて流體の運動とは無關係に或閉曲線を考へて見ます。即ち流體の微粒子は此曲線を横切つて自由に運動が出来るものとします。そうしますと、或時に於ける此曲線のまはりの循環は、夫が包含して居る渦の強さの和に等しいものでありますから、或定つた値を有して居ます。所が流體は曲線には無關係に勝手に運動をやるのでありますから、



曲線を横切つて領域外に飛出すものもあり得るわけでありませう。しかし渦度と流體は決して離れられないものでありますから、流體と共に渦度も曲線外に出得るのでありますから、かゝる曲線は時々によつて、其内に異つた量の渦の強さを包含し得、従つて其まはりの循環も時々に変ひ得るのであります。それならばどれだけ異ふかと云ふと、循環は各々の時に於て、其曲線が包む渦の強さに等しいものでありますから、或時と次の或時の間に、此曲線のまはりの循環が異つた値を有つたとすれば、その差は其間に此曲線を横切つて出入した渦の強さの代數和に等しいわけでありませう。

流體と共に運動する閉曲線のまはりの循環は一定不變であるが、流體と共に運動しない閉曲線のまはりの循環は變化し得ると云ふ事は、翼を論ずる上に頗る大切な事でありませう。

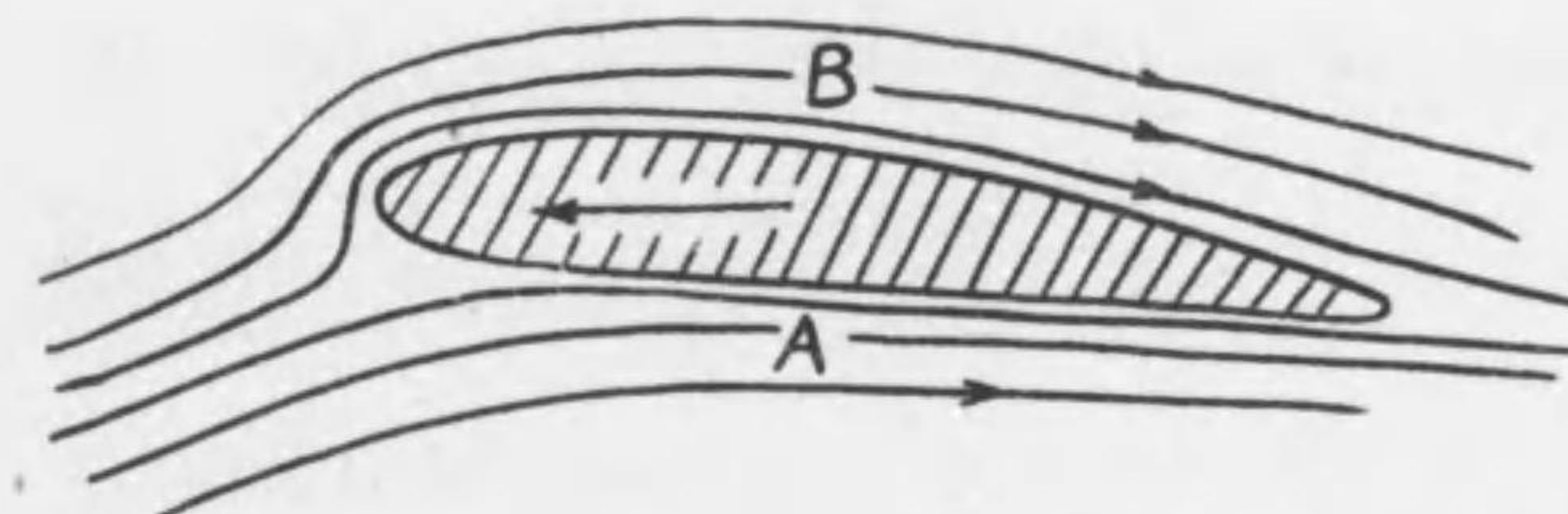
## 翼の理論

次に翼の理論の本論に入つて述べることにします。

### 翼のまはりの循環

飛行機の翼は其目的とするところは何んであるかと云ふと、空氣との動力學的相對作用によつて、或重量を空中に支持せんとするものであります。此重量を支持する爲めには、如何なることが必要であるかと云ふに、重力と反對に上の方向の力が働かなければなりません。即ち翼の上と下の面に壓力の差がなければならぬのであります。

第 6 圖

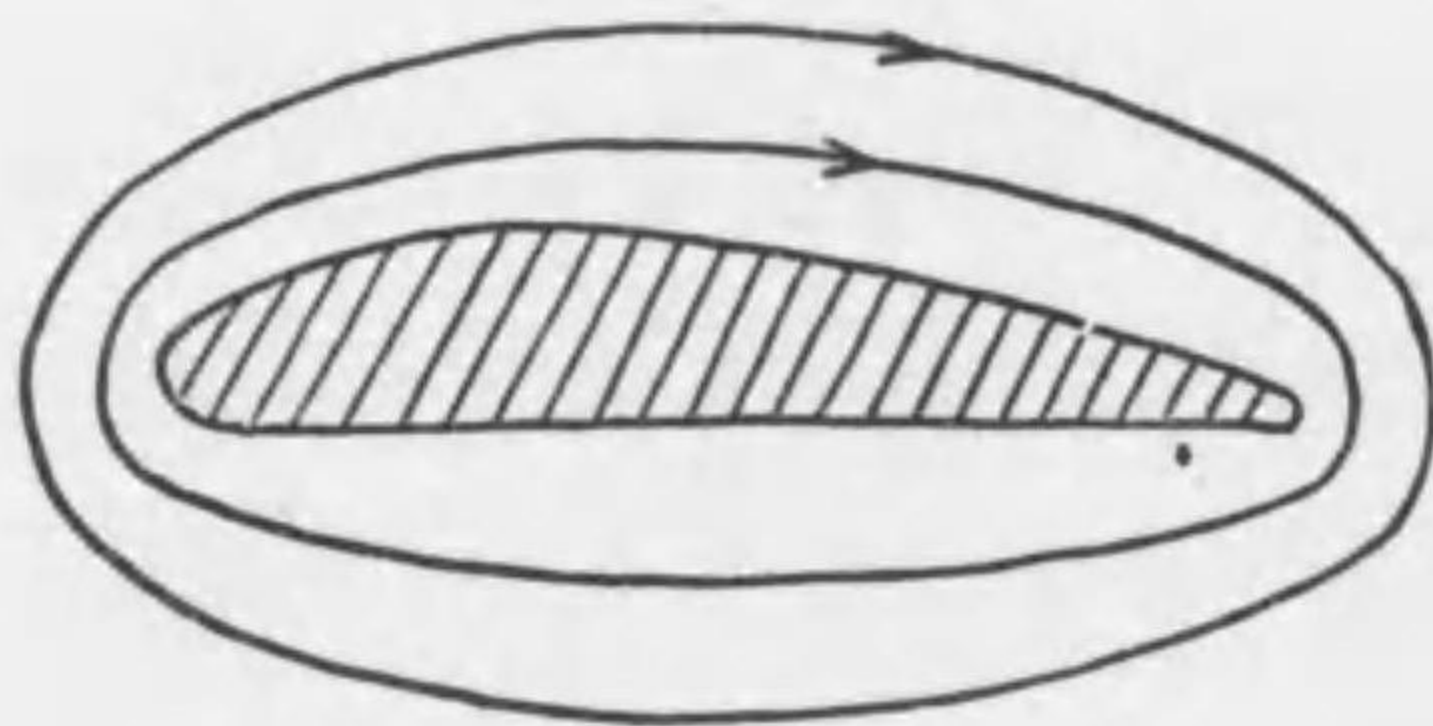


第6圖に示した様に、翼が或速度を以て矢の方向に動いて居る——之は前にも述べました様に、翼は停止して居て空氣が反對の方向に動いて居ると考へても差支へはない——としますと、翼の下面、即ちA面に働く壓力は、其上面、即ちB面に働く壓力より大きくなければならぬ。然るに前に述べましたベルヌーイの

方程式から、壓力の小さい所では空氣の速度が早く、壓力の大きい所では遅いのでありますから、空氣の流れの速度は翼の下面では低く、其上面では高くなければなりません。但し此壓力の大きい小さいと云ふ事、又速度の高い低いと云ふ事は、翼から遠く離れて其影響のない様な點に於ける空氣の壓力及速度——之は翼自身が靜止せる空氣に對する速度に等しい事は明かでありまして——に較べて云ふ事でありまして。

所で翼が揚力 (Lift) を得る爲の此壓力差、即ち翼の上下兩面

第 7 圖



に沿ふての流體の速度に差のあることは、如何にしたら出来るかと云ふことに就て、吾々は次の様に考へても良いのではないかと思ひます。

翼の前方から翼の運動の速度に相當する空氣の一樣の流れがありまして、之と同時に翼のまはりに第7圖に示したやうに、流體の循環運動があるとします。そうすると此一樣の流れと循環運動

の合成速度は翼の上面では其和となり、下面では其差となりますから、上面の速度は一樣の流れの速度、即ち翼自身の速度より増し、下面では反對に減りますから、ベルヌーイの方程式から上下面間に壓力の差を生じ、結局或重量を空中に支持する事が出来ることとなります。

翼のまはりの流體運動は、上述の様に循環的流體運動から成立つて居るのでありますから、翼を包んでとつた閉曲線のまはりの循環が或値を有つて居ります。そうしますと此閉曲線内には、之亦前に述べましたことから、渦度を有つた流體、即ち渦が存在すると考へられるのであります。かゝる特性を有つた流體の存在の原因は翼にあるのでありますから、吾々は此處に大英斷を以て、翼の代りに其處に固定した、翼の有つ循環と同じ循環を有つた渦を考へる事とします。つまり流體中には固體と云ふ異分子は無くなつて吾々の考へて居る場所は流體で満たされて居るが、其一部が或特種な性質を有つて居ると考へるのであります。

要するに、流體中に一般性質を全く異にした固體があると云ふことは、取扱ひが非常に面倒なものであります。異つた分子が混つて居ると云ふことは、何んでも面倒なものであります。併し今等しい結果を與へる様な流體の性質が存在するならば、非常に取扱ひ易いではないかと云う事は容易に想像され、又實際にそうで

あるのであります。

渦なる特種の性質を有つた流體の部分が周圍に及ぼす影響は、恰も翼が其處に存在して其周圍に及ぼす影響と等しいのでありますから、前者を以て後者を代表させても差支へないのであります。是は非常に亂暴な假定の様であります、此假定から出發して得た結果はよく實驗の結果と合致して居るのであります。

### 翼に働く力

そこで吾々は翼を一つの渦で置換へたと考へます。其まはりの循環は、前に述べました様に渦の強さ、即ち渦度と面積の相乗積で表はされるものであり、又吾々の考への要點は此循環にあるのでありますから、今此渦度を有つた流體の部分の占める面積を無限に小さくし、しかし其渦度を無限に大きくして、其相乗積は一定の有限値即ち翼の有つ循環に等しい値を有つ様にしても差支へないのであります。即ち翼を一つの線渦 (Line vortex) で置換へ之を流體中の一つの特異點 (Singular point) と考へるのであります。

流體力學の基礎方程式 (4) を再び書きますと

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \end{aligned} \right\} (4)$$

であります、此方程式で X, Y は單位質量に働く力の成分であります、只今申しました翼を代表する渦度を有つた流體の部分が翼の位置に固定して動かないためには、この流體の部分に外から力が加はらなければなりません。其分力が X, Y でありまして、つまり翼に働く力と等しくて、反對の向きのものであります。

此二つの式を、之も前に述べましたが、書きかへますと次の様になります。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= X \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) - u \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= Y \end{aligned} \right\} (19)$$

先程申しました様に、吾々は翼を一つの線渦、即ち流體中の特異な一點と考へるのであります、今此處では先づ此渦度を有つた流體の部分が極く小さな面積  $dS$  を占めて居ると考へます。

(19) 式の各々の式の兩側に夫々  $\rho dS$  を掛けますと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho dS + \rho v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS &= \rho X dS \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho dS - \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS &= \rho Y dS \end{aligned} \right\} (20)$$

となります。

渦度と面積を掛け合はしたものは、前に説きました様に、渦の強さ即ち其まはりの循環を表はします。之を  $\Gamma$  とし、又  $-\rho X dS$ ,  $-\rho Y dS$  は夫々翼に働く力の分力で、之を夫々  $F_x$  及  $F_y$  で表はしま

すと、(20) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho dS + \rho v \Gamma &= -F_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho dS - \rho u \Gamma &= -F_y \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

となります。

さて其處で、渦度を有つ流體の占める面積  $dS$  を漸次に小さくして、結局吾々の假定したように其面積を限りなく零に近づけ、翼を一つの線渦と考へる様にしますと (20') は次の如くなります。

$$\left. \begin{aligned} -\rho v \Gamma &= F_x \\ \rho u \Gamma &= F_y \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21) の第一の式の兩側に  $u$  を、第二の式の兩側に  $v$  を夫々掛け、加へ合せますと、

$$uF_x + vF_y = 0 \quad (22)$$

となります。

所が  $F_x, F_y, u, v$  は夫々翼に働く力  $F$  及其處の流體の速度  $q$  の成分でありますから、夫々夫等の方向餘弦 (Direction Cosine) に比例するものであります。でありますから、(22) 式の關係から初等解析幾何學の教ふる様に、翼に働く合成力の方向は、其點の流體の合成力の方向に直角であるとする事が分るのであります。

即ち吾々は此處に

「翼に働く力の方向は、其點に於ける流體の流れの方向に直角なり」

と云ふ非常に大切な結果を得たのであります。

次に (21) 式の兩側を夫々自乗して加へ合せますと、

$$\rho \Gamma q = F \quad (23)$$

となります。之は翼に働く力と、其點に於ける流體の速度、密度及翼のまはりの循環の間の關係を示すものであります。即ち

「翼に働く力は、其點の流體の速度、密度及翼のまはりの循環の相乗積に等し」

と云う之亦極めて大切な結果を得たのであります。此關係を普通クツタ・ジュ・コウスキー (Kutta-Joukowski) の式と申します。

でありますから、今翼のまはりの循環と、流體の密度と、速度が與へられて居れば、吾々は容易に翼に働く力の大きさと、其方向を決定する事が出来るのであります。

#### 流體の粘性と渦動の發生

前に述べました様に、翼が揚力を有つて居る爲めには其まはりに循環が必要でありますから、其處には渦が存在しなければならない。即ち翼を固定線渦で代表させて、上記の様な簡単な關係を得たのであります。

所で此處に一の問題があります。それは吾々は今迄空氣を完全

な流體として取扱つて来たのでありますが、前に述べました様に、完全流體は粘性がないのでありますから、始めから渦度が存在しない限り循環は発生し得ないのであります。所で翼は最初は止つて居るのであり、此停止状態では確かに循環を有つて居ないのでありますから、完全流體の理論からは、揚力に必要な此循環の発生を説明する事が出来ません。

そこで吾々はどうしても、流體の粘性と云うものに就て考へなければならなくなるのであります。又實際の空氣は決して完全流體ではなく、多少の粘性を有つて居るものであります。只此粘性を考へに入れると、數學的の取扱いが非常に面倒になるので便宜上其影響の餘り大きくないところでは、之を考へないと云う事にし、又それで差支へないのでありますが、實際問題としてこれを考へなければならぬ様な場合があるのではないか。若し其様な場合があるならば、之によつて完全流體に於ては不可能の事である循環の発生と云ふ事が説明出来るのではないか、と云う考へから、次に粘性を有つた流體の運動と固體の關係に就て調べて見やうと思ひます。

抑も流體の粘性なるものは、流體中に假想した面を横切つて其分子が運動する時、運動量の移動があるために生ずるものであつて、流體の隣接した部分に相對的速度がある場合に、其境界面内

に働く互を引摺らうとする力であります。

此處に粘性を有つた流體が  $x$  軸の方向に  $u$  なる速度で流れて居るとし、又  $u$  なる速度は夫に直角の方向、即ち  $y$  軸の方向には異つた値を有つと考へます。さうしますと、 $y$  軸の方向に速度  $u$  が變化する割合は  $\frac{du}{dy}$  であります。今  $\mu$  を以て流體の粘性係數 (Coefficient of viscosity) を表はすものとしますと、粘性による力は單位面積に就て

$$\mu \frac{du}{dy}$$

となります。つまり吾々は流體の粘性係數なるものを、かく定義するのであります。

流體中に固體があります場合に、其表面では、流體との間に相對的速度がない、即ち流體は固體の表面に附着して居ると考へるのが至當であります。

又粘性の小さな流體では、固體から極く僅か隔つた所で、流の有様は之を完全流體として取扱つた結果とよく合致して居ます。でありますから、粘性流體が固體に沿つて流動する場合には、どうしても流れの方向に直角に速度の變化がなければならぬわけであり、其處に流れの方向の力が働く事になります。

所で此力は、只今述べました様に、其處の流體の速度の勾配と粘性係數の積で表はされるのでありますから、たとへ粘性係數は

小さくても、速度の變化の急な所では此力が相當の値を有つことになるのであります。

### 翼のまはりの循環の生因

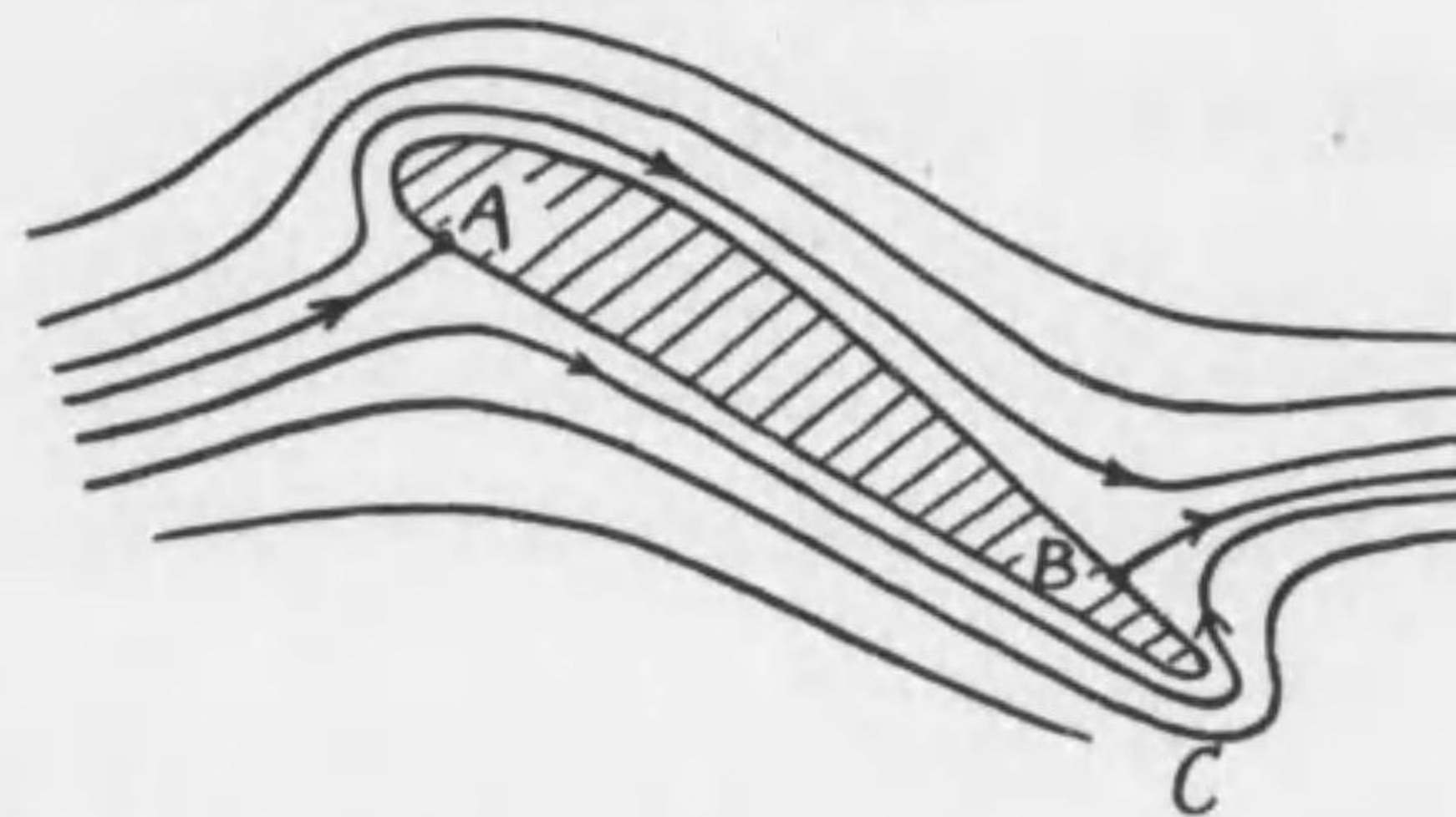
それで翼の運動の場合に於て——普通の飛行状態に於て——非常に大きな急激な速度の變化と云う事は考へられないが、或特殊の場合に其様な事が起りはしないだらうか、と考へて見ます。

今翼が停止の状態から動き始める場合を考へて見ます。流體の運動は、翼の運動のみによつて支配されるのでありますから、翼が停止して居る場合には、流體にも運動は起り得ないのであります。翼のまはりに循環なるものは存在しないのであります。

翼が動き始めると流體にも運動が生じます。所で翼の極く最初の動き始めの瞬間を考へて見ますと、流體の運動の速度は、到る所無限に小さいのでありますから、其勾配も小さく、従つて粘性による作用も小さく、流體は瞬間的ではあります、完全流體の様な運動をやります。此事實は固體の流體中に於ける動き始めの瞬間を寫真にとる事によつて、實驗的に説明する事が出来ます。

始動の瞬間に於て翼のまはりの流體の運動は完全流體中に於けるものと同様なのであります、完全流體中に於ける翼のまはりの流體の運動の一般的の形は第8圖に示した様なものであります。A, Bなる二つの岐點 (Stagnation point) があつて、此

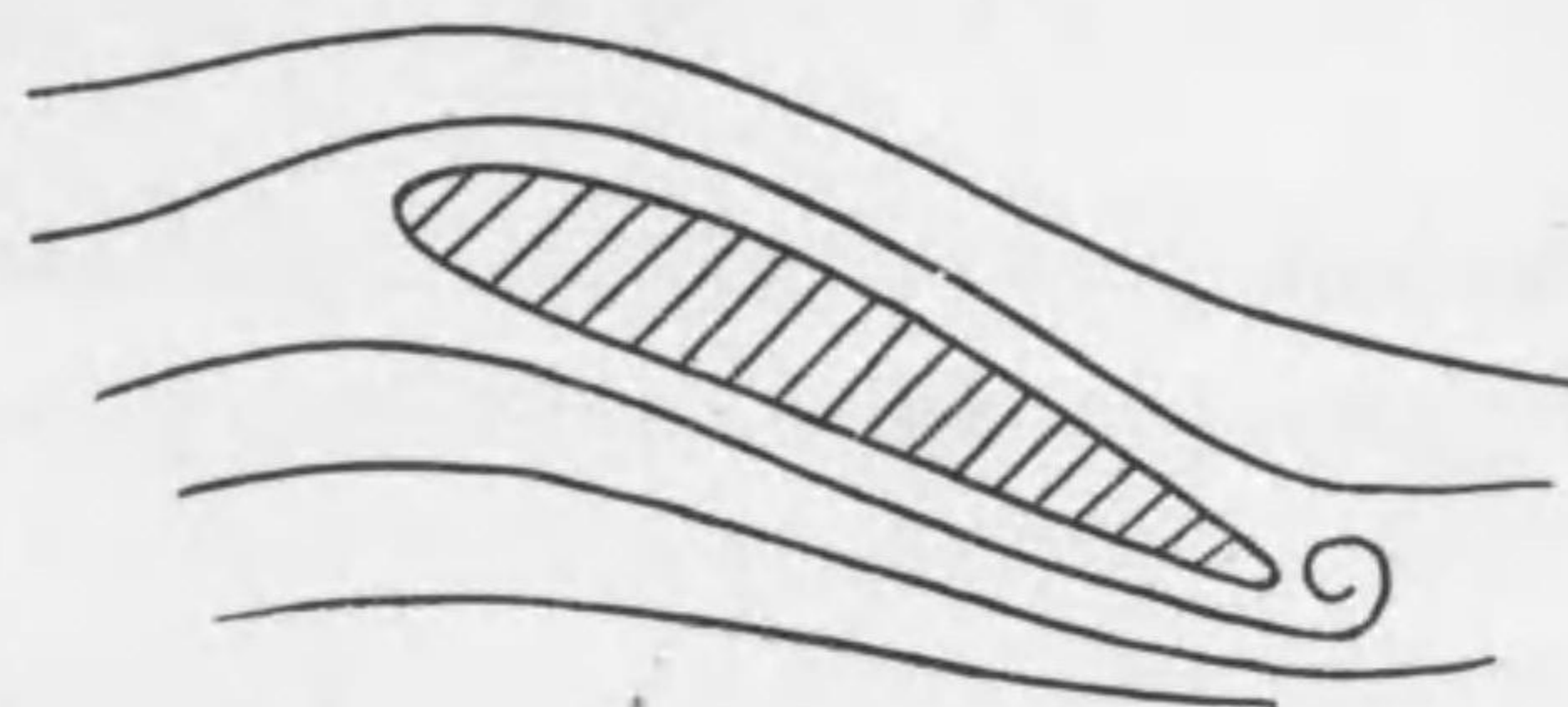
第 8 圖



處で流線が二つに分岐するのであります。でありますから、翼の下面に沿つて來た流線は、翼の後縁 (Trailing edge) をまはつてBに達しなければなりません。

翼の後縁と云ふものは、御承知の通り一般に尖つた形をして居ります。所が流體が尖つた所をまはる時には、其速度が非常に大きくなるのでありますから、翼の後縁Cには非常に大きな速度の勾配が出来ますわけでありますから、たとへ流體の粘性は小さ

第 9 圖



くても、其處には大きな粘性による力が働いて、後縁をまはらうとする流體に第9圖に示す様に回轉運動を與へ、其處に渦を生ずることになるのであります。此渦、即ち流體に回轉運動が生ずると云う事は、恰も繩などの運動の方向を變へる時に其處に滑車を置くと、運動が圓滑になると同じ様なもので、此渦の爲めに翼の後縁のまはりの流體の運動が緩和されるのであります。

第 10 圖



第10圖は航空研究所の水槽に於て翼の始動の瞬間を撮影したものでありまして、只今述べました渦の發生して居る有様がよく撮れて居ります。(河田所員撮影)

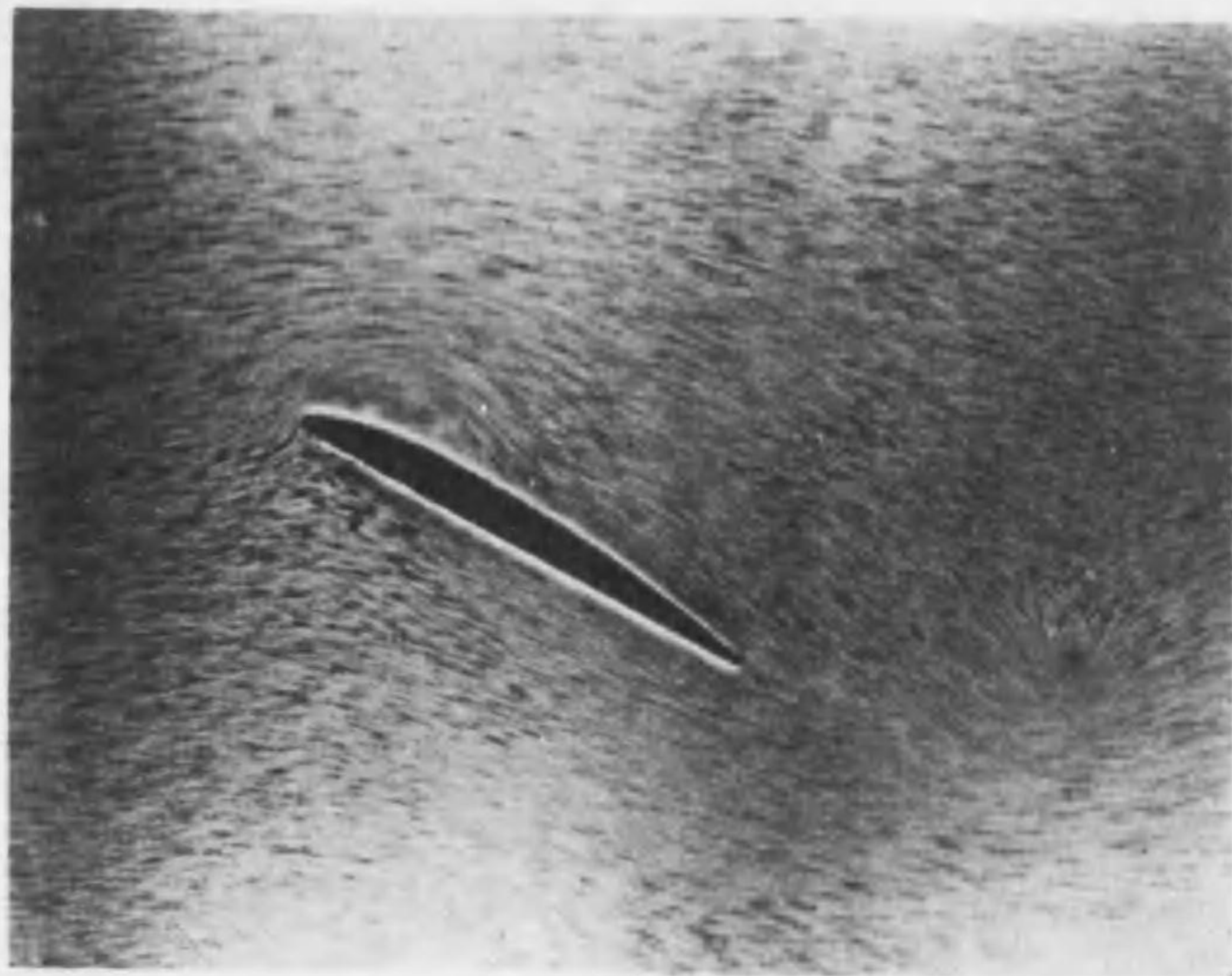
第 11 圖



かくして出来た渦は段々と大きくなつて、終に翼から離れて自由渦 (Free vortex) となつて周はりの空氣と共に風下に流れて行きます。第11圖、第12圖は始動後暫くして上記の渦が翼から離れ去つて行く有様を示しましたもので、同じく航空研究所の水槽で河田所員が撮影したものであります。

此渦が一度發生すれば、流體の何處にも無理がなくなつて、再び流體を粘性のない完全流體として取扱ふ事が出来るのであります。つまり吾々は此處に翼と完全流體と其他に一つの渦を考へる事になるのであります。

第 12 圖



只今述べました様に、吾々は再び完全流體の問題に立還つて此處に翼と夫から離れ去つた渦を考へます。

今翼のまはりに流體とともに動く一つの閉曲線を描いて、其まはりの循環を考へて見ます。翼が静止して居る場合には循環は勿論零であります、翼が動き出しますと只今述べました様に渦が発生します。即ち吾々の考へて居る閉曲線内に、渦度を有つた流體の部分が出来るのでありますから、其まはりの循環が或値を有たなければならない事になります。然るに今吾々は問題を完全流體として論じて居るのでありますから、斯くの如き流體と共に運

動する閉曲線上の循環は一定不變でなければならない。即ち夫が最初零であつたのでありますから、何時迄も零でなければならないのであります。しかし此閉曲線は何時迄も其内に、只今翼の後縁から発生した渦を包んで居るのでありますから、其まはりの循環が零になる爲めには、此自由渦による循環と消し合ふ様な循環がなければなりません。即ち翼のまはりに、自由渦と同じ大きさで反對の符號の循環が存在しなければならないことになります。之が先程述べました翼が揚力を得る爲めに是非必要である其まはりの循環であるのであります。即ち吾々が前に述べました様に、翼を代表させる爲めにとりました線渦のまはりの循環であります。

翼のまはりに出来た循環は、最初自由渦の發達に伴つて變化して行きますが、翼を離れて一般の流れと共に遠くに去りますと、其直接の影響を受けることがなくなります、吾々の考へて居る流體と共に運動する閉曲線は、何時迄も此渦を其中に包含して居ますから、翼のまはりに一定の循環が残り、翼がそれに相當した一定の揚力を有つ事になります。

#### 假 定

翼のまはりに循環が生ずると云ふことは、斯様に説明出来ませんが、之を認めた上は前に述べました様に、翼を一つの線渦で置き換へる事にします。かくする事によつて、物理的の意義をあまり



變へないで、數學的の取扱ひを非常に簡単にする事が出来る事は前にも述べましたが、尙問題を簡単にする爲めに翼に働く揚力が小さいと云う假定を設ける事とします。そうしますと、元來揚力は(23)式即ちクツタ・ジュコウスキーの式から循環に比例するものでありますから、此假定から翼のまはりの循環が小さいと云ふ事になります。

さて、翼によつて起る空氣の運動——勿論前にも度々述べた様に、翼と空氣の相對的の運動を考へるのでありまして、此場合空氣が動いて居ると考へます——は、之を二つに分けて考へる事が出来ます。其一つは、翼の運動の速度に相當した總ての所で一定な速度Vで、之を主速度(Principal velocity)と稱へることとします。第二は固定渦及自由渦によつて誘導されたものでありまして、之を誘導速度(Induced velocity)と稱へることとします。

そうしますと、只今述べました假定で循環が小さいと云うことは、之に依つて誘導された誘導速度が主速度に比して小さいと云う事でありまして。

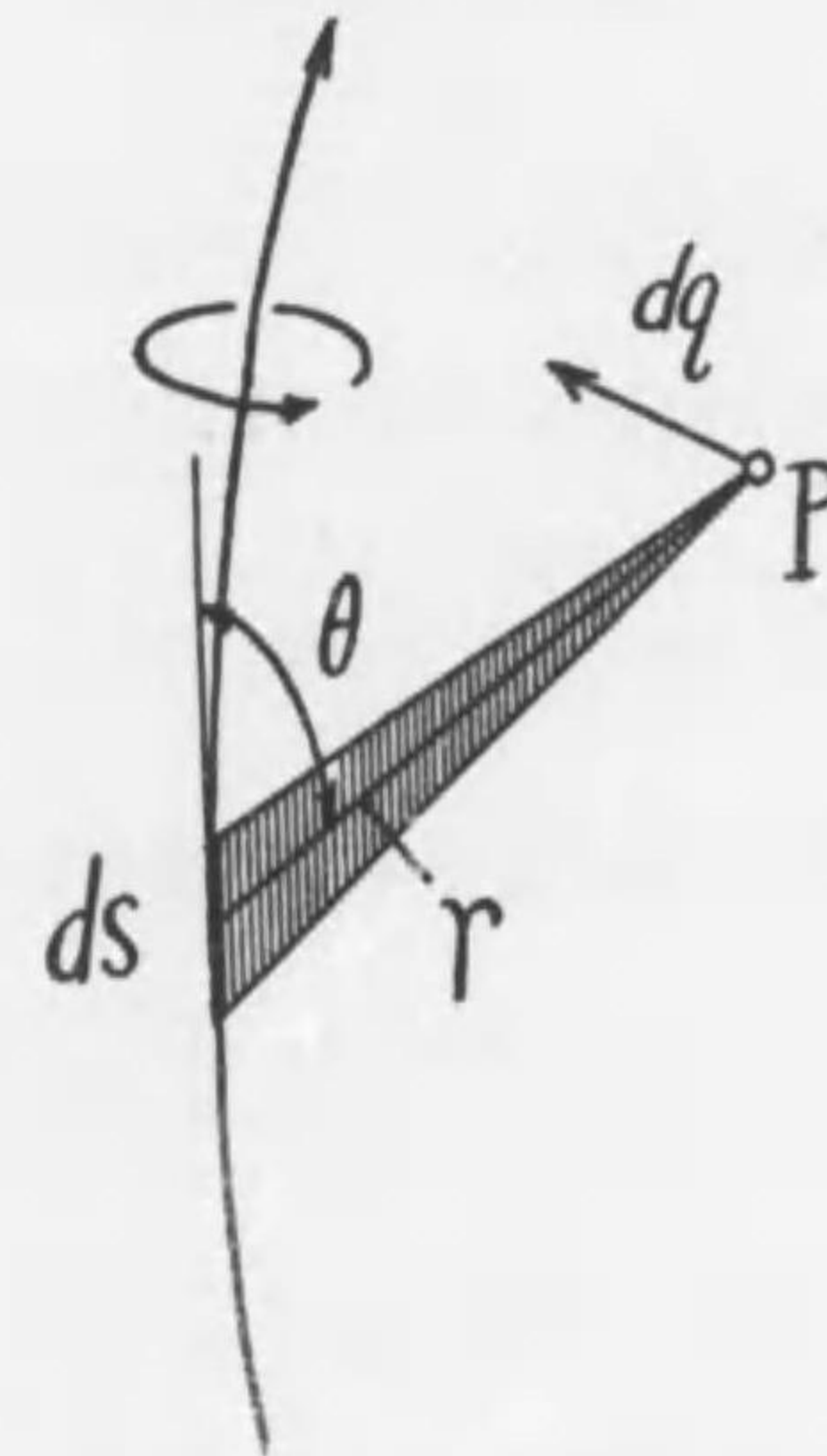
本來自由渦の運動は、前に述べました様に流線、即ち主速度と固定渦による誘導速度の合成速度の方向に一致するものであります。只今の假定で此固定渦の誘導速度が小さいと云う事から、自由渦は主速度の方向に流れるもの、即ち直線を描くものと假定す

ることが出来ます。之は數學的の取扱を非常に簡便にしますもので、其爲めに又かゝる假定を必要としたものであります。

### 線渦と其速度場

次に或線渦が存在する場合に其まはりの流體に如何なる速度が誘導されるかと云ふことに就て考究して見ようと思ひます。

第 13 圖



一般に此處に $\Gamma$ なる循環を有つた線渦がある場合に、其線素片 $dS$ により、此線渦外の任意の一點Pに於て(第13圖)誘導される流體の速度 $dq$ は、ビオ・サヴァ(Biot-Savart)の法則によつて

$$dq = \frac{\Gamma \sin \theta}{4\pi r^2} dS \quad (23)$$

なる関係で與へられます。茲に  $r$  は此線素片から  $P$  迄の距離で、 $\theta$  は此線素片と  $r$  の間の角であります。

$dq$  の方向は線素片と  $P$  點を含む平面に直角で、其正の方向は循環  $\Gamma$  の正の方向に等しくあります。(線素片の正の方向は渦の回轉方向に對し右ネジの関係とします)。

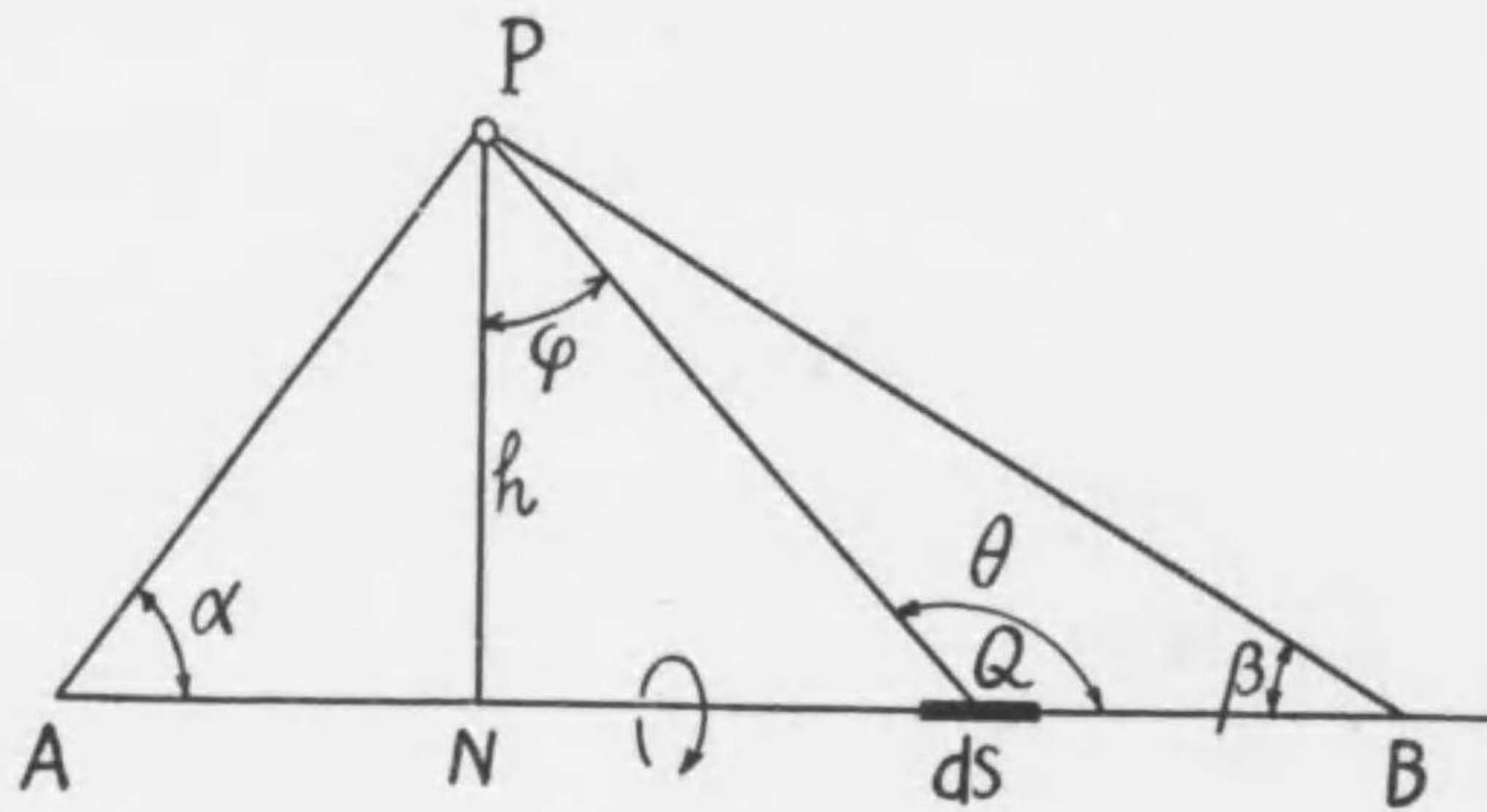
### 直線渦と誘導速度

線渦が曲線である場合に  $P$  點に於ける速度は (23) 式を其曲線上に積分する事によつて容易に求めることが出来ます。

吾々の取扱ふ問題は只今述べました様に、總て渦は直線渦と假定出来ますので、(23) 式の関係をもつと簡単にすることが出来ます。

今  $AB$  (第 14 圖) なる直線渦がある場合に、其外の任意の一點

第 14 圖



$P$  に於ける誘導速度を求めて見ます。

此渦と  $P$  點を含む平面を紙の面とし、渦の正の方向を只今の約束により、 $A$  から  $B$  に向ふ方向とします。

そうしますと、只今述べました関係から、 $P$  點に於ける誘導速度は紙の面に垂直で、紙の裏から表に向つて居ると云ふ事が直ちに分ります。

次に誘導速度の大きさを求めなければなりません、 $AB$  上の任意の一點  $Q$  に線素片  $dS$  をとりますと、此線素片によつて  $P$  點に誘導された速度  $dq$  は (23) 式から

$$dq = \frac{\Gamma \sin \theta}{4\pi QP^2} dS \quad (24)$$

となります。

$P$  から  $AB$  上に垂線を下し、其足を  $N$ 、其長さ  $NP$  を  $h$ 、又角  $NPQ$  を  $\varphi$ 、角  $PAQ$  を  $\alpha$ 、角  $PBA$  を  $\beta$  としますと、角  $PQB$  は (24) 式の  $\theta$  でありますから、

$$NQ = h \tan \varphi$$

でありまして、之を微分しますと、 $d(NQ)$  は取りも直さず  $dS$  でありますから

$$d(NQ) = dS = \frac{h}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

となります。

又

$$QP = \frac{h}{\cos \varphi}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta = \frac{h}{r} = \cos\varphi$$

なる関係がありますから、之等を夫々(24)式に入れますと

$$dq = \frac{\Gamma}{4\pi h} \cos\varphi d\varphi \quad (25)$$

なる関係式が得られます。

之は與へられた直線渦上の線素片  $dS$  によつて、P 點に誘導された速度でありますから、直線渦 AB による P 點の誘導速度は、(25)式を積分すればよいこととなります。(25)式で  $h$  は定数でありますから、其右側を  $\varphi$  に就て積分しますと、

$$q = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int \cos d\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin\varphi + \text{const.} \quad (26)$$

となります。所で PQ が PA に重なれば  $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  となり、又 PQ が PB に重なれば  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$  となりますから、(24)式を A から B 迄積分するには、(25)式を  $\varphi$  に就て  $-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  から  $\frac{\pi}{2} - \beta$  迄積分すればよいのであります。即ち(26)式に此値を入れますと、

$$\begin{aligned} q &= \frac{\Gamma}{4\pi h} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right\} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\alpha + \cos\beta) \quad (27) \end{aligned}$$

となり、求める誘導速度は極めて簡単な式で表はされる事になります。

次に上記の特別の場合として、B 點が無窮遠に行つた場合、即ち一つの直線渦が A から出て、一方に無限に延びて居る場合を考

へて見ます。此場合に B が A から遠ざかれば角  $\beta$  は段々減じて行きますから、其極限として B が無限に A から遠くなれば  $\beta$  は零となります。即ち(27)式に  $\beta = 0$  と置いて、P 點の誘導速度は

$$q = \frac{\Gamma}{4\pi h} (1 + \cos\alpha) \quad (28)$$

となります。又 P 點が A から AB に立てた垂直線上にある場合には、 $\alpha$  は明かに  $\frac{\pi}{2}$  となりますから、(28)式に  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  と置きますと

$$q = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (29)$$

なる関係が得られます。

次に A 點も亦 AB の負方向に無限に遠く去つたとしますと、即ち一本の直線渦が負無窮遠から正無窮遠迄のびて居る場合には、A が N から遠ざかるに従つて、 $\alpha$  は限りなく零に近づきますから、其極限として(28)式に  $\alpha = 0$  と置けば

$$q = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (30)$$

となります。

### 馬蹄形渦

さて、之から今迄に求めました直線渦と誘導速度との関係を翼の場合に應用して見ます。

直線渦は、其まはりにとつた循環がどこでも一定の値を有つて居るのでありますから、吾々が翼を一つの直線渦で代表させます

ことは、翼の長さに沿つて循環、即ち揚力が變化しない、即ち揚力が一様に分布されて居ると云うことが假定されて居ることになります。

然るに實際の翼では此揚力は決して一様に分布されて居るものではありませんで、翼の中央部が最大で、翼端に向つて漸次に減少し翼端で零となるものであります。しかし其減り方は翼端に近い所で急でありますから、普通の翼の様に比較的細長い形のものでは、揚力が一様に分布されて居ると考へても差支へないことがあります。又そうする事によつて數學的の取扱ひが非常に容易になると云う利益があるので、屢々用ひられて居るのであります。

今揚力が翼上に一様に分布されて居ると假定し、翼を一本の有限の長さの固定直線渦で置換へることとします。翼は有限の長さのものでありますから、此直線渦の長さも有限でなければなりません。所が渦なるものは、夫自身が閉曲線を形造るか、然らざれば無限にのびて居なければならぬもので、有限の長さの線渦なるものは存在出来ないのでありますから、上記の有限の長さの固定渦の両端ではどうなるかと云ふ事になるのであります。吾々は其両端から固定渦と同じ強さの自由渦が出て、主速度の方向に無究遠に達して居ると考へて、之を説明するのであります。此二つ

の自由渦を無究遠で結ぶものが、前に述べた翼の始動の瞬間に出来た自由渦であります。

今固定渦に直角な平面を考へ、其上に固定渦を取りまいて、流体の運動とは全く無關係に動き得る一つの閉曲線を考へて見ます。或閉曲線上の循環は、夫を周邊とする面内を通る渦の強さの和に等しいのでありますから、只今考へました閉曲線のまはりの循環は固定渦の強さに等しくなります。

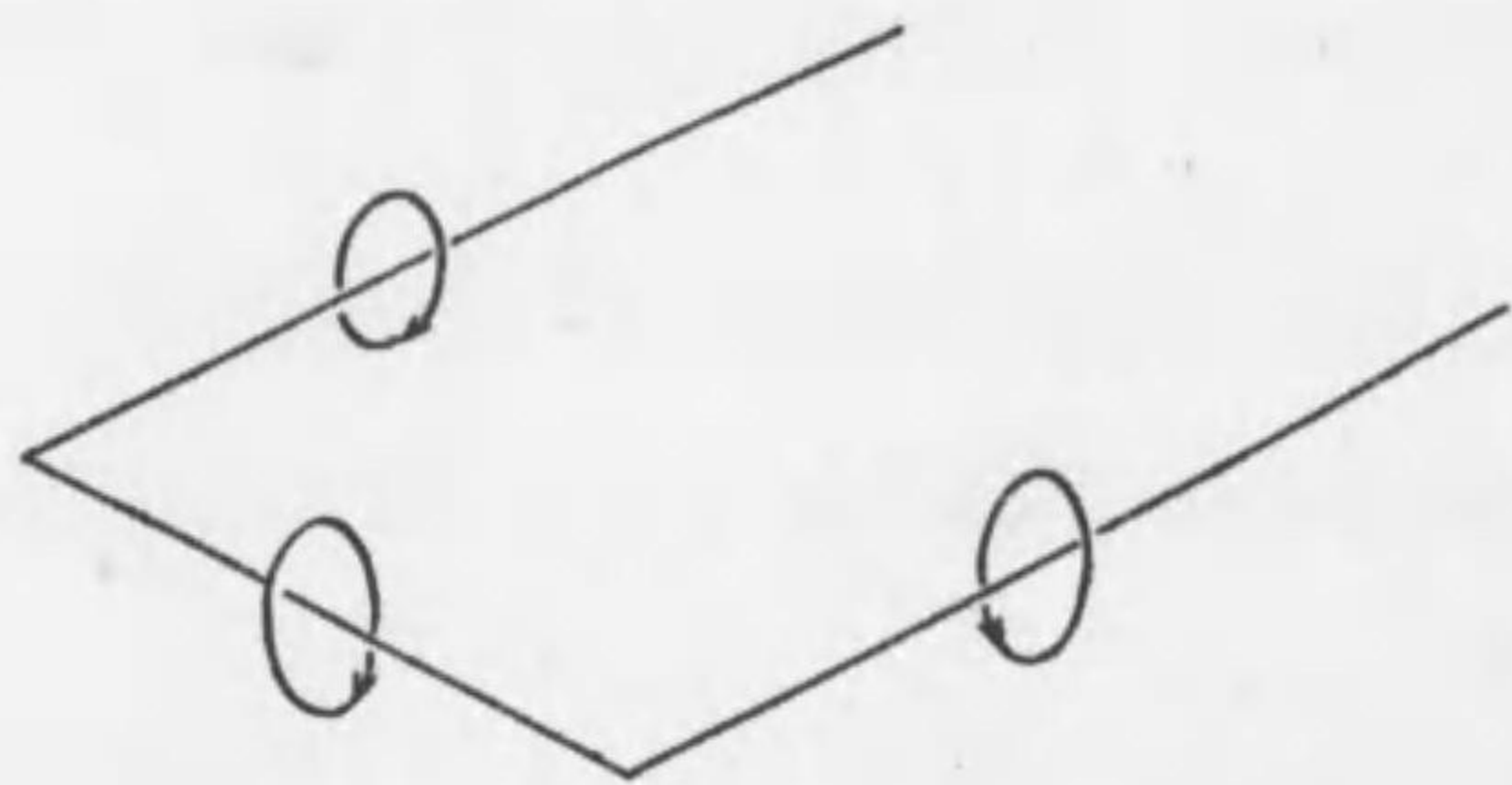
ところで此閉曲線で限られた固定渦に直角な面を固定渦の長さに沿つて段々翼端の方にずらして行きますと、翼端を外れるまでは、此平面は其内に常に固定渦を含んで居ますから、一定の固定渦に等しい循環が存在しますが、翼端、即ち固定渦の端を外れますと、此面内には渦が存在しないのでありますから、其まはりの循環が零とならなければなりません。即ち翼端を通る時に急に循環がなくなるのであります。

然るに或閉曲線で圍まれた面のまはりの循環の變化は其曲線を通つて出入した渦の強さ丈け減増するものであると云うことは前に述べましたが、上記の様に固定渦の端を外れると、今考へて居る曲線のまはりの循環が零になると云ふ事は、取りも直さず其曲線を横切つて固定渦と同じ強さの渦が出たと考へられるのであります。即ち固定渦の端から出た自由渦が此曲線を通つて出たので

あります。

つまり有限の長さの翼の代りに、吾々は第15圖に示す様に、無究遠から来る自由直線渦が固定渦の一端に結ばれ、他の端から再び自由直線渦となつて無究遠に去つて居ると考へる事が出来るのであります。此渦は圖に示しました様に、略々馬蹄の形をして居ますので、屢々馬蹄形渦 (Horse shoe vortex) と稱へられて居ります。

第 15 圖



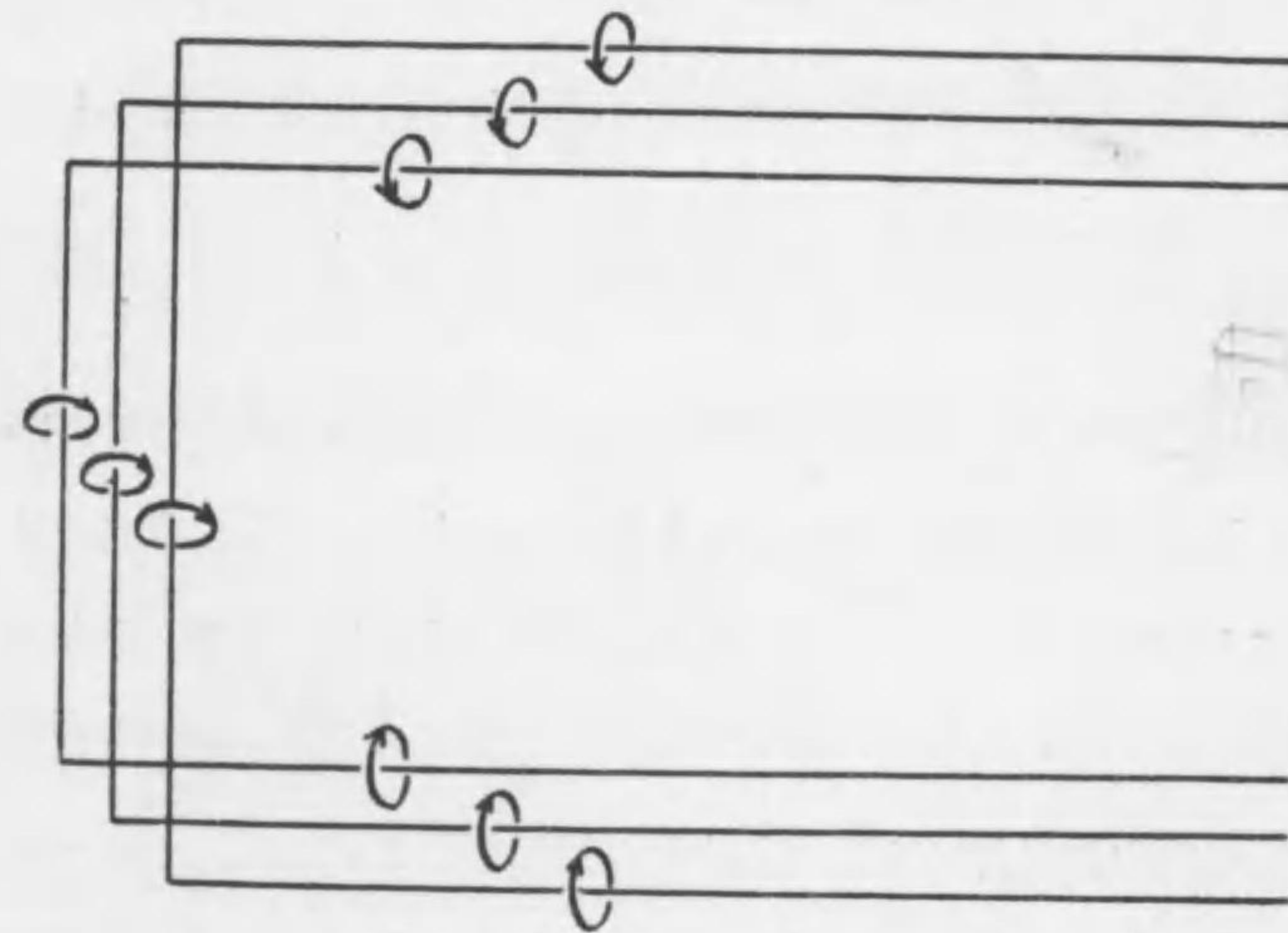
馬蹄形渦で翼を代表させる事は、前にも述べました様に、數學的の取扱ひを簡単にするための便法でありまして、翼のまはりの空氣の流れ、たとへば尾翼と主翼の干涉の問題などを調べる場合には、第一近似式として有効に利用されますが、翼自身が其自由渦から受ける影響などを考究する場合には、不都合な點がありますので、もう少し立入つて調べる必要が生ずるのであります。

### 揚力分布と随伴渦層

先程も申しました様に、實際の翼では揚力は決して一様に分布されて居りません。中央部に於て最大の値を有ち、翼端に向つて漸次に減少して居るものであります。

さて、かかる揚力、即ち循環の分布があります場合に、前と同様に固定渦を含む閉曲線で限られて、固定渦に直角な平面を考へ、之を流體の運動とは無關係に固定渦の長さに沿つて移動させますと、此平面内の渦の強さが揚力の變化に従つて變化しますから、先程も述べました流體力學の理論から、循環の變化と共に此

第 16 圖



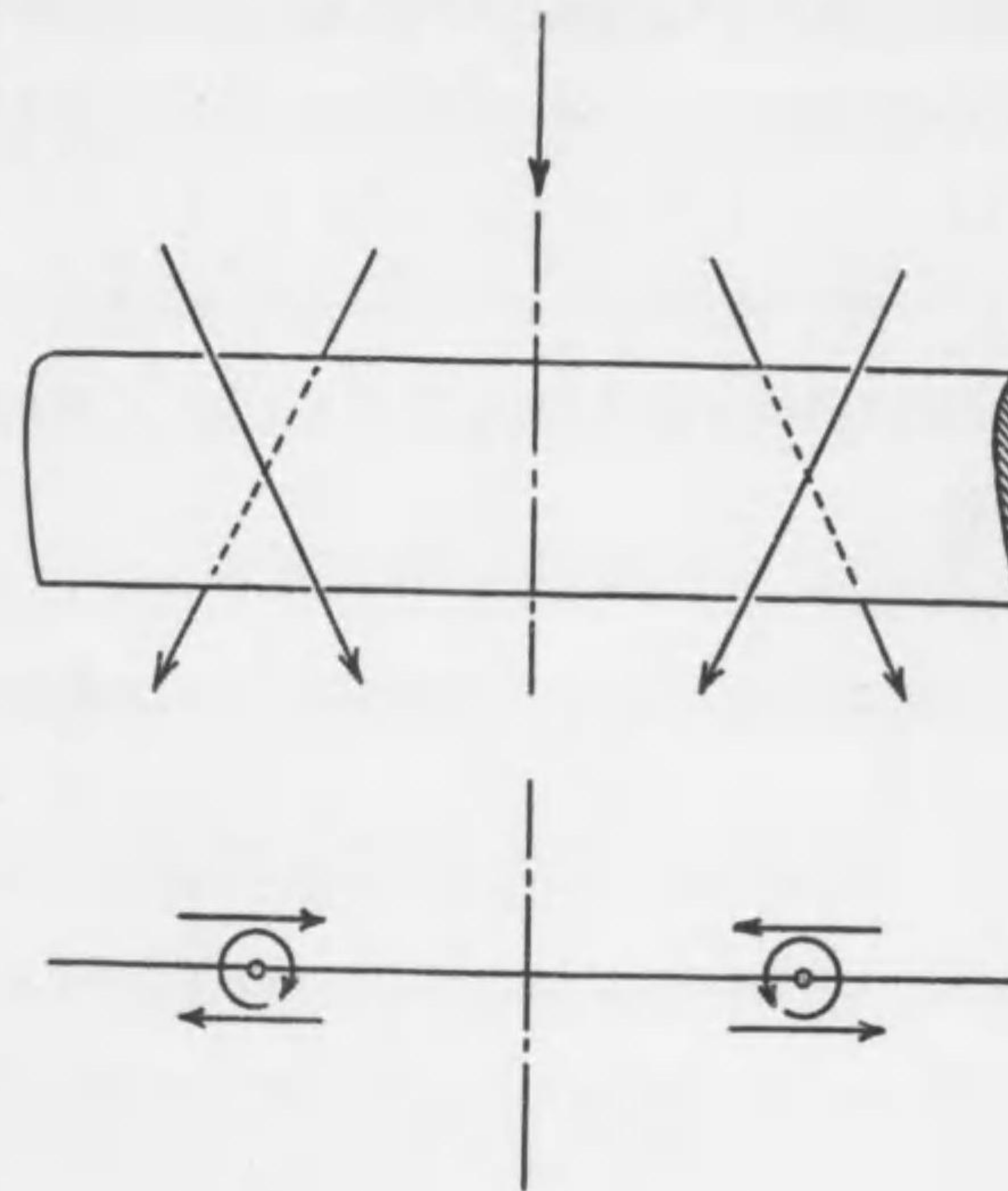
面積の境界を横切る渦がなければなりません。即ち翼の揚力の變化ある各點から風下、即ち主速度の方向に自由渦が出るのであります。揚力は翼幅に沿つて連続的に變化して居るのでありますから、之等の自由渦は直線渦の連続的の集りでありまして、つまり一つの平面渦層を形造つて居るのであります。之は又第 16 圖に示す様に澤山の馬蹄形渦から成立つて居るとも考へられます。

又此自由渦層の存在を次の様に説明することも出来ます。

翼が揚力を有つて居る場合には、其上の面の壓力は下り、下の面の壓力は上ることは前に述べましたが、揚力の分布が中央部で高く、翼端に向つて減つて居ると云うことは、此上下の面の壓力の差もまた翼端に向つて減じ、上の面では中央部の壓力は翼端より低く、下の面では其逆であることは明かであります。そうしますと、翼の上の面を流れる空気は翼の中央部に向つて曲げられ、下の面を流れるものは翼端の方向に曲げられます。即ち上下の面で反對の、翼幅に平行な速度の成分が出来るのであります。かかる流れが翼の後縁で一つになりますと、上記の反對の方向の成分によつて第 17 圖に示した様に、其處に渦を生ずるのであります。

翼の揚力に相當するそのまはりの循環を  $\Gamma$  とすれば、之は一般に翼幅の方向の座標  $x$  の函数でありまして、その變化する割合は

第 17 圖



$\frac{d\Gamma}{dx}$  でありますから、翼の後縁から出る自由渦の強さは  $\frac{d\Gamma}{dx} dx$  となります。

#### 迎角の變化、有效迎角

前に述べました様に、すべて渦の存在は其周圍に速度を誘導し、流體の運動に變化を起すものでありますから、翼から出る自由渦の速度場 (Velocity-field) のために、固定渦のある場所の流れの

状態が変化します。

自由渦は前に述べました假定によりまして、固定渦と共に一平面を形造る直線渦の集りと考へることが出来ますから、之亦前に述べましたことにより、固定渦の何れの點に於ても自由渦による誘導速度は、固定渦と自由渦の造る平面に直角であります。自由渦は主速度即ち翼の速度の方向に平行でありますから、自由渦の廻轉方向から分りますやうに飛行機が水平飛行をして居るとすれば、此誘導速度は下向きとなります。之を  $w$  を以て表はします。

此誘導速度  $w$  は、前に述べました揚力が小さいと云ふ假定によつて、主速度  $V$  に對して極く小さな量と考へられますから、此誘導速度に依つて固定渦のある所の流體の速度には殆んど變化を起しません、其流れの方向が變ると考へて差支へありません。即ち此自由渦による誘導速度の存在は、翼の迎角 (Angle of incidence) に變化を及ぼすと云ふ事になるのであります。

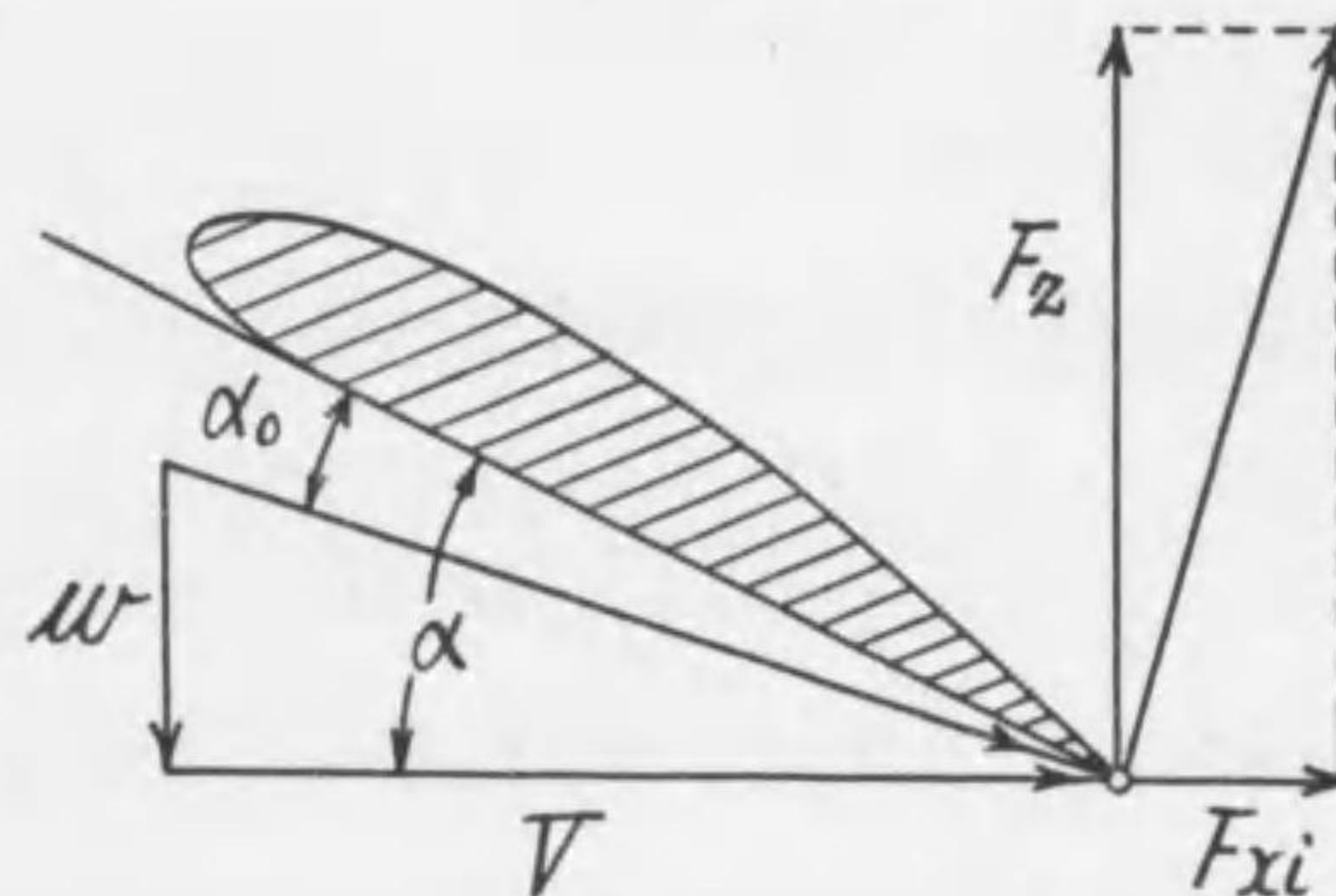
主速度と誘導速度の合成速度と主速度のなす角  $d\alpha$  は  $\tan^{-1} \frac{w}{V}$  ありますが、 $w$  が  $V$  に比べて非常に小さなものであると云う假定から、之を  $\frac{w}{V}$  と書いて差支へありません。そこで次の關係が得られます。

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{w}{V} \quad (31)$$

茲に  $\alpha$  は翼の幾何的迎角 (Geometrical angle of incidence)、即

ち自由渦のない場合、たとへば無限大の翼幅を有つた翼の様な場合に翼弦 (Wing chord) と主速度のなす角でありまして、 $\alpha_0$  は自由渦の誘導速度による變化を考へに入れた有効迎角 (Effective angle of incidence) であります (第18圖)。即ち誘導速度と主速度の合成速度と翼弦のなす角であります。

第 18 圖



#### 誘導抗力

前に掲げました (22) 式に關して述べました様に、翼に働く力は其點即ち固定渦のある點に於ける流れの方向に直角でありますから、自由渦が存在しない場合には、其力の方向は主速度に直角でありまして、主速度の方向の分力、即ち抗力 (Drag) は存在しないのであります。ですから無限大の翼幅を有つたものには抗力がないのであります。之は甚だ不思議であり、不都合に見へま

すが其原因は吾々が空気を完全流体、即ち粘性のないものとして取扱つて居るからであります。實際問題としては、吾々は此外に空気の粘性に起因する抗力、即ち摩擦抗力 (Frictional drag) を考へなければならぬのであります。

然し上記の自由渦 (之を又 随伴渦 (Trailing vortex) と稱へます) が存在します場合には、只今述べましたやうに (第 18 圖)、固定渦の所の流れの方向が主速度に對し  $\frac{w}{V}$  だけ傾き、翼に働く力は此合成速度の方向に直角でなければならぬのでありますから、之亦主速度に直角な方向より後方に  $\frac{w}{V}$  だけ傾くことゝなります。そうしますと、翼に働く力は主速度の方向に成分を有つことゝなり、たとへ空気を完全流体と考へ摩擦抗力なるものを考へないとしても、抗力が存在することゝなります。此抗力を誘導抗力 (Induced drag) と稱へます。

$F_z$  を揚力、 $F_{zi}$  を誘導抗力としますと、

$$F_{zi} = F_z \frac{w}{V} \quad (32)$$

であることは、第 18 圖から明かなことであります。

此誘導抗力によつて、流体になされる仕事が随伴渦の運動のエネルギーとなつて現はれるのであります。

吾々は屢々翼の抗力を誘導抗力と、他のものに分けて考へることがあります。後者は摩擦抗力及其他のものを含むもので、

之を形状抗力 (Profile drag) と稱へます。但し本論に於ては、前者誘導抗力のみが問題となるのであります。

#### 随伴渦による誘導速度

今此處に翼があつて其随伴渦の強さが分つて居り、固定渦上の誘導速度が求められれば各點の有効迎角が分りますから、翼幅上の揚力及誘導抗力が分り、之を翼幅上に積分することによつて、翼全體の揚力及誘導抗力が求められ、従つて翼の性能を知ることが出来ます。

そこで第一の問題は随伴渦と之による誘導速度の關係を知ることとであります。

翼が停止して居て、空気が翼の速度  $V$  で反對の方向に動いて居るとし、座標軸を次の様に定めます。

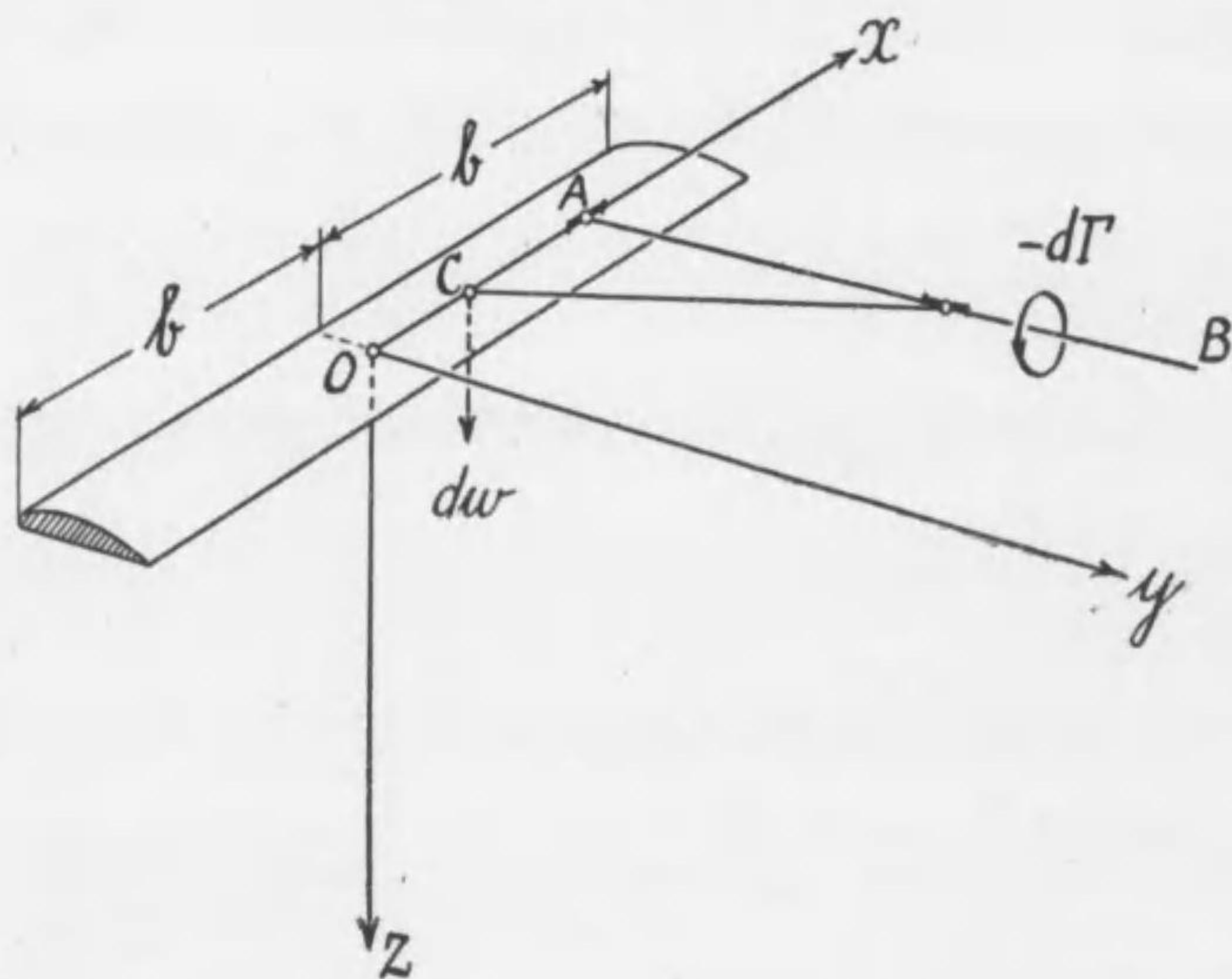
翼の中央即ち固定渦の中央に座標軸の原點をとります。

$x$  軸を固定渦にとり、其正の方向を飛行機が普通の飛行状態にあるとして、操縦者の右方にとります。 $y$  軸を主速度  $V$  の方向にとり、 $z$  軸を  $x, y, z$  が右手系にあるやうに、即ち此場合には下向にとります。かくの如く約束をすれば、 $y$  軸を  $90^\circ$  回して  $z$  軸に重ねるような向きの循環が  $x$  軸、即ち固定渦のまはりにあれば、翼には上向きの揚力が働き、流体は翼から下向き、即ち正  $z$  軸の方向の力を受けることゝなります。



翼幅を  $2b$  としますと、翼は  $x$  軸上に  $(-b)$  から  $(+b)$  迄擴がつて居り、其各點に於ける揚力に相當した循環を  $\Gamma$  としますと、 $\Gamma$  は一般に  $x$  の偶數函数であります。

第 19 圖



隨伴渦は直線渦の集りで、其各々は前に述べました様に、其強さが循環の翼幅に沿つての變化に等しく、其記號が反對のもので、固定渦から出て  $xy$  平面上に正  $y$  軸の方向に無究遠に達して居ります。

今此隨伴渦の一つをとつて、夫が固定渦の位置に如何なる速度

を誘導するかを考究して見ようと思ひます。

固定渦上の一點  $A$  から出て居る一つの直線隨伴渦  $AB$  をとつて考へて見ます。 $A$  點〔座標  $(x', \rho, \rho)$ 〕點に於ける循環の變化は  $\frac{d\Gamma}{dx} dx$  でありますから、此隨伴渦の強さは  $-\frac{d\Gamma}{dx} dx$  であります。此一本の隨伴渦によつて、固定渦の到る所に或速度が誘導されるのであります。今其  $A$  點以外の任意の一點  $C$ 〔座標  $(x, \rho, \rho)$ 〕に於ける誘導速度  $dw$  を求めることにします。此間の關係は既に前に説明をしました様に、先づ  $dw$  は渦と  $C$  點を含む平面、即ち  $xy$  平面に直角であり、其向は下向でありますから、正  $z$  軸の方向であることは明かであります。其大きさは (29) 式から直ちに分りますやうに

$$dw = \frac{-\frac{d\Gamma}{dx'} dx'}{4\pi \cdot AC} = \frac{-\frac{d\Gamma}{dx'} dx'}{4\pi(x'-x)} \quad (33)$$

となります。

之は隨伴渦中の一つによる誘導速度であります。翼幅の全體に亘つて出て居る隨伴渦が、一點  $C$  に誘導する速度は上記の速度の和でありまして、(33) 式を固定渦上に、即ち  $x$  に就て積分することによつて、容易に求めることが出来ます。即ち

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (34)$$

となります。

此處で注意しなければなりませんのは、此式の積分記號の内のものは、 $x = x'$  なる時に無限大となりますので、吾々は此點に於て其主値 (Principal value) をとつて考へる必要があります。即ち此積分の値は次の極限值によつて與へられるものとします。

$$\int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} = \lim_{\varepsilon=0} \left( \int_{-b}^{x-\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \right) \quad (35)$$

之で隨伴渦とそれによる誘導速度の關係が得られましたから、翼上の任意の點の有効迎角は、(31)式で容易に求めることが出来ます。

#### 揚力及抗力

固定渦の線素片  $dx$  上の揚力を、 $dF_z$  とすれば、揚力と循環との關係は (23) 式、即ちクッタ・ジュコウスキーの式で與へられて居ますから、

$$dF_z = \rho V \Gamma dx \quad (36)$$

なる關係を得ます。

翼全體の揚力は之等の和で、(36)式を  $x$  に就て積分し

$$F_z = \rho V \int_{-b}^b \Gamma dx \quad (37)$$

となります。

翼幅上の各點に於ける有効迎角が分つて居ますから、揚力の傾きが分り、從つて其主速度の方向の分力である誘導抗力を求めることが出来ます。即ち各點の誘導抗力を  $dF_{xi}$  としますと、

$$dF_{xi} = dF_z \frac{w}{V} \quad (38)$$

で、翼全體の誘導抗力は

$$F_{xi} = \frac{1}{V} \int w dF_z = \rho \int_{-b}^b w \Gamma dx = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \Gamma dx \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (39)$$

となります。

#### 循環の方程式

之で翼の揚力及誘導抗力が求められました、之等の式は何れも翼の有つ循環  $\Gamma$  を含んで居りますが、之は未だ未知數なのであります。

次に此  $\Gamma$  を求める問題であります、今此處に翼幅の無限に大きい翼、即ち隨伴渦のない翼を考へ、其單位長の揚力を  $F_z$  としますと、これは翼の進行方向に對する傾き、言ひ換へれば、翼と空氣の流れの傾き、即ち、其迎角  $\alpha$  によつて違ふものであります。かゝる迎角は翼弦と空氣の流れの方向の幾何學的關係のみで定まるものであつて、翼の力學的性能に關しないものであるので、之を普通幾何的迎角と呼んで居ります。

ところで只今考へて居る翼を有限翼の一部分であるとすれば、

前に述べました様に、有限翼に付物の随伴渦によつて、實際の迎角  $\alpha_0$  (之を有効迎角と云ひます) は幾何的迎角と異つたものとなります。

兎に角揚力は一般に此有効迎角の函数なのでありますから、

$$F_z = f(\alpha_0) \quad (40)$$

と書いて、之をテイラーの定理で  $\alpha$  の附近に展開しますと

$$F_z = f(\alpha) + \left( \frac{df}{d\alpha_0} \right)_{\alpha_0=\alpha} d\alpha \quad (41)$$

但し迎角の變化は小さいものとして、其二乗以上の項を省略しました。

$f(\alpha)$  は取りも直さず随伴渦が無い無限大翼幅と考へた場合、有効迎角が幾何的迎角に等しく  $\alpha$  であるときの揚力に相當するものでありまして、之を  $F_{z0}$  とし、又  $\left( \frac{df}{d\alpha_0} \right)_{\alpha_0=\alpha}$  は上記の場合に於ける揚力の迎角に対する勾配で、之を  $F'_{z0}$  と置きます。次に迎角の變化  $d\alpha$  は随伴渦によるものでありまして、之は前に述べました様に  $\frac{w}{V}$  でありますから、結局 (41) 式は次の様に書くことが出来るのであります。

$$F_z = F_{z0} - F'_{z0} \frac{w}{V} \quad (42)$$

此式の右側第二項の負記號は、 $w$  と  $V$  の正の値に對して迎角は減ずるからであります。

誘導速度  $w$  は既に (34) 式に與へられて居ります。之をもう一

度書きますと

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (34')$$

となります。

所で (42) 式の  $F_z$  と循環の關係は、例のクツタ・ジュコウスキーの關係式 (23) から

$$F_z = \rho \Gamma V \quad (43)$$

と書くことが出来ますので、(42) 式を

$$\rho \Gamma V = F_{z0} - F'_{z0} \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (44)$$

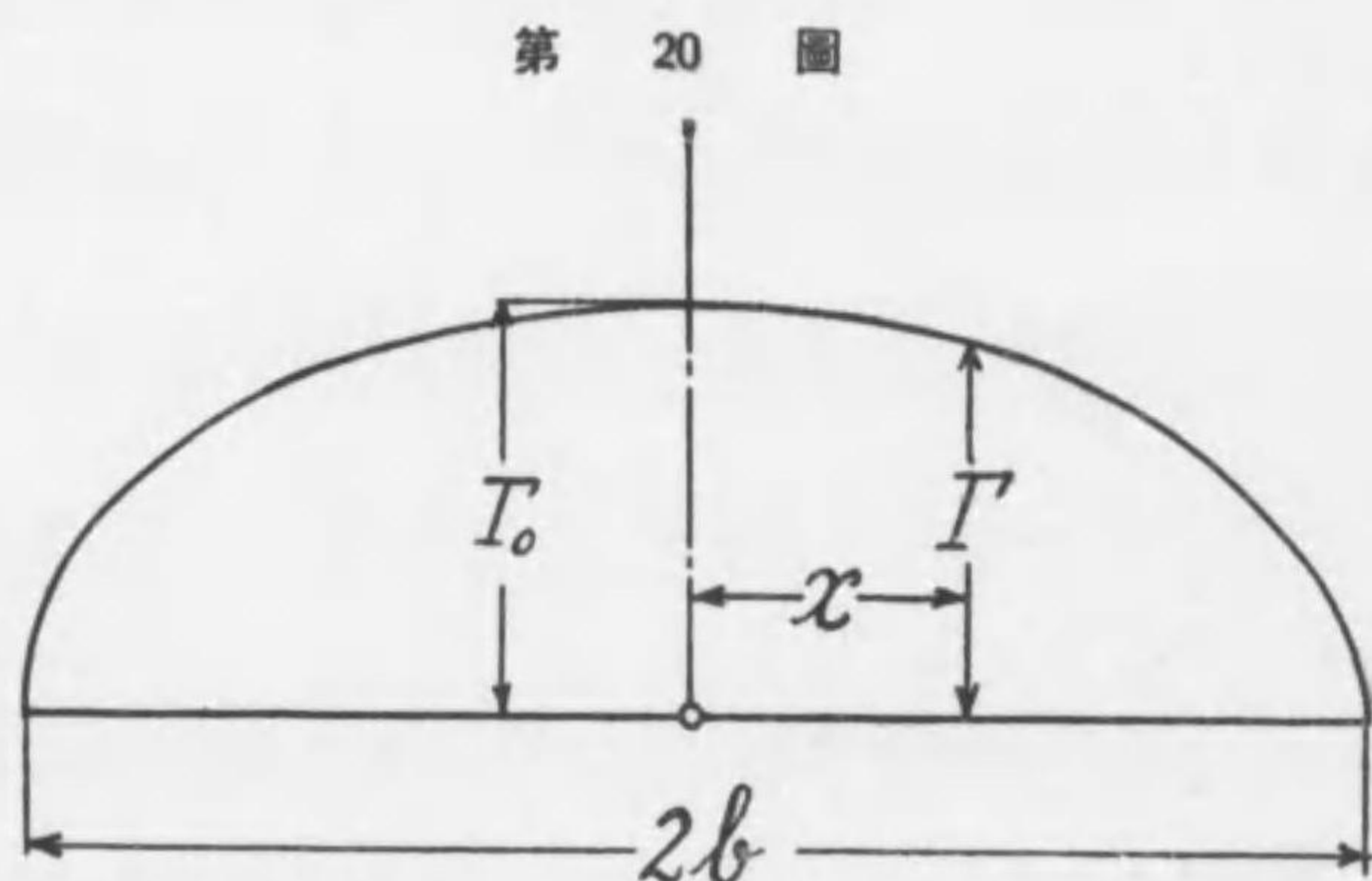
と書くことが出来ます。

$F_{z0}$ ,  $F'_{z0}$  は無限大翼幅の翼の性能でありまして別の方法で求められ、既知のものとし、又  $\rho$ ,  $V$  等は與へられて居るものとすれば、(44) 式は未知數として  $\Gamma$  のみを含み、取りも直さず  $\Gamma$  を與へるべき積分方程式であります。

#### 楕圓型揚力分布

吾々は上記の方程式から  $\Gamma$  が容易に定まれば、與へられた問題が解決するのでありますが、一般に此問題を解くのは中々難しいので、只今此處に述べることを止めまして、近似的な、併し多くの實際問題に極めて有効に應用出来る方法に就て述べやうと存じます。

之は翼幅上の揚力分布、即ち循環の分布は常に楕圓形であると假定するのであります。即ち楕圓の長軸を固定渦の長さとし、短軸に平行な直線の楕圓と長軸の間に挟まれた長さが、循環に比例して居るのであります(第20圖)。



此循環の楕圓型分布を數式で書き表はしますと

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (45)$$

となります。茲に  $\Gamma_0$  は固定渦の中央に於ける循環で、 $\xi$  は固定渦上の任意の點  $x$  と半翼幅の比、即ち  $\xi = \frac{x}{b}$  であります。

循環の分布が與へられますれば、其勾配は微分によつて直ちに求める事が出来ます。

(45) 式を  $\xi$  に就て微分しますと、

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = -\frac{\xi\Gamma_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (46)$$

となります。

循環の勾配が分れば、隨伴渦による固定渦上の任意の點  $\xi$  上の誘導速度は (34) 式から直ちに求めることが出来ます。

先づ (34) 式を  $x$  及  $x'$  の代りに  $\xi$  及  $\xi'$  で書きますと、

$$w = \frac{1}{4\pi b} \int_{-1}^1 \frac{d\Gamma}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \quad (47)$$

となります。茲に勿論  $\xi' = \frac{x'}{b}$  であります。

(47) 式に (46) 式の関係を入れますと

$$w = -\frac{\Gamma_0}{4\pi b} \int_{-1}^1 \frac{\xi' d\xi'}{(\xi - \xi') \sqrt{1-\xi'^2}} \quad (48)$$

となります。

此式の右側は次の様にして容易に積分することが出来、誘導速度  $w$  を求めることが出来ます。

$$\begin{aligned} w &= \frac{\Gamma_0}{4\pi b} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{d\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}} - \xi \int_{-1}^1 \frac{d\xi'}{(\xi - \xi') \sqrt{1-\xi'^2}} \right\} \\ &= \frac{\Gamma_0}{4\pi b} \left\{ \left[ \sin^{-1} \xi' \right]_{\xi'=-1}^{\xi'=1} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \tanh^{-1} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\xi'^2)}}{\xi \xi' - 1} \right]_{\xi'=-1}^{\xi'=1} \right\} \\ w &= \frac{\Gamma_0}{4\pi b} \{ \pi - 0 \} = \frac{\Gamma_0}{4b} \quad (49) \end{aligned}$$

即ち假定の如く揚力の分布が楕圓型である場合には、翼上の誘

導速度は到る所均一で  $\frac{\Gamma_0}{4b}$  なる値を有つと云ふ極めて簡単な結果が得られたのであります。

誘導速度が一定でありますから、有効迎角も一定で（只今は勿論幾何的迎角が翼幅上に一定である場合を論じて居るのであります）(31)式から次の如く與へられます。

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{w}{V} = \alpha_0 - \frac{\Gamma_0}{4bV} \quad (50)$$

又翼の揚力の分布を楕圓型であると假定しますれば、(37)式から翼の揚力を求めることが出来ます。即ち揚力を  $F_z$  としますれば

$$\begin{aligned} F_z &= \rho V \int_{-b}^b \Gamma dx = \rho V b \int_{-1}^1 \Gamma d\xi \\ &= \rho V b \Gamma_0 \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{\pi}{2} \rho V b \Gamma_0 \end{aligned} \quad (51)$$

之から  $\Gamma_0$  と  $F_z$  の關係が得られ

$$\Gamma_0 = \frac{2F_z}{\pi \rho V b} \quad (51')$$

となります。之を(49)に代入しますと

$$w = \frac{F_z}{2\pi \rho V b^2} \quad (52)$$

なる關係式が得られます。

前に述べました様に誘導速度の爲めに、翼に働く合成力が  $\frac{w}{V}$

丈け傾き、誘導抗力を生じます。之は(32)と(52)式から

$$F_{zd} = \frac{F_z^2}{2\pi \rho V^2 b^2} \quad (53)$$

となります。

即ち翼の大きさ、空気の密度及其速度が與へられ、且つ翼の揚力が分つて居れば、(53)式から其誘導抗力を算出する事が出来るのであります。

#### 空 氣 力 學 的 係 數

今迄吾々は翼の空氣力學的性質を表示するに、其揚力、抗力等の實際に働いて居る力を以てしましたが、之は翼の大きさ、空気の速度、空気の密度に關係して居るものでありまして、實際の應用上に不便な點がありますので、茲に翼の空氣力學的性能を示すに便利な係數を次の如く定義することゝします。

翼が空氣から受ける作用は、翼の面積に比例すると共に大體に於て空気の密度と其速度の二乗の積に比例します。言ひ換へれば其岐點壓  $q$  即ち  $\frac{1}{2} \rho V^2$  に比例します。此事實を數式に書き表はしますと

$$F_R = C_R q S \quad (54)$$

となります。茲に  $F_R$  は翼に働く合成力、 $q$  は岐點壓、 $S$  は翼の面積、 $C_R$  は比例の定數でありまして使用單位に無關係のものであります。

揚力、抗力の場合には、夫々

$$F_z = C_z q S \quad (55)$$

$$F_x = C_x q S \quad (56)$$

となりまして、 $C_z$ を揚力係数 (Lift coefficient)、 $C_x$ を抗力係数 (Drag coefficient) と稱へます。

抗力は一般に前に述べました様に、形状抗力と誘導抗力の二つから成立つて居ますから、係数も亦此二つから成立つて居ると考へ

$$C_x = C_{x0} + C_{xi} \quad (57)$$

と置き、前者を形状抗力係数 (Profile drag coefficient)、後者を誘導抗力係数 (Induced drag coefficient) と稱へます。

之等の係数は翼の迎角の函数であることは申す迄もないことでもあります。尙此外に之は翼の縦横比 (Aspect ratio) 及寸法効果 (Scale effect) なるものに支配されます。

### 寸法効果

縦横比とは翼幅と翼弦の比であります。寸法効果とは翼の大きさ、速さ、空気の性質による空気力学的性質の相異を表はすものであります。

一般に翼の様な固体と流体との相対的作用は、固体の形及其まはりの流体の流れによつて定まるものであります。今假りに此處

に全く同じ形で、大きさの異つた二つの固体が流体中を運動する場合に、流体の流れが二者全く等しい時は夫等の固体が流体から受ける動力学的作用も或定つた関係を有つのであります。即ち此固体を翼としますれば、二つは決つた関係の揚力、抗力を有つことになるのであります。

所で此大きさの異なる二つの固体のまはりの流体の運動が同じになるのには、流体の速度、其物理的性質及固体の寸法の間一定の関係が存在しなければなりません。此問題に就ては、只今此處に立入つて御話する暇がありませんから、其結果だけ申すと、流体の速度を  $V$  とし、其物理的性質を其密度  $\rho$  及粘性係数  $\mu$  を以て表はし、固体の寸法を  $l$  で表はしますと

$$\frac{\rho V l}{\mu}$$

なる量が互に等しい場合に相似な固体 (嚴格には其表面の粗度迄も相似でなければなりません) のまはりの流体の運動の有様も相似となり、其動力学的作用が或関係をもつことになるのであります。之を動力学的相似則 (Law of dynamical similarity) と稱へ  $\frac{\rho V l}{\mu}$  なる量をレーノールズ数 (Reynolds' number) と申します。

たとへば、實物の翼と其風洞試験に用ふる模型から得た結果の厳密なる比較は、此相似則を満足して始めて得られるのでありま

す。然し之を満足することは普通の風洞に於ては困難のことでありまして、其處に特別な風洞、たとへば高壓風洞などの必要を生ずるのであります。

此寸法効果が種々の空氣力學的係數に及ぼす影響の考究は翼の理論以外にわたりますので、之は只今申上ました位に止めまして、之等の諸係數は、迎角以外には縦横比にのみ關係するものとします。

#### 縦横比と誘導速度の關係

先程書きました様に、抗力係數は之を二つに分けて考へられますが、其内で形狀抗力係數は主に空氣の粘性に基くものでありますから、翼の斷面、即ち翼型 (Aerofoil section) に關係して、縦横比には無關係と考へられますが、誘導抗力係數は隨伴渦によるものでありますから、翼幅に關係し、従つて翼の縦横比に關係することは明かであります。(53)の式の力を(55)式及(56)式の關係によつて係數の形に書き直しますと、

$$C_{xi} = \frac{C_x^2 S}{4\pi b^2} \quad (58)$$

となります。今縦横比を  $a$  で表はしますと、矩形の形の翼なれば  $S = 2bt$  で  $\frac{S}{4b^2} = \frac{1}{a} = \frac{t}{2b}$  となります。但し  $t$  は翼弦の長さであります。

即ち(58)式の右側は縦横比を含み、誘導抗力係數と、縦横比

の關係が分つたことになります。

でありますから、抗力係數を次の如く書くことが出来ます。

$$C_x = \frac{C_x^2 S}{4\pi b^2} + C_{x0} \quad (59)$$

$C_{x0}$  は只今申しました様に迎角のみの函數であります。

又有効迎角の大きさも、(31)式及(52)式から明かな様に、誘導速度に關係のあるものでありますから、又翼の縦横比の函數であることは明かであります。

(52)を係數で書き直し、(31)式に入れて

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{C_x S}{4\pi b^2} \quad (60)$$

なる關係が得られます。 $\alpha$  は翼の幾何的迎角でありまして、縦横比に無關係なことは勿論であります。

#### 縦横比の換算式

(59)式及(60)式から翼型は同じで、其縦横比が異つた二つの翼の間の誘導抗力及有効迎角に就て關係式が求められます。

上記の様な二つの翼を夫々脚符1及2を付して表はすとします。即ち1の翼の面積、翼長を  $S_1, 2b_1$  等とし、2の翼の夫等を  $S_2, 2b_2$  等とするのであります。

そうしますと、(60)式から1及2の翼に對し夫々次の様な關係があります。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{01} &= \alpha_1 - \frac{C_{z1} S_1}{4\pi b_1^2} \\ \alpha_{02} &= \alpha_2 - \frac{C_{z2} S_2}{4\pi b_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ところで、翼の有効迎角が等しければ、翼型が同じなのでありますから、其揚力係数が等しくなります。即ち  $\alpha_{01} = \alpha_{02}$  とすれば、

$$C_{z1} = C_{z2} = C_z \quad (62)$$

となります。

此關係を (61) 式に入れますと

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{C_z}{\pi} \left\{ \frac{S_2}{4b_2^2} - \frac{S_1}{4b_1^2} \right\} \quad (63)$$

となり、又夫々の縦横比を  $a_1$  及  $a_2$  で表はしますと

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{C_z}{\pi} \left\{ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right\} \quad (64)$$

となります。

此式から分ります様に、かゝる縦横比のみ異ふ二つの翼が同じ揚力係数を與へるのには、其幾何的迎角が異つた値を有たなければならぬのであります。即ち揚力係数を等しくするには、縦横比の大きな方の翼の幾何的迎角を小さくして置かなければなりません。

今此處に或翼型の或縦横比の翼に就て實驗した結果がある時夫

と異つた縦横比に對する揚力係数が知りたいと云うやうな場合は屢々起ることあります。かゝる時には (64) 式から同じ揚力係數に對する迎角のずれが計算出來ますから、實驗結果の迎角をそれだけずらせば、求むる縦横比の翼の揚力係數が容易に得られるのであります。

次に誘導抗力係數であります、形狀抗力係數は縦横比に無關係でありますから、只今の翼 1 及 2 に就て、抗力係數を (59) 式から夫々次の様を書くことが出來ます。

$$\left. \begin{aligned} C_{x1} &= \frac{C_{z1}^2 S_1}{4\pi b_1^2} + C_{x01} \\ C_{x2} &= \frac{C_{z2}^2 S_2}{4\pi b_2^2} + C_{x02} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

抗力係數  $C_{x0}$  及揚力係數  $C_z$  は、翼の有効迎角のみの函數でありますから、有効迎角が等しければ等しいものであります。ですから、今二つの翼の有効迎角が等しいとすれば、

$$C_{z1} = C_{z2} = C_z$$

$$C_{x01} = C_{x02} = C_{x0}$$

なる關係が成立ち、(65) 式を次の如く書くことが出來ます。

$$C_{x1} - C_{x2} = \frac{C_z^2}{\pi} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \quad (66)$$

之亦同じ揚力係數に對する縦横比の異つた二つの翼の誘導抗力係數の差を與へるものでありまして、或縦横比に對する實驗結果



がありますれば、之から直ちに任意の縦横比に対する誘導抗力係数を計算して求めることが出来るのであります。

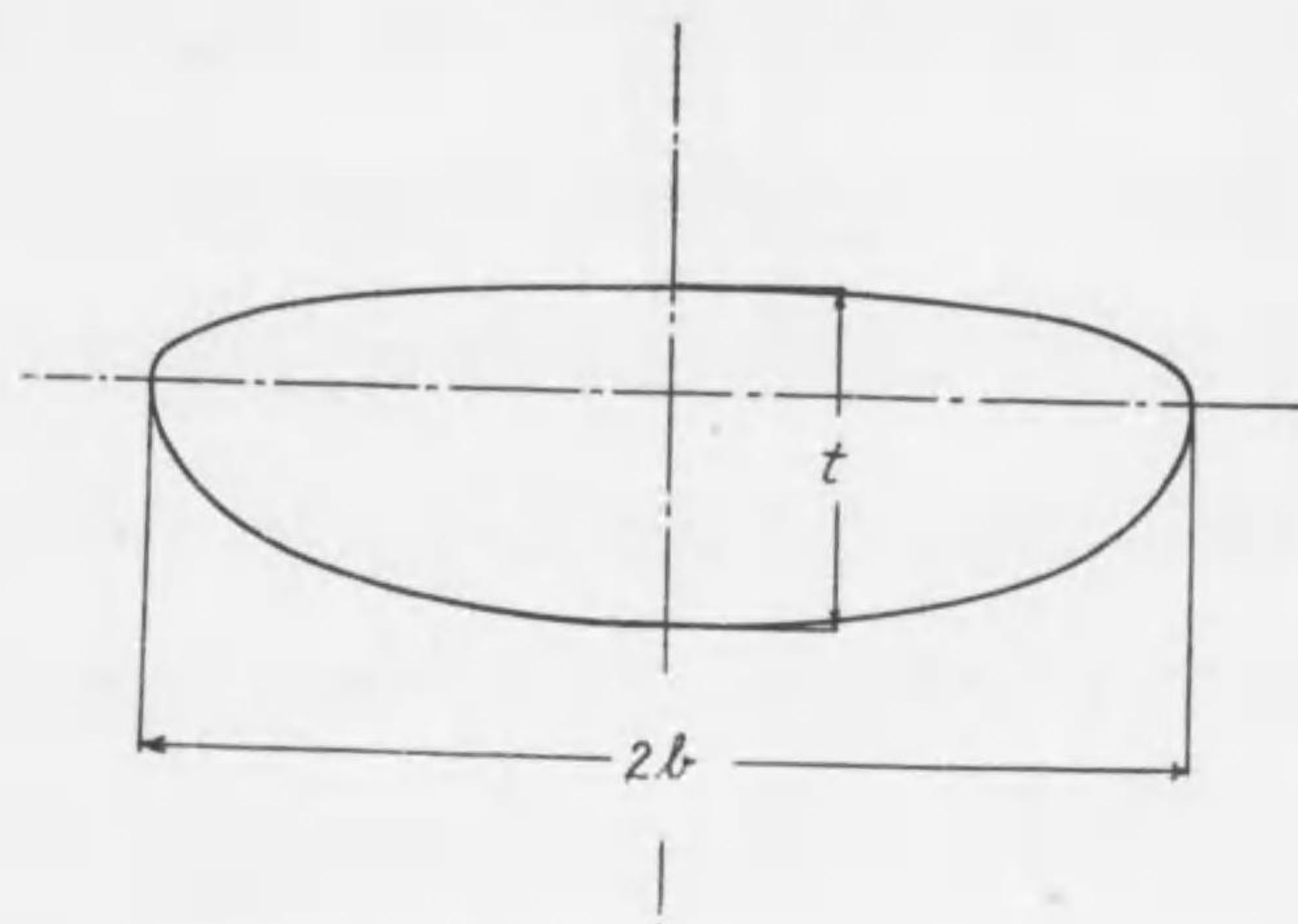
又実験に用ひた翼の縦横比及其抗力係数から、(59) を用ひまして翼の形状抗力係数が容易に求められ、之は縦横比に無関係でありますから、結局或一つの縦横比に対する実験結果から、任意の縦横比に対する抗力係数を求めることが出来るのであります。

是等の結果は既に申述べました様に、翼の揚力、即ち循環の分布が楕圓型であると云ふ假定の下に得られるものであることを忘れてはなりません。實際の翼の揚力分布は楕圓型とは大分異つて居りますが、此楕圓型假定によつて得ました上記の縦横比換算式を実験の結果に應用して見ますと、意外によく合つて居りますのと、換算式が極く簡単であると云ふことで、假定が廣く實際に用ひられて居ります。又其他、此翼理論を基礎とし、此楕圓型揚力分布を假定して、風洞の限りある氣流の中で測定した結果を、其境界の影響に對し修正します換算式は容易に求められ、現今では風洞實驗に必要缺く可からざる修正として、殆んど總ての風洞實驗者に利用されて居ます。

此楕圓型揚力分布は、實際の翼に對する第一近似的のものであります。翼型が一様で、且つ其幾何的迎角が翼幅に沿つて一様な翼では、其の形が第 21 圖に示しましたように、二つの楕圓を

合せたもので、此條件を完全に満足することが出来るのであります。之に近い翼の形は屢々見受けるものであります。

第 21 圖



之で翼の理論に就ての梗概を述べましたが、最後に之に關した實驗に就て御話をしやうと存じます。

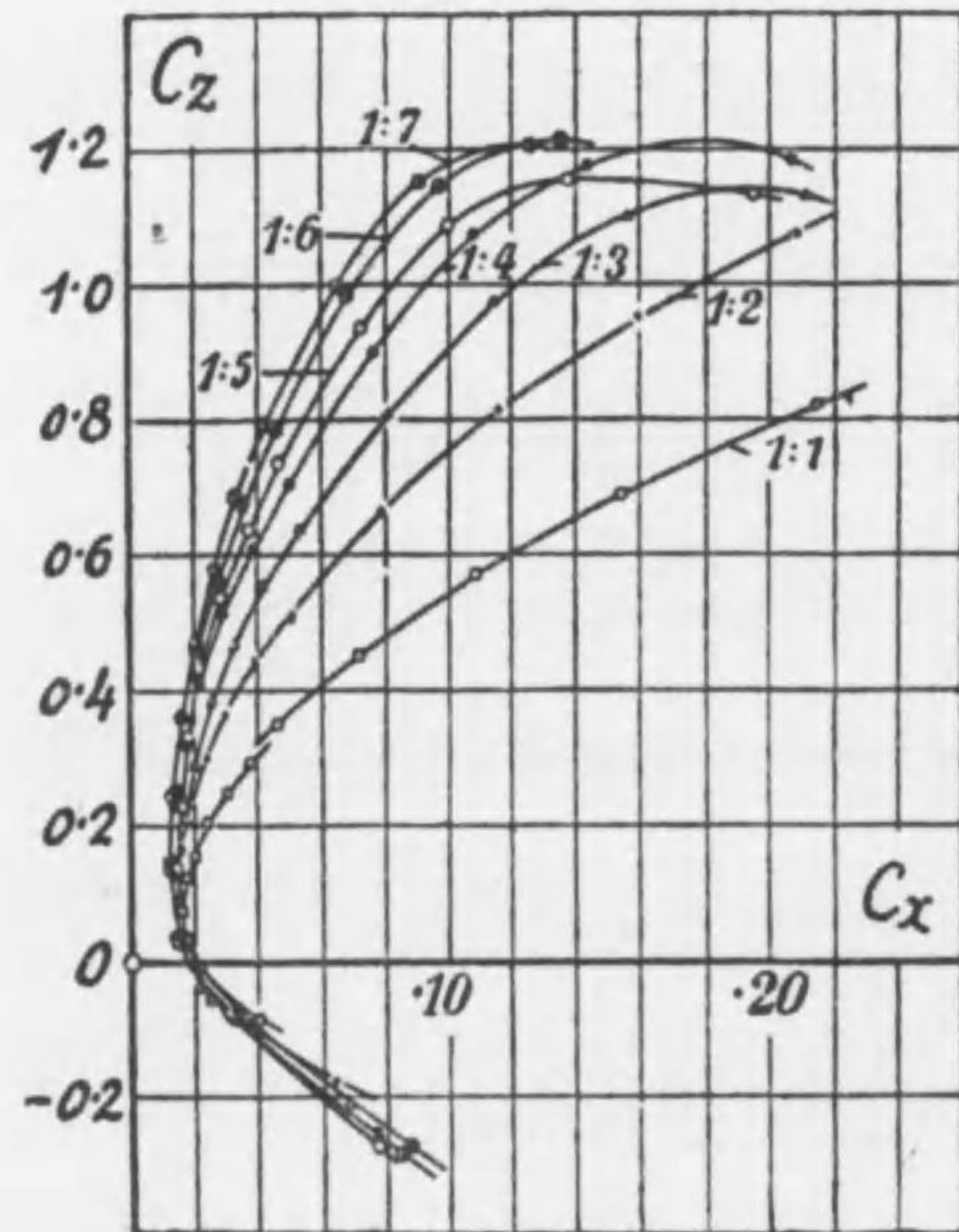
### 實 驗

翼の理論の重要な應用の一つとして得ました縦横比の換算式から得た結果と、實驗の結果を比較して、其實用的價值を確めて見る必要があります。

其方法は、等しい翼型を有つて居り、其縦横比が異つた翼の模型に就て風洞實驗をしまして、其結果に (64) 及 (66) の換算式

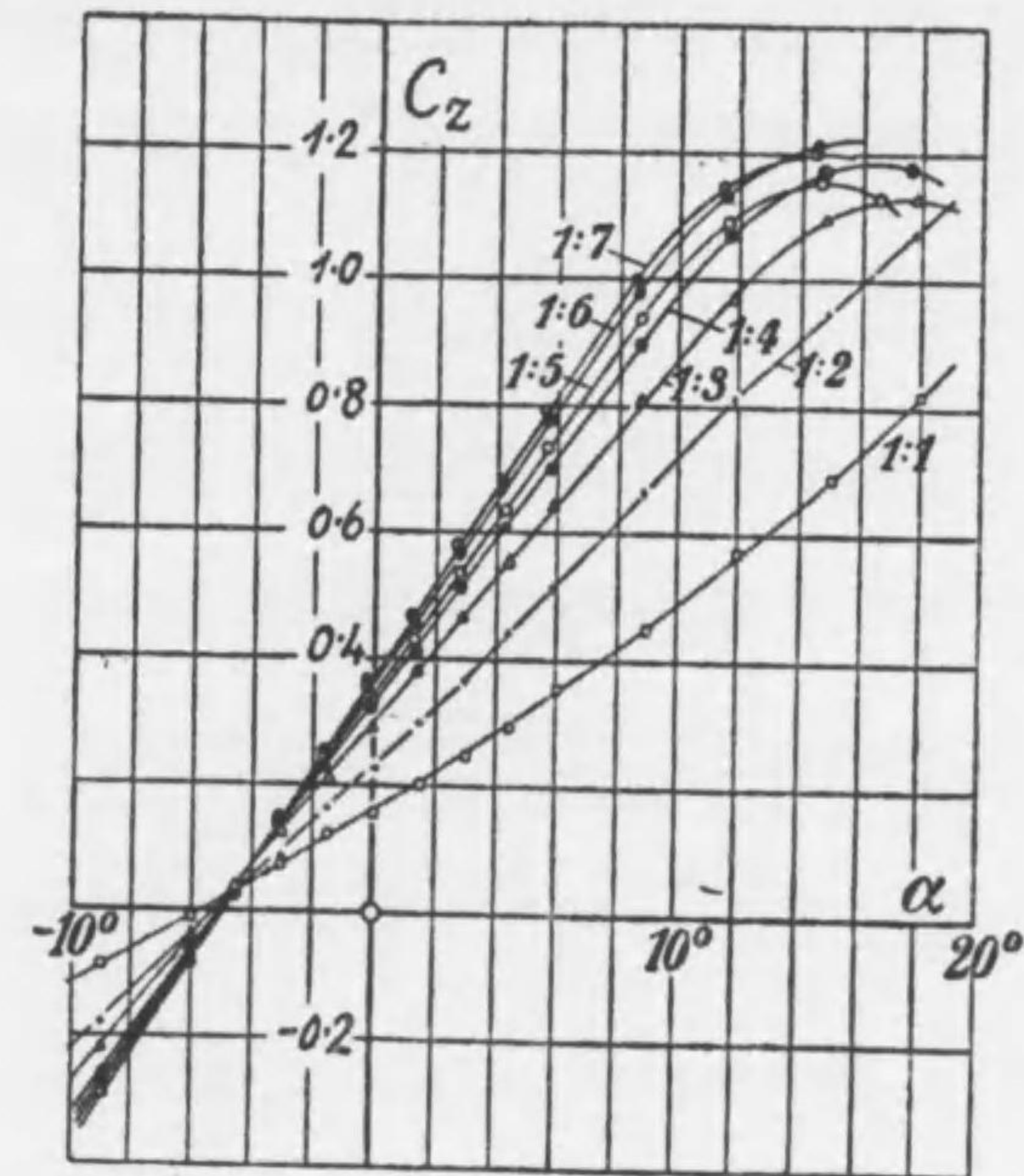
を應用して、之等を或標準の縦横比の翼に引き直して、其結果が一致するや否やを見るのであります。

第 22 圖



此實驗は同じ翼型 (Göttingen 389 型) で、其縦横比が 1 即ち正方形から 7 迄の七つの翼を造り其各々に就て風洞で測定を行つて、夫々の揚力及抗力係数を求めたのであります。其結果は第 22 圖及第 23 圖に示してあります。第 22 圖の曲線は、其縦軸に揚力係数を取り、横軸に抗力係数をとつて、翼の空氣力學的性能を表

第 23 圖



示しましたもので、之を翼の揚抗極線 (Polar diagram) と云ひます。

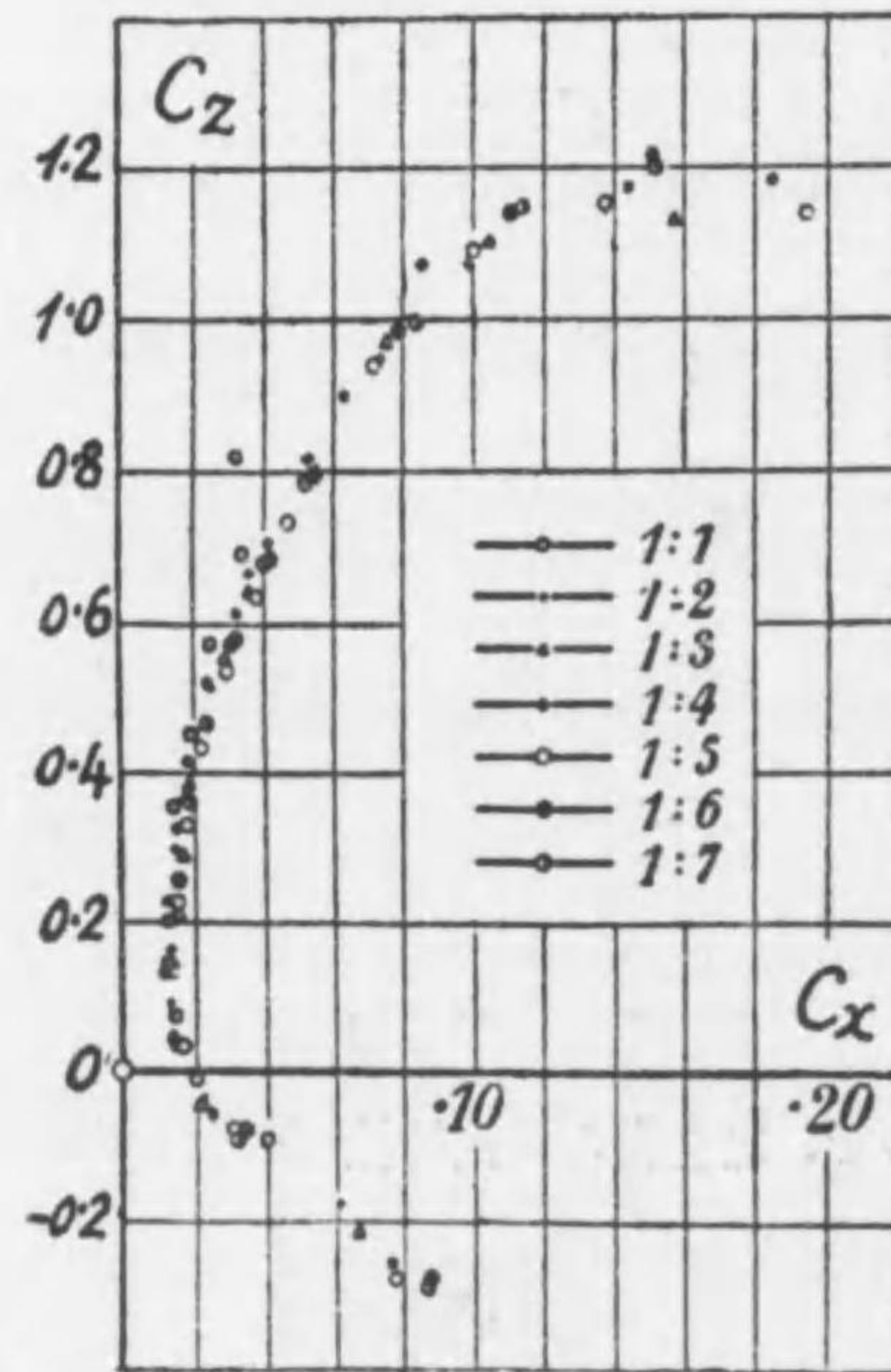
第 23 圖の曲線は、同じ實驗の結果を、横軸に迎角を縦軸に揚力係数をとつて表示したものであります。

此結果から明かに分りますやうに、翼の空氣力學的性能は、其縦横比によつて著しく異ひますもので、同じ揚力係数に相當する抗力係數及有効迎角が縦横比で非常に異なる値を有つて居ることが

分ります。

次に(64)及(66)の換算式を應用しまして、迎角及誘導抗力係数を修正し、之等の實驗結果を總て縦横比が5の場合に引き直す

第 24 圖

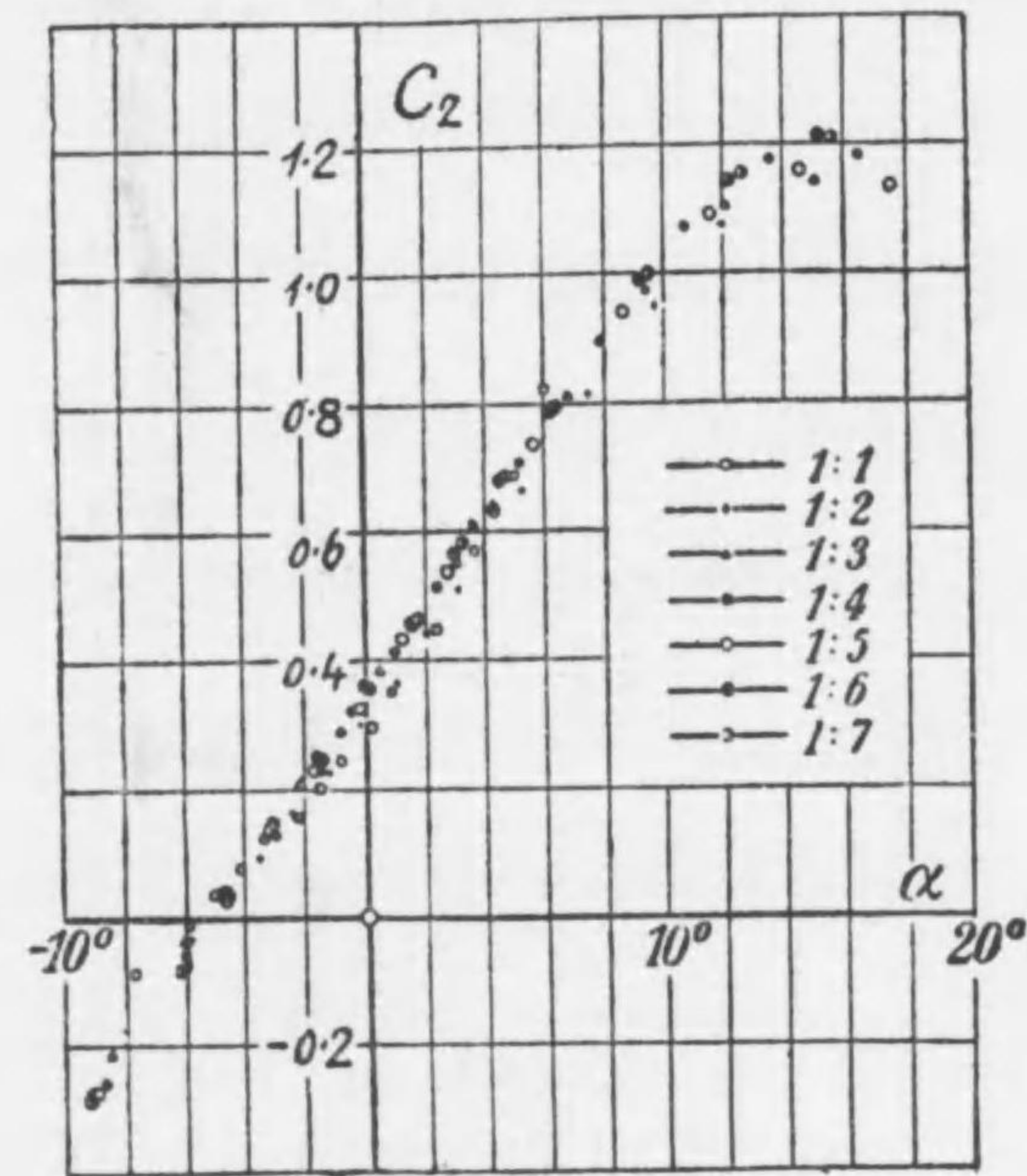


ことが出来ます。其結果は夫々第 24 圖及第 25 圖に示しました様でありまして、今迄縦横比によつて異つて居た曲線が、略々一つの曲線、即ち縦横比が5の曲線になつて居ます。

此結果から見まして、此簡單なる假定——例へば翼を一つの固

定線渦と、一組の自由随伴渦で置かへ、揚力の分布を楕圓型とした様な——の上に築かれた翼の理論が、或範圍に於て實用的の價値のあるものであると云ふことが證明されたのであります。

第 25 圖



航空工學講座

四六判上製

翼の理論

工東大  
學博教授

和田小六著

二七五  
七圖頁

送價料五  
六〇錢錢

プロペラの理論

工東大  
學助教授

河田三治著

三五  
四八圖頁

送價料四  
六〇錢錢

飛行機の強度、性能及安定

工東大  
學助教授

小川太一郎著

近

刊

航空原動機

工東大  
學助教授

富塚清著

近

刊

航空用計測器

工東大  
學助教授

富塚清著

近

刊



翼の理論

昭和七年五月五日印刷  
昭和七年五月十日發行

著者

和田小六

發行・印刷者

倉橋藤治郎

東京市麹町區丸ノ内三ノ四社団法人工政會

發行所

工政會出版部

東京市丸ノ内有樂館  
電話丸ノ内3980番  
振替東京27724番

定價五〇錢

## 政府各研究所試験所報告類頒布

工政會出版部は其事業の一として下記の如き政府各試験研究機關の定期,不定期報告類を公刊し,廉價に頒布してゐます。詳細御問合せを乞ふ。

### 航空研究所報告

航空研究所彙報(月刊)

電氣試験所研究報告 調査報告

電氣試験所第一部彙報(年四回)

東京工業試験所報告 大阪工業試験所報告

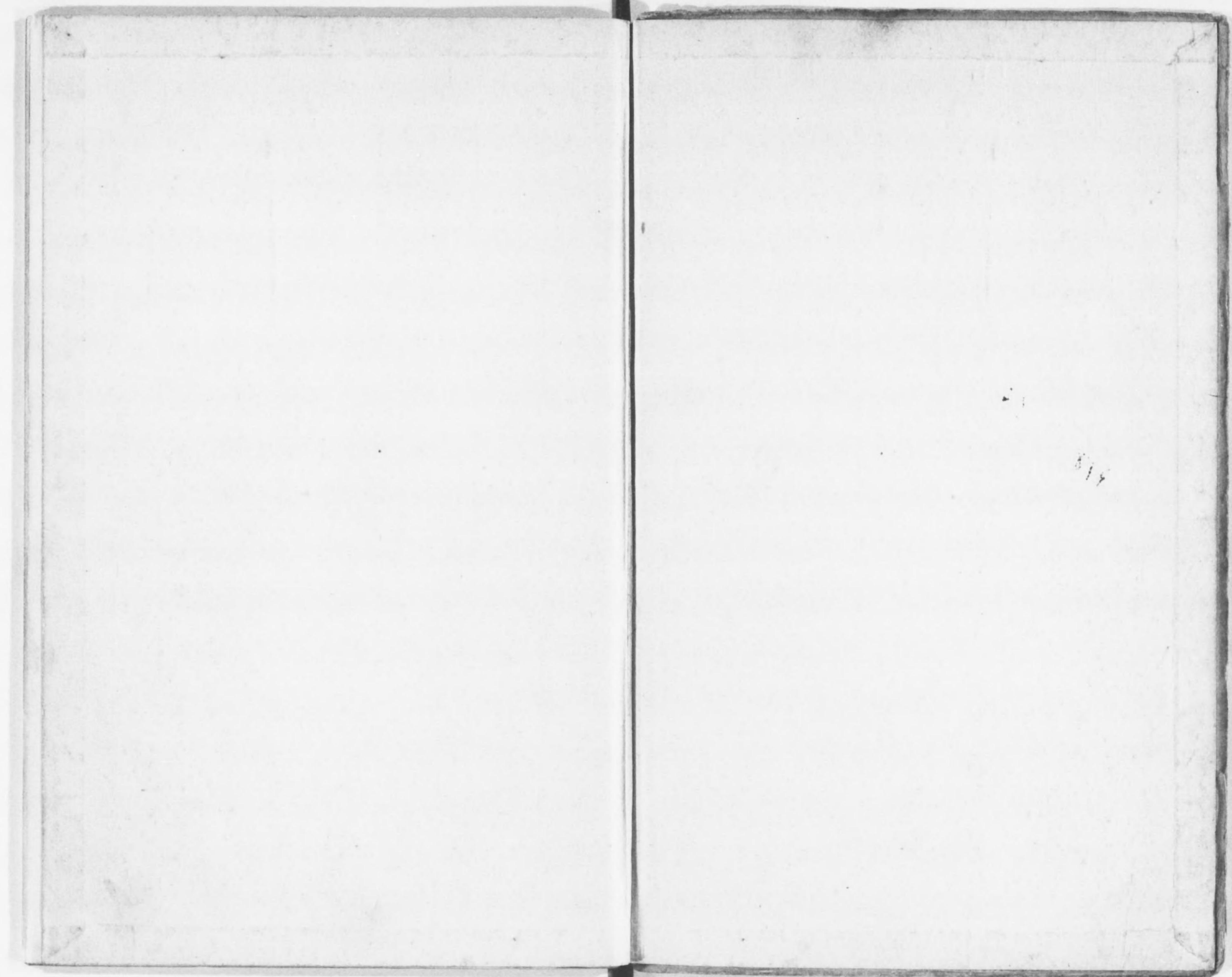
陶磁器試験所報告 商工省工業調査彙報

日本標準規格(目下五輯迄) 其他

資源局・鐵道省・東京市等の出版物も頒分

優良工業圖書目錄送呈

工政會出版部・東京市丸ノ内有樂館(振替東京二七七二四)



318-563



1200501374324

218

53

終

Y050