中等教育 算術教科書二卷目次

第三編　分數

中等教育算術教科書二卷目次終

中等教育 算術教科書二卷

理學博士 寺尾壽 編纂

第三編 分數

第一章 分數ノ總論

一 分數ノ起源

前ニイヘルゴトク或ル連續セル量即チ例ヘバ一直線ノ長サノ如ク、如何ホド少クモ增シ或ハ減ラスコトノ出來ル量アル一ノ此量ノ價格ヲ確カニ知リ人ニモ知ラセントスルニハ、先ヅ此量ト同シ種類ノ量ニシテ一定不易ナルモノヲ擇ビ、之ヲ此種類ノ量ノ單位ト名ツケ、此單位ニ今與ヘラレタル量ヲ比較シテ此量ヲ計ルベシ

若シ與ヘラレタル所ノ量ガ丁度單位ノ幾倍ニカ等シキトキハ、此量ハ完全數ヲ以テ表ハスコトヲ得ベシ、例トヘバ或ル直線ノ長サガ丁度單位ノ五倍ニ等シキトキハ、之ヲ長サ五ニ等シキ直線ナリトイヘバ、分明ニ此直線ノ長サノ價格ヲ言ヒ著ハスコトヲ得ベシ、若シ然ラズシテ、今計ラントスル所ノ量ガ單位ヲ幾箇ニカ等分シテ得ル所ノ部分ノ丁度幾倍ニカ等シキコトアラバ、此事實ヲ略言シテ、此量ハ單位ノ幾分ノ幾箇トカニ等シトイヘバ、仍ホ此量ノ價格ヲ言ヒ著ハスコトヲ得ベシ、例トヘバ或ル直線ノ長サガ、單位ヲ七ツニ等分シタル一部分ノ丁度五倍ニ等シキトキハ、此長サハ單位ノ七分ノ五ニ等シトイヒテ其價格ヲ言ヒ著ハスコトヲ得ベシ

箇樣ノ場合ニ於テ此量ノ價格ヲ言ヒ著ハス所ノモノ、即チ此例ニイヘル七分ノ五ナドヲ、稱シテ分數トイフ

定義 前ニイヘルコトニヨリテ、分數トハ或ル量ガ單位ヲ幾箇ニ等分シテ得ル所ノ部分ノ幾倍ニ等シキカヲ示ス所ノ數ナリ

或ル量ヲ計リテ得タル所ノ分數ノ中ニ於テ、此量ヲ計ル爲メニ單位ヲ幾箇ニ等分セシカヲ示ス所ノ數ヲ此分數ノ分母ト名ツケ、單位ヲ等分シテ得タル所ノ部分ガ幾箇此量ノ中ニアルカヲ示ス所ノ數ヲ此分數ノ分子ト名ツク

例トヘバ前ノ例ニイヘル或ル長サヲ表ハス所ノ七分ノ五トイフ分數ノ中ニ於テ、七トイフ數ハ即チ此長サヲ計ル爲ニ單位ヲ七ツノ相等シキ部分ニ分析シタルコトヲ示ス所ノ數ニシテ、此分數ノ分母ナリ、五トイフ數ハ此長サガ今イヘル部分ノ五倍ニ等シキコトヲ示ス所ノ數ニシテ、此分數ノ分子ナリ

分母ト分子トヲ通稱シテ分數ノ項トイフ

分數ノ書キ方 分數ヲ書キ著ハスニハ、先ヅ分子ヲ書キテ此下ニ横線(一)ヲ引キ更ニ其下ニ分母ヲ書クヲ法トス

例トヘバ七分ノ五トイフ分數ヲ書キ著ハスニハ$\frac{5}{7}$ト書クベシ

又$\frac{1}{2}$ト書キタルハ二分ノ一トイフ分數ノコトニシテ、單位ヲ二ツニ分チタル一部分即チ單位ノ半分ニ等シキ量ヲ表ハスモノナリ

又$\frac{12}{7}$トハ七分ノ十二トイフ分數ノコトニシテ、單位ヲ七ツニ等分シテ得タルモノヽ十二倍ニ等シキ量ヲ表ハスモノナリ

書キタル分數ヲ讀ム法

書キタル分數ヲ讀ムニハ、分數ノ書キ方ノ法則ニ基キテ、先ヅ分母ヲ讀ミ、次ニ分ノトイフ辭ヲツヘ、サテ分子ヲ讀ムベシ

例トヘバ$\frac{2456}{5891}$ト書キタル數ヲバ「五千八百九十一分ノ二千四百五十六」ト讀ムベシ

又先ヅ分子ヲ讀ミ、次ニノ下ニトイフ辭ヲツヘ、サテ分母ヲ讀ムコトモアリ、例トヘバ前ノ例ニ於テハ「二千四百五十六ノ下ニ五千八百九十一」ト唱ヘテモヨシ

又$\frac{3\times5}{7\times2}$ナドヽ書キタル數ハ必「三ニ掛クル五ノ下ニ七ニ掛クル二」ト唱フルヲ法トス、此他之ニ準フベシ

定義 AトBトイフ二ツノ分數或ハ完全數アルトキ、此二ツノ數ハ同シ種類ノ二ツノ量ヲ同ジ單位ニテ計リタルモノヲ表ハス數ナリト假定セン、若シAノ表ハス所ノ量ガBノ表ハス所ノ量ヨリ大ナレバ、Aトイフ數ガBトイフ數ヨリ大ナリトイヒ、或ハBトイフ數ガAトイフ數ヨリ小サシトイフ、又若シ二ツノ數ノ表ハス所ノ量ガ互ニ相等シケレバ、此二ツノ數ヲ互ニ相等シキ數トイフ

又AトBトイフ二ツノ分數或ハ完全數アルトキ、此二ツノ數ハ同シ種類ノ量ヲ同ジ單位ニテ計リタルモノヲ表ハス數ナリト假定セシニ、若シAノ表ハス所ノ量ガBノ表ハス所ノ量ノn倍ニ等シケレバ、Aトイフ數ハBトイフ數ノn倍ニ等シトイヒ、或ハBトイフ數ガAトイフ數ノn分ノ一ニ等シトイフ（nハ隨意ノ完全數ナリ）

定理第一

スベテ分數ハ其分子ガ或ハ其分母ヨリ小サク、或ハ之ニ等シク、或ハ之ヨリ大ナルトニヨリテ、或ハ一ヨリ小サク、或ハ一ニ等シク、或ハ一ヨリ大ナリ

例トヘバ$\frac{3}{5}$ハ一ヨリ小サク、$\frac{5}{5}$ハ一ニ等シク、$\frac{8}{5}$ハ一ヨリ大ナリ、

如何トナレバ單位ヲ五ツニ等分シテ得ル所ノ部分ヲ五ツヨリ寡ク取リテ寄セ聚ムレバ無論單位ヨリ小サキ量ヲ得ベク、丁度五ツ寄セ聚ムレバ單位ニ等シキ量ヲ得ベク、五ツヨリ多ク寄セ聚ムレバ單位ヨリ大ナル量ヲ得ベシ、故ニ$\frac{3}{5}$ハ單位ヲ表ハス所ノ數1ヨリモ小サク、$\frac{5}{5}$ハ一ニ等シク、$\frac{8}{5}$ハ一ヨリ大ナリ

定理第二

分子ヲ大キクナシ或ハ分母ヲ小サクナストキハ分數ハ大キクナリ、分子ヲ小サクナシ或ハ分母ヲ大キクナストキハ分數ハ小サクナル、

如何トナレバ先ヅ單位ヲ幾箇ニカ等分シテ得ル所ノ部分ヲ多クトレバ多クトルホド大ナル量ヲ得ベク、寡クトレバ寡クトルホド小サキ量ヲ得ベシ、故ニ分子大キクナレバ分數大キクナリ、分子小サクナレバ分數小サクナルナリ、次ニ單位ヲ多クノ部分ニ等分シタル時ノ各部分ハ僅カノ部分ニ等分シタル時ノ各部分ヨリモ小サキ量ナルコト勿論ニシテ、且ツ小サキ量ヲ幾箇カ寄セ合ハセタルモノハ勿論大ナル量ヲ同ジ數ダケ寄セ聚メタルモノヨリモ小サカルベシ、故ニ分母大キクナレバ分數ハ小サクナリ、分母小サクナレバ、分數ハ大キクナルナリ

況シテ分子ヲ大キクナスト同時ニ分母ヲ小サクナセバ分數ハ大キクナリ、分子ヲ小サクナスト同時ニ分母ヲ大キクナセバ、分數ハ小サクナルコト勿論ナリ

例ドヘバ$\frac{5}{7}$ハ$\frac{6}{7}$ヨリモ$\frac{5}{6}$ヨリモ小サク、$\frac{4}{7}$ヨリモ$\frac{5}{9}$ヨリモ大ナリ

定理第三

凡テ或ル分數ノ分子ニ或ル完全數ヲ掛ケテ得ル所ノ

分數ハモトノ分數ノn倍ニ等シ、又スベテ或ル分數ノ分子ヲnニテ割リテ得ル所ノ分數ハモトノ分數ノn分ノ一ニ等シ

例トヘバ$\frac{5}{7}$トイフ分數ノ分子5ニ3ヲ掛ケテ得ル所ノ分數$\frac{15}{7}$ハモトノ分數$\frac{5}{7}$ノ三倍ニ等シ、如何トナレバ$\frac{5}{7}$ノ表ハス所ノ量ハ單位ノ七分ノ一ヲ五ツ合ハセタルモノニ等シキ量ニシテ、$\frac{15}{7}$ノ表ハス所ノ量ハ單位ノ七分ノ一ヲ十五合ハセタルモノニ等シキ量ナリ、故ニ今假リニ單位ヲ變ヘテ、モトノ單位ノ七分ノ一ニ等シキ量ヲ單位トスレバ、始ノ量ハ5トイフ數ニテ表ハ、スベキ量ニシテ、後ノ量ハ15即チ5×3ニテ表ハスベキ量ナリ、因テ後ノ量ハ始ノ量ノ三倍ニ等シ、故ニ前ノ定義(二四〇)ニヨリテ、$\frac{15}{7}$ハ$\frac{5}{7}$ノ三倍ニ等シ

又例トヘバ$\frac{6}{11}$トイフ分數ノ分子6ヲ三ニテ割リテ得ル所ノ分數$\frac{2}{11}$ハモトノ分數ノ三分ノ一ニ等シ、如何トナレバ前ニイヘルコトニヨリテ$\frac{6}{11}$ガ$\frac{2}{11}$ノ三倍ニ等シケレバナリ

定理第四 スベテ或ル分數ノ分母ニ或ル完全數nヲ掛ケテ得ル所ノ分數ハモトノ分數ノn分ノ一ニ等シ、又スベテ或ル分數ノ分母ヲ或ル完全數nニテ割リテ得ル所ノ分數ハモトノ分數ノn倍ニ等シ

例トヘバ$\frac{5}{7}$トイフ分數ノ分母ニ3ヲ掛ケテ得ル所ノ分數$\frac{5}{21}$ハ、モトノ分數$\frac{5}{7}$ノ三分ノ一ニ等シ、如何ニモ先ヅ單位ヲ七ツニ等分シテ得ル所ノ各部分ヲ更ニ三ツニ等分シタルモノガ單位ヲ二十一ニ等分シタルモノニ等シキコト明白ナリ、故ニ單位ノ二十一分ノ一ハ其七分ノ一ノ三分ノ一ニ等シ、因テ$\frac{1}{21}$ノ三倍ガ$\frac{1}{7}$ニ等シ、故ニ$\frac{1}{21}$ノ三倍ノ五倍ガ$\frac{1}{7}$ノ五倍即チ$\frac{5}{7}$ニ等シキコト分明ナリ、然ルニ掛ケ算ノ原則ニヨリテ、$\frac{1}{21}$ノ三倍ノ五倍ハ其五倍ノ三倍ニ等シ、即チ$\frac{5}{21}$ノ三倍ニ等シ、因テ$\frac{5}{21}$ノ三倍ガ$\frac{5}{7}$ノ三倍ニ等シク、從テ$\frac{5}{21}$ハ$\frac{5}{7}$ノ三分ノ一ニ等シ

又例トヘバ$\frac{2}{15}$トイフ分數ノ分母十五ヲ三ニテ割リテ得ル所ノ分數

$\frac{2}{5}$ハ、モトノ分數ノ三倍ニ等シ、如何トナレバ前ニイヘルコトニヨリテ、$\frac{2}{15}$ハイカニモ$\frac{2}{5}$ノ三分ノ一ニ等シケレバナリ

定理第五 凡テ或ル分數ノ二ツノ項ニ同シ完全數ヲカケ或ハ之ヲ同シ完全數ニテ割リテ得ル所ノ分數ハモトノ分數ニ等シ

例トヘバ$\frac{5}{7}$トイフ分數ノ分子及ビ分母ニ同時ニ3トイフ數ヲカケテ得ル所ノ分數$\frac{15}{21}$ハ、モトノ分數ニ等シ、如何トナレバ$\frac{5}{7}$ノ分子ニ3ヲ掛ケテ得ル所ノ分數$\frac{15}{7}$ハ、定理第三(二四二)ニヨリテ$\frac{5}{7}$ノ三倍ニ等シク、$\frac{15}{7}$ノ分母ニ3ヲ掛ケテ得ル所ノ分數$\frac{15}{21}$ハ、定理第四ニヨリテ$\frac{15}{7}$ノ三分ノ一ニ等シ、故ニ$\frac{15}{21}$ハ$\frac{5}{7}$ノ三倍ノ三分ノ一即チ$\frac{5}{7}$自身ニ等シ

又コレト同シ樣ニシテ、例トヘバ$\frac{18}{12}$トイフ分數ノ分子ト分母トヲ同時ニ6ニテ割リテ得ル所ノ分數$\frac{3}{2}$ハ、モトノ分數ニ等シキコトヲ證明シ得ベシ

第二章 分數ト完全數トノ變換

完全數ニ等シキ分數 凡テ或ル分數ノ分子ガ其分母ノ倍數ナルトキハ此分數ハ或ル完全數ニ等シ

例トヘバ$\frac{6}{2}$トイフ分數ノ中ニ於テ、分子6ガ分母2ノ倍數ナリトセンニ、6ヲ2ニテ割リテ得ル所ノ商ガ3ナリスレバ、6ハ2×3ニ等シキユヘ、前ノ章ノ定理第三(二四二)ニヨリテ、$\frac{6}{2}$トイフ分數ハ$\frac{2}{2}$ノ三倍ニ等シ、然ルニ前ノ章ノ定理第一(三四一)ニヨリテ、$\frac{2}{2}$ハ一ニ等シ、故ニ$\frac{6}{2}$ハ1ノ三倍即チ三ニ等シ、即チ此分數ハコノ三トイフ完全數ニ等シ

コノ證明ニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得

法則 其分子ガ其分母ノ倍數ナル所ノ分數ヲ完全數ニ直スニハ、其

分母ニテ其分子ヲ割ルベシ

例トヘバ $\frac{1008}{18}$ ノ分子ヲ其分母ニテ割リテ得ル所ノ商ガ 56 ニシテ剰餘ハ零ナルトキハ、此分數ニ等シキ完全數ハ 56 ナリ

帶分數ニ等シキ分數

凡テ或ル分數ノ分子ガ其分母ヨリ大ナル數ニシテ且ツ此分母ノ倍數ナラザルトキハ、此分數ハ或ル完全數ニ或ル一ヨリ小サキ分數ヲ加ヘタルモノニ等シ

例トヘバ $\frac{11}{4}$ トイフ分數ノ中ニ於テ、分子 11 ガ分母 4 ヨリ大ニシテ且ツ 11 ガ 4 ノ倍數ナラズトスレバ、11 ハ必ズ 4 ノ倍數ニ 4 ヨリ小サキ數ヲ加ヘタルモノニ等シ、如何ニモ 11 ヲ 4 ニテ割リテ得ル所ノ完全商ガ 2 ニシテ剰餘ガ 3 ナリトスレバ、11 ハ $4\times2+3$ 即チ $8+3$ ニ等シ、因テ $\frac{11}{4}$ ガ表ハス所ノ量ハ分明ニ單位ノ四分ノ一ノ八倍ニ其三倍ヲ加ヘタルモノニ等シ、故ニ $\frac{11}{4}$ ハ $\frac{8}{4}+\frac{3}{4}$ ニ等シ(二七)、偖前ニイヘルコトニヨリテ $\frac{8}{4}$ ハ或ル完全數ニ等シク、$\frac{3}{4}$ ハ前ノ章ノ定理第一(二四一)

ニヨリテ一ヨリ小サキ分數ナリ、故ニ $\frac{11}{4}$ ハ或ル完全數ニ一ヨリ小サキ分數ヲ加ヘタルモノニ等シ

定義

スベテ或ル完全數ト或ル一ヨリ小サキ分數トノ和ニ等シキ數ヲ稱シテ帶分數トイフ

一ヨリ大ナル分數ヲ帶分數ノ形ニ直スコトヲ名ケテ此分數ノ中ニアル完全數ヲ取リ出ストモイフ

前ニイヘルコトニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則

一ヨリ大ナル分數ヲ帶分數ノ形ニ直スニハ、此分數ノ分母ニテ其分子ヲ割リテ得ル所ノ完全數ニ、コノ割リ算ノ剰餘ヲ分子トシモトノ分母ヲ分母トシタル分數ヲ加フベシ

例トヘバ $\frac{5317}{43}$ ヲ帶分數ノ形ニ直スニハ、43 ニテ 5317 ヲ割リテ完全商 123 ト剰餘 28 トヲ求メ、$123+\frac{28}{43}$ トナスベシ

帶分數ノ書キ方及ビ唱ヘ方

帶分數ヲ書キ著ハスニ、外ノモノト混

スルノ恐レナキトキハ、其完全ナル部分ノ次ニ十ナル符號ヲ書カズシテ直チニ分數ヲ書キ添ヘテモヨシ、例トヘバ $4+\frac{3}{7}$ ト書ク代リニ $4\frac{3}{7}$ ト書クコトモアリ

又 $4\frac{3}{7}$ ナドイフ帶分數ハ「四ニ加フル七分ノ三」トカ「四プラス七分ノ三」トカ唱フベキ筈ナレドモ、辭ヲ省キテ「四ト七分ノ三」ト唱フルヲ常トス、此他モ之ニ準フベシ

注意 凡テ或ル分數ガ或ル完全數ニ等シキ爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ、其分子ガ其分母ノ倍數ナルコトナリ

如何ニモ先ヅ此要件ハ、此章ノ始メ(二四六)ニイヘルコトニヨリテ、十分ナリ、次ニ此要件ハ必要ナリ、如何トナレバ若シ分子ガ分母ノ倍數ナラザルトキハ、若シ分子ガ分母ヨリ小サケレバ此分數ハ一ヨリ小サク、若シ分子ガ分母ヨリ大ナレバ此分數ハ或ル帶分數ニ等シク(二四七)、イヅレニシテモ此分數ハ或ル完全數ニ等シキコト能ハサレバナリ

完全數ヲ分數ニ直スコト スベテ完全數ハ之ヲ隨意ノ分母ヲ有シタル分數ノ形ニ直スコトヲ得

例トヘバ5トイフ數ヲ七分ノ幾箇トカイフ分數ノ形ニ直スコトヲ得ベシ、如何トナレバ5トイフ數ハ1ノ五倍ニシテ、1ハ $\frac{7}{7}$ ニ等シキユヘ、5ハ $\frac{7}{7}$ ノ五倍ニ等シ、偖前ノ章ノ定理第三(二四二)ニヨリテ、$\frac{7}{7}$ トイフ分數ノ分子ニ5ヲ掛ケテ得ル所ノ分數(即チ七分ノ三十五)ガ $\frac{7}{7}$ ノ五倍ニ等シ、因テ

$$5=\frac{35}{7}\quad 或ハ\quad 5=\frac{5\times7}{7}\quad ナリ$$

コレニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得

法則 或ル完全數ヲ或ル與ヘラレタル分母ヲ有スル分數ノ形ニ直スニハ此數ニコノ分母トナルベキ數ヲ掛ケタルモノヲ分子ニ取ルベシ

一ヲ分母トシタル分數 只今述ベタル法則ノ中ニ於テハ、與ヘラレ

タル分母トナルベキ數ハ一ニ非ズト假定セリ、若シ此數ガ一ナルトキ此法則ヲ適用シテ、例トヘバ7トイフ完全數ヲ分數ニ直セバ $\frac{7\times1}{1}$ 或ハ $\frac{7}{1}$ ヲ得、因テ新タニ規約ヲ設ケテ、凡テ一ヲ分母トシタル分數ハ其分子ニ等シキ完全數ヲ表ハスモノト看做スコトニスレバ、イヅレノ場合ニ於テモ前ノ法則ヲ適用シ得ベシ

前ノ章ニ述ベタル一般ノ分數ノ諸性質ハ、一ヲ分母トシタル分數モ亦皆之ヲ有スルコト容易ク知リ得ベシ、例トヘバ $\frac{7\times5}{1\times5}$ 即チ $\frac{5\times7}{5}$ ハ本章ノ初メ(二四六)ニイヘルコトニヨリテ、7即チ $\frac{7}{1}$ ニ等シ、故ニ前ノ章ノ定理第五(二四五)ハ一ヲ分母トシタル分數ニモ適用シ得ベシ、其他ノ定理モ皆然リ

帶分數ヲ分數ニ直スコト 前ニイヘルコトニヨリテ、スベテノ帶分數ヲ分數ノ形ニ直スコトヲ得ベシ

例トヘバ $5+\frac{3}{7}$ トイフ帶分數アランニ、前ニイヘルコトニヨリテ、5ハ $\frac{5\times7}{7}$ 即チ $\frac{35}{7}$ ニ等シ、故ニ $5+\frac{3}{7}$ ガ表ハス所ノ量ハ、單位ノ七分ノ一ノ三十五倍ニ同ジ量ノ三倍ヲ加ヘタルモノニ等シ、即チ此量ハ單位ノ七分ノ一ニ等シキモノヲ三十五ト三ツ都合三十八ダケ寄セ聚メタルモノニ等シ、因テ此量ハ單位ノ七分ノ三十八ナリ、故ニ

$5+\frac{3}{7}=\frac{38}{7}$ 或ハ $5+\frac{3}{7}=\frac{5\times7+3}{7}$ ナリ

是ニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得

法則 或ル帶分數ヲ分數ニ直スニハ、此數ノ完全ナル部分ト其分數ノ分母トノ積ニ此分數ノ分子ヲ加ヘテ得ル所ノ數ヲ分子ニトリ、モトノ分數ノ分母ヲ分母ニトルベシ

第三章 約分

定義 或ル與ヘラレタル分數ニ等シクシテ、且ツ其二ツノ項ガ此分

數ハ項ヨリモ簡單ナル所ノ分數アルトキハ、コノ後ノ分數ヲ以テ與ヘラレタル分數ニ代フルコトヲ名ケテ、コノ與ヘラレタル分數ヲ約ストイフ

分數ヲ約スルコトヲ稱シテ約分トモイフ

例ヘバ $\frac{12}{18}$ トイフ分數アルトキ、其分子ハ 12 ヨリ小サク其分母ハ 18 ヨリ小サクシテ、且ツ $\frac{12}{18}$ ニ等シキ所ノ分數アリトスレバ、コノ分數ヲ $\frac{12}{18}$ ノ代リニ取ルコトヲ名ケテ $\frac{12}{18}$ トイフ分數ヲ約ストイフ

或ル分數ニ等シクシテ且ツ其二ツノ項ガ此分數ノ項ヨリ簡單ナル所ノ分數ナキトキハ此分數ヲ已約分數ト稱ス

例ヘバ $\frac{2}{3}$ ニ等シクシテ、且ツ其項ガ $\frac{2}{3}$ ノ項ヨリモ簡單ナル分數ハナシトスレバ、$\frac{2}{3}$ ハ已約分數ナリ

定理第二

相等シキ二ツノ分數アリテ、其中ノ一ツノ分數ノ二ツノ項ガ互ニ單純ナル數ナルトキハ、今一ツノ分數ノ二ツノ項ハ、コノ始ノ

分數ノ二ツノ項ニ或ル同シ完全數ヲ掛ケタルモノニ等シ

例ヘバ爰ニ $\frac{3}{4}$ ト $\frac{27}{36}$ トイフ二ツノ分數アリテ、此二ツノ分數ガ互ニ相等シク、且ツ始ノ分數ノ二ツノ項 3 ト 4 トガ互ニ單純ナル數ナリトスレバ、後ノ分數ノ二ツノ項 27 ト 36 トハ各、3 ト 4 トニ或ル同シ完全數ヲカケタルモノニ等シ、如何トナレバ先ヅ

$$\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

ナラバ、此二ツノ分數ノ分子ニ同時ニ 36 ヲカケテ得ル所ノ二ツノ數モ必互ニ相等シカルベシ、即チ

$$\frac{27\times36}{36}=\frac{3\times36}{4}$$

ナリ、然ルニ第二章ノ初メ(二四六)ニイヘルコトニヨリテ、$\frac{27\times36}{36}$ ハ 27 トイフ完全數ニ等シ、故ニ

$$27=\frac{3\times35}{4}$$

ナリ、即チ $\frac{3\times36}{4}$ トイフ分數モ 27 トイフ完全數ニ等シカラザルベ

カラズ、然ルニ前ノ章ニイヘルコト(二四九)ニヨリテ、此分數ガ或ル完全數ニ等シキ爲ニハ、其分子3×36ガ其分母4ノ倍數ナラザルベカラズ、倍假定ニヨリテ3ト4トハ互ニ單純ナル數ナルユヘ、第二編第五章ノ定理第四(一九五)ニヨリテ、3×36ガ4ノ倍數ナレバ、36ガ4ノ倍數ナラザルベカラズ、因テ36ハ4ニ或ル完全數Kヲ掛ケタルモノニ等シ、即チ

$$36=4\times K$$

ナリ、從テ

$$27=\frac{3\times4\times K}{4}=\frac{(3\times K)\times4}{4}=3\times K$$

ナリ、即チ27ト36トハ各、3ト4トニ或ル同シ完全數Kヲ掛ケタルモノニ等シ

定理第二 或ル分數ノ二ツノ項ガ、互ニ單純ナル數ナルトキハ、此分數ハ已約分數ナリ

如何トナレバ、前ノ定理ニヨリテ箇樣ナル分數ニ等シキスベテ分數ノ二ツノ項ハ、必ズコノ與ヘラレタル分數ノ二ツノ項ノ或ル倍數ナルユヘ、之ヨリ簡單ナルコト能ハザレバナリ

又逆ニスベテ已約分數ノ二ツノ項ハ必互ニ單純ナル數ナリ

如何トナレバモシ箇樣ナル分數ノ二ツノ項ノ間ニ一ヨリ外ノ公約數アリトスレバ、此公約數ニテ此二ツノ項ヲ割リテ得ル所ノ分數ハ、第一章ノ定理第五(二四五)ニヨリテ、與ヘラレタル分數ニ等シク、且ツ其項ハモトノ分數ノ項ヨリモ簡單ナルベケレバナリ

注意 定理第一及ビ定理第二ニヨリテ、凡テ已約分數ナラザル分數ノ二ツノ項ハ、此分數ニ等シキ已約分數ノ二ツノ項ニ或ル同シ完全數ヲ掛ケタルモノニ等シ

定理第三 若シ二ツノ分數ガイヅレモ已約分數ニシテ、且ツ互ニ相等シキトキハ、此二ツノ分數ノ項ハ各、互ニ相等シ

例ヘバ $\frac{a}{b}$ ト $\frac{a'}{b'}$ トガ互ニ相等シクシテ、且ツ此二ツノ分數ガ皆已約分數ナリトスレバ、必 a ト a' ト互ニ相等シク、b ト b' ト互ニ相等シ、如何ニモ先ヅ假定ニヨリテ $\frac{a}{b}$ ハ已約分數ナルユヘ、前ノ定理ニヨリテ a ト b トハ互ニ單純ナル數ナリ、故ニ $\frac{a'}{b'}$ ガ $\frac{a}{b}$ ニ等シケレバ、定理第一(二五三)ニヨリテ、a' ハ a ノ倍數ナラザルベカラズ、又 $\frac{a'}{b'}$ ガ已約分數ナレバ、a' ト b' トハ互ニ單純ナル數ナルユヘ、前ト同シ道理ニテ、a ガ a' ノ倍數ナラサルベカラズ、即チ a' ハ a ノ約數ナラザルベカラズ、因テ a' ハ a ノ倍數ニシテ且ツ同時ニ其約數ナリ、故ニ a' ハ a ヨリ小サキコト能ハズ、又之ヨリ大ナルコト能ハズ、即チ必 a ニ等シ

是ト同シ道理ニテ b' ハ必 b ニ等シ

定理第四

或ル分數ノ二ツノ項ヲ其最大公約數ニテ割レバ、此分數ニ等シキ已約分數ヲ得ベシ

如何ニモ先ヅ箇條ニシテ得ル所ノ分數ハ、第一章ノ定理第五(二四五)ニヨリテ、與ヘラレタル分數ニ等シ、次ニ箇條ニシテ得ル所ノ分數ノ二ツノ項ハ、第二編第五章ノ定理第一(一九二)ニヨリテ、互ニ單純ナル數ナルユヘ、此分數ハ本章ノ定理第二(二五五)ニヨリテ已約分數ナリ

此定理ニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則

或ル分數ヲ約シテ最モ簡單ナル形ニナスニハ、先ヅ其二ツノ項ノ最大公約數ヲ求メ、此最大公約數ニテ此二ツノ項ヲワレバヨシ

例ヘバ $\frac{252}{792}$ トイフ分數ノ二ツノ項ノ最大公約數ヲ求ムレバ 36 ヲ得、次ニ此數ニテ 252 ト 792 トヲ割レバ、7 ト 22 トヲ得、故ニ $\frac{252}{792}$ ヲ約シテ最モ簡單ナル形ニナシタルモノ、即チ之ヲ約シツメタルモノハ $\frac{7}{22}$ ナリ

注意

實際ニ於テハ分數ノ二ツノ項ノ間ニ簡單ナル公約數アルコトヲ發見スルゴトニ、此公約數ニテ此二ツノ項ヲワリテ約分シ、而シテ後猶必要ノトキハ前ノ法則ヲ適用スルヲヨシトス、例ヘバ $\frac{70560}{132300}$

トイフ分數ヲ與ヘラレタルトキハ次ノ諸ノ等式ヲ得ベシ、

$$\frac{70560}{132300}=\frac{7056}{13230}=\frac{3528}{6615}=\frac{1176}{2205}=\frac{392}{735}$$

即チ始ノ分數ノ二ツノ項ヲ十ニテ割レバ次ノ分數ヲ得、此第二ノ分數ノ二ツノ項ヲ二ニテワレバ第三ノ分數ヲ得、更ニ又二ツノ項ヲ三ニテワレバ第四ノ分數ヲ得、再ビ三ニテ割レバ終ノ分數ヲ得ルナリ、偖コヽニ至リテ始メテ前ノ法則ヲ適用シ、尋常ノ手數ヲ行ヘバ、392ト735トノ最大公約數ハ49ナルコトヲ知リ、之ニテ此二ツノ數ヲワレバ八ト十五トヲ得ルユヘ、與ヘラレタル分數ハ$\frac{8}{15}$ニ等シキコトヲ知リ得ベシ

第四章　通分

定義　若干ノ分數ヲ通分スルトハ、ソレゾレニ此等ノ分數ニ等シクシテ、且ツ同シ完全數ヲ分母トスル所ノ分數ヲ以テ與ヘラレタル諸ノ分數ニ代フルコトナリ

若干ノ分數ガ同シ完全數ヲ分母トスルトキハ、此完全數ヲ此等ノ分數ノ公分母ト名ツク

例トヘバ$\frac{5}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{12}{7}$トイフ三ツノ分數ノ公分母ハ七ナリ

法則第一　二ツノ分數甲乙ヲ通分スルニハ、甲ノ二ツノ項ニ乙ノ分母ヲ掛ケ、乙ノ二ツノ項ニ甲ノ分母ヲ掛クレバヨシ

例トヘバ$\frac{3}{5}$ト$\frac{2}{7}$トイフ二ツノ分數ヲ通分スルニハ、始ノ分數ノ二ツノ項ニ7ヲカケテ之ヲ$\frac{3\times7}{5\times7}$或ハ$\frac{21}{35}$トナシ、後ノ分數ノ二ツノ項ニ5ヲ掛ケテ之ヲ$\frac{2\times5}{7\times5}$或ハ$\frac{10}{35}$トナセバヨシ、如何トナレバ箇様ニシテ得タル所ノ二ツノ分數ハ、第一章ノ定理第五(二四五)ニヨリテ、ソレゾレニ$\frac{3}{5}$ト$\frac{2}{7}$トニ等シク、且ツ其分母5×7、7×5ハ、掛ケ算ノ原則(五四)ニヨリテ互ニ相等シケレバナリ

法則第二 數多ノ分數ヲ通分スルニハ、各分數ノ二ツノ項ニ他ノスベテノ分數ノ分母ノ積ヲ掛クレバヨシ

例ヘバ $\frac{2}{3}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{7}{15}$ トイフ三ツノ分數ヲ通分スルニハ、$\frac{2}{3}$ ノ二ツノ項ニ他ノ分數ノ分母ノ積 7×15 ヲ掛ケテ、此分數ヲ $\frac{2\times7\times15}{3\times7\times15}$ 或ハ $\frac{210}{315}$ トナシ、次ニ $\frac{5}{7}$ ノ二ツノ項ニハ 3×15、$\frac{7}{15}$ ノ二ツノ項ニハ 3×7 ヲカケテ、此等ノ分數ヲ $\frac{5\times3\times15}{7\times3\times15}$, $\frac{7\times3\times7}{15\times3\times7}$ 或ハ $\frac{225}{315}$, $\frac{147}{315}$ トナセバヨシ、如何トナレバ箇樣ニシテ得ル所ノ分數ハソレゾレニ與ヘラレタル分數ニ等シクシテ、且ツ其分母ハ互ニ相等シケレバナリ

注意 コヽニ述ベタル二ツノ法則ヲ適用シテ得ル所ノ公分母ヨリモ更ニ簡單ナル公分母ヲ有シテ、且ツ與ヘラレタル分數ニ等シキモノヲ見出シ得ベキコトアリ、例ヘバ前ノ例ノ $\frac{210}{315}$, $\frac{225}{315}$, $\frac{147}{315}$ ノ三ツノ分數ヲ檢スルニ、各分數ノ二ツノ項ノ間ニ皆3トイフ公約數アルユヘ、此數ヲ用ヰテ約分スレバ、$\frac{70}{105}$, $\frac{75}{105}$, $\frac{49}{105}$ トイフ分數ヲ得、然ルニ

此等ノ分數ハ猶與ヘラレタル分數ニ等シクシテ、其公分母105ハ315ヨリモ簡單ナリ、故ニ前ノ法則ニヨリテ得ル所ノ分數ハ、與ヘラレタル諸ノ分數ニ等シクシテ且ツ同シ完全數ヲ分母トスル所ノ分數ノ中ニ於テ最モ簡單ナルモノニハアラズ

次ニ述ブル所ノ定理ヲ應用スレバ、直チニ最モ簡單ナル結果ニ至ルコトヲ得ベシ

定理 若干ノ分數ヲ通分シテ或ル與ヘラレタル完全數ヲ公分母トシタル分數トナスコトヲ得ル爲ニ、必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ、コノ與ヘラレタル完全數ガ與ヘラレタル諸分數ヲ約シツメテ得ル所ノ諸ノ分母ノ公倍數ナルコトナリ

如何ニモ例ヘバコヽニ三ツノ分數アリテ、之ヲ約シツメタルモノガ $\frac{5}{6}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{7}{15}$ ナリトセシニ、第一若シソレゾレニ此等ノ分數ニ等シクシテ且ツ或ル同シ完全數Kヲ分母トスル所ノ分數アリトスレバ、前ノ

章ノ定理第一(二五三)ニヨリテ、コノKトイフ數ハ必同時ニ6ノ倍數、4ノ倍數ニシテ、且ツ15ノ倍數ナラザルベカラズ、故ニ與ヘラレタル三ツノ分數ヲ通分シテ、Kトイフ數ヲ分母トシタル分數ト爲スコトヲ得ル爲ニハ、Kトイフ數ガ6,4,15ノ公倍數ナラザルベカラズ、次ニ若シ或ル完全數Kガ6,4,15ノ公倍數ナルトキハ、Kヲソレゾレ6,4,15ニテワリテ得ル所ノ數ヲ、ソレゾレ$\frac{5}{6}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{7}{15}$トイフ三ツノ分數ノ二ツノ項ニカクレバ、箇樣ニシテ得ル所ノ三ツノ分數ハソレゾレ與ヘラレタル三ツノ分數ニ等シクシテ、且ツ其分母ハ皆Kニ等シカルベシ、故ニ此時ハ與ヘラレタル分數ヲ通分シテ、Kヲ公分母トシタル分數トナスコトヲ得ベシ

例トヘバ720ハ6,4,15ノ公倍數ナルユヘ、此數ヲソレゾレニ此三ツノ數ニテワリテ得ル所ノ數120,180,48ヲ、ソレゾレニ$\frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{15}$ノ二ツノ項ニカケ、此等ノ分數ヲ通分シテ、$\frac{5\times120}{6\times120}, \frac{1\times180}{4\times180}, \frac{7\times48}{15\times48}$或ハ$\frac{600}{720}, \frac{180}{720}, \frac{336}{720}$トナスコトヲ得ベシ、叉350ハ6,4,15ノ公倍數ニ非ルユヘ、與ヘラレタル分數ヲ通分シテ350ヲ公分母トスル所ノ分數トナスコトヲ得ズ

系　若干ノ分數ニ等シクシテ、且ツ同シ完全數ヲ分母トスル所ノ分數ノ中ニ於テ最モ簡單ナルハ、與ヘラレタル諸分數ヲ約シツメテ得ル所ノ諸ノ分母ノ最小公倍數ヲ公分母トシタルモノナリ

此定理ニヨリテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則第三　若干ノ分數ヲ通分シテ最モ簡單ナル公分母ヲ有スル所ノ分數トナスニハ、先ヅ此等ノ分數ヲ約シテ其最モ簡單ナル形ニ直シ、然シテ後諸ノ分母ノ最小公倍數ヲ求メテ之ヲ今求ムル所ノ分數ノ公分母トシ、コノ最小公倍數ヲ各分數ノ分母ニテ割リテ得ル所ノ數ヲ其分子ニカケタルモノヲ此分數ノ分子トスベシ

此法則ヲ例トヘバ$\frac{20}{24}$、$\frac{7}{28}$、$\frac{21}{45}$トイフ三ツノ分數ニ適用センニ、先

ヅ此等ノ分數ヲ約シツムレバ $\frac{5}{6}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{7}{15}$ トナル偖六ト四ト十五トノ最小公倍數ヲ求ムルニ六十ヲ得次ニ此六十ヲソレゾレニ六ト四ト十五トニテワレバ十ト十五ト四トヲ得故ニ與ヘラレタル三ツノ分數ヲ通分シタルトキノ最モ簡單ナル結果ハ

$$\frac{5\times10}{60},\ \frac{1\times15}{60},\ \frac{7\times4}{60}\ \text{或ハ}\ \frac{50}{60},\ \frac{15}{60},\ \frac{28}{60}$$ ナリ

通分ノ應用　二ツノ分數ヲ與ヘラレテ孰レガ最モ大ナル分數ナルカヲ見定ムルニハ此二ツノ分數ヲ通分スレバ直チニ分ルナリ

例ヘバ $\frac{223}{611}$ ト $\frac{50}{137}$ トノ二ツノ分數アランニ後ノ分數ノ二ツノ項ガ各始ノ分數ノ項ヨリモ小サキユヘ此二ツノ分數ノ中孰レガ最モ大ナルカハ唯之ヲ見タルバカリニテハ見定メ難シ然ルニ之ヲ通分シテ $\frac{30551}{83707}$ 及ビ $\frac{30550}{83707}$ トナセバ前ノ分子ガ後ノ分子ヨリ大ナルユヘ第一章ノ定理第二(一四一)ニヨリテ前ノ分數ガ後ノ分數ヨリ大ナルコトヲ知ルベシ

第五章　分數ノ寄セ算

第一編ノ中ニイヘルゴトク(二七)若干ノ數ヲ加ヘ合ハストハ此等ノ數ガ表ハス所ノ量ノ和ヲ表ハスベキ數ヲ作ルコトナリ

此定義ニ基キテ完全數ヲ加ヘ合ハスル法ハ吾ガ輩已ニ之ヲ述ベタレバ今ハ分數及ビ帶分數ヲ加ヘ合ハスル法ヲ述ベシ

法則第一　同シ分母ヲ有シタル若干ノ分數ヲ加ヘ合ハスルニハ此等ノ分數ノ分子ヲ加ヘ合ハセタルモノヲ分子トシ其公分母ヲ分母トシタル分數ヲ作ルベシ

例トヘバ $\frac{7}{15}$、$\frac{3}{15}$、$\frac{2}{15}$ トイフ三ツノ分數アランニ第一ノ數ハ單位ノ十五分ノ七倍第二ノ數ハ單位ノ十五分ノ一ノ三倍第三ノ數ハ單位ノ十五分ノ一ノ二倍ニ等シキ量ヲ表ハス所ノ數ナリ然ルニ

7+3+2ハ12ニ等シキユヘ、此三ツノ量ノ和ハ分明ニ單位ノ十五分ノ一ノ十二倍ニ等シ、故ニ

$$\frac{7}{15}+\frac{3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{12}{15}\text{ 即チ }\frac{4}{5}\text{ ナリ}$$

注意　與ヘラレタル諸分數ハタトヘ各一ヨリ小サクトモ、之ヲ加ヘ合ハセテ得ル所ノ分數ハ一ヨリ大ナルコトアルベシ、箇樣ノ場合ニ於テハ、寄セ算ヲ行ヒタル後ニ、此和ノ中ニアル完全數ヲ取リ出スコトヲ得ベシ、例トヘバ左ノ如シ

$$\frac{5}{13}+\frac{9}{13}+\frac{10}{13}=\frac{5+9+10}{13}=\frac{24}{13}=1+\frac{11}{13}$$

法則第二　同シ分母ヲ有セザル若干ノ分數ヲ加ヘ合ハスルニハ、先ヅ之ヲ通分シテ後前ノ法則ヲ適用スレバヨシ

例トヘバ $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{9}{10}$ トイフ三ツノ分數アランニ、之ヲ通分スレバ $\frac{20}{30}$、$\frac{18}{30}$、$\frac{27}{30}$ トナル、偖之ヲ加ヘ合ハスレバ、前ノ法則ニヨリテ

$$\frac{20+18+27}{30}=\frac{65}{30}=2+\frac{5}{30}=2+\frac{1}{6}$$

ヲ得ベシ、故ニ

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{9}{10}=2+\frac{1}{6}\text{ ナリ}$$

法則第三　若干ノ帶分數ヲ加ヘ合ハスルニハ、先ヅ分數ダケヲ加ヘ合ハセ(若シ得ル所ノ和ガ一ヨリ大ナレバ其中ニアル完全數ヲ取リ出シ)箇樣ニシテ得ル所ノ數ヲ、與ヘラレタル諸帶分數ノ完全ナル部分ノ和ニ加フベシ

例トヘバ $5+\frac{2}{3}$、$8+\frac{3}{5}$、$1+\frac{9}{10}$ トイフ三ツノ帶分數アランニ、先ヅ $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{9}{10}$ トイフ三ツノ分數ヲ加ヘ合ハセ、次ニ5、8、1トイフ三ツノ完全數ヲ加ヘ合ハセ、サテ前後ニ得タル所ノ和ヲ加ヘ合ハスレバ、分明ニ與ヘラレタル三ツノ帶分數ノ和ヲ得ベシ、然ルニ $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{9}{10}$ ハ、前ノ法則ヲ適用シテ、$2+\frac{1}{6}$ ナルコトヲ知ル、偖此數ヲ $5+8+1$ 即チ14ニ加フレバ $16+\frac{1}{6}$ トナルナリ

實際ニ於テハ、次ノ如ク書キテ計算ヲ行フヲ便利トス

5	$\frac{2}{3}$
8	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{9}{10}$
16	$\frac{1}{6}$

先ヅ與ヘラレタル諸ノ帶分數ヲ並ベテ書クコト、完全數ノ寄セ算ノ時ノ如クシ、別ニ、分數ダケヲ取リテ、寄セ算ヲ行ヒ、得タル所ノ結果$2+\frac{1}{6}$ノ中ニアル分數$\frac{1}{6}$ダケヲ、與ヘラレタル諸ノ分數ノ下ニ書キ、2トイフ完全數ハ之ヲ5、8、1トイフ三ツノ完全數ト一處ニシテ寄セ算ヲ行フナリ

注意 與ヘラレタル數ノ中ニ、完全數ト帶分數ト分數ト襍リタルトキモ、分明ニ前ト同シ樣ナル手數ヲ用ヰテ寄セ算ヲ行フコトヲ得ベシ

例トヘバ$5+\frac{3}{8}, 18, 29+\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 15, 20+\frac{3}{5}, \frac{7}{15}$トイフ七ツノ數ヲ加ヘ合ハスルニハ、先ヅ圖ノ如ク書キテ、別ニ先ヅ分數ダケノ寄セ算ヲ行ヒ、得ル所ノ結果ノ中ヨリ完全數ヲ取リ出シテ、初メヨリ與ヘラレタル完全數ト

5	$\frac{3}{8}$
18	〃
29	$\frac{1}{4}$
〃	$\frac{2}{3}$
15	〃
20	$\frac{3}{5}$
〃	$\frac{7}{15}$
89	$\frac{43}{120}$

トモニ加ヘ合ハスベシ

寄セ算ニ關スル定理 第一編第四章ノ定理第一(四五)ハ分數及ビ帶分數ニモ適用シ得ベキコト明白ナリ、即チ例トヘバ

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{9}+\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{8}{9}+\frac{4}{7}$$

ナリ

第六章　分數ノ引キ算

第一編ノ中ニイヘルゴトク(三四)、或ル數ヨリ或ル他ノ數ヲ引クトハ、始ノ數ヲ得ル爲ニ後ノ數ニ加フベキ數ヲ作ルコトナリ

此定義ニ基キテ次々ノ諸ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則第一 同シ分母ヲ有シタル二ツノ分數ノ差ヲ作ルニハ、此等ノ分數ノ分子ノ差ヲ分子トシ其公分母ヲ分母トシタル分數ヲ作ルベシ

例トヘバ$\frac{5}{7}$ヨリ$\frac{3}{7}$ヲ引クニハ、5ヨリ3ヲ引キタルモノ$5-3$即

チ2ヲ分子ニトリ、7ヲ分母ニトリテ、$\frac{2}{7}$トイフ分數ヲ作レバヨシ、如何トナレバ$\frac{2}{7}$ニ$\frac{3}{7}$ヲ加フレバ、寄セ算ノ法則第一(二六六)ニヨリテ、如何ニモ$\frac{5}{7}$トナレバナリ

法則第二　同シ分母ヲ有セザル二ツノ分數ノ差ヲ求ムルニハ、先ヅ之ヲ通分シテ後、法則第一ヲ適用スレバヨシ

例ヘバ$\frac{5}{7}$ヨリ$\frac{3}{5}$ヲ引クニハ、先ヅ此二ツノ分數ヲ通分シテ$\frac{25}{35}$、$\frac{21}{35}$トナシ、然シテ後引キ算ヲ行ヘバ、求ムル所ノ差$\frac{4}{35}$ヲ得ベシ

法則第三　或ル帶分數ヨリ或ル他ノ帶分數ヲヒクニハ、先ヅ始ノ數ノ中ニアル分數ヨリ後ノ數ノ中ニアル分數ヲ引クコトヲ得ルトキハ、之ヲ引キ、次ニ始ノ數ノ完全ナル部分ヨリ後ノ數ノ完全ナル部分ヲ引キ、得ル所ノ二ツノ差ヲ加ヘ合ハスベシ、若シ始ノ數ノ中ニアル分數ガ後ノ數ノ中ニアル分數ヨリモ小サキトキハ、始ノ數ノ中ニアル分數ノ分子ニ其分母ヲ加ヘ、此數ノ完全ナル部分ヨリ一ヲ引キテ後前ノ手數ヲ適用スベシ

例ヘバ$10+\frac{5}{7}$ヨリ$8+\frac{3}{5}$ヲ引クニハ、先ヅ$\frac{5}{7}$ヨリ$\frac{3}{5}$ヲ引キテ得ル所ノ分數$\frac{4}{35}$ヲ$10-8$即チ2ニ加フレバ、求ムル所ノ差ヲ得ベシ、如何トナレバ箇樣ニシテ得ル所ノ數$2+\frac{4}{35}$ヲ$8+\frac{3}{5}$ニ加フレバ、寄セ算ノ法則第三(二六八)ニヨリテ、イカニモ$10+\frac{5}{7}$ヲ得レバナリ

又例ヘバ$12+\frac{2}{7}$即チ$12+\frac{10}{35}$ヨリ$8+\frac{3}{5}$即チ$8+\frac{21}{35}$ヲ引クベキトキ、前ノ手數ヲ適用セントスルニ、$\frac{10}{35}$ハ$\frac{21}{35}$ヨリ小サクシテ、前ノ分數ヨリ後ノ分數ハ引ケズ、然ルニ$12+\frac{10}{35}$ハ$11+(1+\frac{10}{35})$ニ等シク、又$1+\frac{10}{35}$トイフ帶分數ハ$\frac{35+10}{35}$即チ$\frac{45}{35}$トイフ分數ニ等シキユヘ、$1+\frac{10}{35}$ハ$11+\frac{45}{35}$ト書クコトヲ得ベシ、偖箇樣ニ書キ直シタル後、前ト同シ手數ヲ用ヰテ、$\frac{45}{35}-\frac{21}{35}$即チ$\frac{24}{35}$ヲ$11-8$即チ3ニ加フレバ、求ムル所ノ差$3+\frac{24}{35}$ヲ得ベシ

注意　帶分數ヨリ完全數或ハ分數ヲ引キ、又ハ完全數ヨリ分數或ハ

帶分數ヲヒクトキモ前ト同シ樣ナル手數ヲ用ヰ得ベキコト明白ナリ、即チ次ニ示ス諸〻ノ例ノ如シ

$$\left(8+\frac{5}{7}\right)-6=(8-6)+\frac{5}{7}=2+\frac{5}{7}$$

$$\left(8+\frac{5}{7}\right)-\frac{3}{7}=8+\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{7}\right)=8+\frac{2}{7}$$

$$\left(6+\frac{2}{7}\right)-\frac{5}{7}=\left(5+\frac{9}{7}\right)-\frac{5}{7}=5+\left(\frac{9}{7}-\frac{5}{7}\right)=5+\frac{4}{7}$$

$$10-\frac{5}{7}=(9+1)-\frac{5}{7}=\left(9+\frac{7}{7}\right)-\frac{5}{7}=9+\left(\frac{7}{7}-\frac{5}{7}\right)=9+\frac{2}{7}$$

$$10-\left(6+\frac{5}{7}\right)=\left(9+\frac{7}{7}\right)-\left(6+\frac{5}{7}\right)=(9-6)+\left(\frac{7}{7}-\frac{5}{7}\right)=3+\frac{2}{7}$$

引キ算ニ關スル諸定理

第一編第三章ノ初メ(三五)ニアル、二ツノ數ノ差ニ關スル原則ヲ證明スル爲ニ行ヒシ論理ハ、此二ツノ數ノ種類如何ニ拘ハラヌ論理ナリ、故ニ此原則ハ分數及ビ帶分數ニモ之ヲ適用シ得ベシ、即チ例トヘバ

$$\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{7}\right)=\frac{2}{7}$$ ナリ

又第一編第四章ノ定理第二第三及ビ第四(四六ト四七)モ、亦如何ナル數ニモ適用シ得ベキコト甚ダ見ヤスシ、即チ例トヘバ

(1) $$\left(4+\frac{5}{6}\right)-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{3}{7}=\left(4+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{7}\right)$$

(2) $$\frac{5}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$

(3) $$\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$ ナリ

如何ニモ(1)ハ前ニイヘル寄セ算ノ定理(二七〇)ニヨリテ直ニ證明シ得ベシ、又(3)ハ(2)ニヨリテ直ニ證明シ得ベキユヘ、唯(2)ダケヲ證明スレバヨシ、偖寄セ算ノ定理ニヨリテ

$$\frac{5}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

ナリ、然ルニ引キ算ノ定義ニヨリテ

ナリ、故ニ

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

ナリ、因テ如何ニモ

$$\frac{5}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$

ナリ

第七章　分數ノ掛ケ算

第一編ノ中ニイヘル如ク(四八ト四九)、凡テ或ル數ヲ或ル他ノ數ニ掛クルトハ後ノ數ガ表ハス所ノ量ニ始ノ數ヲ掛ケタルモノハ(即チ始ノ數ガ表ハス所ノ量ヲ其種類ノ量ノ單位ニテ作ルト同樣ニシテ、後ノ數ガ表ハス所ノ量ヲ以テ作リタル量)ヲ表ハスベキ所ノ數ヲ作ルコトナリ

此定義ニ基キテ吾ガ輩已ニ或ル完全數ヲ或ル他ノ完全數ニ掛クルノ

法ヲ說キ明シタレバ、今ハ此外ノ場合ニ移ラン

法則第一　或ル完全數ヲ或ル分數ニカクルニハ、此完全數ヲ此分數ノ分子ニ掛クレバヨシ

例トヘバ5ヲ$\frac{3}{7}$ニ掛クルニハ5ヲ$\frac{3}{7}$ノ分子ニ掛ケテ此分數ヲ$\frac{3\times5}{7}$即チ$\frac{15}{7}$或ハ$2+\frac{1}{7}$トナセバヨシ

如何ニモ、5トイフ完全數ガ表ハス所ノ量ハ、其種類ノ量ノ單位ヲ五ツ合ハセテ作リタルモノニ等シ、故ニ5ヲ$\frac{3}{7}$ニ掛クルトハ、$\frac{3}{7}$ガ表ハス所ノ量ノ五倍ニ等シキ量ヲ表ハスベキ數ヲ作ルコトニシテ、即チ$\frac{3}{7}$ノ五倍ニ等シキ數ヲ作ルコトナリ(二四〇)然ルニ第一章ノ定理第三(二四二)ニヨリテ、$\frac{3}{7}$ノ分子ニ5ヲ掛ケテ得ル所ノ分數ガモトノ分數ノ五倍ニ等シ、故ニ5ヲ$\frac{3}{7}$ニ掛ケタルモノハ$\frac{3\times5}{7}$ニ等シ

法則第二　或ル分數ヲ或ル完全數ニ掛クルニハ、此分數ノ分子ヲ此完全數ニ掛ケタルモノヲ分子トシ、與ヘラレタル分數ノ分母ヲ分母ト

シタル分數ヲ作ルベシ

例トヘバ $\frac{2}{7}$ ヲ3ニ掛クルニハ、此分數ノ分子2ヲ3ニ掛ケタルモノ 3×2 ヲ分子ニ取リ其分母7ヲ分母ニトリテ $\frac{3\times2}{7}$ 即チ $\frac{6}{7}$ トイフ分數ヲ作レバヨシ

如何ニモ、$\frac{2}{7}$ トイフ分數ハ單位ノ七分ノ一ノ二倍ニ等シキ量ヲ表ハス數ナリ、故ニ $\frac{2}{7}$ ヲ3トイフ數ニ掛クルトハ、3トイフ數ガ表ハス所ノ量ノ七分ノ一ノ二倍ニ等シキ量ヲ表ハスベキ數ヲ作ルコトニシテ、即チ3ノ七分ノ一ノ二倍ニ等シキ數ヲ作ルコトナリ、然ルニ先ヅ3トイフ數ハ、第二章ノ中ニイヘルコト(二五〇)ニヨリテ、$\frac{3\times7}{7}$ ニ等シキユヘ、3ノ七分ノ一ハ、第一章ノ定理第三(二四二)ニヨリテ、$\frac{3\times7}{7}$ ノ分子ヲ7ニテ割リテ得ル所ノ數 $\frac{3}{7}$ ニ等シ、偖 $\frac{3}{7}$ ノ二倍ハ前ノ法則ニヨリテ $\frac{3\times2}{7}$ ニ等シ、故ニ3ノ七分ノ一ノ二倍、即チ3ニ $\frac{2}{7}$ ヲ掛ケタル結果ハ $\frac{3\times2}{7}$ ニ等シ

法則第三

或ル分數ヲ或ル他ノ分數ニ掛クルニハ、始ノ分數ノ分子ヲ後ノ分數ノ分子ニ掛ケ、且ツ始ノ分數ノ分母ヲ後ノ分數ノ分母ニ掛クレバヨシ

例トヘバ $\frac{3}{5}$ ヲ $\frac{4}{7}$ ニ掛クルニハ、後ノ分數ノ分子ト分母トニ各3ト5トヲ掛ケテ、之ヲ $\frac{4\times3}{7\times5}$ 即チ $\frac{12}{35}$ トナセバヨシ

如何ニモ、前ニイヘルコト、同シ道理ニテ、$\frac{3}{5}$ ヲ $\frac{4}{7}$ ニ掛クルトハ、$\frac{4}{7}$ ノ五分ノ一ノ三倍ニ等シキ數ヲ作ルコトナリ、然ルニ第一章ノ定理第四(二四四)ニヨリテ、$\frac{4}{7}$ ノ分母ニ五ヲ掛ケテ得ル所ノ分數 $\frac{4}{7\times5}$ ガ $\frac{4}{7}$ ノ五分ノ一ニ等シク、同シ章ノ定理第三ニヨリテ $\frac{4}{7\times5}$ トイフ分數ノ分子ニ3ヲ掛ケテ得ル所ノ分數 $\frac{4\times3}{7\times5}$ ガ $\frac{4}{7\times5}$ ノ三倍ニ等シ、故ニ $\frac{4}{7}$ ノ五分ノ一ノ三倍、即チ此數ニ $\frac{3}{5}$ ヲ掛ケタルモノハ $\frac{4\times3}{7\times5}$ ニ等シ

法則第四

或ル帶分數ヲ或ル數ニ掛ケ若シクハ或ル數ヲ或ル帶分

數ハ掛クルニハ、先ヅ與ヘラレタル帶分數ヲ分數ノ形ニ直シテ、然シテ後場合ニヨリテ前ノ法則第一、第二、若シクハ第三ヲ適用スレバヨシ

例トヘバ $\frac{3}{7}$ ヲ $8+\frac{2}{5}$ ニ掛クルニハ、此帶分數ヲ分數ノ形ニ直シテ $\frac{42}{5}$ トナシ、然シテ後法則第三ヲ適用スレバ、求ムル所ノ積 $\frac{42\times3}{5\times7}$ 即チ $\frac{126}{35}$ 或ハ $3+\frac{21}{35}$ 或ハ $3+\frac{3}{5}$ ヲ得ベシ

注意第一

第二章ノ中ニイヘルコト(二五一)ニヨリテ、スベテ完全數ハ此數ヲ分子トシ一ヲ分母トシタル分數ノ形ニ直スコトヲ得、且ツ箇樣ナル分數ハ通常ノ分數ト同シ性質ヲ有スルモノナルユヘ、完全數ヲ分數ニ掛ケ、或ハ分數ヲ完全數ニ掛クルニ、法則第一及ビ第二ニヨル代リニ、與ヘラレタル完全數ヲ分數ノ形ニ直シテ後、法則第三ヲ適用スルコトヲ得ベシ

例トヘバ5ヲ $\frac{3}{7}$ ニ掛クルニ、5ヲ $\frac{5}{1}$ トイフ形ニ直シテ後、法則第三ヲ適用スレバ、法則第一ヲ適用シタルトキト同シク、$\frac{3\times5}{7\times1}$ 即チ $\frac{3\times5}{7}$ ヲ得、又 $\frac{2}{7}$ ヲ3ニ掛クルニ、3ヲ $\frac{3}{1}$ ト書キテ、$\frac{2}{7}$ ヲカクレバ、法則第二ヲ適用シタルトキト同シク、$\frac{3\times2}{1\times7}$ 即チ $\frac{3\times2}{7}$ ヲ得ベシ

故ニ分數ノ掛ケ算ニ關スル法則ハ唯コノ法則第三ダケニテ足ルトイフコトヲ得ベシ

注意第二

或ル數ニ或ル分數ヲカケテ得ル所ノ結果ハ、強チニ此數ニ完全數ヲカケタルトキノ如クモトノ數ヨリ大ナル數ニハ非ズ、掛ケ算ノ定義ニヨルニ、或ル數ニ一ヨリ大ナル分數ヲカケタルモノハ此數ヨリ大ナレドモ、一ヨリ小サキ分數ヲカケタルモノハ、モトノ數ヨリ小サキ數ナリ

掛ケ算ニ關スル諸定理

第一編第六章ノ中ニイヘル累乘ノ原則(七六)ハ、如何ナル數ニモ適用シ得ベシ、例トヘバ

$$3\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times3$$

ナリ

如何ニモコノ等式ノ左邊ハ法則第三ニヨリテ $\frac{3\times2\times7\times1}{1\times5\times8\times6}$ ニ等シ、

然ルニ完全數ノ累乘ノ原則ニヨリテ

$$3\times2\times7\times1=7\times2\times1\times3 \qquad 1\times5\times8\times6=8\times5\times6\times1$$

ナリ故ニ

$$3\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{7\times2\times1\times3}{8\times5\times6\times1} \text{ 即チ } \frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times3 \quad \text{ナリ}$$

此原則ニヨリテ完全數ノ累乘ノトキノ如ク數多ノ因數ノ積ノ中ニ於テ若干ノ因數ノ代リニ其積ヲ取リ又ハ或ル積ニ等シキ因數ノ代リニ此積ノ諸〻ノ因數ヲ取リテヨキコトヲ證明シ得ベシ

是ヨリ推シテ冪ニ關スル諸定理(八四ト八五)モ亦分數及ビ帶分數ニモ適用シ得ベキコトヲ證明シ得ベシ即チ例トヘバ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+5+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$\left[7\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2=7^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^6 \quad \text{ナリ}$$

又同シ章ニ述ベタル和及ビ差ノ掛ケ算ニ關スル諸定理(七二乃至七四)モ亦如何ナル數ニモ適用シ得ベシ即チ例トヘバ

$$(1)\quad \left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}+\frac{4}{3}\times\frac{6}{7} \quad \text{ナリ}$$

如何ニモ分數ノ寄セ算ノ法則及ビ其掛ケ算ノ法則ニヨリテ

$$(2)\quad \left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{(3\times2\times3+1\times5\times3+4\times5\times2)\times6}{(5\times2\times3)\times7}$$

ナリ然ルニ

$$(3\times2\times3+1\times5\times3+4\times5\times2)\times6=(3\times2\times3)\times6+(1\times5\times3)\times6+(4\times5\times2)\times6$$

ナリ故ニ(2)トイフ等式ノ右邊ハ第五章ノ法則第一(二六六)ニヨリテ

$$\frac{(3\times2\times3)\times6}{(5\times2\times3)\times7}+\frac{(1\times5\times3)\times6}{(5\times2\times3)\times7}+\frac{(4\times5\times2)\times6}{(5\times2\times3)\times7}$$

ニ等シ倘此和ノ中ニアル三ツノ分數ヲ約スレバ第七章ノ法則第三(二七八)ニヨリテ此和ハ如何ニモ(1)トイフ等式ノ右邊ニ等シキコトヲ知リ得ベシ

第八章　分數ノ割リ算

第一編ノ中ニイヘル如ク(八七)或ル數ニテ或ル他ノ數ヲ割ルトハ、後ハ數ヲ得ル爲ニ始ノ數ニ掛クベキ數ヲ作ルコトナリ

箇様ニシテ得タル數ヲ、被除數ノ除數ニ對シテノ比ト名ヅケ、或ハコノ割リ算ノ商トモ名ツク

倚前ニイヘル掛ケ算ノ定理(二八〇)ニヨリテ、或ル數ヲ除數ニ掛ケテ被除數ヲ得ルトキハ、除數ヲ此數ニ掛ケテモ同シク被除數ヲ得ベシ、故ニ「除數ニテ被除數ヲ割リテ得ル所ノ商ハ、之ニ除數ヲ掛クレバ被除數ヲ得ルヤウナル數ナリ」トイフコトヲ得ベシ

完全數ノ割リ算ノトキ、被除數ガ除數ノ倍數ナルトキノ場合ヲ除クノ外ハ、始ノ數ノ後ノ數ニ對シテノ比ヲ見出スコトヲ得ザリシユヘ、コニハ先ヅ前ノ定義ニ基キテ完全數ニテ完全數ヲ割ルトキノ場合ヨリ始メン

法則第一　或ル完全數ニテ或ル他ノ完全數ヲ割ルニハ、除數ヲ分母トシ被除數ヲ分子トシタル分數ヲ作レバヨシ

例ヘバ七ニテ五ヲ割ルトハ、前ニイヘルコトニヨリテ、之ニ七ヲ掛クレバ五トナルヤウナル數ヲ作ルコトナリ、即チ今求ムル所ノ商ノ七倍ガ五ニ等シカラザルベカラス、故ニ此數ハ五ノ七分ノ一ニ等シ、因テ今求ムル所ノ數ハ$5\times\frac{1}{7}$或ハ$\frac{5}{7}$トイフ分數ニ等シ

注意第一　スベテノ分數ハ其分母ヲ以テ其分子ヲ割リテ得ル所ノ商ト看做スコトヲ得

如何ニモ例ヘバ$\frac{5}{7}$トイフ分數ハ7ニテ5ヲ割リテ得ル所ノ商ニ等シク、又例ヘバ$\frac{5}{1}$ハ前ニイヘルコト(二五一)ニヨリテ、5ヲ1ニテ割リタルモノ即チ5ニ等シ

注意第二 モシ被除數ガ除數ノ倍數ナルトキハ、商ハ或ル完全數ニ等シ、例トヘバ七ニテ二十八ヲ割リテ得ル所ノ商ハ$\frac{28}{7}$ニ等シク、此分數ハ第二章ニイヘルコト(二四六)ニヨリテ、四トイフ完全數ニ等シ、此特別ノ場合ガ即チ吾ガ輩ノ第一編ニ於テ研究セシ所ノモノナリ

注意第三 モシ被除數ガ除數ヨリ大ニシテ且ツ其倍數ニハ非ザルトキハ、商ハ或ル帶分數ニ等シ、例トヘバ七ニテ三十一ヲ割リテ得ル所ノ商ハ$\frac{31}{7}$ニ等シク、此分數ハ第二章ニイヘルコト(二四七)ニヨリテ$4+\frac{3}{7}$トイフ帶分數ニ等シ

箇樣ノ場合ニ於テハ、求ムル所ノ商ハ除數ニテ被除數ヲ割リテ得ル所ノ完全商ニ此割リ算ノ剩餘ヲ分子トシ除數ヲ分母トシタル分數ヲ加ヘタルモノニ等シ

法則第二 或ル完全數ニテ或ル分數ヲ割ルニハ、此完全數ヲ此分數ノ分母ニ掛クレバヨシ

例トヘバ七ニテ$\frac{5}{8}$ヲ割リタルモノトハ、其七倍ガ$\frac{5}{8}$ニ等シキ數、即チ$\frac{5}{8}$ノ七分ノ一ニ等シキ所ノ數ノコトナリ、因テ此商ハ$\frac{5}{8}\times\frac{1}{7}$或ハ$\frac{5}{8\times7}$即チ$\frac{5}{56}$ニ等シ

法則第三 或ル分數ニテ或ル完全數ヲ割ルニハ、此分數ノ分母ヲ此完全數ニ掛ケタルモノヲ分子トシ、與ヘラレタル分數ノ分子ヲ分母トシタル分數ヲ作ルベシ

例トヘバ$\frac{3}{4}$ニテ5ヲ割ルトハ、前ニイヘルコトニヨリテ、之ニ$\frac{3}{4}$ヲ掛クレバ5トナル樣ナル數ヲ作ルコトナリ、即チ今求ムル所ノ商ノ四分ノ一ノ三倍ガ五ニ等シカラザルベカラズ、因テ此數ノ四分ノ一ガ五ノ三分ノ一即チ$\frac{5}{3}$ニ等シク、從テ此數自身ハ$\frac{5}{3}$ノ四倍即チ$\frac{5}{3}\times4$ニ等シ、因テ今求ムル所ノ商ハ$\frac{5\times4}{3}$即チ$\frac{20}{3}$或ハ$6+\frac{2}{3}$ニ等シ

法則第四 或ル分數ニテ或ル分數ヲ割ルニハ、除數ノ分子ヲ被除數ノ分母ニ掛ケ、其分母ヲ被除數ノ分子ニ掛クベシ

例トヘバ$\frac{3}{4}$ニテ$\frac{2}{5}$ヲ割ルトハ、前ニ述ベタル場合ト同シク、之ニ$\frac{3}{4}$ヲ掛クレバ$\frac{2}{5}$トナル樣ナル數ヲ作ルコトナリ、故ニ今求ムル所ノ數ノ四分ノ一ノ三倍ガ$\frac{2}{5}$ニ等シ、故ニ此數ノ四分ノ一ガ$\frac{2}{5}$ノ三分ノ一即チ$\frac{2}{5\times3}$ニ等シク、此數自身ハ$\frac{2}{5\times3}$ノ四倍即チ$\frac{2\times4}{5\times3}$或ハ$\frac{8}{15}$ニ等シ

法則第五　或ル帶分數ニテ或ル數ヲ割リ、若シクハ或ル數ニテ或ル帶分數ヲ割ルニハ、與ヘラレタル帶分數ヲ分數ノ形ニ直シテ後、前ノ諸法則ノ中ノ一ツヲ適用スレバヨシ

例トヘバ

$$\left(8+\frac{2}{5}\right):\left(10+\frac{3}{7}\right)=\frac{42}{5}:\frac{73}{7}=\frac{42\times7}{5\times73}=\frac{294}{365}$$

ノ如シ

注意　凡テ完全數ハ、之ヲ分數ノ形ニ直スコトヲ得ルモノナルユヘ、第一、第二、第三ノ法則ヲ適用スル代リニ、與ヘラレタル完全數ヲ分數ノ形ニ直シテ後、法則第四ヲ適用スルコトヲ得ベシ

例トヘバ

$$5:7=\frac{5}{1}:\frac{7}{1}=\frac{5\times1}{1\times7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{8}:7=\frac{5}{8}:\frac{7}{1}=\frac{5\times1}{8\times7}=\frac{5}{8\times7}$$

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{1}:\frac{3}{4}=\frac{5\times4}{1\times3}=\frac{5\times4}{3}$$ ナリ

此等ノ結果ハ、固ヨリシカアルベキコトナガラ、法則第一乃至第三ヲ適用シタルトキノ結果ト異ルコトナシ

分數ノ計算ニツキ一般ノ注意　若干ノ分數ノ上ニ或ル計算ヲ施シテ得ル所ノ分數ノ分母及ビ分子ガ、若干ノ因數ノ積ノ形ニナリテアルトキハ、此等ノ因數ノ掛ケ算ヲ實行セヌ中ニ、先ヅ分子ト分母トガ同シ因數ヲ含ムカ否ヲ檢スベシ、モシ分子ノ中ニモ分母ノ中ニモ同シ因數アルトキハ、此因數ハ二ツノ項ノ公約數ナルユヘ直ニ之ヲ省キテヤ、

簡單ナル分數ヲ得ベシ

例トヘバ $8+\frac{1}{3}$ ニ $\frac{3}{5}$ ヲ掛ケテ後、之ヲ $4+\frac{2}{7}$ ニテ割ルベキトキニ、前ニ述ベタル諸ノ法則ヲ適用スレバ、$\frac{25\times3\times7}{3\times5\times30}$ ヲ得、偖此分數ヲ先ヅ三ニテ約シ、次ニ五ニテ約シ、再ビ五ニテ約スレバ、直チニ $\frac{7}{6}$ 或ハ $1+\frac{1}{6}$ トナルナリ

第九章　餘數及ビ逆數

餘數　或ル一ヨリ小サキ數ハ一ニ對シテノ餘數トハ、此數ヲ一ヨリ引キタルモノヽコトナリ

例トヘバ $\frac{3}{5}$ ノ餘數トハ $1-\frac{3}{5}$ 即チ $\frac{2}{5}$ ノコトナリ

引キ算ノ原則(三五)ニヨリテ、或ル數ヲ一ヨリ引キテ得タル所ノ數ヲ一ヨリ引ケバ始ノ數ヲ得ベシ、故ニ或ル數 a ノ餘數ガ b ナレバ、b ノ餘數ハ a ナリ

例トヘバ $\frac{3}{5}$ ノ餘數ガ $\frac{2}{5}$ ナレバ、$\frac{2}{5}$ ノ餘數ハ $\frac{3}{5}$ ナリ

二ツノ數ノ和ガ一ニ等シキトキハ、此二ツノ數ヲ一ニ對シテ互ニ餘數ヲ成ス數ト稱ス、

例トヘバ $\frac{3}{5}$ ト $\frac{2}{5}$ トハ一ニ對シテ互ニ餘數ヲ成ス數ナリ、如何トナレバ

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{5}=1$$

ナレバナリ

前ニイヘルコトニヨリテ、二ツノ數 a、b ガ互ニ餘數ヲ成ストイフモ、a ノ餘數ガ b ナリトイフモ全ク同シ事ナリ

法則　或ル分數ノ餘數ヲ作ルニハ、此分數ノ分子ヲ其分母ヨリ引キタルモノヲ分子トシ、モトノ分母ヲ分母トシタル分數ヲ作レバヨシ

例トヘバ $\frac{173}{291}$ ノ餘數ハ $\frac{291-173}{291}$ 即チ $\frac{118}{291}$ ニ等シ、如何トナレバ

$1-\frac{173}{291}$ ハ $\frac{291}{291}-\frac{173}{291}$ ニ等シケレバナリ

逆數 或ル數ノ逆數トハ此數ニテ一ヲ割リテ得ル數ノコトナリ

例ヘバ3ノ逆數トハ1:3即チ$\frac{1}{3}$ノコト、$\frac{3}{4}$ノ逆數トハ$1:\frac{3}{4}$即チ$\frac{4}{3}$ノコトナリ

割リ算ノ原則(八、八)ニヨリテ、或ル數ニテ一ヲ割リテ得タル所ノ數ニテ一ヲ割レバ始ノ數ヲ得ベシ、故ニ或ル數aノ逆數ガbナルトキハbノ逆數ハaナリ

例ヘバ$\frac{3}{4}$ノ逆數ガ$\frac{4}{3}$ナレバ、$\frac{4}{3}$ノ逆數ハ$\frac{3}{4}$ナリ

二ツノ數ノ積ガ一ニ等シキトキハ、此二ツノ數ヲ互ニ逆數ヲ成ス數ト稱ス

例ヘバ$\frac{3}{4}$ト$\frac{4}{3}$トハ互ニ逆數ヲナス數ナリ、如何トナレバ

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{3\times4}{4\times3}=1$$

ナレバナリ

前ニイヘルコトニヨリテ、二ツノ數a、bガ互ニ逆數ヲナストイフモ、aノ逆數ガbナリトイフモ全ク同ジコトナリ

法則 或ル分數ノ逆數ヲ作ルニハ、此數ノ分母ヲ分子トシ其分子ヲ分母トシタル分數ヲ作レバヨシ

是ハ分數ノ割リ算ノ法則ニヨリテ自ラ明カナリ

定理 凡テ或ル數ニテ或ル他ノ數ヲ割リテ得ル所ノ數ハ、除數ノ逆數ヲ被除數ニ掛ケタルモノニ等シ

是ハ唯割リ算ノ法則第四(二八六)ヲ言ヒカヘタルマデナリ

第十章　分數ノ餘論

不等式ノ符號 或ル數ガ或ル他ノ數ヨリ大ナルコトヲ示スニハ、始ノ數ノ右ニ$>$ナル符號ヲ書キテ、次ニ後ノ數ヲ書クヲ法トス、此符號$>$

ハヨリ小サキハト唱フベシ、例トヘバ

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

ト書キタルハ、$\frac{1}{2}$ガ$\frac{1}{3}$ヨリ大ナルコトヲ示ス者ニシテ、之ヲ二分ノ一ヨリ小サキハ三分ノ一トヨムナリ

或ル數ガ或ル他ノ數ヨリ小サキコトヲ示スニハ、始ノ數ノ右ニ<ナル符號ヲ書キ、次ニ後ノ數ヲ書クベシ、此符號<ハヨリ大ナルハト唱フベシ、例ヘバ

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

ト書キタルハ、$\frac{1}{2}$ガ$\frac{2}{3}$ヨリ小サキコトヲ示スモノニシテ、之ヲ二分ハ一ヨリ大ナルハ三分ノ二トヨムベシ

或ル量ガ或ル他ノ量ヨリ大ナルコト、又ハ之ヨリ小サキコトヲ示スニモ、同シ符號ヲ用ユ

<或ハ>ヲ二ツノ數或ハ量ノ間ニカキタルモノヲ不等式ト名ヅク

上ニイヘルコトニヨリテ、スベテ不等式ノ左右ニアル二ツノ數或ハ量ノ中ニ於テ、<或ハ>ノ角ノ開キノ中ニアル數或ハ量ガ最モ大ナルモノナリ

定理第一

相等シキ二ツノ分數ノ分子ノ和或ハ差ヲ分子トシ、其分母ノ和或ハ差ヲ分母トシタル分數ハ、與ヘラレタル各分數ニ等シ

例トヘバ$\frac{18}{27}$ト$\frac{10}{15}$トガ互ニ相等シキ分數ナルトキハ、$\frac{18+10}{27+15}$即チ$\frac{28}{42}$モ、$\frac{18-10}{27-15}$即チ$\frac{8}{12}$モ$\frac{18}{27}$及ビ$\frac{10}{15}$ニ等シ、如何トナレバ先ヅ與ヘラレタル二ツノ分數ノ中ノ一ツヲ約シツメテ得ル所ノ分數ヲ$\frac{a}{b}$ト名ツクレバ、此二ツノ分數ハイヅレモ$\frac{a}{b}$ニ等シカルベシ、故ニ第三章ニイヘルコトニヨリテ、18ト27トハaトbトニ或ル同シ完全數mヲ掛ケタルモノニ等シク、10ト15トハ同シクaトbトニ或ル他ノ完全數nヲ掛ケタルモノニ等シカルベシ、即チ

$$18 = a \times m \qquad 27 = b \times m$$

$$10 = a \times n \qquad 15 = b \times n$$

ナリ、故ニ掛ケ算ノ定理第一ノ系(七三)及ビ定理第三ノ系(七五)ニヨリテ

$$18 + 10 = a \times (m + n) \qquad 27 + 15 = b \times (m + n)$$

$$18 - 10 = a \times (m - n) \qquad 27 - 15 = b \times (m - n)$$

ナリ、故ニ$\frac{18+10}{27+15}$モ$\frac{18-10}{27-15}$モ、$\frac{a}{b}$ノ二ツノ項ニ同シ完全數ヲ掛ケテ得ル所ノ分數ニシテ、イヅレモ$\frac{a}{b}$ニ等シク、從テ$\frac{18}{27}$及ビ$\frac{10}{15}$ニ等シ

系 若干ノ相等シキ分數ノ分子ノ和ヲ分子トシ其分母ノ和ヲ分母トシタル分數ハ與ヘラレタル各分數ニ等シ

注意 第一章ノ定理第五(二四五)ハ、コヽニイヘル定理ノ特別ノ場合ナリ

定理第二 相等シカラザル二ツノ分數ノ分子ノ和ヲ分子トシ其分母ノ和ヲ分母トシタル分數ハ此二ツノ分數ノ中ノ最モ大ナルモノヨリハ小サク、最モ小サキモノヨリハ大ナリ

例トヘバ$\frac{5}{7} > \frac{2}{3}$ナリトスレバ、$\frac{5+2}{7+3} < \frac{5}{7}$ニシテ$\frac{5+2}{7+3} > \frac{2}{3}$ナリ、如何トナレバ先ヅ$\frac{5}{7}$ト$\frac{2}{3}$トヲ通分スレバ$\frac{5 \times 3}{7 \times 3}$、$\frac{2 \times 7}{7 \times 3}$トナルユヘ、$\frac{5}{7} > \frac{2}{3}$トイフハ$5 \times 3 > 2 \times 7$トイフト同シ事ナリ、偖$\frac{5+2}{7+3}$ト$\frac{5}{7}$トヲ通分スレバ$\frac{(5+2) \times 7}{(7+3) \times 7}$、$\frac{5 \times (7+3)}{(7+3) \times 7}$或ハ$\frac{5 \times 7 + 2 \times 7}{(7+3) \times 7}$、$\frac{5 \times 7 + 5 \times 3}{(7+3) \times 7}$トナル、然ルニ始ノ數ノ分子ハ$5 \times 7$ニ$2 \times 7$ヲ加ヘタルモノニシテ、後ノ分數ノ分子ハ同シ數ニ$2 \times 7$ヨリ大ナル數$5 \times 3$ヲ加ヘタルモノナルユヘ、始ノ分子ハ後ノ分子ヨリ小サク、從テ始ノ分數ハ後ノ分數ヨリ小サシ、即チ$\frac{5+2}{7+3} < \frac{5}{7}$ナリ

同シ手數ヲ用ヰテ$\frac{5+2}{7+3} > \frac{2}{3}$ナルコトヲ證明シ得ベシ

此二ツノ事實ヲ同時ニ示スニハ次ノ如ク書キテヨシ

$$\frac{5}{7} > \frac{5+2}{7+3} > \frac{2}{3}$$

注意 定理第一及ビ第二ヲ約シテ左ノ如ク言ヒ著ハスコトヲ得ベシ

凡テ或ル分數 $\frac{a}{b}$ ノ二ツノ項ニ各ニツノ數 m、n ヲ加ヘテ得ル所ノ分數 $\frac{a+m}{b+n}$ ハ $\frac{m}{n}$ ガ $\frac{a}{b}$ ヨリ小サキカ之ニ等シキカ或ハ之ヨリ大ナルカニヨリテ或ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ小サク或ハ之ニ等シク或ハ之ヨリ大ナリ

即チ

モシ $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ ナレバ $\frac{a+m}{b+n} < \frac{a}{b}$

モシ $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ ナレバ $\frac{a+m}{b+n} = \frac{a}{b}$

モシ $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$ ナレバ $\frac{a+m}{b+n} > \frac{a}{b}$ ナリ

定理第三

凡テ或ル分數ノ二ツノ項ニ同シ數ヲ加フレバ此分數ガ一ヨリ小サキトキハモトヨリ大ナル分數ヲ得若シモトノ分數ガ一ヨリ大ナルトキハモトヨリ小サキ數ヲ得イヅレニシテモ箇樣ニシテ得ル所ノ分數ハモトノ分數ト一トノ間ニアル數ナリ

先ヅ例トヘバ一ヨリ小サキ分數 $\frac{5}{7}$ ノ二ツノ項ニ同シ數 3 ヲ加ヘテ得ル所ノ數 $\frac{5+3}{7+3}$ ハモトノ分數ヨリ大ニシテ一ヨリハ小サキ數ナリ如何トナレバ $\frac{5+3}{7+3}$ ハ $\frac{5}{7}$ ト $\frac{3}{3}$ トノ分子ノ和ヲ分子トシ其分母ノ和ヲ分母トシタル分數ナリ然ルニ $\frac{3}{3}$ ハ一ニ等シク $\frac{5}{7}$ ハ一ヨリ小サシ故ニ定理第二ニヨリテ

$\frac{5}{7} < \frac{5+3}{7+3} < 1$ ナリ

又例トヘバ一ヨリ大ナル分數 $\frac{9}{7}$ ノ二ツノ項ニ同シ數例トヘバ 3 ヲ加ヘテ得ル所ノ分數 $\frac{9+3}{7+3}$ ハモトノ分數ト $\frac{3}{3}$ 即チ一トノ分子ノ和ヲ分子トシ其分母ノ和ヲ分母トシタル分數ナルユヘ同シ定理ニヨリテ

$\frac{9}{7} > \frac{9+3}{7+3} > 1$ ナリ

系

凡テ或ル分數ノ二ツノ項ヨリ同シ數ヲ引ケバ此分數ガ一ヨリ小サキトキハモトノ分數ヨリ小サキ數ヲ得若シ此分數ガ一ヨリ大ナルトキハモトノ分數ヨリ大ナル數ヲ得イヅレニシテモ箇樣ニシテ得

ル所ノ分數ハモトノ分數ヨリモ一ニ遠ザカル

定理第四 凡テ或ル分數ノ第m羃ハ此分數ノ分子ノ第m羃ヲ分子トシ其分母ノ第m羃ヲ分母トシタル分數ニ等シ

例トヘバ$\frac{4}{7}$ノ第五羃ハ$\frac{4^5}{7^5}$ニ等シ、如何トナレバ先ヅ羃ノ定義(八三)ニヨリテ

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$$ ナリ

然ルニ掛ケ算ノ法則ニヨリテ、コノ等式ノ右邊ノ數ハ$\frac{4\times4\times4\times4\times4}{7\times7\times7\times7\times7}$ニ等シク從テ羃ノ定義ニヨリテ$\frac{4^5}{7^5}$ニ等シ、故ニ

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5=\frac{4^5}{7^5}$$ ナリ

定理第五 スベテ或ル完全數ニ等シカラザル分數ノ或ル階級ノ羃ハ、矢張如何ナル完全數ニモ等シカラズ

如何トナレバ或ル完全數ニ等シカラザル分數ヲ約シツメテ得ル所ノ分數ヲ$\frac{a}{b}$トスレバ、此分數ノ第m羃ハ$\frac{a^m}{b^m}$ニ等シ、然ルニ先ヅ假定ニヨリテ、bハ無論一ヨリ大ナル數ナルユヘ、b^mモ亦一ヨリ大ナリ、次ニaトbトガ互ニ單純ナル數ナルユヘ、第二編第五章ノ定理第六(一九八)ニヨリテ、a^mトb^mトハ互ニ單純ナル數ナリ、故ニ$\frac{a^m}{b^m}$ハ或ル完全數ニ等シキコト能ハザルコト分明ナリ

定理第六 或ル分數ガ或ル他ノ分數ノ或ル階級ノ羃ニ等シキトキハ、之ヲ約シツメテ得ル所ノ分數ノ二ツノ項ハソレヾヾニ或ル二ツノ完全數ノ同シ階級ノ羃ニ等シ

例トヘバ或ル分數$\frac{A}{B}$ガ或ル他ノ分數$\frac{a}{b}$ノ第m羃ニ等シトセンニ、$\frac{A}{B}$ヲ約シツメテ得ル所ノ分數ヲ$\frac{C}{D}$トシ$\frac{a}{b}$ヲ約シツメタルモノヲ$\frac{c}{d}$トスレバ、$\left(\frac{c}{d}\right)^m$ハ$\frac{c^m}{d^m}$ニ等シキユヘ、$\frac{C}{D}=\frac{c^m}{d^m}$ナリ、然ルニ$c^m$ト$d^m$トハ互ニ單純ナル數ナルユヘ、$\frac{c^m}{d^m}$ハ$\frac{C}{D}$ト同樣ニ已約分數ナリ、故ニ第三章ノ定理第三(二五六)ニヨリテ、$C=c^m$ $D=d^m$ナラザルベカラズ、即チCモDモ或ル二ツノ完全數ノ第m羃ニ等シ

第三編ノ演習問題

(一) 次ニ擧グル所ノ諸分數ヲ帶分數ニ直セ

$\frac{178}{15}$, $\frac{4891}{21}$, $\frac{36524}{2653}$,

(二) $\frac{40}{56}$ ニ等シクシテ且ツ其二ツノ項ノ和ガ百五十六ニ等シキ所ノ分數ヲ作レ

(三) 次ニ擧グル所ノ諸〻ノ分數ヲ約セヨ

$\frac{84}{7}$, $\frac{132}{15}$, $\frac{360}{660}$, $\frac{2310}{3570}$, $\frac{38544}{26136}$,

$\frac{405405}{219219}$, $\frac{427356}{732672}$, $\frac{5427324}{6782004}$,

(四) 次ニ擧グル所ノ各群ノ中ニアル諸〻ノ分數ヲ通分セヨ

(1) $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{13}{27}$, $\frac{17}{32}$

(2) $\frac{7}{12}$, $\frac{55}{88}$, $\frac{17}{105}$, $\frac{48}{108}$, $\frac{145}{297}$, $\frac{595}{1120}$

(五) 次ニ擧グル所ノ四ツノ帶分數ヲ加ヘ合ハセヨ

$5\frac{2}{3}$, $7\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{9}$, $8\frac{11}{12}$

(六) 次ニ擧グル二ツノ帶分數ノ差其積及ビ其比ヲ求ム

$17\frac{3}{8}$, $6\frac{5}{12}$

(七) 次ニ擧グル所ノ四ツノ分數ヲ累乘セヨ

$\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{36}{45}$

（八）二ツノ已約分數ノ分母ガ互ニ相等シカラザルトキハ、此二ツノ分數ノ和ハ或ル完全數ニ等シキコト能ハズ

（九）或ル數ノ三分ノ二ト其四分ノ三トノ和ガ六十八ニ等シトイフ、此數ハ何ナル乎

（一〇）或ル數ノ七分ノ五ト其九分ノ四トノ差ガ八十五ニ等シトイフ、此數ハ何ナル乎

（一一）或ル商業家ガ其資本金ノ十一分ノ三ヲ失ヒテ後、餘ス所ノ資本金ナホ八萬七千六百二十四圓アリトイフ、此八ノモトノ資本金ハ幾何ナリシ乎

（一二）或ル數ニ十六ヲ加ヘタルモノガ此數ノ三分ノ七ニ等シトイフ、此數ハ、何ナル乎

（一三）或ル數ノ四分ノ三ガ或ル他ノ數ニ等シ、而シテ此二ツノ數ノ和ハ六十三ニ等シトイフ、此二ツノ數ハ何ト何ナル乎

（一四）或ル數ノ三分ノ二ガ或ル他ノ數ノ二分ノ一ニ等シ、而シテ此二ツノ數ノ差ハ十五ニ等シトイフ、此二ツノ數ハ何ト何ナル乎

（一五）或ル人ノ所有金ノ四分ノ三ニ其六分ノ五ヲ加ヘタルモノハ、此所有金ヨリ六萬三千圓ダケ多シトイフ、此所有金ハ幾何ゾ

（一六）郵便爲替ノ手數料金百圓ニ付キ一圓ノトキ、或ル人爲替金幷ニ手數料トモ合ハセテ百三十六圓三十五錢ヲ郵便局ニ納メタリトイフ、爲替金ダケハ幾何ゾ

（一七）米一石ノ價金四圓ト五分ノ二（一圓ノ五分ノ二ノコト）ナルトキハ、一石ノ四分ノ三ノ價ハ幾何ゾ

（一八）地面百二十八坪ト八分ノ三ノ價金七百七十圓ト四分ノ一ナルトキハ、同シ地面一坪ノ價ハ幾何ゾ

（一九）石炭百斤ノ價金一圓ノ二十一分ノ八ナルトキハ、金十六圓ヲ以テ幾何ノ石炭ヲ買ヒ得ベキ乎

（二〇）二ツノ已約分數$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$ノ和$\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$ガ已約分數ナル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ如何

（二一）二ツノ已約分數$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$ノ積$\frac{a\times c}{b\times d}$ガ亦已約分數ナル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ如何

（二二）或ル已約分數$\frac{a}{b}$ノ或ル他ノ已約分數$\frac{c}{d}$ニ對シテノ比$\frac{a\times d}{b\times c}$ガ亦已約分數ナル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ如何

（二三）或ル水桶ニ附屬シタル二ツノ樋甲乙アリ、甲ノミヲ仕掛クレバ六時間ニシテ水充チ、乙ノミヲ仕掛クレバ四時間ニテ充ツトイフ、二ツノ樋ヲ同時ニ仕掛ケバ幾時間ニシテ水充ツベキ乎

（二四）甲乙丙三人ノ職人ガ或ル仕事ヲスルニ甲ト乙ト共ニ働ケバ十二日ニテ仕畢リ、乙ト丙ト組ミ合ヘバ二十日掛リ、甲ト丙ト組ミ合ヘバ十五日ニテ畢ルトイフ、甲乙丙各一人ニテ働カバ幾日掛ルベキ乎、又三人同時ニ働カバ幾日ニテ仕畢ルベキ乎

（二五）或ル彈性アル球ヲ地上ニ墜ス毎ニ彈キ返ヘリテモトノ高サノ五分ノ四ニ達ス、偖此球ヲ若干ノ高サヨリ墜シタルニ、三タビ地ニ付キテ後ナホ五尺一寸二分ノ高サニ達シタリトイフ、モト幾何ノ高サヨリ墜シタル乎

（二六）或ル人甲乙二人ノ書記ヲ同シ日給ニテ雇ヒ入レタルニ、甲ハ五十六日間働キテ、米四俵ト金十一圓二十錢トヲ受ケ取リ、乙ハ八十四日間働キテ、米七俵半ト金十三圓八十錢トヲ受ケ取リタリトイフ、此時ノ米一俵ノ價及ビ此等ノ書記ノ日給各〻幾何ゾ

（二七）二雙ノ輪ヲ有シタル車アリ、前輪ノ圓周ハ五尺ト四分ノ一（一尺ノ四分ノ一ノコト）ニ等シク、後輪ノ圓周ハ七尺ト八分ノ一ニ等シ、偖此車ガ甲トイフ場所ヨリ乙トイフ場所マデユク間ニ、前輪ノ廻轉セシ回數ハ後輪ノ廻轉セシ回數ヨリ二百回多シトイフ、甲乙ノ距離幾何ゾ

（二八）犬ニ追ハルヽ狐アリ、犬ニ先タツコト六十歩ナリ、偖犬ガ六步走

ル間ニ狐ハ九歩走ル、尤モ犬ノ三歩ハ狐ノ七歩ニ當ルトイフ、犬ガ狐ニ追ヒ及ブ迄ニ尚幾歩走ルベキヤ乎

(二九)　若干ノ分數ノ分子ノ和ヲ分子トシ其分母ノ和ヲ分母トシタル分數ハ、此等ノ分數ノ中ノ最モ大ナルモノヨリハ小サク其最モ小サキモノヨリハ大ナリ

(三〇)　$\frac{2}{5}$トイフ分數ノ二ツノ項ニ同シ完全數ヲ加ヘ、箇様ニシテ得ル所ノ分數ト一トノ差ガ千分ノ一ヨリ小サキヤウニスルニハ、如何ナル完全數ヲトルベキ乎

(三一)　或ル分數ニテ或ル他ノ分數ヲ割リタルモノハ、如何ナル場合ニ於テ、或ル完全ニ等シカルベキ乎

(三二)　若干ノ分數ヲ與ヘラレテ、此等ノ分數ノ中ノ孰レヲ割リテモ商トシテ完全數ヲ得ルヤウナル已約分數ノ中ニ於テ、最モ大ナルモノヲ求ムルノ法如何

(三三)　若干ノ分數ヲ與ヘラレテ、此等ノ分數ノ中ノ孰レニテ割リテモ商トシテ完全數ヲ得ルヤウナル已約分數ノ中ニ於テ、最モ小サキ者ヲ求ムルノ法如何

(三四)　一回歸年(春分ヨリ次ノ春分マデノ間)ハ三百六十五日ト四分ノ一ニ等シク、一大陰月(新月ノトキヨリ次ノ新月ノトキニ至ルマデノ間)ハ二十九日ト九百四十分ノ四百九十九ニ等シトイフ、一回歸年ノ丁度幾倍ニカ等シクシテ、同時ニ一大陰月ノ丁度幾倍ニカ等シキ所ノ時間ノ中ニ於テ最モ小サキモノハ何ナル乎

第四編 小數及ビ帶小數

第一章 小數及ビ帶小數ノ總論

定義 十ノ或ル階級ノ冪ヲ分母トシタル分數ニシテ一ヨリ小サキモノヲ小數ト名ツケ、一ヨリ大ナルモノヲ帶小數ト名ヅク

例トヘバ $\frac{3}{10}$, $\frac{56}{100}$, $\frac{152}{1000}$ ナドハ小數ニシテ、$\frac{23}{10}$, $\frac{13619}{1000}$ 即チ $2+\frac{3}{10}$, $13+\frac{619}{1000}$ ナドハ帶小數ナリ

此定義ニヨリテ帶小數トハ或ル完全數ト或ル小數トノ和ニ等シキ數ノコトナリ

小數ノ分析 スベテ小數ハ十ヨリ小サキ數ヲ分子トシ十ノ或ル階級ノ冪ヲ分母トシタル若干ノ分數ノ和ニ等シ

例トヘバ $\frac{35761}{100000}$ トイフ小數アランニ、分數ノ寄セ算ノ法則ニヨリテ

$$\frac{35761}{100000}=\frac{30000}{100000}+\frac{5000}{100000}+\frac{700}{100000}+\frac{60}{100000}+\frac{1}{100000}$$

ナリ、或ハ右邊ノ諸ノ分數ヲ約スレバ

$$\frac{35761}{100000}=\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{6}{10000}+\frac{1}{100000}$$

ナリ、即チ此小數ハ十ヨリ小サキ數3、5、7、6、1ヲ分子トシ、十ノ第一、第二、第三、第四、第五冪ヲ分母トシタル五ツノ分數ノ和ニ等シ

十分ノ一、百分ノ一、千分ノ一等ノ小數ヲ名ケテ第一ノ小數原位、第二ノ小數原位、第三ノ小數原位……トイフ

此定義ニヨリテ或ル階級ノ小數原位ハ十分ノ一ガ其次ノ階級ノ小數原位ニ等シ

上ニイヘルコトニヨリテ、スベテノ小數ハ種々ノ階級ノ小數原位ノ十倍ニ充タザルモノヲ寄セ聚メタルモノニ等シ

又スベテノ帶小數ハ、種々ノ階級ノ通常ノ原位及ビ小數原位ノ十倍ニ充タザルモノヲ寄セ聚メタルモノニ等シ

例トヘバ $32+\frac{56}{100}$ ハ $30+2+\frac{5}{10}+\frac{6}{100}$ ニ等シク、即チ通常ノ第二原位ノ三倍ト第一原位ノ二倍ト、第一小數原位ノ五倍ト、第二少數原位ノ六倍トヲ寄セ聚メタルモノニ等シ

小數及ビ帶小數ノ書キ方

完全數ノ命數法ニ立チ還リテ見レバ、我々ノ完全數ノ書キ方ノ法則ハ、全クタヾ次ノ規約ヲ原則トシテ立テタルモノナルコト明白ナリ、即チ

或ル數字ガ表ハス所ノ原位ハ、其右ニアル數字ガ表ハス所ノ原位ノ十倍ニ等シ、即チスベテ或ル數字ノ右ニアル數字ハ、前ノ數字ガ表ハス所ノ原位ノ十分ノ一ニ等シキ原位ヲ表ハス

コレト同一ノ原則ヲ小數及ビ帶小數ノ書キ方ニモ適用スルコトヽスレバ、此等ノ種類ノ分數ヲ書キ著ハスニハ、完全數ヲ書キ著ハストキト同シ樣ナル法則ニヨルコトヲ得ベシ

先ヅ例トヘバ $32+\frac{56}{100}$ トイフ帶小數ヲ書キ著ハスニ、之ヲ通常ノ帶分數ノ形ニ書ク代リニ、32ト56トヲ横ニ列ネ、其間ニ區別ノ印トシテ例トヘバ「コンマ」(,)ヲ置キ、32,56ト書クコトヲ得ベシ、如何トナレバ前ニ擧ゲタル規約ヲ守ルコトヽシ、且ツ「コンマ」ノ在ル處ガ完全ナル部分ト小數ノ部分トノ界ナリトイフコトヲ心得サヘスレバ、32,56ト書キタル數ハ三十二ト十分ノ一ノ五倍ト百分ノ一ノ六倍トノ聚リタルモノ、即チ $32+\frac{56}{100}$ トイフ數ナルコト直チニシルヽユヘナリ

尤モ帶小數ノ中ニモ、完全數ノトキノ如ク、其最モ大ナル原位ト其最モ小サキ原位トノ間ノ或ル原位ガ全クナキコトアリ、此時ハ完全數ノ書キ方ノ例ニ傚ヒ、此原位ノ場所ニ零ヲ書ケバヨシ

例トヘバ $302+\frac{70056}{100000}$ ハ 302,70056 ト書キ $3+\frac{5}{100}$ ハ 3,05 ト書クコトヲ得ベシ

偖又小數ハ帶小數ノ特別ノ場合ニシテ完全ナル原位全クナキモノナリ、故ニ小數ヲ書キ著ハスニハ、完全數ノ第一原位ノ場所ニ零ヲ書キ「コンマ」ヲウチテ、次ニ小數原位ノ數ヲ書キ列ヌレバヨシ、例トヘバ $\frac{56}{100}$ ハ 0,56 ト書キ、$\frac{56}{1000}$ ハ 0,056 ト書クコトヲ得ベシ

注意第一 小數ヲ書キ著ハストキ零ヲ書キテ「コンマ」ヲウツ代リニ、唯點(・)ヲ一ツ書クコトモアリ、例トヘバ 0,56 ト書ク代リニ .56 ト書キ 0,056 ト書ク代リニ .056 ト書クガ如シ、箇樣ニ書キタルトキハ、此點ハ零ト「コンマ」トノ代リニ使ヒタルモノナルコトヲ忘ルベカラズ

注意第二 我ガ邦ニ於テハ、小數及ビ帶小數ヲ書クニ、數字ノ代リニ漢字ヲ用井「コンマ」ノ代リニ批點(ヽ)ヲ用井、横ニ左ヨリ右ニ書ク代リニ縱ニ上ヨリ下ニ書クコトアリ、例トヘバ 32,56 0,056 ト書ク代リニ

三二ヽ五六　〇ヽ〇五六

ト書クコトモアリ

小數及ビ帶小數ノ唱ヘ方 書キタル小數或ハ帶小數ヲ讀ムニハ通常ノ分數及ビ帶分數ノ時ノゴトクスルヲ正法トス、例トヘバ

12,45671 ヲバ「十二ト十萬分ノ四萬五千六百七十一」ト讀ムベシ

サリナガラ實際ニ於テハ、辭ヲ省ク爲ニ、先ヅ完全ナル部分ヲ讀ミ、次ニ「コンマ」トイフ辭ヲ唱ヘ、次ニ小數ノ中ニアル次々ノ數字ノ名ヲ順ニ唱フルコトアリ、例トヘバ 12,45671 ヲバ「十二コンマ四五六七一」ト唱ヘ 0,056 ヲバ「零コンマ零五六」ト唱フルコトアリ

定理第一 凡テ小數或ハ帶小數ノ右ニ零ヲ如何程書キ添ヘテモ、箇樣ニシテ得ル所ノ數ハモトノ數ニ等シ

例トヘバ 0,56 トイフ數ノ右ノ端ニ零ヲ三ツ書キ添フレバ 0,56000 ヲ得、然ルニ 0,56000 ハ書キ方ノ法則ニヨリテ $\frac{56000}{100000}$ トイフ數ノコトナリ、偖此分數ノ二ツノ項ヲ千ニテワレバ $\frac{56}{100}$ トナルユヘ、此數ハ矢張モトノ數 0,56 ニ等シ

定理第二 凡テ小數或ハ帶小數ノ中ニ於テ「コンマ」ヲ一桁、二桁、三桁

……ダケ右ノ方ニ移シテ得ル所ノ數ハ、モトノ數ノ十倍、百倍、千倍、……ニ等シ、又「コンマ」ヲ一桁、二桁、三桁、……ダケ左ノ方ニ移シテ得ル所ノ數ハ、モトノ數ノ十分ノ一、百分ノ一、千分ノ一……ニ等シ

例ヘバ 513,2068 トイフ數ノ中ニ於テ「コンマ」ヲ三桁ダケ右ノ方ニ移シテ得ル所ノ數 513206,8 ハモトノ數ノ千倍ニ等シ、如何トナレバ箇樣ニシテ得ル所ノ數ノ中ニアルスベテノ數字ハ其レガモト表ハセシ所ノ原位ノ千倍ニ等シキ原位ヲ表ハセバナリ

是ト同ジヤウナル道理ニテ、例ヘバ 5,132068 ハ 513,2068ノ百分ノ一ニ等シ

又例ヘバ 52,83 トイフ數ハ定理第一ニヨリテ、52,8300ト書キテモヨシ、箇樣ニ書キタル後「コンマ」ヲ四桁ダケ右ニ移セバ 528300,或ヘ唯 528300 トナル、故ニコノ 528300 トイフ完全數ハ 52,83 トイフ帶小數ノ一萬倍ニ等シ

又 3,068 トイフ帶小數ハ無論 0003,068ト書キテモヨシ、箇樣ニシタル後「コンマ」ヲ三桁ダケ左ニ移セバ 0,003068 トナルユヘ、此數ハ與ヘラレタル帶小數ノ千分ノ一ニ等シ

此定理ハ之ヲ次ノゴトク言ヒ著ハスコトヲ得ベシ

一ノ右ニ零ヲ n 箇列ネテ書キタル數ヲ或ル帶小數或ハ小數ニ掛クルニハ、コノ被乘數ノ中ニアル「コンマ」ヲ n 桁ダケ右ノ方ニ移セバヨシ、又前ノ數ニテ後ノ數ヲ割ルニハ、後ノ數ノ中ニアル「コンマ」ヲ n 桁ダケ左ニ移セバヨシ

注意 凡テ完全數ハ其右ノ端ノ數字ノ脇ニ「コンマ」ヲツケ、其次ニ隨意ノ數ダケ零ヲ列ネテ書キ著ハシテモヨキコト分明ナリ、又箇樣ニシタル後前ニイヘル法則ヲ適用シ得ベキコトモ明白ナリ、例ヘバ

156 × 100 = 156,00 × 100 = 15600

156 : 100 = 156, : 100 = 1,56

ノゴトシ

第二章 小數及ビ帶小數ノ計算

第一 寄セ算及ビ引キ算

小數及ビ帶小數ハツマリ皆分數ナルユヘ、一般ノ分數ノ計算ノ法則ヲ適用スレバ、容易ク小數及ビ帶小數ノ計算ヲ行ヒ得ベシ、然レドモ寄セ算及ビ引キ算ニ於テハ一般ノ法則ヲ適用スルニ及バズ、如何トナレバ第一編ニ於テ完全數ノ寄セ算及ビ引キ算ノコトニ就キテ述ベタルコト(三〇及ビ三八)ハ、分明ニ皆小數及ビ帶小數ノ寄セ算ト引キ算トニモ其儘適用シ得ベケレバナリ、因テ次ノ二ツノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則第一 若干ノ小數或ハ帶小數ヲ加ヘ合ハスルニハ、先ヅ此等ノ數ヲ並ベテ書キ、スベテノ「コンマ」ガ皆同シ縱線ノ上ニアル樣ニシ、次ニ姑ラク「コンマ」ヲ無キモノトシテ、全ク完全數ノ寄セ算ノトキト同樣ノ手數ヲ行ヒ、サテ「コンマ」ノツキタル數ノ下ニ書キタル數ニ「コンマ」ヲ打ツベシ


```
 51,318
  0,091
  3,97
 18,504
-------
 73,883
```

例ヘバ 51,318; 0,091; 3,97, 18,504 トイフ四ツノ數ヲ加ヘ合ハスルニハ、圖ノ如ク此等ノ數ヲ書キ列ネ、3,97 ノ右ノ端ニハ零ガアルモノト看做シ、偖先ヅ「コンマ」ニハ目ヲ注ケズシテ完全數ヲ加ヘ合ハスルトキト全ク同シ手數ヲ行ヒ、次ニ 1, 0, 3, 8, ト縱ニ並ビタル數ノ下ニ書キタル數 3 ニ「コンマ」ヲ打ツナリ

法則第二 或ル小數或ハ帶小數ヨリ或ル他ノ數ヲ引クニハ、此二ツノ數ヲ並ベテ書キ、二ツノ「コンマ」ガ同シ縱線ノ上ニアル樣ニシ、次ニ姑ラク「コンマ」ヲナキモノトシテ、完全數ノ引キ算ト同シ手數ヲ行ヒ、サテ「コンマ」ノ付キタル數ノ下ニアル數ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

$$\begin{array}{r} 34,86 \\ 18,275 \\ \hline 16,585 \end{array}$$

例ヘバ34,86ヨリ18,275ヲ引クニハ、此二ツノ數ヲ圖ノ如ク並ベテ書キ、上ノ數ノ右ノ端ニハ零ガアルモノト看做シ、完全數ノ引キ算ノトキノ如クシ、4, 8, ノ下ニ出タル數6ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

注意 與ヘラレタル數ガ小數及ビ帶小數ノミナラズ、其中ニ完全數ガ襍リタルトキモ、前ノ二ツノ法則ヲ適用シ得ベキコト勿論ナリ、但シ此時ハ完全數ノ右ノ端ノ數字ニ「コンマ」ノ付キタルモノト看做スベシ、例ヘバ69,87; 15; 12,5ヲ加ヘ合ハスルトキ、及ビ2ヨリ0,75ヲヒクトキハ圖ノ如クスベシ

$$\begin{array}{r} 69,87 \\ 15 \\ 12,5 \\ \hline 97,37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 0,75 \\ \hline 1,25 \end{array}$$

第二　掛ケ算

例ヘバ3,25ヲ26,194ニ掛クベキコトアランニ、此等ノ數ハ、書キ方ノ法則ニヨリテ $\frac{325}{100}$ ト $\frac{26194}{1000}$ トノコトナリ、倍分數ノ掛ケ算ノ法則ニヨリテ

$$\frac{26194}{1000} \times \frac{325}{100} = \frac{26194 \times 325}{1000 \times 100}$$

ナリ、偖26194×325トイフ積ヲ求ムレバ8513050ヲ得、且ツ1000×100ハ100000ニ等シキユヘ、今求ムル所ノ積ハ

$$\frac{8513050}{100000} \quad 即チ \quad 85,13050$$

ニ等シ、爰ニ注目スベキコトハ、今得タル所ノ積ノ中ニ於テ、「コンマ」ヨリ右ノ方ニアル數字ノ數ハ、100000ノ中ニアル零ノ數ニ等シク、從テ乘數ト被乘數トノ中ニ於テ「コンマ」ヨリ右ノ方ニアル數字ノ數ノ和ニ等シ

是ニヨリテ分明ニ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則 二ツノ小數或ハ帶小數ヲ掛ケ合ハスルニハ、先ヅ姑ラク「コンマ」ヲ無キモノト看做シテ、完全數ノ掛ケ算ト同樣ノ手數ヲ行ヒ、次ニ箇樣ニシテ得タル所ノ積ノ右ノ端ニ於テ、乘數ト被乘數トノ中ニアル小

數ハ部分ハ數字ハ數ハ和ニ等シキ數ダケ數字ヲ取リ其次ノ數字ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

注意第一 若シ箇樣ニシテ得タル所ノ積ノ中ニアル數字ノ數ガ乘數ト被乘數トノ中ニ於テ「コンマ」ノ右ニアル數字ノ數ヨリ小サキ𪜈ハ零ヲ足シテ後「コンマ」ヲ打ツベシ

0,0512
0,34
2048
1536
0,017408

コヽニ擧ゲタル 0,0512 ニ 0,34 ヲ掛クル例ハ即チ此場合ナリ

注意第二 前ニイヘル法則ハ乘數或ハ被乘數ガ完全數ナルトキニモ適用シ得ベキコト勿論ナリ但シ此時ハ此完全數ノ右ノ端ニ「コンマ」ノツキタルモノト看做スベシ例トヘバ

2,68
37
1876
804
99,16

コヽニ擧ゲタル 2,68 ニ 37 ヲ掛ケ、

518
0,4
207,2

518 ニ 0,4 ヲ掛クル例ハ即チ此場合ナリ

第三 割リ算 例トヘバ 57,32 ニテ 126,345 ヲ割ルベキコトアランニ此等ノ數ハ即チ $\frac{5732}{100}$ ト $\frac{126345}{1000}$ トノコトナリ又始メノ數ハ $\frac{57320}{1000}$ ニ等シ故ニ分數ノ割リ算ノ法則ニヨリテ

$$126,345:57,32=\frac{126345\times1000}{1000\times57320}$$

或ハ

$$126,345:57,32=\frac{126345}{57320} \text{ 即チ } 2+\frac{11705}{57320}$$

ナリ是ニヨリテ分明ニ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則 小數或ハ帶小數ニテ或ル他ノ小數或ハ帶小數ヲ割ルニハ先ヅ(若シ必要ナラバ)除數若シクハ被除數ノ右ニ若干ノ零ヲ書キ添ヘテ各數ノ中ニアル小數ノ部分ノ數字ノ數ガ相等シキヤウニナシ次ニ被除數ハ中ニアル「コンマ」ヲ取リ除キテ得ル所ノ數ヲ分子トシ除數ノ中ニアル「コンマ」ヲ取リ除キテ得ル所ノ數ヲ分母トシタル分數ヲ作レバヨシ

注意 除數或ハ被除數ガ完全數ナルトキモ、之ト同シ樣ナル手數ヲ適用シ得ベキコト勿論ナリ、例トヘバ 23 ニテ 65,14 ヲ割リタルモノハ $\frac{6514}{2300}$ 即チ $2+\frac{1914}{2300}$ 或ハ $2+\frac{957}{1150}$ ニ等シ

第三章　割リ算ノ結果ノ近似數

定義 或ル數Nト或ル他ノ數Aトノ差ガ或ル數aヨリ小サキトキハAヲNニaダケヨリ近キ數ト稱ス

例トヘバ 3,14159 ト 3,1 トノ差ハ分明ニ 0,1 即チ十分ノ一ヨリ小サキユヘ 3,1 ハ 3,14159 ニ十分ノ一ダケヨリ近キ數ナリ

或ル數Aガ或ル他ノ數Nニaダケヨリ近キ數ナルトキ、若シAガNヨリ大ナレバAヲNノ過剩ナル近似數トイヒ、AガNヨリ小サキトキハAヲNノ不足ナル近似數トイフ

例トヘバ 3,2 ト 3,14159 トノ差ハ 0,1 ヨリ小サクシテ、且ツ 3,2 ハ 3,14159 ヨリモ大ナルユヘ、3,2 ハ 3,14159 ニ $\frac{1}{10}$ ダケヨリ近キ過剩ナル近似數ナリ、又 3,1 ハ 3,14159 ノ不足ナル近似數ナリ

或ル數ニ 0,1 0,01 0,001 ……… ダケヨリ近キ小數或ハ帶小數ヲ求ムルコトヲ名ケテ、此數ヲ第一、第二、第三……ノ小數原位マデ計算スルトイヒ、或ハ之ヲ「コンマ」ノ下一桁、二桁、三桁……ダケ計算ストモイフ

例トヘバ 354 ヲ 17 ニテ割リタルトキノ結果即チ $\frac{354}{17}$ トイフ分數ヲ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算スルトハ、此分數トノ差ガ一萬分ノ一ヨリ小サキ所ノ帶小數ヲ求ムルコトナリ

原則 或ル二ツノ數A、Bアリテ、此二ツノ數ノ中ノ一ツAハ或ル數Nヨリ小サク、今一ツノ數BハNヨリ大ニシテ、且ツAトBトノ差ガaニ等シク或ハaヨリ小サキトキハ、AハNニaダケヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ、BハNニaダケヨリ近キ過剩ナル近似數ナリ

如何ニモAヨリBニ移ルニa或ハaヨリ小サキ數ヲ加フベキトキニハ、AヨリNニ移リ又ハNヨリBニ移ルニハ、aニ充タヌ數ヲ加フベキコト分明ナリ、故ニAトNトノ差モBトNトノ差モaヨリ小サシ

例トヘバ3,14159ハ3,141ト3,142トノ間ニアル數ニシテ、且ツ3,114ト3,142トノ差ハ0,001ニ等シキユヘ、3,141ハ3,14159ニ千分ノ一ダケヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ、3,142ハ此數ニ千分ノ一ダケヨリ近キ過剩ナル近似數ナリ

定理第一　凡テ或ル分數ノ分母ニテ其分子ヲ割リテ得ル所ノ完全商及ビ此完全商ニ一ヲ加ヘタルモノハ、孰レモ此分數ニ一ダケヨリ近キ完全數ニシテ、一ツハ不足ナル近似數今一ツハ過剩ナル近似數ナリ

例トヘバ$\frac{23}{3}$トイフ分數アランニ、其分母ニテ其分子ヲ割リテ得ル所ノ完全商ガ7ニシテ剩餘ガ2ナリトスレバ、第二編第二章ニイヘルコト(二四七)ニヨリテ、此分數ハ$7+\frac{2}{3}$トイフ帶分數ニ等シク、從テ7ヨリ大ニシテ8ヨリハ小サシ、且ツ7ト8トノ差ハ一ニ等シキユヘ、前ノ原則ニヨリテ、7ト8トハイヅレモ$\frac{23}{3}$ニ一ダケヨリ近キ數ニシテ、7ハ不足ナル近似數、8ハ過剩ナル近似數ナリ

注意第一　此定理ヲ應用スルトキ、若シ割リ算ノ剩餘ノ二倍ガ除數ヨリ小サキトキハ、與ヘラレタル分數ニ最モ近キハ不足ナル近似數ナリ、若シ然ラズシテ剩餘ノ二倍ガ除數ヨリ大ナルトキハ、過剩ナル近似數ノ方ガ與ヘラレタル分數ニ最モ近キ數ナリ

例トヘバ$\frac{93}{17}$ノ近似數ヲ求ムル爲ニ、17ニテ93ヲ割ルニ完全商5ト剩餘8トヲ得、偖8ノ二倍16ハ17ヨリ小サシ、因テ$\frac{8}{17}$ハ$\frac{8}{16}$即チ$\frac{1}{2}$ヨリ小サシ(二四一)、然ルニ$\frac{93}{17}$即チ$5+\frac{8}{17}$ト5トノ差ハ即チ$\frac{8}{17}$ナリ、故ニ

$$\frac{93}{17}-5<\frac{1}{2}$$ ナリ

偖又$\frac{8}{17}$ノ一ニ對シテノ餘數(二八九)$\frac{9}{17}$ハ、分明ニ$\frac{1}{2}$ノ一ニ對シテ

テノ餘數即チ$\frac{1}{2}$ヨリ大ナリ、然ルニ6ト$\frac{93}{17}$、即チ5＋$\frac{8}{17}$トノ差ハ即チ$\frac{9}{17}$ナリ、因テ

$$6-\frac{93}{17}>\frac{1}{2}\quad ナリ$$

故ニ猶更

$$6-\frac{93}{17}>\frac{93}{17}-5\quad ナリ$$

即チ與ヘラレタル分數ト5トノ差ガ、同シ數ト6トノ差ヨリモ小サシ、即チ5ト6トノ二ツノ數ノ中ニテ最モ$\frac{93}{17}$ニ近キハ5ナリ

是ト同シ樣ナル論理ニテ、例トヘバ前ノ例ニ引キタル$\frac{23}{3}$ノ二ツノ近似數7、8ノ中ニ於テ、最モ$\frac{23}{3}$ニ近キハ8ナルコトヲ證明シ得ベシ

注意第二　前ノ例ニ於テ$\frac{23}{3}$トイフ分數ハ、3ニテ23ヲ割ルトキノ結果ト看做スコトヲ得(二八四)、故ニ一般ニ此定理第一及ビ前ノ注意ヲ應用シテ、或ル完全數ニテ其倍數ナラザル或ル他ノ完全數ヲ割ルトキノ結果ニ最モ近キ所ノ完全數ヲ求ムルコトヲ得ベシ

定理第二　凡テ或ル數Nニ或ル他ノ數mヲ掛ケタルモノニ一ダケヨリ近キ二ツノ完全數ヲ作リ、之ヲmニテ割リテ得ル所ノ二ツノ數ハ、與ヘラレタル數Nニ$\frac{1}{m}$ダケヨリ近キ數ニシテ、一ツハ不足ナル近似數、今一ツハ過剩ナル近似數ナリ

例トヘバ$\frac{11}{3}$トイフ分數ニ7ヲ掛ケタルモノ即チ$\frac{77}{3}$ニ一ダケヨリ近キ數25ト26トヲ、七ニテワリテ得ル所ノ數$\frac{25}{7}$ $\frac{26}{7}$ハ、イヅレモ$\frac{11}{3}$ニ$\frac{1}{7}$ダケヨリ近キ數ニシテ、始ノ數ハ不足ナル近似數、後ノ數ハ過剩ナル近似數ナリ

如何トナレバ先ヅ假定ニヨリテ25ハ$\frac{77}{3}$ノ不足ナル近似數ニシテ、26ハ其過剩ナル近似數ナルユヘ

$$25<\frac{11\times7}{3}<26$$

ナリ、偖此三ツノ數ノ七分ノ一ノ間ニモ同ジ不等式ガ成リ立ツコト明白ナリ、然ルニ$\frac{11\times7}{3}$ノ七分ノ一ハ$\frac{11}{3}$ナリ、故ニ

$$\frac{25}{7} < \frac{11}{3} < \frac{26}{7}$$

ナリ、即チ $\frac{11}{3}$ ハ $\frac{25}{7}$ ト $\frac{26}{7}$ トノ間ニアル數ナリ、且ツコノ後ノ二ツノ分數ノ差ハ $\frac{1}{7}$ ニ等シキユヘ、前ノ原則(三二四)ニヨリテ、此二ツノ數ハ各、$\frac{11}{3}$ ニ $\frac{1}{7}$ ダケヨリ近キ數ナリ

特別ノ場合　凡テ或ル分數ヲ第 n ノ小數原位マデ計算スルニハ、此分數ノ分子ニ 10^n ヲ掛ケタルモノヲ其分母ニテ割リ、箇樣ニシテ得ル所ノ完全商若シクハ之ニ一ヲ加ヘタルモノヲ、10^n ニテ割レバヨシ

如何トナレバ或ル分數ヲ第 n ノ小數原位マデ計算スルトハ、此分數ニ $\frac{1}{10^n}$ ダケヨリ近キ數ヲ作ルコトナレバナリ(三二四)

例トヘバ $\frac{355}{113}$ トイフ分數ヲ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算スルニハ、分子ニ 10^4 即チ 10000 ヲ掛ケテ 3550000 トナシ、之ヲ 113 ニテ割レバ 31415 トイフ完全商ヲ得、偖此數及ビ之ニ一ヲ加ヘタルモノヲ、一萬ニテワレバ、第一章ノ定理第二(三一四)ニヨリテ、3,1415 及ビ 3,1416 トイフ二ツノ數ヲ得、此二ツノ數ガ各 $\frac{355}{113}$ ヲ四桁ダケ計算シタル結果ニシテ、一ツハ不足ナル近似數、今一ツハ過剩ナル近似數ナリ

注意第一　此例ニ於テ 31415 ニ「コンマ」ヲ打チテ 3,1415 トナストキ、コノ「コンマ」ノツキタル 3 トイフ數字ハ、即チ 355 ヲ 113 ニテ割リテ得ル所ノ完全商ノ右ノ端ノ數字ナリ、是ハ此例ノミニ限ラズ、イヅレノ場合ニ於テモ必ミナ然リ、例トヘバ 537 ヲ 19 ニテ割リテ完全商 28 ヲ得ルトスレバ、537 ニ例トヘバ 10000 ヲ掛ケタルモノ即チ 5370000 ヲ同シ數 19 ニテ割リテ得ル所ノ完全商ハ、280000 ニ一萬ニ充タザル數ヲ加ヘタルモノナルコト分明ナリ、因テ此完全商ヲ 10000 ニテ割リテ得ル所ノ帶小數ノ完全ナル部分ハ必 28 ナルベシ、故ニ $\frac{537}{19}$ ヲ「コンマ」ノ下幾桁ダケカ計算シテ得ル所ノ不足ナル近似數ノ中ニ於テ「コンマ」ノツキタルハ、19 ニテ 537 ヲ割リテ得ル所ノ完全商ノ右ノ端ノ數字 8 ナリ

注意第二 實際ニ於テ分數ヲ「コンマ」ノ下幾桁ダケカ計算スルニハ、只今イヘルコトニヨリテ、先ヅ分母ニテ分子ヲ割リテ、得ル所ノ完全商ノ右ノ端ノ數字ニ「コンマ」ヲ打チ、次ニ此ノ割リ算ノ剩餘ノ右ニ次第ニ零ヲ書キ添ヘテ、割リ算ノ手數ヲ續ケ、適宜ノ處ニテ止リテヨシ、例トヘハ $\frac{537}{19}$ ヲ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算スルニハ、圖ノ如ク、537 ヲ 19

537 | 19
157 | 28,2631
50
120
60
30
11

ニテ割リ、完全商 28 ヲ得タルトキ「コンマ」ヲ打チ、次ノ剩餘 5 ニ零ヲ添ヘテ 50 トナシ、之ヲ法 19 ニテ割リ、得ル所ノ商 2 ヲ「コンマ」ノ右ニ書キ、次ニ剩餘 12 ニ零ヲ添ヘテ法ニテ割リ、得ル所ノ商 6 ヲ 2 ノ右ニ書キ、次第ニカクノ如クシ、「コンマ」ノ下四桁目ニテ止マレバ、求ムル所ノ不足ナル近似數 28,2631 ヲ得ベシ、如何トナレバ箇樣ニ次第ニ零ヲ書キ添ヘテ割リ算ヲ行フモ、始ヨリ被除數ノ右ニ若干ノ零ヲ書キテ前ノ例(三二九)ノ時ノ如クスルモ、ツマリ同シ結果ヲ得ベキコト分明ナレバナリ

又 $\frac{537}{19}$ ヲ四桁ダケ計算シテ得ル所ノ過剩ナル近似數ハ 28,2632 ナルコト分明ナリ

又此分數ヲ例トヘバ「コンマ」ノ下二桁ダケ計算シタル結果ハ、前ノ計算ノ中ニ於テ始メヨリ二桁目ニテ止マリテ得ル所ノ結果 28,26 及ビ 28,27 ナルコト分明ナリ、若シ又五桁六桁其他幾桁ダケニテモ計算セント欲スルトキハ、前ノ計算ノ手數ヲ續クレバヨキコト明白ナリ

注意第三 是マデ擧ゲタル例ハ皆分數ノ分母ガ分子ヨリ小サキトキノ場合ナリシガ、前ニイヘルコトハ一ヨリ小サキ分數ニモ適用シ得ベキコト勿論ナリ、唯此時ハ分母ニテ分子ヲ割リテ得ル所ノ完全商ガ零ナルマデナリ

例トヘバ $\frac{2}{33}$ ヲ「コンマ」ノ下二桁ダケ計算セントスルニハ、先ヅ 33 ニテ 2 ヲ割ルニ、得ル所ノ完全

2 | 33
20 | 0,06
200
2

200 | 33
2 | 0,06

商ハ0ニシテ、剰餘ハ即チ2ナリ、故ニ商ニ0ヲ書キテ「コンマ」ヲ付ケ、次ニ2ノ右ニ零ヲ添ヘテ法ニテ割リ、完全商0ヲ「コンマ」ノ右ニ書キ、サテ剰餘20ノ右ニ零ヲ書キ添ヘテ法ニテ割リ得ル所ノ商6ヲ書クベシ、即チ求ムル所ノ近似數ハ 0,06 及ビ 0,07 ナリ

コヽニ掲ゲタル二ツノ圖ノ中、始メノハ計算ノ手續ヲ示シタルモノニシテ、後ノハ實際ノ圖ナリ

コヽニイヘルコトヲ約シテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則第二 スベテ或ル完全數ニテ其倍數ナラザル或ル完全數ヲ割ルトキノ結果若シクハ或ル與ヘラレタル分數ヲ「コンマ」ノ下幾桁ダケ計算スルニハ、先ヅ分數ノ分母或ハ割リ算ノ除數ニテ、分數ノ分子或ハ割リ算ノ被除數ヲ割リ得ル所ノ完全商ノ右ノ端ニ「コンマ」ヲウチ、次ニ此割リ算ノ剰餘ノ右ニ零ヲツケ、之ヲ除數ニテ割リテ得ル所ノ完全商ヲ「コンマ」ノ右ニ書キ、得ル所ノ剰餘ハ其右ニ零ヲ書キテ、更ニ之ヲ除數ニテ割リ、得ル所ハ前ニ得タル數ノ右ニ書クベシ、次第ニ此ノ如クシ、必要ノ處ニ至リテ止マルベシ、箇樣ニシテ得ル所ハ帶小數或ハ小數ガ求ムル所ノ不足ナル近似數ニシテ、其右ノ端ノ小數原位ノ數ヲ一ツ増シタルモノハ過剰ナル近似數ナリ

注意 小數或ハ帶小數ヲ或ル他ノ數ニテ割ルトキノ結果ヲ計算スルニハ、第二章ノ法則(三二二)ヲ適用シテ先ヅ之ヲ尋常ノ分數トナシ、次ニ前ニ擧ゲタル法則第一ヲ適用スレバヨシ、然レドモ實際ニ於テハ強チニ除數ト被除數トヲ二ツナガラ完全數ノ形ニナスニ及バズ、唯除數ダケヲ完全數ノ形ニナセバヨシ、例トヘバ 2,31 ニテ 68,0159 ヲ割ルトキノ結果ヲ、例トヘバ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算スルニハ、先ヅ法ノ右ニ零ヲ二ツ足シテ 2,3100 トナシ、次ニ法ト實トノ「コンマ」ヲ取リ去リテ $\frac{680159}{23100}$ トイフ分數ヲ作リ、第一圖ノ如ク法則第一ヲ適用スレバ、完全ナル部分 29 ト「コンマ」ノ右ノ數 4441 トヲ得ベシ、然ルニ 23100

第一圖

```
680159|23100
218159|29,4441
 102590
  101900
    95000
     26000
      29.00
```

第二圖

```
6801,59|231
2181   |29,4441
 1025
  1019
    950
     260
      29
```

ニテ680159ヲ割リテ完全商29ヲ得ルナラバ、231ニテ6801,59ノ完全ナル部分ヲ割リテモ同シ完全商ヲ得ベキコト分明ナリ、又6801,59ノ「コンマ」ニ目ヲ注ケズシテ之ヲ231ニテ割リテ得ル所ノ次々ノ數字ハ、680159ノ右ニ次第ニ零ヲツケテ之ヲ23100ニテ割ル時ノ數字ニ同シキコト分明ナリ、故ニ第二圖ノ如ク法ト實トノ中ニアル「コンマ」ヲ同シ桁數ダケ右ニ移シテ、唯法ノミヲ完全數トナシ、次ニ法則第一ト同シ様ナル手數ヲ行ヒテモヨシ、是ヲ法則ニ著ハセバ次ノゴトシ

法則第二

小數或ハ帶小數ニテ或ル數ヲ割ルトキノ結果ヲ、或ル階級ノ小數原位マデ計算スルニハ、先ヅ除數ト被除數トノ中ニアル「コンマ」ヲ同シ桁數ダケ右ニ移シテ、除數ガ丁度完全數ニナルヤウニシ、次ニ除數ニテ被除數ノ完全ナル部分ヲ割リテ得ル所ノ完全商ノ右ノ脇ニ「コンマ」ヲ付ケ、偖此割リ算ノ剩餘ノ右ニ被除數ノ種々ノ小數原位ノ數ヲ次第ニ卸シ、完全數ノ割リ算ノトキト同シ様ナル手數ヲ行ヒ、被除數ノ中ニ卸スベキ數字ガナケレバ、剩餘ノ右ニ零ヲツケテ、法則第一ノ手數ヲ行ヒ適宜ノ處ニテ止マルベシ

四捨五入ノ法

法則第一或ハ第二ヲ適用シテ得ル所ノ最後ノ剩餘ノ二倍ガ除數ヨリ小サキトキハ與ヘラレタル數ニ最モ近キ近似數ハ不足ナル近似數ナリ若シ然ラズシテ此剩餘ノ二倍ガ除數ヨリ大ナルトキハ過剩ナル近似數ガ與ヘラレタル數ニ最モ近キ數ナリ

此事ハ前ノ定理第一ノ注意第一(三二六)ノトキト同シ様ナル論理ヲ用

井テ、之ヲ證明スルコトヲ得ベシ

偖始ノ場合、即チ最後ノ剩餘ノ二倍ガ除數ヨリ小サキトキノ場合ニ於テ、今一桁ダケ計算ヲ續クレバ、商トシテ5ヨリ小サキ數ヲ得ベク、後ノ場合ニ於テハ、商トシテ5若シクハ5ヨリ大ナル數ヲ得ベシ、故ニ或ル割リ算ノ結果ヲ例トヘバ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算シテ、不足ナル近似數ノ右ノ端ノ數字ヲ得タル後猶一タビ割リ算ヲ行ヒ、4若シクハ4ヨリ小サキ商ヲ得ルトキハ之ヲステ、5若シクハ5ヨリ大ナル商ヲ得ルトキハ已ニ前ニ得タル商ノ右ノ端ノ小數原位ノ數ヲ一ツ增セバ「コンマ」ノ下ニ數字四ツアル小數或ハ帶小數ノ中ニ於テ、與ヘラレタル割リ算ノ結果ニ最モ近キモノヲ得ベシ、此法ヲ名ツケテ四捨五入ノ法トイフ」

定理第一ノ注意第一(三二六)ノ時ト同シ樣ニシテ、或ル割リ算ノ結果ヲ第nノ小數原位マデ計算スルニ、四捨五入ノ法ヲ行ヒテ得ル所ノ數ハ、此割リ算ノ結果ニ第nノ小數原位ノ二分ノ一ダケヨリ近キ數ナルコトヲ證明シ得ベシ

$\frac{a+x}{b+x}$

第四章　循環小數ノ起源

定理第一

凡テ或ル分數ガ丁度或ル小數若シクハ帶小數ニ等シキ爲ニ、必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ、此分數ニ等シキ已約分數ノ分母ノ中ニ2及ビ5ヨリ外ノ單因數ヲ含マヌコトナリ

如何トナレバ與ヘラレタル分數ニ等シキ已約分數ヲ$\frac{a}{b}$ト名ヅクレバ、此分數ニ等シキスベテノ分數ノ二ツノ項ハ、aトbトニ或ル同シ完全數ヲ掛ケタルモノニ等シ(二五六)、故ニ若シ此分數ガ$\frac{m}{10^r}$トイフヤウナル分數(即チ小數或ハ帶小數)ニ等シキトキハ、10^rガbノ倍數ナラザルベカラス、然ルニ10^rヲ其單因數ニ分析シタルモノハ2^r5^rナルユヘ、bノ中ニ2及ビ5ヨリ外ノ單因數アルコトヲ得ズ(二二〇)、又

逆ニbノ中ニ2及ビ5ヨリ外ノ單因數ヲ含マザルトキハ、$\frac{a}{b}$トイフ分數ニ等シキ或ル小數或ハ帶小數ヲ見出スコトヲ得ベシ、如何トナレバ此場合ニ於テハ$\frac{a}{b}$ノ二ツノ項ニ2或ハ5ヲ幾回カ掛ケテ、分母ノ因數ナル2ト5トノ指數ガ相等シキヤウニナセバ、箇樣ニシテ得ル所ノ分數ハ$\frac{a}{b}$ニ等シクシテ、且ツ其分母ハ2^n5^n即チ10^nトイウヤウナル形ニナルベケレバナリ

例トヘバ$\frac{89}{77}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{113}{140}$ハ丁度或ル小數或ハ帶小數ニハ等シカラズ、如何トナレバ77, 15, 140即チ7.11, 3.5, 2^2.5.7ノ中ニハ2及ビ5ヨリ外ノ單因數アレバナリ、又$\frac{21}{40}$即チ$\frac{21}{2^3 5}$トイフ分數ハ、其二ツノ項ニ5^2ヲ掛クレバ$\frac{21\times25}{3^3.5^3}$即チ$\frac{525}{1000}$トナルユヘ、此分數ハ0,525トイフ小數ニ等シ、是ト同シ樣ナル道理ニテ例トヘバ

$$\frac{137}{125}=\frac{137}{5^3}=\frac{137\times2^3}{2^3.5^3}=\frac{1096}{1000}=1,096$$

注意　分母ニ2及ビ5ヨリ外ノ單因數ヲ含マザル分數ニ、前ノ章ノ法則第一(三三三)ヲ適用スレバ、竟ニハ次々ノ割リ算ノ剩餘ガ零ニナルニ至ルベシ、如何トナレバ此場合ニ於テハ、此分數ノ分子ニ十ノ或ル階級ノ羃ヲ掛ケタルモノガ丁度其分母ノ幾倍ニカ等シケレバナリ、故ニ箇樣ノ場合ニ於テハ、前ノ法則第一ハ與ヘラレタル分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直ス法ナリトイフコトヲ得ベシ

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=\frac{3.5^2}{2^2.5^2}=\frac{75}{100}=0,75 \text{ ナリ}$$

若シ與ヘラレタル分數ヲ約シツメタルトキ、其分母ニ2及ビ5ヨリ外ノ單因數ヲ含ムトキハ、前ノ法則ヲ適用シテ幾タビ割リ算ヲ行フモ常ニ零ニ等シカラザル剩餘ヲ得ベシ、如何トナレバ、若シ剩餘ガ零ニ等シキニ至ルコトアレバ、與ヘラレタル分數ハ丁度或ル小數若シクハ帶小數ニ等シカラザルベカラザレバナリ、此場合ニ於テモ、前ノ法則ヲ適用シテ、與ヘラレタル分數ノ價格ヲ無限ノ桁數ダケ計算スルコトヲ名ツ

ケテ此分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直ストイフ、且ツ箇樣ニシテ得ル所ノ結果ヲ限リナキ數字ニテ成リタル小數或ハ帶小數ト稱ス

定義 限リナキ數字ニテ成リタル小數或ハ帶小數ニシテ、或ル桁ヨリ以往ハ同シ數字ガ同シ順序ニ限リナク繰リ返ヘサル、者ヲ名ツケテ循環小數或ハ循環帶小數トイフ、コノ繰リ返ヘサル、數字ヲ其儘ニ列子テ書キタル數ヲ此小數或ハ帶小數ノ循環數ト名ツク

例トヘバ 0,42687687687……, 0,595959……等ハ、ミナ循環小數ニシテ、始ノ小數ノ循環數ハ 687 後ノ數ノ循環數ハ 59 ナリ

又 168,758758…… 及ビ 125,03939…… ハミナ循環帶小數ニシテ 875 及ビ 39 ハ各此等ノ數ノ循環數ナリ

循環小數ヲ二ツノ種類ニ區別ス、第一ハ「コンマ」ノ直ニ右ニアル數字ガ循環數ノ部分ヲナセル者ニシテ、コレヲ簡單ナル循環小數ト名ツク、即チ 0,595959……; 0,032032…… ナド是ナリ、第二ハ循環數ヲ以テ成レル部分ト「コンマ」トノ間ニ、循環セザル部分アルモノニシテ、之ヲ複雜ナル循環小數ト名ツク、即チ 0,42687687 …… ナド是ナリ、コノ循環セザル數字ヲ其儘ニ列子テ書キタル數(コヽニテハ 42)ヲ不循環數ト名ツク

循環小數及ビ循環帶小數ノ書キ方

循環小數或ハ循環帶小數ヲ書キ著ハスニハ、書キ方ヲ簡單ニスル爲ニ、循環スル部分ヲ唯一クビ「コンマ」ノ下ニ書キテ之ヲ括弧ノ中ニ入レ、或ハ其兩端ノ數字ノ上ニ點(・)ヲウツコトアリ、例トヘバ 0,42687687 …… ヲバ 0,42(687)或ハ $0,42\dot{6}8\dot{7}$ ト書キ 0,5959 …… ヲバ 0,(59) 或ハ $0,\dot{5}\dot{9}$ ト書クコトアリ

又モシ循環スル所ノ數字ノ數ガ唯一ツナルトキハ、唯此數字ノミヲ括弧ニ入レ、或ハ之ニ點ヲウツ、例トヘバ 0,33 …… ヲ 0,(3) 或ハ $0,\dot{3}$ ト書クナリ

定理第二 或ル分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直ストキ、其結果ガ限リナ

キ數字ニテ成リタル小數或ハ帶小數ナルトキハ此結果ハ必循環小數或ハ循環帶小數ナリ

例トヘバ $\frac{3}{11}$ トイフ分數ニ前ニイヘル法則(三三三)ヲ適用シテ得ル所ノ結果ガ限リナキ數字ニテ成リタル小數ナリトスレバ此小數ハ必循環小數ナリ如何トナレバ此法則ヲ適用スルトキ次々ノ割リ算ニ於テ得ル所ノ剩餘ハ必皆十一ヨリハ小サキ數ナリ即チ必一ヨリ十マデノ數ナラザルベカラズ故ニコンマノ右ノ第一ノ數字ヲ得タル後尚多クトモ十タビ割リ算ヲ行フ中ニハ必前ニ已ニ一タビ得タル剩餘ニ同シキ剩餘ヲ得ベシ此剩餘ノ右ニ零ヲ書キ添ヘテ割リ算ヲ行ヘバ前ニ得タル完全商及ビ剩餘ニ同シキ完全商及ビ剩餘ヲ得ベシ是ヨリ後ハ前ニ得タル數字ト同シ數字ヲ同シ順序ニ得ベキコト明白ナリ故ニ此計算ノ結果ハ必循環小數ナリ

定理第三

凡テ或ル分數Aヲ小數或ハ帶小數ニ直シテ或ル循環小

數或ハ循環帶小數Mヲ得ルトキハ此分數Aニ10^nヲ掛ケタルモノヲ小數或ハ帶小數ニ直ストキノ結果ハMノ中ニ於テ「コンマ」ヲn桁ダケ右ノ方ニ移シテ得ル所ノ數ニ等シ又Aヲ10^nテニ割リタルモノヲ直ストキノ結果ハMノ「コンマ」ヲn桁ダケ左ニ移シタルモノニ等シ

例トヘバ $\frac{45}{11}$ トイフ分數ヲ帶小數ニ直シタルモノガ 4,0909……ナリトスレバ此分數ノ千倍即チ $\frac{45000}{11}$ ヲ帶小數ニ直ストキノ結果ハ 4090,9090……ナリ如何トナレバ後ノ分數ニ前ノ章ノ法則第一(三三三)ヲ適用シテ得ル所ノ次々ノ割リ算ノ商ハ各無論 $\frac{45}{11}$ ニ同シ法則ヲ適用シテ得ル所ノ商ニ等シク且ツ「コンマ」ヲ打ツベキ數字ハモトノ數字ヨリ三桁ダケ右ニ在ルコト分明ナレバナリ

又 $\frac{45}{11}$ ノ百分ノ一即チ $\frac{45}{11\times100}$ ヲ小數ニ直ストキ得ル所ノ結果ハ 0,040909……ナリ如何トナレバ前ニイヘルコトニヨリテ $\frac{45}{11\times100}$ ヲ小數ニ直シタルモノヽ中ニ於テ「コンマ」ヲ二桁ダケ右ニ移シタルモ

ノガ、$\frac{45}{11\times100}\times100$ 即チ$\frac{45}{11}$ヲ帶小數ニ直シタルモノニ等シカラザルベカラザレバナリ

定理第四 一ヨリ小サキ已約分數ハ分母ノ中ニ2トイフ單因數ヲモ5トイフ單因數ヲモ含マザルトキハ此分數ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ箇單ナル循環小數ナリ

例トヘバ$\frac{8}{33}$トイフ已約分數ノ分母ノ單因數ノ中ニ2モ5モナシトスレバ、此分數ヲ小數ニ直シタル結果ハ箇單ナル循環小數ナリ、如何トナレバ先ヅ此分數ヲ小數ニ直ス爲ニ行フ所ノ次々ノ割リ算ノ剰餘ハ、33ニテ$8\times10, 8\times10^2, 8\times10^3, \ldots\ldots$ヲ割リテ得ル所ノ剰餘ニ同シ、然ルニ此分數ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ、定理第二ニヨリテ、必循環小數ナルニヨリ、此小數ノ循環數ノ中ニ在ル數字ノ數ヲkト名クレバ、8×10^nトイフヤウナル數ト$8\times10^{n+k}$トヲ33ニテ割ルトキ、同シ剰餘ヲ得ベシ、故ニ第二編第二章ノ初メ(一五六)ニイヘルコトニヨリテ、

$8\times10^{n+k}-8\times10^n$トイフ數ハ33ノ倍數ナリ、然ルニ$8\times10^{n+k}$ハ$8\times10^k\times10^n$ニ等シキユヘ、掛ケ算ノ定理第三(七四)ニヨリテ、

$$8\times10^{n+k}-8\times10^n=(8\times10^k-8)\times10^n$$

ナリ、倍10^nハ2ト5トノ單因數ノミヲ含ミ、33ハ假定ニヨリテ2ヲモ5ヲモ含マヌユヘ、10^nト33トハ分明ニ互ニ單純ナル數ナリ、故ニ$8\times10^{n+k}-8\times10^n$ガ33ニテワルヽ爲ニハ$8\times10^k-8$ガ33ノ倍數ナラザルベカラズ(一九五)因テ$8\times10^k$ヲ33ニテ割リテモ、8ヲ33ニテ割ルトキト同シ剰餘即チ8ヲ得ベシ(一五六)、故ニkタビ割リ算ヲ行ヒタル後ハ、再ビ初メ「コンマ」ノ右第一ノ桁ニ書キシ數字ニ等シキ完全商ヲ得ベシ、即チコノ「コンマ」右ニ直ニノアル數字ガ循環數ノ首ノ數字ナリ、即チ得ル所ノ循環小數ハ必箇單ナル循環小數ナリ

定理第五 ◎ 一ヨリ小サキ已約分數ハ分母ノ中ニ2或ハ5(若シクハ2及ビ5)ト他ノ單因數トヲ含ムトキハ、此分數ヲ小數ニ直ストキノ結

果ハ複雜ナル循環小數ニシテ、且ツ其不循環數ノ中ニアル數字ノ數ハ、與ヘラレタル分數ノ分母ノ中ニアル2或ハ5ノ指數ノ中ノ最モ大ナルモノニ等シ

例トヘバ一ヨリ小サキ已約分數 $\frac{133}{660}$ 即チ $\frac{133}{2^2.5.33}$ ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ複雜ナル循環小數ニシテ、且ツ其不循環數ノ中ニアル數字ノ數ハ與ヘヨレタル分數ノ分母ノ中ニアル2ノ指數2ニ等シ

如何ニモ、此分數ノ二ツノ項ニ5ヲ掛ケテ分母ノ中ニアル2ト5トノ指數ヲ等シクナセバ、$\frac{665}{2^2.5^2.33}$ 即チ $\frac{665}{33}\times\frac{1}{100}$ トナル、故ニ定理第三(三四三)ニヨリテ、$\frac{133}{660}$ ヲ小數ニ直シタルモノハ、$\frac{665}{33}$ ヲ帶小數ニ直シタルモノヽ中ニ於テ「コンマ」ヲ二桁ダケ左ニ移シタルモノニ等シ

倂 665 ハ 33 ト互ニ單純ナル數 133 ニ 33 ト互ニ單純ナル數 5 ヲ掛ケタルモノナルユヘ、665 ト 33 トハ互ニ單純ナル數ナリ(一九八)、故ニ 665 ヲ 33 ニテ割リテ得ル所ノ剩餘ヲ r ト名ツクレバ、r ト 33 トハ互ニ單純ナル數ナリ、如何トナレバ r ト 33 トノ最大公約數ハ 665 ト 33 トノ最大公約數 1 ニ等シケレバナリ(一七八)、因テ $\frac{r}{33}$ トイフ分數ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ、定理第四ニヨリテ、簡單ナル循環小數ナリ、倂 $\frac{665}{33}$ ヲ帶小數ニ直シテ得ル所ノ循環帶小數ノ小數ノ部分ハ $\frac{r}{33}$ ヲ小數ニ直シテ得ル所ノ循環小數ニ等シキコト分明ナリ、故ニ此循環帶小數ノ中ニ於テ「コンマ」ヲ二桁ダケ左ニ移シタルモノ、即チ $\frac{133}{660}$ ヲ小數ニ直シテ得ル所ノ循環小數ノ中ニ於テ、「コンマ」ノ右ノ第三番目ノ數字ヨリ以下ハ皆循環スル數字ノミナリ

倂又此循環小數ノ「コンマ」ノ右ノ始ノ二ツノ數字ニテ成レル數ハ必不循環數ナリ、即チ此數ヲ q ト名ツケ、$\frac{r}{33}$ ヲ小數ニ直シタルトキノ循環數ヲ p ト名ツクレバ、p ト q トノ右ノ端ノ數字ハ互ニ相異ル數字ナリ、如何ニモ先ヅ q トイフ數ハ分明ニ 665 ヲ 33 ニテ割リテ得ル所ノ完全商ニ等シ、故ニ

$$665=33\times q+r$$

ナリ、次ニpトイフ數ノ中ニアル數字ノ數ヲkト名ツクレバ、前ニイヘルコトニヨリテ、$r\times10^k$ヲ33ニテ割レバ完全商トシテpヲ得剩餘トシテrヲ得ベシ、故ニ

$$r\times10^k=33\times p+r$$

ナリ、此二ツノ等式ニヨリテ、665ト$r\times10^k$トノ差ハ、$33\times q$ト$33\times p$トノ差ニ等シ、(三八)從テ33ニpトqトノ差ヲ掛ケタルモノニ等シ(七五)因テ若シpトqトノ右ノ端ノ數字ガ互ニ相等シトスレバ、pトqトノ差ハ分明ニ十ニテワルヽ數ナルベキユヘ、665ト$r\times10^k$トノ差モ十ニテワレザルベカラズ、且ツ$r\times10^k$ハ無論十ノ倍數ナルユヘ665ガ十ノ倍數ナラザルベカラズ然ルニ665ハ2ト5トノ二ツノ單因數ヲ二ツナガラ含ミタル數ニハ非ルユヘ、十ノ倍數ナルコト能ハズ、因テpトqトノ右ノ端ノ數字ハ同シ數字ナルコト能ハズ即チqハ必不循環數ナリ

約メテ言ヘバ、$\frac{133}{660}$ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ複雜ナル循環小數ニシテ、「コンマ」ノ始ノ二ツノ數字ダケガ循環セザル部分ナリ

前ノ例ニ於テハ、與ヘラレタル分數ニ100ヲ掛ケテ得ル所ノ分數$\frac{665}{33}$ハ一ヨリ大ナル數ナリ若シ箇樣ニシテ得ル所ノ分數ガ一ヨリ小サケレバ、其分母ニテ其分子ヲ割リテ得ル所ノ完全商ハ零ナリ、箇樣ノ場合ニ於テモ前ト同シ樣ニシテ且ツ却テ簡單ナル手數ヲ用ヰテ、此定理ヲ證明スルコトヲ得ベシ

第五章　循環小數ノ極限

定義　或ル問題ノ中ニ於テ我々ガ或ル量若シクハ或ル數ニ種々ノ價格ヲ與フルコトヲ得ルトキハ、此量或ハ此數ヲ變ジ得ベキ量或ハ變

ジ得ベキ數ト名ツク

例トヘバ或ル與ヘラレタル分數ヲ隨意ノ階級ノ小數原位マデ計算シテ得ル所ノ小數ハ變シ得ベキ數ナリ

或ル變シ得ベキ量或ハ變シ得ベキ數Nガ次第ニ或ル一定ノ量或ハ一定ノ數Aニ近クナリ、AトNトノ差ガ如何ナル量或ハ數ヨリモ小サクナルコトヲ得ルトキハ、コノAトイフ量或ハ數ヲNトイフ量或ハ數ノ極限ト名ツク

例トヘバ零ノ右ニ「コンマ」ヲツケ其右ニ9トイフ數字ヲ幾箇モ並ベテ書キタル小數即チ 0,9999……9 ノ中ニ於テ、此數字ノ數ヲ次第ニ増ストキハ、コノ變ジ得ベキ小數ノ極限ハ一ナリ、如何トナレハ先ヅ 0,9; 0,99; 0,999; …… ト一トノ差ハ 0,1; 0,01; 0,001; …… ナルユヘ、9トイフ數字ノ數ヲ十分ニ多クナセバ、此小數ト一トノ差ヲ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ベシ、例トヘバ此差ヲ隨意ノ數 $\frac{3}{8597}$ ヨ

リ小サクナサントスルニハ、此數ノ分子ヲ一ニテ置キ換ヘ其分母ヲ10000ニテ置キ換ヘテ得ル所ノ數ハ、モトノ數ヨリ小サキ數ナルユヘ、彼ノ變シ得ベキ小數ト一トノ差ヲ $\frac{1}{10000}$ 即チ 0,0001 ニ等シクナセバ、此差ハ必 $\frac{3}{8597}$ ヨリ小サクナルベシ、然ルニ左樣ニスルニハ9ノ字ヲ四ツトレバヨシ、故ニ此小數ト一トノ差ヲ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、因テ一ガ此小數ノ極限ナリ

此證明ノ中ニ行ヒタル論理ヲ擴ムレバ次ノ原則ヲ得

原則第一 或ル變シ得ベキ數NトAトノ差ガ次第ニ小サクナリテ隨意ノ階級ノ小數原位ヨリ小サクナルコトヲ得ルトキハNノ極限ハAナリ

系 或ル與ヘラレタル分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直シテ得ル所ノ循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ハ即チ此分數ナリ

原則第二 二ツノ限リナキ數字ニテ成リタル小數ガ同ジ極限ヲ有

スルトキハ、此二ツノ小數ハ全ク同シ物ナリ

如何ニモ若シコヽニ二ツノ限リナキ數字ニテ成リタル小數NトN'トアリテ、此二ツノ小數ノ組ミ立ニ少シニテモ異ル所アレバ、此二ツノ小數ハ同シ極限ヲ有スルコト能ハズ、例トヘバ若シ

N＝0,2615……,　N'＝0,2626……

ナリトセンニ、始ノ小數ハ其數字ノ數ヲ如何ニ多クナシテモ、常ニ 0,262 ヨリ小サク、後ノ數ハ之ニ反シテ常ニ 0,262 ヨリモ大ナルコト無論ナリ、故ニNノ極限ハ分明ニ 0,262 ヨリ大ナルコト能ハズ、N'ノ極限ハ 0,262 ヨリ大ナルベシ、因テモシNトN'トガ同シ極限ヲ有ストスレバ、此二ツノ數ハ全ク同シ數字ヲ同シ位置ニ列子タルモノニテ成レル數ナラザルベカラズ

系　或ル循環小數或ハ循環帶小數Nハ極限ガ或ル分數Aニ等シク、且ツAヲ小數ニ直ストキノ結果ガ循環小數或ハ循環帶小數ナルトキハ、此循環小數或ハ循環帶小數ハ全クNト同シモノナリ

如何トナレバAヲ小數ニ直シテ得ル所ノ循環小數或ハ循環帶小數ヲ假ニN'ト名ケンニ、原則第一ノ系ニヨリテN'ノ極限ハAナリ、然ルニ假定ニヨリテNノ極限モAナリ、故ニNトN'トハ同シ極限ヲ有スル循環小數ナリ、因テN'ハ全クNト同シ物ナラザルベカラズ

注意　凡テ9トイフ數ヲ循環數トシタル循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ハ完全數小數又ハ帶小數ニ等シ、例トヘバ 0,74999…… ノ極限ハ、前ニイヘルコトヽ同シ道理ニテ、0,75 即チ $\frac{3}{4}$ ニ等シ、故ニ箇樣ナル循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ニ等シキ分數ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ限リナキ數字ニテ成リタル小數ニハ非ズ、從テ此結果ハ與ヘラレタル循環小數或ハ循環帶小數ト同シモノナルコト能ハズ

定理第一　凡テ或ル簡單ナル循環小數ノ極限ハ、此數ノ循環數ヲ分子トシ9トイフ數字ヲ此循環數ノ中ニアル數字ノ數ダケ列子テ書キ

タル數ヲ分母トシタル分數ニ等シ

例トヘバ 0,1515…… トイフ循環小數ノ極限ハ $\frac{15}{99}$ 即チ $\frac{5}{33}$ トイフ分數ナリ、如何トナレバ先ヅ此小數ノ中ニ於テ循環數ヲ或ル隨意ノ數ダケ例トヘバ三ツダケトリタルモノヲNト名ツクレバ

$$N = 0{,}151515$$

ナリ、偖コノ等式ノ左右邊ニ各百ヲ掛クレバ

$$N \times 100 = 15{,}1515$$

ヲ得、因テ

$$N \times 100 - N \text{ 即チ } N \times 99 = 15 - 0{,}000015$$

ナリ、故ニ

$$N = \frac{15}{99} - \frac{0{,}000015}{99} \quad \text{或ハ} \quad N = \frac{15}{99} - \frac{15}{99} \times \frac{1}{10^6} \quad \text{ナリ}$$

一般ニ循環數ヲn箇ダケトリテ得ル所ノ小數ヲNト名ツクレバ

$$N = \frac{15}{99} - \frac{19}{99} \times \frac{1}{10^{2\times n}}$$

ナルベシ、然ルニNト $\frac{15}{99}$ トノ差ナル $\frac{15}{99} \times \frac{1}{16^{2\times n}}$ ハ $\frac{1}{10^{2\times n}}$ ヨリ小サク、$\frac{1}{10^{2\times n}}$ ハnヲ十分ニ大キクトレバ、如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ル數ナリ、故ニ猶更Nト $\frac{15}{99}$ トノ差ヲバ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、因テNノ極限ハ $\frac{15}{99}$ ナリ

注意 0,999…… トイフ循環小數ニ只今ノ定理ヲ應用スレバ、此數ノ極限ハ、前ニ直接ニ證明セシ如ク、$\frac{9}{9}$ 即チ1ニ等シキコトヲ知ル

定理第二 或ル循環小數或ハ循環帶小數、N、ノ極限ガ、或ル分數、A、ニ等シキトキハ、此小數或ハ帶小數ノ中ニ於テ「コンマ」ヲn桁ダケ右或ハ左ニ移シテ得ル所ノモノノ極限ハ $A \times 10^n$ 或ヘ $A:10^n$ ニ等シ

如何ニモ、先ヅ若シAガ或ル完全數カ小數カ帶小數カニ等シケレバ、此定理ハ證明ヲ要セズシテ自ラ明白ナリ、次ニ若シ然ラザレバ原則第二ノ系ニヨリテ、Aヲ小數或ハ帶小數ニ直ストキノ結果ハNナリ、偖前ノ章ノ定理第三(三四三)ニヨリテ、$A \times 10^n$ 或ハ $A:10^n$ ヲ小數或ハ帶

小數ニ直シタルモノハ、Nノ中ニ於テ「コンマ」ヲn桁ダケ右或ハ左ニ移シテ得ル所ノ循環小數或ハ循環帶小數ニ等シ、因テ箇樣ニシテ得ル所ノ數ノ極限ハ、原則第一ノ系ニヨリテ、$A\times10^n$或ハ$A:10^n$ニ等シ

定理第三 凡テ或ル複雑ナル循環小數ノ極限ハ、此數ノ不循環數ハ右ニ其循環數ヲ其儘ニ連續シテ書キタル數ヨリ不循環數ヲ引キタルモノヲ分子トシ、9トイフ數字ヲ循環數ノ中ニアル數字ノ數ダケ列子其右ニ零ヲ不循環數ノ數字ノ數ダケ列テ書キタル數ヲ分母トシタル分數ニ等シ

例ヘバ 0,42687687...... トイフ循環小數ノ極限ハ $\frac{42687-42}{99900}$

即チ $\frac{42645}{99900}$ トイフ分數ニ等シ、如何トナレバ先ヅ與ヘラレタル循環小數ノ極限ヲAト名ツクレバ、定理第二ニヨリテ、Aハ 42,687687...... トイフ帶小數ノ極限ノ百分ノ一ニ等シ、然ルニ此帶小數ノ極限ハ分明ニ 42 トイフ完全數ニ 0,687687...... ノ極限 $\frac{687}{999}$ ヲ加ヘタルモノニ等シ、因テ

$$A=\left(42+\frac{687}{999}\right)\times\frac{1}{100}$$

或ハ

$$A=\frac{42\times999+687}{99900}$$ ナリ

然ルニ 999 ハ 1000−1 ニ等シク、從テ

$$42\times999=42\times1000-42\times1=42000-42$$

ナルユヘ

$$42\times999+687=687+42000-42=42687-42$$

ナリ、因テ如何ニモ

$$A=\frac{42687-42}{99900}$$ ナリ

注意第一 凡テ循環帶小數ノ極限ハ、前ニイヘルゴトク、其完全ナル部分ニ其小數ノ部分ノ極限ヲ加ヘタルモノニ等シキコト分明ナリ、偖此小數ノ部分ノ極限ハ、定理第一及ビ定理第三ニヨリテ之ヲ求ムルコ

トヲ得ルユヘ、之ヨリ推シテスベテノ循環帶小數ノ極限ヲ求ムルコトヲ得ベシ

注意第二　凡テ9ヨリ外ノ數ヲ循環數トシタル循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ハ完全數小數又ハ帶小數ニ等シキコト能ハズ、例ヘバ89,73666……ノ極限ヲAト名ツクレバ、前ニイヘルコトニヨリテ

$$A = 89 + \left(73 + \frac{6}{9}\right) \times \frac{1}{100}$$

ナリ、偖$\frac{6}{9}$トイフ分數ハ先ヅ1ヨリ小サク、且ツ之ヲ約シツメテ得ル所ノ分數ノ分母ノ中ニハ2ト5トノ外ノ單因數ヲ含ムコト明白ナリ、因テ$\frac{6}{9}$ハ或ル小數ニ等シキコト能ハズ、從テAハ或ル帶小數ニ等シキコト能ハズ

故ニ9ヨリ外ノ數ヲ循環數トシタル循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ニ等シキ分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直ストキノ結果ハ、即チ與ヘラレタル循環小數或ハ循環帶小數ナリ(三五(三))、因テ此場合ニ於テハ、與ヘラレタル循環小數或ハ循環帶小數ノ極限ヲ求ムルコトハ、此數ヲ生シタル原(モト)ノ分數ヲ求ムルコトニ同シ、即チ此極限ヲ求ムルノ手數ハ與ヘラレタル數ヲ還原スルノ手數ナリトイフコトヲ得ベシ

第四編ノ演習問題

(一) 次ニ擧グル三ツノ小數ヲ已約分數ノ形ニ直セ

0,125　0,728　0,06875

(二) 次ニ擧グル(1)及ビ(2)ノ群ノ中ニ在ル數ノ和ト、(3)及ビ(4)ノ群ノ中ニ在ル數ノ差トヲ求メヨ

(1)
36,085
29,123
10,908

(2)
419,2999
51,0905
780,0001
65,4433
112,3578
908,5700

(3)
12,5983
8,8738

(4)
10,0126
0,0997

(三) 次ニ擧グル各群ノ中ノ數ヲ掛ケ合ハセヨ

(1) 2,85877　16,32　(2) 108,5　0,0178

(3) 0,0625　0,0016　(4) 998,738　78,96054

(四) 九トイフ數ヲ用ヰテ掛ケ算ノ結果ヲ驗メスノ法(一七三)ハ、小數及ビ帶小數ノ掛ケ算ニモ適用シ得ベキコトヲ證明セヨ

(五) 十一トイフ數ヲ用ヰテ小數及ビ帶小數ノ掛ケ算ノ結果ヲ驗メスノ法如何

(六) 次ニ擧グル種々ノ割リ算ノ結果ヲ已約分數ノ形ニナセ

(1) 1,02 : 59,5　(2) 1,0927 : 0,9366

(3) 25,272 : 7,668　(4) 0,10998 : 0,9594

(七) $\frac{50}{611}$ ニ十三分ノ一ダケヨリ近キ數ヲ求メヨ。

(八) 次ニ擧グル種々ノ割リ算ノ結果ヲ、(1)(2)ハ第五ノ小數原位マデ、(3)(4)ハ第七ノ小數原位マデ計算セヨ

(1) 2645:47　(2) 81,93:18,7

(3) 5187,5:3380　(4) 1296000:2093

(九) 次ニ擧グル種々ノ割リ算ノ結果ヲ小數或ハ帶小數ニ直セ

(1) 4,9:1,75　(2) 26:0,104　(3) 1597:3200

(一〇) 次ニ擧グル諸〻ノ分數ヲ小數或ハ帶小數ニ直セ

(1) $\frac{5}{7}$　(2) $\frac{18}{13}$　(3) $\frac{30}{22}$　(4) $\frac{197}{145}$　(5) $\frac{9}{70}$

(一一) 一ヨリ大ナル已約分數ノ分子ガn箇ノ零ニテ書キ終リタル數ナルトキハ、此分數ヲ帶小數ニ直ストキノ結果ハ循環帶小數ニシテ、且ツ「コンマ」ヨリ左ノ方第n番目ノ數字ガ循環數ノ首ノ數字ナリ

(一二) 次ニ擧グル諸〻ノ循環小數ノ極限ヲ求メ、且ツ之ヲ已約分數ノ形ニナセ

(1) 0,(675)　(2) 0,42(8052)　(3) 0,17(857142)

(4) 0,(285714)　(5) 0,1420(45)

(一三) スベテノ完全數ハ9トイフ數字ノミヲ列子タルモノヽ右ニ若干ノ零ヲ列子テ書キタル數ノ約數ナリ

(一四) 「コンマ」ノ右ニ循環セザル數字ナキ循環帶小數ヲ、帶分數ノ形ニナサズシテ、直チニ分數ニ直スノ法如何

(一五) 「コンマ」ノ右ニ循環セザル數字アル循環帶小數ヲ帶分數ノ形ニナサズシテ、直チニ分數ニ直スノ法如何

(一六) 一ヨリ小サキ分數ノ分母ガ9トイフ數字ノミヲ列子テ書キタル數ナルトキハ、此分數ヲ小數ニ直ストキノ結果ハ、此分數ノ分子ヲ循環數トシタル簡單ナル循環小數ナリ、直接ニ(第五章ノ定理第一ニヨラズシテ)之ヲ證明セヨ

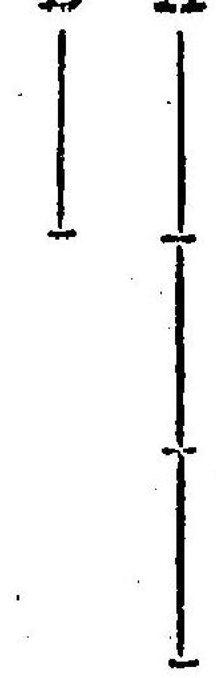
第五編　不盡數　冪根

第一章　不盡數ノ論

定義　同シ種類ノ二ツノ量A、Bアリテ、始ノ量Aガ後ノ量Bニ或ル完全數ヲ掛ケタルモノニ等シキトキハ、始ノ量ヲ後ノ量ノ倍量ト稱シ、後ノ量ヲ始ノ量ノ約量ト稱ス

例ヘバABトイフ二ツノ長サアリテ、Aガ丁度Bノ三倍ニ等シキトキ、即チBニ完全數3ヲ掛ケタルモノガAニ等シキトキハ、Aトイフ長サヲBノ倍量ト稱シ、B

A B

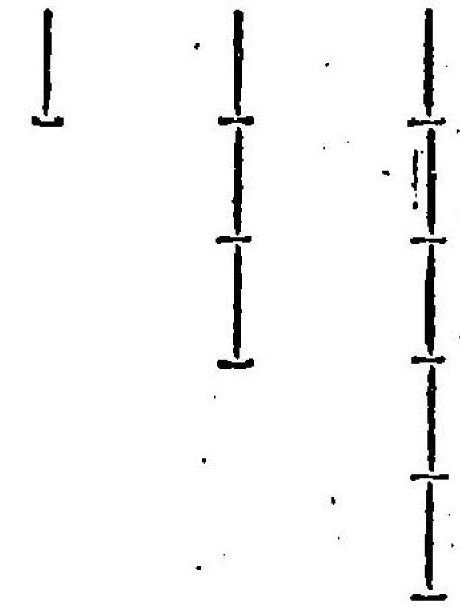


トイフ長サヲAノ約量ト稱ス

此定義ニヨリテ、スベテノ量ハ此量自身ノ倍量ニシテ、且ツ其約量タリ

公度　同シ種數ノ二ツノ量A、Bガイヅレモ或ル同シ量Cノ倍量タルトキハCトイフ量ヲAトBトノ公度ト稱ス

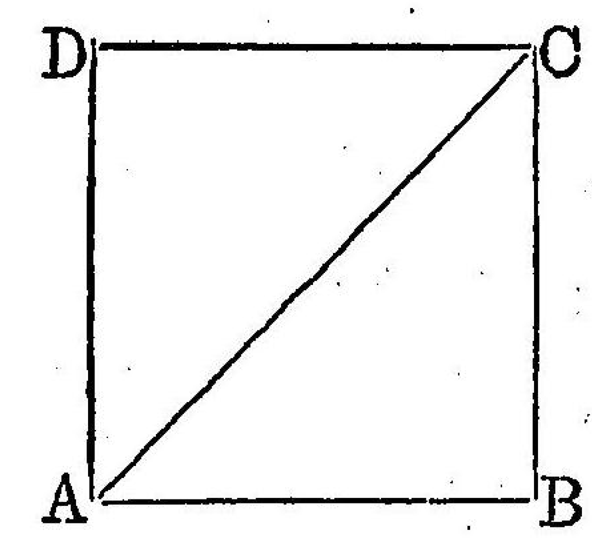
A B C



例ヘバA、B、Cトイフ三ツノ長サアリテ、Aハ丁度Cノ五倍ニ等シク、Bハ丁度Cノ三倍ニ等シキトキハ、Cトイフ長サヲAトBトノ公度ト稱ス

此定義ニヨリテ、凡テA、Bトイフ二ツノ量ノ公度トハ、Aノ約量ニシテ同時ニBノ約量ナル量ノコトナリ

同シ種類ノ二ツノ量アランニ、此二ツノ量ノ中ノ一ツノ約量ニシテ同時ニ今一ツノ量ノ約量ナル所ノ量ヲ見出シ得ベカラザルコトアリ、箇様ノ場合ニ於テハ、此二ツノ量ヲ互ニ公度ヲ有セザル量ト稱ス



例トヘバ幾何學ニ於テ、凡テ平方形(ABCD)ノ各邊ノ長サト其對角線(AC)ノ長サトハ或ル同シ長サノ倍量ニ等シキコト能ハザルコトヲ證明ス、即チ平方形ノ各邊ノ長サト其對角線ノ長サトハ互ニ公度ヲ有セザル量ナリ

二ツノ量ノ比　或ル種類ノ量Aノ同シ種類ノ或ル他ノ量Bニ對シテノ比トハ、後ノ量Bヲ單位トスルトキ始ノ量Aヲ表ハスベキ數ノコトナリ

例トヘバAトBトイフ二ツノ長サアリテ、Aトイフ長サガBトイフ長サノ五倍ニ等シキトキハ、Bヲ單位トスルトキAヲ表ハスベキ數ハ5ナリ、即チAノBニ對シテノ比ハ5ナリ、若シAトイフ長サガBトイフ長サノ七分ノ三ニ等シキトキハ、AノBニ對シテノ比ハ$\frac{3}{7}$ナリ

同シ種類ノ二ツノ量ガ互ニ公度ヲ有スルトキハ、此二ツノ中ノ一ツノ量ノ今一ツノ量ニ對シテノ比ハ完全數或ハ分數ナリ

如何ニモ始ノ量ヲAト名ツケ、後ノ量ヲBト名ツケンニ、先ヅ若シAガBノ倍量ナルトキ、例トヘバBノ五倍ニ等シキトキハ、Bハ此二ツノ量ABノ公度ナリ、而シテ此場合ニ於テハ、AノBニ對シテノ比ハ5トイフ完全數ナリ、次ニ若シAトBトガイヅレモ或ル量Cノ倍量ナルトキ、例トヘバAハCノ三倍ニ等シク、BハCノ七倍ニ等シキトキハ、CハBノ七分ノ一ニ等シキユヘ、AハBノ七分ノ一ノ三倍即チ其七分ノ三ニ等シ、此場合ニ於テハAノBニ對シテノ比ハ$\frac{3}{7}$トイフ分數ナリ

故ニ或ル種類ノ量ガ此種類ノ量ノ單位ト互ニ公度ヲ有スルトキハ、此量ヲ表ハス所ノ數ハ完全數或ハ分數ナリ

又逆ニ凡テ完全數及ビ分數ハ單位ト互ニ公度ヲ有スル所ノ量ヲ表ハスモノト看做スコトヲ得

如何ニモ先ヅスベテ或ル完全數ノ表ハス所ノ量ハ單位ノ倍量ナルユヘ、單位自身ガ此量ト單位トノ公度ナリ、次ニスベテ或ル分數例トヘバ$\frac{3}{7}$ノ表ハス所ノ量ハ、單位ノ七分ノ三ニ等シキユヘ、單位ノ七分ノ一ニ等シキ量ヲCト名ツクレバ、與ヘラレタル量ハCノ三倍ニ等シク、且ツ單位ハCノ七倍ニ等シキユヘ、Cトイフ量ガ與ヘラレタル量ト單位トノ公度ナリ

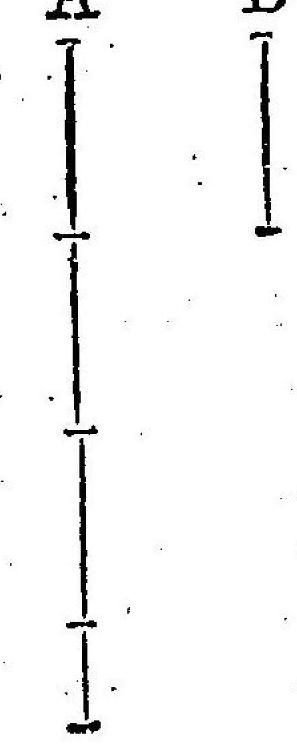
不盡數ノ起源

或ル種類ノ量ガ此種類ノ量ノ單位ト互ニ公度ヲ有セザルトキハ、單位ヲ幾箇ニ等分シテモ丁度此量ノ約量ナル所ノ量ヲ得ルコト能ハズ、故ニ此場合ニ於テハ、吾ガ輩ガ曾テ説キ明カセシ方法(上ソ四、五及ビ二三七)ニヨリテ精密ニ此量ヲ計ルコト能ハズ、此時ハ次ニ説キ明カスゴトク、如何ヤウニモ此量ニ近キ量ヲ表ハス所ノ數ヲ見出スコトヲ得ベシ

例トヘバBトイフ長サヲ單位トシテ、Aトイフ長サヲ計ルベキトキ、先ヅBヲ例トヘバ千箇ノ相等シキ部分ニ分チテ得ル所ノ一部分CヲAニ比較センニ、

B

A



若シAガ例トヘバCノ三千四百二十六倍ヨリハ大ニシテ其三千四百二十七倍ヨリハ小サキトキハ、Aトイフ長サハ $\frac{3426}{1000}$ 即チ 3,426 ガ表ハス所ノ長サト、$\frac{3427}{1000}$ 即チ 3,427 ガ表ハス所ノ長サトノ間ニアル長サナリ、故ニ此二ツノ數ノ中ノ一ツ例トヘバ 3,426 ヲ以テ姑ラク與ヘラレタル長サノ價格ヲ言ヒ著ハス所ノモノトスレバ、箇樣ニシテ犯ス所ノ誤差ハ單位ノ千分ノ一ヨリ小サカルベシ、此時更ニ單位Bヲ一萬ニ等分シタルモノDヲAニ比較センニ、AハDヲ少クモ三萬四千二百六十ダケ含ムコトハ已ニ知レタリ、尚此上ニ例トヘバ八ツダケ含ミテ九ツハ含マズトスレバ、Aトイフ長サハ 3,4268 ガ表ハス所ノ長サト 3,4269 ガ表ハス所ノ長サトノ間ニアル長サナルユヘ、此二ツノ數ノ中ノ一ツヲ以テ姑ラクAノ價格ヲ言ヒ

著ハスモノトスレバ、箇樣ニシテ犯ス所ノ誤差ハ單位ノ萬分ノ一ヨリ小サカルベシ、次第ニ此ノ如クシ、犯ス所ノ誤差ガ實際ニ於テ不都合ヲ生ゼザルホド小サクナルニ至リテ止ルコトヲ得ベシ

一般ニ單位Bト互ニ公度ヲ有セザル量Aアルトキ、如何樣ニモ大ナル隨意ノ完全數nヲトリテ、單位ヲn箇ノ相等シキ部分ニ分テテ得ル所ノ一部分Cヲ與ヘラレタル量Aニ比較センニ、假定ニヨリテ、AハCノ幾倍カニハ等シカラザルベシ、因テAガCノm倍ヨリ大ニシテ其$m+1$倍ヨリハ小サシトスレバ、Aトイフ量ハ$\frac{m}{n}$ガ表ハス所ノ量A′ト$\frac{m+1}{n}$ガ表ハス所ノ量A″トノ間ニアル量ナリ、偖A′トA″トノ差ハ單位ノn分ノ一ニ等シキユヘ、nヲ大キクナセバ大キクナスホド此差ハ小サクナリ、nヲ十分ニ大キクトレバ此差ヲ如何ナル量ヨリモ小サクナスコトヲ得ベシ、從テA′トAトノ差モA″トAトノ差モ如何ヤウニモ小サクナスコトヲ得ベシ、故ニ$\frac{m}{n}$トイフ分數及ビ$\frac{m+1}{n}$トイフ分數ハnヲ限リナク大キクナセバ次第ニ或ル同一ノ極限ニ近ツキ、且ツ此極限ハnヲ大キクナス方法ノ如何ニ拘ラズ常ニ同一ノモノナルコト分明ナリ、此極限ヲ名ヅケテAトイフ量ヲ表ハス所ノ不盡數トイフ

定義 一般ニ不盡數トハ完全數ニモ非ス分數ニモ非スシテ其レニ如何程近キ分數ヲモ見出スコトヲ得ル所ノ數ノコトナリ

凡テ或ル不盡數ガ二ツノ變ジ得ベキ分數$\frac{m}{n}$ト$\frac{m+1}{n}$トノ間ニアル數ニシテ、且ツnヲ限リナク大キクナストキ此二ツノ分數ノ共有スル所ノ極限ガ即チ此不盡數ナルトキハ、$\frac{m}{n}$トイフ分數ハ此不盡數ニ$\frac{1}{n}$ダケヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ$\frac{m+1}{n}$トイフ分數ハ此不盡數ニ$\frac{1}{n}$ダケヨリ近キ過剩ナル近似數ナリ、此場合ニ於テハ、辭ヲ省ク爲ニ、$\frac{m}{n}$トイフ分數ヲ單ニ與ヘラレタル不盡數ノ不足ナル近似數ト稱シ、$\frac{m+1}{n}$ヲ單ニ此不盡數ノ過剩ナル近似數ト稱ス

注意 前ニイヘルコトニヨリテ、凡テ同シ種類ノ二ツノ量ガ互ニ公

度ヲ有セザルトキハ此二ツノ中ノ一ツノ量ハ今一ツノ量ニ對シテハ比ハ不盡數ナリ辭ヲ變ヘテイヘバ凡テ或ル種類ノ量ガ此種類ノ量ノ單位ト互ニ公度ヲ有セザルトキハ此量ヲ表ハス所ノ數ハ不盡數ナリ」

叉逆ニ凡テ不盡數ハ其不足ナル近似數ガ表ハス所ノ量ト其過剩ナル近似數ガ表ハス所ノ量トノ共有スル所ノ極限ニ等シキ量ヲ表ハスモノト看做スコトヲ得偖此量ハ必ス單位ト互ニ公度ヲ有セザル量ナルコト分明ナリ故ニ凡テ不盡數ハ單位ト互ニ公度ヲ有セザル量ヲ表ハスモノト看做スコトヲ得

定義

第三編第一章ニ於テ與ヘタル相等シキ數等ノ定義(上ノ二四○)ハ不盡數ニモ適用スベシ即チaトbトイフ完全數分數若クハ不盡數アルトキaトbガ各同シ種類ノ二ツノ量ABヲ同シ單位ニテ計リタルモノヲ表ハスモノト假定セシニ若シAガBヨリ大ナレバaヲbヨリ大ナル數ト云ヒ或ハbヲaヨリ小サキ數トイフ若シAガBニ

等シケレバaトbトヲ互ニ相等シキ數トイフ

叉吾ガ輩ガ完全數及ビ分數ノ寄セ算及ビ引キ算ニツキテ立テタル定義ハ不盡數ニモ適用スベシ即チ第一若干ノ數ノ和トハ(此等ノ數ガ完全數ニテモ分數ニテモ不盡數ニテモ)與ヘラレタル諸ノ數ガ表ハス所ノ量ノ和ヲ表ハスベキ數ノコトナリ第二二ツノ數ノ差トハ此二ツノ數ノ中ノ一ツヲ得ル爲ニ今一ツノ數ニ加フベキ數ノコトナリ

次ニ或ル完全數或ハ分數ヲ或ル數(完全數分數或ハ不盡數)ニ掛クルトハ後ノ數ガ表ハス所ノ量ニ始ノ數ヲ掛ケタルモノヲ表ハスベキ數ヲ作ルコトナリ

或ル不盡數ヲ或ル他ノ數ニ掛クルトハ如何ナルコトカトイフニ至リテハ新タニ定義ヲ立テザルベカラズ

先ヅ或ル不盡數ヲ或ル量ニ掛ケタルモノトハ此不盡數ノ不足ナル近似數ト其過剩ナル近似數トヲ此量ニ掛ケテ得ル所ノ二ツノ變シ得べ

キ量ハ共有スル所ノ極限ハコトナリ

次ニ或ル不盡數ヲ或ル數ニ掛ケタルモノトハ、乘數ガ完全數或ハ分數ナルトキト同ジク、被乘數ガ表ハス所ノ量ニ乘數ヲ掛ケタルモノヲ表ハスベキ數ノコトナリ、辭ヲ變ヘテイヘバ、或ル不盡數ヲ或ル數ニ掛ケタルモノトハ、乘數ノ不足ナル近似數ト其過剩ナル近似數トヲ被乘數ニ掛ケテ得ル所ノ二ツノ變ジ得ベキ數ノ共有スル所ノ極限ノコトナリ

割リ算ニ於テハ、全ク完全數及ビ分數ノトキノゴトク、凡テ或ル數ノ或ル他ノ數ニ對シテノ比トハ、始ノ數ヲ得ル爲ニ後ノ數ニ掛クベキ數ノコトナリ

原則 若干ノ不盡數ノ不足ナル近似數ノ上ニ寄セ算及ビ掛ケ算ヲ行ヒテ得ル所ノ數ト、此等ノ不盡數ノ過剩ナル近似數ノ上ニ同ジ計算ヲ行ヒテ得ル所ノ數トハ同ジ極限ヲ有ス、且ツ此極限ハ與ヘラレタル

不盡數ノ上ニ同シ計算ヲ行ヒテ得ル所ノ數ニ等シ

第一 例トヘバ a、b、c トイフ三ツノ不盡數アランニ、其不足ナル近似數ヲ $\frac{m}{n}$、$\frac{m'}{n'}$、$\frac{m''}{n''}$、トシ、其過剩ナル近似數ヲ $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'+1}{n'}$, $\frac{m''+1}{n''}$ トスレバ、分明ニ

$$\left(\frac{m+1}{n}+\frac{m'+1}{n'}+\frac{m''+1}{n''}\right)-\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}$$

ナリ、偖 n n' n'' ノ三ツノ數ヲ十分ニ大キクナセバ、コノ等式ノ右邊ニアル數ハ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、例トヘバ之ヲ k トイフ數ヨリ小サクナスニハ、$\frac{1}{n}$、$\frac{1}{n'}$ 及ビ $\frac{1}{n''}$ ヲ各〻 $\frac{k}{3}$ ヨリ小サクナセバヨシ、因テコノ等式ノ左邊ニアル二ツノ和ノ差モ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、然ルニ $a+b+c$ ハ分明ニ此二ツノ和ノ間ニアル數ナルユヘ、第一ノ和ト $a+b+c$ トノ差及ビ第二ノ和ト $a+b+c$ トノ差ハ各〻此二ツノ和ノ差ヨリ小サシ、因テ n n' n'' ヲ十分ニ大キクナセバ此二ツノ差ヲ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、故ニ $\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}$ ノ極限

及ビ $\frac{m+1}{n}+\frac{m'+1}{n'}+\frac{m''+1}{n''}$ ノ極限ハ共ニ $a+b+c$ トイフ和ナリ

第二　先ヅ例トヘバ a、b トイフ二ツノ不盡數アランニ、其不足ナル近似數ヲ $\frac{m}{n}$、$\frac{m'}{n'}$ トシ、其過剩ナル近似數ヲ $\frac{m+1}{n}$、$\frac{m'+1}{n'}$ トスレバ、第二編第七章ノ諸定理(上ノ二八二)ニヨリテ

$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}$ 卽チ $\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\right)\times\left(\frac{m'}{n'}+\frac{1}{n'}\right)=\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}+\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n}+\frac{m}{n}\times\frac{1}{n'}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n'}$

ナリ、從テ

$$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}-\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n}+\frac{m}{n}\times\frac{1}{n'}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n'}$$

ナリ、偖コノ等式ノ右邊ニアル三ツノ數ハ各〻如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、如何ニモ先ヅ第一ノ數 $\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n}$ ハ分明ニ $b\times\frac{1}{n}$ ヨリ小サキユヘ、之ヲ例トヘバ k トイフ數ヨリ小サクナスニハ $\frac{1}{n}$ ヲ $\frac{k}{b}$ ヨリ小サクナセバヨシ、故ニ n ヲ十分ニ大キクナセバ $\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n}$ ヲ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、次ニ第二ノ數 $\frac{m}{n}\times\frac{1}{n'}$ モ前ト同シ樣ナル道理ニヨリテ、n' ヲ十分ニ大キクナセバ如何ナル數ヨリモ小サクナ

スコトヲ得、第三ノ數 $\frac{1}{n}\times\frac{1}{n'}$ ハ $\frac{1}{n}$ ヨリモ小サク又 $\frac{1}{n'}$ ヨリモ小サキユヘ、此中ノ一ツヲ小サクナセバ如何ヤウニモ小サクナル、況シテ $\frac{1}{n}$ ト $\frac{1}{n'}$ トヲ同時ニ小サクナセバ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ベシ

故ニ吾ガ輩ノ等式ノ右邊ニアル三ツノ數ノ和モ前ニイヘルコトヽ同ジ道理ニテ、如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、卽チコノ等式ノ左邊ニアル二ツノ積ノ差ハ如何ナル數ヨリモ小サクナルコトヲ得ル數ナリ、因テ此二ツノ積ノ間ニアル $a\times b$ ト此等ノ積トノ差ハ猶更如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得、故ニ $\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}$ ト $\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}$ トノ極限ハ共ニ $a\times b$ トイフ積ナリ

第三　次ニ例トヘバ a、b、c トイフ三ツノ不盡數アランニ、其不足ナル近似數ヲ $\frac{m}{n}$、$\frac{m'}{n'}$、$\frac{m''}{n''}$ トシ、其過剩ナル近似數ヲ $\frac{m+1}{n}$、$\frac{m'+1}{n'}$、$\frac{m''+1}{n''}$ トスレバ、前ニイヘルコトニヨリテ $\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}$ ト $\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}$ トノ差ハ如

何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ル數ナリ、此差ヲrト名ツクレバ

$$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}=\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}+r$$ ナルユヘ

$$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}\times\frac{m''+1}{n''}=\left(\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}+r\right)\times\left(\frac{m''}{n''}+\frac{1}{n''}\right)$$

$$=\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\times\frac{m''}{n''}+\frac{m''}{n''}\times r+\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n''}+r\times\frac{1}{n''}$$

因テ

$$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}\times\frac{m''+1}{n''}-\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\times\frac{m''}{n''}=\frac{m''}{n''}\times r+\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\times\frac{1}{n''}+r\times\frac{1}{n''}$$ ナリ

ナリ、偖前ト同シ樣ナル手數ヲ用井テ、コノ等式ノ右邊ニアル三ツノ數ノ和ハ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ルコトヲ證明シ得ヘシ、且ツコノ等式ノ左邊ニアル二ツノ積ノ中一ツハ$a\times b\times c$ヨリ小サクシテ今一ツハ$a\times b\times c$ヨリ大ナルコト分明ナリ、故ニ此二ツノ積ノ極限ハ共ニ$a\times b\times c$ナリ

是ヨリ推シテ因數ノ數四ツ以上ナルトキモ、此原則ノ確實ナルコトヲ證明シ得ベシ

又是ヨリ推シテ寄セ算ト掛ケ算トヲ交ヘ行フトキニモ此原則ヲ適用シ得ベキコトヲ證明シ得ベシ

系 或ル數ノ或ル階級ノ羃ハ、若干ノ因數ノ積ノ特別ノ場合タルニ過ギズ、故ニ

凡テ或ル不盡數ハ不足ナル近似數ハ或ル階級ノ羃ト其過剩ナル近似數ハ同シ階級ノ羃トハ同シ極限ヲ有ス、且ツ此極限ハ此不盡數ノ同シ階級ノ羃ニ等シ

不盡數ノ計算ニ關スル諸定理

第三編ニ述ベタル、完全數及ビ分數ノ寄セ算引キ算及ヒ掛ケ算ニ關スル諸定理ハ、只今證明シタル原則ニヨリテミナ不盡數ニモ適用シ得ベキコトヲ證明スルコト容易ナリ、吾ガ輩コヽニ唯一ツノ例ヲ示サン

二ツノ不盡數a、bノ積ハ其因數ノ順序ニヨリテ變ハラズ

如何ニモa及ビbノ不足ナル近似數ヲ$\frac{m}{n}$ $\frac{m'}{n'}$其過剩ナル近似數ヲ

$\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'+1}{n'}$ トスレバ、前ノ原則ニヨリテ $a\times b$ ハ $\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}$ ト $\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}$ トノ共有スル所ノ極限ニ等シク、$b\times a$ ハ $\frac{m'}{n'}\times\frac{m}{n}$ ト $\frac{m'+1}{n'}\times\frac{m+1}{n}$ トノ共有スル所ノ極限ニ等シ、然ルニ $\frac{m}{n}$、$\frac{m'}{n'}$ 等ハ分數ナルユヘ

$$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m'}{n'}\times\frac{m}{n}\qquad \frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}=\frac{m'+1}{n'}\times\frac{m+1}{n}$$

ナリ、因テ $\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}$ ト $\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n'}$ トノ極限ハ $\frac{m'}{n'}\times\frac{m}{n}$ ト $\frac{m'+1}{n'}\times\frac{m+1}{n}$ トノ極限ニ等シ、故ニ

$$a\times b=b\times a$$

ナリ

第二章　冪根ノ總論

定義　凡テ或ル數ハ平方根或ハ第二冪根トハ其平方ガ此數ニ等シキ所ノ數ノコトナリ

例ヘバ7トイフ數ノ平方ガ49ニ等シトスレバ、49ノ平方根トハ即チ7トイフ數ノコトナリ、又 $\frac{2}{3}$ ノ平方ガ $\frac{4}{9}$ ニ等シトスレバ、$\frac{4}{9}$ ノ平方根トハ即チ $\frac{2}{3}$ ノコトナリ

凡テ或ル數ノ立方根或ハ第三冪根トハ其立方ガ此數ニ等シキ所ノ數ノコトナリ

例ヘバ3ノ立方ガ27ニ等シトスレバ、27ノ立方根トハ即チ3ノコトナリ、又 $\frac{3}{10}$ 即チ0,3ノ立方ガ $\frac{27}{1000}$ 即チ0,027ニ等シトスレバ、0,027ノ立方根トハ即チ0,3ノコトナリ

一般ニ或ル數 a ノ第 p 冪ガ或ル他ノ數Aニ等シキトキハ、始ノ數 a ヲ後ノ數Aノ第 p 冪根ト名ツク

例ヘバ2ノ第五冪ガ32ニ等シトスレバ、32ノ第五冪根トハ即チ2ノコトナリ、又 $\frac{3}{2}$ ノ第六冪ガ $\frac{729}{64}$ ニ等シトスレバ、$\frac{729}{64}$ ノ第六冪根トハ $\frac{3}{2}$ ノコトナリ

羃根ノ書キ方

凡テ或ル數ノ第p羃根ヲ書キ著ハスニハ$\sqrt{\ }$ナル符號ヲ此數ノ上ニ冠ラセテ、此符號ノ角ノ開キノ中ニ此羃根ノ階級ヲ示ス所ノ數ヲ書クヲ法トス、例トヘバ8ノ立方根ヲ書キ著ハスニハ$\sqrt[3]{8}$ト書キ32ノ第五羃根ヲ書キ著ハスニハ$\sqrt[5]{32}$ト書クベシ

或ル數ノ平方根ヲ書キ著ハスニハ、$\sqrt{\ }$ナル符號ノ角ノ中ニ書クベキ2ノ字ヲ略シテ書カヽヌガ慣例ナリ、例トヘバ單ニ$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$ナドヽ書キタルハ、4ノ平方根及ビ5ノ平方根ノコトヽ知ルベシ

羃根ノ定義ニヨリテ、$a^p=A$ト書キタル等式モ、$\sqrt[p]{A}=a$ト書キタル等式モ全ク同シ事實ヲ書キ著ハスモノナリ

定義 或ル數ガ丁度或ル完全數若シクハ分數ノ平方ニ等シキトキハ、此數ヲ完備ナル平方數ト稱ス

例トヘバ9ハ丁度3ノ平方ニ等シキユヘ、9ハ完備ナル平方數ナリ、又$\frac{9}{16}$ハ$\frac{3}{4}$ノ平方ニ等シキユヘ、亦完備ナル平方數ナリ

或ル數ガ丁度或ル完全數若シクハ分數ノ立方ニ等シキトキハ、此數ヲ完備ナル立方數ト稱ス

例トヘバ27及ビ$\frac{27}{64}$ハイヅレモ完備ナル立方數ナリ

一般ニ或ル數ガ丁度或ル完全數若シクハ分數ノ第p羃ニ等シキトキハ、此數ヲ完備ナル第p羃數ト稱ス

例トヘバ32ハ2ノ第五羃ニ等シキユヘ、完備ナル第五羃數ナリ、又$\frac{16}{81}$ハ$\frac{2}{3}$ノ第四羃數ニ等シキユヘ、完備ナル第四羃數ナリ

定理第一 凡テ一ヨリ大ナル數ノ或ル階級ノ羃根ハ此數ヨリハ小サクシテ一ヨリハ大ナリ、一ヨリ小サキ數ノ或ル階級ノ羃根ハ此數ヨリハ大ニシテ一ヨリハ小サシ

例トヘバコヽニAトイフ數アランニ

若シ $A>1$ ナレバ $A>\sqrt[p]{A}>1$

若シ $A<1$ ナレバ $A<\sqrt[p]{A}<1$ ナリ

如何ニモコヽニaトイフ數アランニ、此數ガ完全數ニテモ分數ニテモ不盡數ニテモ

若シ　$a \gtreqless 1$　ナレバ　$a^p \gtreqless a \gtreqless 1$

若シ　$a = 1$　ナレバ　$a^p = a = 1$

若シ　$a < 1$　ナレバ　$a^p < a < 1$

ナルコト分明ナリ、故ニ$A>1$ナルトキ、若シ$\sqrt[p]{A}$ガ一ニ等シトスレバ其第p冪即チAガ一ニ等シカラザルベカラズ、其レニテハ假定ニ背クベシ、若シ又$\sqrt[p]{A}$ガ一ヨリ小サシトスレバ、其第p冪即チAガ一ヨリ小サカラザルベカラズ、其レニテモ假定ニ背クベシ、因テ$\sqrt[p]{A}$ハ必ス一ヨリ大ナリ、偖$\sqrt[p]{A}$ガ一ヨリ大ナル上ハ其第p冪Aハ$\sqrt[p]{A}$ヨリ大ナリ、即チ$\sqrt[p]{A}$ハAヨリ小サシ、ツマリ

$$A > \sqrt[p]{A} > 1$$ ナリ

是ト同シ手數ニテ此定理ノ第二ノ部分ヲモ證明シ得ベシ

定理第二　凡テ二ツノ數ハ同ジ階級ノ冪根ノ大サノ順序ハ此等ノ數ノ大サノ順序ニ同ジ

例トヘバAトBトイフ二ツノ數アランニ

若シ　$A > B$　ナレバ　$\sqrt[p]{A} > \sqrt[p]{B}$　ナリ

如何ニモコヽニaトイフ數アランニ、此數ガ完全數ニテモ分數ニテモ不盡數ニテモ

若シ　$a > b$　ナレバ　$a^p > b^p$

若シ　$a = b$　ナレバ　$a^p = b^p$

若シ　$a < b$　ナレバ　$a^p < b^p$

ナルコト分明ナリ、故ニAガBヨリ大ナリトスレバ、$\sqrt[p]{A}$ガ$\sqrt[p]{B}$ニ等シトシテモ、之ヨリ小サシトシテモ假定ニ背ク、因テ$\sqrt[p]{A}$ハ必ス$\sqrt[p]{B}$ヨリ大ナリ

定理第三　或ル完全數A若シクハ或ル分數或ハ不盡數Aノ完全ナル部分ガ或ル完全數mノ第p冪ニ等シク或ハ之ヨリ大ニシテ$(m+1)$ノ

第p羃ヨリ小サキトキハ、此數Aノ第p羃根ノ完全ナル部分ハmナリ

如何ニモm^pヲBト名ツケ、$(m+1)^p$ヲB′ト名ツケンニ

$$\sqrt[p]{B}=m \qquad \sqrt[p]{B'}=m+1$$

ナリ

然ルニ假定ニヨリテ先ヅBハAノ完全ナル部分ニ等シク或ハ之ヨリ小サキユヘ、B　Aヨリ小サシ、次ニAノ完全ナル部分トB′トノ差ハ無論完全數ナルユヘ、Aノ完全ナル部分ガB′ヨリ小サシトスレバ、此完全ナル部分ニ一ヨリ小サキ數ヲ加ヘタルモノAモ矢張B′ヨリ小サシ、即チ

$$B<A<B'$$

ナリ、故ニ定理第二ニヨリテ

$$\sqrt[p]{B}<\sqrt[p]{A}<\sqrt[p]{B'}$$

即チ

$$m<\sqrt[p]{A}<m+1$$

ナリ

因テ$\sqrt[p]{A}$ノ完全ナル部分ハmナリ

例トヘバ$\frac{25}{4}$即チ$6+\frac{1}{4}$ノ完全ナル部分6ハ2ノ平方4ヨリ大ニシテ、3ノ平方9ヨリハ小サキユヘ、$\frac{25}{4}$ノ平方根$\frac{5}{2}$ノ完全ナル部分ハ2ナリ

定理第四　凡テ或ル完全數ガ丁度如何ナル完全數ノ第p羃ニモ等シカラザルトキハ、亦必如何ナル分數ノ第p羃ニモ等シカラズ、從テ此數ハ完備ナル第p羃數ニ非ズ

例トヘバ或ル完全數Aガ如何テル完全數ノ第p羃ニモ等シカラザルトキハ、如何ナル分數$\frac{a}{b}$ノ第p羃モAニ等シキコト能ハズ、如何ニモ$\frac{a}{b}$ガ完全數ニ等シトスレバ、假定ニヨリテ$\left(\frac{a}{b}\right)^p$ハAニ等シキコト能ハズ、次ニ若シ$\frac{a}{b}$ガ完全數ニ非ストスレバ、第三編第十章ノ定理第五（上ノ二九九）ニヨリテ、$\left(\frac{a}{b}\right)^p$ハ如何ナル完全數ニモ等シキコト能ハズ、因テ$\left(\frac{a}{b}\right)^p$ハAニ等シキコト能ハズ

例トヘバ73トイフ數ハ8ノ平方ヨリ大ニシテ、9ノ平方ヨリ小サシ、

因テスベテノ完全數ノ平方ハ或ハ73ヨリ小サク或ハ之ヨリ大ナリ、即チ73ハ如何ナル完全數ノ平方ニモ等シカラズ、故ニ此數ハ完備ナル平方數ニ非ズ

注意　凡テ完全數及ビ分數ノ第p羃ハ必完全數若シクハ分數ニシテ、不盡數ニハ非ザルコト分明ナリ、故ニ凡テ不盡數ハ完備ナル第p羃數ナルコト能ハズ

定理第五　凡テ或ル分數ガ完備ナル第p羃數ナル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ此分數ヲ約シツメテ得ル所ノ分數ノ二ツノ項ガイヅレモ完備ナル第p羃數ナルコトナリ

先ヅ此要件ハ十分ナリ、如何トナレバ或ル分數ヲ約シツメタルモノ$\frac{A}{B}$ノ二ツノ項A Bガツレヾニa^p、b^pニ等シキトキハ、此ノ分數ハ$\frac{a^p}{b^p}$即チ$\left(\frac{a}{b}\right)^p$ニ等シケレバナリ、次ニ此要件ハ必要ナリ、如何トナレバ第三編第十章ノ定理第六(上ノ三〇〇)ニヨリテ、$\frac{A}{B}$ガ或ル已約分數$\frac{a}{b}$ノ第p

羃ニ等シトスレバ、$A=a^p$, $B=b^p$ナラザルベカラザレバナリ

例トヘバ$\frac{63}{175}$ヲ約シツメタルモノ$\frac{9}{25}$ノ分子分母ハイヅレモ完備ナル平方數ナルユヘ、$\frac{63}{175}$ハ完備ナル平方數ナリ、又例トヘバ$\frac{56}{63}$ヲ約シツメタルモノ$\frac{8}{9}$ノ分子8ガ完備ナル平方數ニ非ズ、因テ$\frac{56}{63}$ハ完備ナル平方數ニ非ズ

定理第六　凡テ或ル數Aガ完備ナル第p羃數ナラザルトキハ、此數ニ或ル完全數nノ第p羃n^pヲ掛ケ、箇様ニシテ得ル所ノ數ノ完全ナル部分ノ第p羃根ノ完全ナル部分mヲnニテ割レバ、Aトイフ數ノ第p羃根ニ$\frac{1}{n}$、ダケヨリ近キ不足ナル近似數ヲ得、mニ一ヲ加ヘタルモノヲnニテ割レバ、此羃根ニ$\frac{1}{n}$、ダケヨリ近キ過剩ナル近似數ヲ得。

例トヘバ$\frac{2}{3}$トイフ分數ニ十ノ平方100ヲ掛ケテ得ル所ノ數$\frac{200}{3}$即チ$66+\frac{2}{3}$ノ完全ナル部分66ノ平方根ノ完全ナル部分ガ8ナリトスレバ、$\frac{8}{10}$即チ0,8ガ$\frac{2}{3}$ノ平方根ニ十分ノ一ダケヨリ近キ不足ナ

ル近似數ニシテ、$\frac{8+1}{10}$ 即チ $0,9$ ガ $\frac{2}{3}$ ノ平方根ニ十分ノ一ダケヨリ近キ過剰ナル近似數ナリ

一般ニAニ n^p ヲ掛ケタルモノ即チ $A\times n^p$ ノ完全ナル部分ガ或ル完全數 m ノ第 p 羃 m^p ヨリ小サカラズシテ $(m+1)^p$ ヨリ小サシトスレバ、定理第三ノ證明(一二三)ノトキノ如ク

$$m^p < A\times n^p < (m+1)^p$$ ナリ

従テ

$$\frac{m^p}{n^p} < A < \frac{(m+1)^p}{n^p}$$ ナリ

或ハ

$$\left(\frac{m}{n}\right)^p < A < \left(\frac{m+1}{n}\right)^p$$ ナリ

倘 n トイフ完全數ヲ十分ニ大キクトレバ $\frac{m}{n}$ 及ビ $\frac{m+1}{n}$ トイフ二ツノ分數ノ差 $\frac{1}{n}$ ヲ如何ナル數ヨリモ小サクナスコトヲ得ルユヘ、此二ツノ變シ得ベキ分數ノ極限ハ共ニ或ル同シ不盡數 a ナリ、而シテ $\frac{m}{n}$ ハ此不盡數 a ニ $\frac{1}{n}$ ダケヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ $\frac{m+1}{n}$ ハ a ニ $\frac{1}{n}$ ダケヨリ近キ過剰ナル近似數ナリ、倘又第一章ノ原則ノ系(一一八)ニヨリテ $\left(\frac{m}{n}\right)^p$ 及ビ $\left(\frac{m+1}{n}\right)^p$ ハ同シ極限ヲ有シ、且ツ此極限ハ即チ a^p ナリ、然ルニ前ノ不等式ニヨリテ、$\left(\frac{m}{n}\right)^p$ ト $\left(\frac{m+1}{n}\right)^p$ トノ共有スル所ノ極限ハ亦Aニ等シキコト分明ナリ、因テ

$$A = a^p$$ 或ハ $$a = \sqrt[p]{A}$$ ナリ

即チAノ第 p 羃根ハ $\frac{m}{n}$ 及ビ $\frac{m+1}{n}$ ノ共有スル所ノ極限ニ等シキ不盡數ニシテ、此二ツノ分數ハ即チ此羃根ニ $\frac{1}{n}$ ダケヨリ近キ數ナリ

第三章　開平方

完全數ノ開平方

吾ガ輩ガコヽニ解カントスル問題ハ左ノ如シ

或ル與ヘラレタル完全數アルトキ、若シ此數ガ完備ナル平方數ナラバ、其平方根ヲ求メヨ、若シ然ラザレバ、此數ノ平方根ノ完全ナル部分ヲ求

ヨ、ハ、

凡テ或ル完全數ノ平方根ノ完全ナル部分ヲ名ヅケテ此完全數ノ完全ナル開平商トイヒ、完全ナル開平商ノ平方ヲ與ヘラレタル數ヨリ引キタルモノヲ名ヅケテ此數ノ上ニ行フ所ノ開平方ノ剩餘トイフ

此定義ニヨリテ、若シ與ヘラレタル數ガ完備ナル平方數ナルトキハ、其完全ナル開平商ハ即チ其平方根ニシテ、開平方ノ剩餘ハ零ナリ

一般ニ或ル完全數Aノ完全ナル開平商ヲaト名ヅクレバ、第二章ノ定理第二(三二)ニヨリテ

$$a^2 \leqq A < (a+1)^2$$

ナリ、($a^2 \leqq A$ トハa^2ガAヨリ大ナラズトイフコトニテ「a^2ニ等シク或ハ之ヨリ大ナルハA」ト唱ヘ、若シクハ「a^2ヨリ小サカラザルハA」ト唱フベシ)

開平商ノ中ニ在ルベキ數字ノ數

一、十、百……ノ平方ハ一、百、萬……

ニ等シ、之ヲ表ニ著ハセバ左ノ如シ

數	1,	10,	100,	1000,	……
平方	1,	100,	10000,	1000000,	……

偖第二章ノ定理第二(三二)ニヨリテ、1ヨリ百マデノ數ノ平方根ハ1ヨリ十マデノ間ノ數ナリ、因テ數字一ツ若シクハ二ツニテ書キタル完全數ノ完全ナル開平商ハ數字一ツニテ書キタル數ナリ、是ト同シク、數字三ツ若シクハ四ツニテ書キタル數ノ開平商ハ數字二ツニテ書キタル數ナリ、一般ニ與ヘラレタル完全數、例ヘバ、2785024ノ右ノ端ヨリ始メテ二桁ゴトニ印ヲツケ、2.78.50.24ノゴトク、之ヲ數字二ツヅツノ群ニ分析スレバ、(尤モ左ノ端ノ群ハ一ツノ數字ノミアルコトアルベシ)此等ノ群ノ數ガ即チ與ヘラレタル數ノ完全ナル開平商ノ中ニアルベキ數字ノ數ナリ

開平商ノ中ニ唯一ツノ數字アルトキノ場合

九々ノ表(上ノ五二)ニ

ヨリテ、1ヨリ9マデノ數ノ平方ノ表ヲ作レバ左ノ表ヲ得

數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
平方	1	4	9	16	25	36	49	64	81

倍一ツ或ハ二ツノ數字ニテ書キタル完全數例ヘバ54トイフ數アランニ前ノ表ヲ按スルニ與ヘラレタル數ハ7ノ平方49ト8ノ平方64トノ間ニアル數ナルユヘ與ヘラレタル數ノ完全ナル開平商ハ7ナルコトヲ知ル且ツコノ開平方ノ剰餘ハ定義ニヨリテ $54-49$ 即チ5ナリ

九々ノ聲ノ中ニ於テ1ヨリ9マデノ數ノ平方ニ關スルモノヲ名ツケテ開平九々トイフ

只今イヘルコトニヨリテ凡テ一ツ或ハ二ツノ數字ニテ書キタル完全數ノ完全ナル開平商ハ開平九々ヲ唱ヘテ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ

三ツ以上ノ數字ニテ書キタル完全數ノ開平商ヲ求ムルニハ次ノ二ツノ原則ニヨル

原則第一 凡テ二ツノ數 a b ノ和ノ平方ハ始ノ數 a ノ平方ト二ツノ數ノ積ノ二倍ト後ノ數 b ノ平方トノ和ニ等シ

如何ニモ第一編第六章ノ定理第二(上ノ七三)ニヨリテ

$$(a+b)^2 \text{ 即チ } (a+b)\times(a+b)=a\times a+b\times a+a\times b+b\times b$$

即チ

$$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$$

ナリ

系 相隣レル二ツノ完全數ノ平方ノ差ハ此等ノ數ノ中ノ最モ小サキモノノ二倍ニ一ヲ加ヘタルモノニ等シ

如何ニモ

$$(a+1)^2=a^2+2\times a\times 1+1^2$$

ナルユヘ

$$(a+1)^2-a^2=2\times a+1$$

ナリ、即チ或ル完全數 a ノ平方ト其次ノ完全數 $a+1$ ノ平方トノ差ハ a

ノ二倍ニ一ヲ加ヘタルモノニ等シ

特別ノ場合　二ツ以上ノ數字ニテ書キタル數ノ平方ハ第一此數ノ右ノ端ノ數字ノ代リニ零ヲ取リテ得ル所ノ數aノ平方ト、第二aノ二倍ニ今零ト換ヘタル數bヲ掛ケタルモノト、第三bノ平方トノ和ニ等シ

例トヘバ　$65=60+5$　ナルユヘ

$$65^2=60^2+2\times60\times5+5^2$$　ナリ

又　$658=650+8$　ナルユヘ

$$658^2=650^2+2\times650\times8+8^2$$　ナリ

原則第二　三ツ以上ノ數字ニテ書キタル完全數ノ完全ナル開平商ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ハ、與ヘラレタル數ノ中ニ於テ右ノ端ノ二ツノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ノ完全ナル開平商ニ等シ

例トヘバ433592トイフ數ノ中ニ於テ右ノ端ノ二ツノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數4335ノ完全ナル開平商ガaナリトスレバ、開平商ノ定義ニヨリテ(二九)

$$a^2\leqq4335<(a+1)^2$$　ナリ

從テ

$$a^2\times10^2\leqq4335\times10^2<(a+1)^2\times10^2$$

或ハ

$$(a\times10)^2\leqq433500<[(a+1)\times10]^2$$　ナリ

與ヘラレタル數433592ハ433500ヨリモ大ナル一ヘ、先ヅ第一ニ此數ハ$(a\times10)^2$ヨリハ大ナリ、次ニ$[(a+1)\times10]^2$ハ其右ノ端ニ零ノ二ツツキタル數ナルユヘ、此數ガ433500ヨリ大ナレバ、小サクトモ433500ニ百ヲ加ヘタルモノニ等シク從ツテ必433592ヨリハ大ナリ、因テ

$$(a\times10)^2<433592<[(a+1)\times10]^2$$　ナリ

故ニ433592トイフ數ノ平方根ハ十ノa倍ヨリハ大ニシテ、其$a+1$倍ヨリハ小サキ數ナリ、因テ此數ノ完全ナル開平商ノ中ニ於テ右ノ端

リ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ハaナリ

開平商ノ中ニ二ツ以上ノ數字アル場合

例トヘバ43,35,92トイフ數ノ開平商ヲ求メンニ、先ヅ前ニイヘル手數(三〇)ヲ適用シテ、今求ムル所ノ開平商ノ中ニハ數字三ツアルベキコトヲシル、次ニ此開平商ノ左ノ端ノ二ツノ數字ヲ其儘ニ列ネテ書キタル數ハ、原則第二ニヨリテ、4335ノ完全ナル開平商ニ等シ、故ニ先ヅ此4335ノ開平商ヲ求メンニ、此數ノ完全ナル開平商ノ右ノ端ノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數即チ其左ノ端ノ數字ガ表ハス所ノ數ハ、同ジ原則ニヨリテ、43ノ完全ナル開平商ニ等シ、然ルニ43ノ開平商ハ前ノ場合ニイヘルコト(三一)ヲ適用シテ、6ナルコトヲ知ル、故ニ先ヅ今求ムル所ノ開平商ノ左ノ端ノ數字ハ6ナルコトヲシル

次ニ今求ムル所ノ開平商ノ左ヨリ二番目ノ數字ヲ求ムルニハ、4335ノ完全ナル開平商ノ右ノ端ノ數字ヲ求ムレバヨシ、然ルニ此數ノ中ニ

ハ、原則第一ニヨリテ、先ヅ六十ノ平方ト、六十ノ二倍ニ今求ムル所ノ數ヲ掛ケタルモノト、今求ムル所ノ數ノ平方ト、外ニ尚剩餘ヲ含メリ、因テ4335ノ中ヨリ六十ノ平方3600ヲ引キテ得ル所ノ數735ノ中ニハ、就中六十ノ二倍ニ今求ムル所ノ數ヲ掛ケタルモノヲ含マザルベカラズ、故ニ今求ムル所ノ數ハ60ノ二倍120ニテ735ヲ割リテ得ル所ノ完全商ヨリ大ナルコト能ハズ、然ルニ120ニテ735ヲ割リテ得ル所ノ完全商ハ分明ニ12ニテ73ヲ割リテ得ル所ノ完全商6ニ等シ、故ニ今求ムル所ノ數ハ或ハ6ニ等シキカ、或ハ6ヨリ小サキカ二ツニ一ツナリ、因テ先ヅ6トイフ數ヲ試ミルガ手順ナリ、其爲ニハ12ノ右ニ6ヲカキ添ヘテ126トナシ之ニ6ヲ掛クレバ、得ル所ノ數ハ120即チ六十ノ二倍ニ6ヲ掛ケタルモノト6ノ平方トノ和ニ等シキコト明白ナリ、故ニ箇樣ニシテ得ル所ノ數ガ4335−3600即チ735ヨリ引ケルカ引ケヌカヲ見レバ、66ノ平方ガ4335ヨリ大ナラザルカ否ヲ知リ得

ベシ、然ルニ爰ニテハ126×6ハ756ニ等シクシテ、735ヨリハ大ナリ、故ニ6トイフ數ハ、吾ガ輩ノ求ムル所ノ數ヨリハ大ナリ、次ニ6ヨリ1ヲ引キタル數5ヲ同シ手數ニテ試ミルニ125×5ハ625ニシテ735ヨリ小サキユヘ、5トイフ數ガ即チ吾ガ輩ノ求ムル所ノ數ナリ、而シテ735−625即チ110ガ4335ヨリ65ノ平方ヲ引キタルモノニ等シ」

此計算ヲ行フニハ通常次ノ圖ノ如クスルヲヨシトス

```
43.35.92 | 65
36
  73.5     125
  625        5
  110
```

先ヅ第一ニ右ヨリ二桁ゴトニ點ヲウチテ、開平商ノ數字ノ數ヲ定メ、次ニ左ノ端ノ群ヲ開平九々ニテ呼ビ掛ケテ、開平商ノ左ノ端ノ數字6ヲ求メ、其平方ヲ此群ヨリヒキタルモノヽ右ニ次ノ群ヲ卸シ、右ノ端ノ數字ノ左ニ點ヲ打チテ、735トナシ、6ノ二倍ヲ其右ノ方同シ横線ノ上ニ書キテ、始メハ割リ算ヲ行フトキノ法トシ、後ニハ之ニ5ヲ書キ添ヘテ掛ケ算及ビ引キ算ヲ行フ爲ニス

偖4335ヨリ65ノ平方ヲ引キタルモノガ110ナレハ、433592ノ中ヨリ650ノ平方ヲ引キタルモノハ、分明ニ11092ナリ、故ニ前ト同シ道理ニヨリテ、今求ムル所ノ開平商ノ右ノ端ノ數字ハ、65ノ二倍130ニテ1109ヲ割リテ得ル所ノ完全商8ニ等シキカ或ハ之ヨリ小サキカ二ツニ一ツナリ、偖コヽニテハ130ノ右ニ8ヲカキ添ヘテ1308トナシ、之ニ8ヲ掛ケテ得ル所ノ數10464ハ11092ヨリ小サキユヘ、8ガ即チ今求ムル所ノ數字ナリ、即チ與ヘラレタル數ノ完全ナル開平商ハ658ナリ、而シテ11092−10464即チ628ガ、與ヘラレタル數ノ上ニ行フ所ノ開平方ノ剩餘ナリ」

```
43.35.92 | 658
  73.5   | 125   1308
  1109.2     5      8
     628
```

コヽニイヘルコトヲ攟メテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則　或ル完全數ノ開平商ヲ求ムルニハ、先ヅ此數ノ右ノ端ヨリ始

メテ二桁目ゴトノ數字ノ左脇ニ點ヲウチテ、此數ヲ數字二ツヅヽノ群ニ分析スベシ(尤モ左ノ端ノ群ノ中ニハ唯一ツノ數字ノミアルコトモアルベシ)偖左ヨリ始メテ第一ノ群ノ數ノ完全ナル開平商ヲ求ムレバ、今求ムル所ノ開平商ノ左ノ端ノ數字ヲ得、次ニ此數ノ平方ヲ第一ノ群ヨリ引キテ得ル所ノ數ノ右ニ第二ノ群ヲ卸スベシ、之ヲ第一ノ剩餘トス偖コノ第一ノ剩餘ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲ省キテ得ル數ヲ今開平商ノ中ニ得タル數ノ二倍ニテ割リテ完全商ヲ求ムベシ、若シ此完全商ヲ此割リ算ノ法ノ右ニ書キ添ヘテ、之ニ此完全商ヲ掛ケタルモノヲ、第一ノ剩餘ヨリ引クコトヲ得レバ、此完全商ガ即チ求ムル所ノ開平商ノ第二ノ數字ナリ、若シ然ラザレバ、一ツヅヽ次第ニ小サキ數ヲ同ジ樣ニシテ試ミルベシ偖丁度ヨキ數字ヲ得タルトキ、行フ所ノ引キ算ノ結果ノ右ニ與ヘラレタル數ノ第三ノ群ヲ卸シ第二ノ剩餘ヲ作ルベシ、次ニ開平商ノ中ニ巳ニ得タル二ツノ數字ヲ其儘ニ列ネテ書キタル數ノ

廿五日止

二倍ヲ法トシテ割リ算ヲ行ヒ開平商ノ第三ノ數字ヲ求ムルコト前ノ如クスベシ、次第ニ此ノ如クシ與ヘラレタル數ノ中ニ卸スベキ群ナキニ至リテ止ムベシ此時行ヒシ引キ算ノ結果ガコノ開平方ノ剩餘ナリ」

注意第一 前ノ例ニ於テ六ノ二倍十二ニテ七十三ヲ割リテ得ル所ノ完全商6ハ求ムル所ノ開平商ノ中ノ左ヨリ二番目ノ數字ノ上ノ限リナリ偖十二ニ一ヲ加ヘタルモノ十三ニテ七十三ヲ割リテ得ル所ノ完全商5ハ今求ムル所ノ數字ノ下ノ限リナリ、如何トナレバ13ニ5ヲ掛ケタルモノガ73ヨリ大ナラザレバ、130ニ5ヲ掛ケタルモノハ無論735ヨリモ小サク、從ツテ125ニ5ヲ掛ケタルモノハ猶更735ヨリ小サク、即チ其中ヨリ引クコトヲ得ベシ、故ニ今求ムル所ノ數字ハ或ハ5カ或ハ5ヨリ大ナル數字ナリ

此注意ニヨリテ、開平商ノ次々ノ數字ヲ求ムル爲ニ割リ算ヲ行フニ當リ、初メノ除數ニテ割リテ或ル完全商ヲ得タル後、更ニ此除數ニ一ヲ加

ヘテ再ヒ割リ算ヲ行ヒ、若シ前ト同シ完全商ヲ得レバ此完全商ガ即チ求ムル所ノ數字ナリ、若シ然ラズシテ、始ノ完全商ヨリ一ツダケ小サキ完全商ヲ得ルトキハ、求ムル所ノ數字ハ此二ツノ完全商ノ中ノ一ツナリ、儻又開平商ニ已ニ二ツ以上ノ數字ヲ得タルトキ若シクハ唯一ツノ數字ニテモ5ヨリ大ナル數ヲ得タルトキニハ、コヽニイヘル二ツノ割リ算ノ完全商ハ必互ニ相等シキカ或ハ後ノ者ガ前ノ者ヨリ一ツダケ小サキカ、二ツニ一ツナリ、如何トナレバ例ヘバ $\frac{73}{12}$ ト $\frac{73}{13}$ ノ二ツノ數ノ差ヲ求ムルニ

$$\frac{73}{12}-\frac{73}{13}=\frac{73\times13-73\times12}{12\times13}=\frac{73}{12\times13}=\frac{73}{13}\times\frac{1}{12}$$

ナリ、然ルニ先ヅ第一 $\frac{73}{13}$ ハ無論十ヨリ小サキ數ナリ、次ニ 12 トイフ數バ吾ガ輩ノ今論スル所ノ場合ニ於テハ、或ハ五ヨリ大ナル一ツノ數字ニテ成レル數ノ二倍或ハ二ツ以上ノ數字ニテナレル數ノ二倍ナルニヘ、孰レニシテモ十ヨリ大ナリ、故ニ $\frac{73}{13}\times\frac{1}{12}$ ハ一ヨリ小サキ數ナリ、即チ $\frac{73}{12}$ ト $\frac{73}{13}$ トノ差ハ一ヨリ小サシ、故ニ此二ツノ分數ノ完全ナル部分即チ十二ト十三トニテ、七十三ヲワリテ得ル所ノ完全商ハ、或ハ互ニ相等シキカ或ハ其差ガ一ニ等シキカ二ツニ一ツナリ

注意第二

凡テ或ル與ヘラレタル數ヨリ或ル完全數 a ノ平方ヲ引キタルモノガ、a ノ二倍ニ一ヲ加ヘタルモノヨリ小サケレバ、原則第一ノ系(三二)ニヨリテ、コノ與ヘラレタル數ハ $(a+1)$ ノ平方ヨリ小サシ、即チ此數ノ完全ナル開平商ハ a ナリ、故ニ例トヘバ前ノ例ニ於テ求ムル所ノ開平商ノ首ノ數字6ヲ得タル後、6ノ二倍12ヲ法トシテ割リ算ヲ行フ代リニ、直チニ13ニテ割リ算ヲ行ヒ、得ル所ノ商5ヲ135ニ掛ケタルモノヲ第一ノ剩餘ヨリ引キタル後、此引キ算ノ剩餘ガ65ノ二倍ニ一ヲ加ヘタルモノヨリ小サキカ否ヲ撿スレバ、5ガ即チ求ムル所ノ開平商ノ第二ノ數字ナルカ或ハ之ヨリ小サキカヲ知リ得ベシ

完備ナル平方數ナル分數ノ平方根

凡テ或ル分數ノ二ツノ項ガ完

備ナル平方數ナルトキハ、此分數ノ平方根ハ其二ツノ項ノ平方根ヲ項トシタル分數ニ等シキコト分明ナリ、此場合ニ於テハ、前ニイヘル法則ヲ適用シテ此分數ノ平方根ヲ求ムルコトヲ得ベシ

例トヘバ $\frac{4489}{9025}$ トイフ分數ノ分子及ビ分母ノ平方根ヲ求ムルニ、完全ナル開平商ハ 67 ト 95 ニシテ剩餘ハ各零ナリ、故ニ與ヘラレタル分數ノ平方根ハ $\frac{67}{95}$ ナリ

又小數若シクハ帶小數ノ「コンマ」ノ右ニ在ル數字ノ數ガ偶ノ數ナルトキ、若シコノ「コンマ」ヲ除キテ得ル所ノ數ガ完備ナル平方數ナルトキハ、與ヘラレタル小數若シクハ帶小數モ亦完備ナル平方數ナリ、例トヘバ 43,2964 トイフ帶小數ハ、定義ニヨリテ $\frac{432964}{10000}$ トイフ分數ノコトナリ、但此分數ノ分母 10000 ハ 100 ノ平方ニ等シキユヘ、若シ此分子 432964 ガ完備ナル平方數ナルトキハ、此分數即チ與ヘラレタル帶小數ハ完備ナル平方數ナリ、箇樣ノ場合ニ於テハ、コノ「コンマ」ヲ除キテ得ル所ノ數ノ平方根ヲ求メ、之ニ「コンマ」ヲ打チテ「コンマ」ノ右ニ在ル所ノ數字ノ數ガ與ヘラレタル數ノ中ニ於テ「コンマ」ノ右ニアル數字ノ數ノ半ニ等シキヤウニスレバ、與ヘラレタル數ノ平方根ヲ得ベシ

例トヘバ前ノ例ニ於テ 432964 ノ平方根ガ 658 ニ等シトスレバ、與ヘラレタル帶小數ハ $\frac{658}{100}$ ノ平方ニ等シ、即チ此帶小數ノ平方根ハ 6,58 ナリ

爰ニ注意スベキハ、與ヘラレタル帶小數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開平商 6 ガ即チ此帶小數ノ平方根ノ完全ナル部分ナリ、是ハ唯第二章ノ定理第三(二一二)ノ特別ノ場合ニ過ギヌ

平方根ノ近似數

完備ナル平方數ニ非ル完全數、帶小數、小數、若シクハ分數及ビ不盡數ノ平方根ニ十分ノ一、百分ノ一、……ダケヨリ近キ數ヲ計算スルニハ、第二章ノ定理第六(二一六)ヲ適用スレバヨシ

此定理ニヨリテ、凡テ或ル數ノ平方根ニ十分ノ一、百分ノ一、……ダケヨ

リ近キ數ヲ求ムルニハ此數ニ十、百……ノ平方即チ100, 10000……ヲ掛ケテ得ル所ノ數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開平商ヲ求メ箇樣ニシテ得ル所ノ數及ビ此數ニ一ヲ加ヘタルモノヲ十、百……ニテ割レバヨシ

例トヘバ 596,70832 ノ平方根ヲ第三小數原位マデ計算スル(上ノ三二四)ニハ此數ノ百萬倍 596708320 ノ完全ナル開平商ヲ求ムベシ箇樣ニシテ 24427 ヲ得ルトスレバ與ヘラレタル帶小數ノ平方根ニ千分ノ一ダケヨリ近キ不足ナル近似數及ビ過剩ナル近似數ハ 24,427 ト 24,428 トナリ是ニヨリテ先ヅ左ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則第一 完全數帶小數或ハ小數ノ平方根ヲ第ル小數原位マデ計算スルニハ先ヅ「コンマ」ヨリ打チ立チテ左ノ方ト右ノ方トニ二桁オキニ印ヲツケ右ノ方ハ「コンマ」ノ下桁數ルノ二倍ノ處ニテ止マルベシ若シ此處マデ數字ナキトキハ零ヲ書キ足シ若シ此處ヨリ右ニ猶數字アレバ之ヲ除キ去ルベシ偖「コンマ」ヲ無キモノト看做シテ完全數ノ完全ナル開平商ヲ求ムルトキノ手數ヲ行ヒ得タル所ノ數及ビ之ニ一ヲ加ヘタルモノハ中ニ於テ與ヘラレタル數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開平商ノ右ノ端ノ數字ニ當ル數字ノ脇ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

例トヘバ 596,70832 ノ平方根ヲ第三小數原位マデ計算スルニハ「コンマ」ノ左ノ方5ト9トノ間ニ印ヲツケ右ノ端ニハ零ヲ書キ足シテ之ヲ數字二ツヅヽノ三ツノ群ニ分析シ而シテ後完全數ノ完全ナル開平商ヲ求ムルトキト同シ手數ヲ行ヘバ 24427 トイフ數ヲ得故ニ求ムル所ノ近似數ハ前ニイヘルコトニヨリテ 24,427 ト 24,428 トナリ然ルニ第二章ノ定理第三(一一二)ニヨリテ此等ノ數ノ完全ナル部分 24 ハ與ヘラレタル數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開平商ニ等シキユヘニ 596708320 ノ完全ナル開平商ヲ求ムルニ當リ與ヘラレタル數ノ中ニ於テ「コンマ」ノ付キタル數字ヲ卸シタルトキ得タル數字ニ直チニ「コ

シマ」ヲ打チテ計算ヲ續クルコトヲ得ベシ

法則第二　通常ノ分數若シクハ不盡數ノ平方根ヲ第n小數原位マデ計算スルニハ此分數ヲ「コンマ」ノ下桁數nノ二倍ダケ計算シテ得ル所ノ不足ナル小數若シクハ帶小數ニ法則第一ヲ適用スレバヨシ

如何ニモ箇樣ニシテ得ル所ノ小數若シクハ帶小數ニ 10^n ノ平方ヲ掛ケタルモノガ即チ與ヘラレタル分數若シクハ不盡數ニ 10^n ノ平方ヲ掛ケタルモノヽ完全ナル部分ナレバナリ

例トヘバ $\frac{3}{7}$ ノ平方根ヲ第二小數原位マデ計算スルニハ此分數ヲ「コンマ」ノ下四桁ダケ計算シテ得ル所ノ不足ナル近似數 0,4285 ニ法則第一ヲ適用スレバ、0,65 及ビ 0,66 ヲ得ルナリ

又例トヘバ $\sqrt{2}$ ノ平方根ヲ「コンマ」ノ下三桁ホド計算スルニハ $\sqrt{2}$ ヲ「コンマ」ノ下六桁ホド計算シ得ル所ノ不足ナル近似數 1,414213 ニ法則第一ヲ適用スレバ、1,189 及ビ 1,190 ヲ得ルナリ

第四章　開立方

吾ガ輩ガコヽニ解カントスル問題ハ左ノゴトシ

完全數ノ開立方

或ル與ヘラレタル完全數アルトキ若シ此數ガ完備ナル立方數ナラバ其立方根ヲ求メヨ若シ然ラザレバ其完全ナル開立商ヲ求メヨ

或ル完全數ノ完全ナル開立商トハ開平方ノトキノ如ク此數ノ立方根ノ完全ナル部分ノコトナリ

又完全ナル開立商ノ立方ヲ與ヘラレタル數ヨリ引キタルモノヲ開立方ノ剩餘ト稱ス

開立商ノ中ニアルベキ數字ノ數

1, 10, 100, ……ノ立方ハ 1, 1000, 1000000……ニ等シキユヘ今若干ノ數字ニテ書キタル完全

數アランニ、此數ノ右ノ端ノ數字ヨリ始メテ三桁ゴトニ印ヲツケテ、此數ノ中ニアル數字ヲ若干ノ群ニ分析スレバ、此等ノ群ノ數ガ、即チ與ヘラレタル數ノ完全ナル開立商ノ中ニアルベキ數字ノ數ニ等シカルベシ

開立商ノ中ニ唯一ツノ數字アルベキ場合

1ヨリ9マデノ完全數ノ立方ヲ求ムレバ次ノ表ヲ得

數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
立方	1	8	27	64	125	216	343	512	729

此表ノ中ノ諸ノ數ヲ諳記スル爲ニハ、開平九々ノトキノゴトク、先ヅ上ノ線ノ數ヲ二度ツヾケテ呼ビ、次ニ其下ニ在ル數ヲ唱フルコト慣例ナリ、例トヘバ二二ガ八、五五百二十五ナドナリ、箇樣ニ唱フル者ヲ名ヅケテ開立九々トイフ

僅一ツ二ツ或ハ三ツノ數字ヲ用ヰテ書キタル完全數ノ完全ナル開立商ヲ求ムルニハ、上ノ表ヲ檢シ、或ハ開立九々ヲ唱フレバ直ニ知ルヽナリ、例トヘバ98トイフ數ハ64ト125トノ間ニ在ルユヘ、此數ノ立方根ハ4ト5トノ間ニアル數ナリ、即チ此數ノ完全ナル開立商ハ4ニシテ剩餘ハ98−64即チ34ナリ、又345ノ完全ナル開立商ハ7ニシテ剩餘ハ345−343即チ2ナリ

與ヘラレタル數ノ中ニ四ツ以上ノ數字アルトキハ、此數ノ開立商ヲ求ムルニハ次ノ二ツノ原則ニヨル

原則第一

二ツノ數a、bノ和ノ立方ハ次ノ四ツノ數ノ和ニ等シ、第一始ノ數aノ立方a^3、第二始ノ數ノ平方a^2ト後ノ數bトノ積ノ三倍、第三始ノ數aト後ノ數ノ平方b^2トノ積ノ三倍、第四後ノ數ノ立方b^3、

如何ニモ前ノ章ノ原則第一(三二)ニヨリテ

$$(a+b)^3 \text{ 即チ } (a+b)^2\times(a+b)=(a^2+2\times a\times b+b^2)\times(a+b)$$

ナリ、然ルニ掛ケ算ノ定理第二(十一ノ七三)ニヨリテ右ノ端ニアル積ヲ作

レバ

$(a+b)^3=a^2\times a+2\times a\times b\times a+b^2\times a+a^2\times b+2\times a\times b\times b+b^2\times b$

ヲ得、即チ

$(a+b)^3=a^3+3\times a^2\times b+3\times a\times b^2+b^3$

ナリ

特別ノ場合 二ツ以上ノ數字ニテ書キタル數ノ立方ハ第一此數ノ右ノ端ノ數字 b ノ代リニ零ヲ取リテ得ル所ノ數 a ノ立方ト第二 a ノ平方ノ三倍ニ今零ト換ヘタル數 b ヲ掛ケタルモノト第三 a ノ三倍ニ b ノ平方ヲ掛ケタルモノト第四 b ノ立方トノ四ツノ數ノ和ニ等シ

例トヘバ　$468=460+8$　ナルユヘ

$468^3=460^3+3\times460^2\times8+3\times460\times8^2+8^3$

ナリ

原則第二 四ツ以上ノ數字ニテ書キタル完全數ノ完全ナル開立商ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ハ與ヘラレタル數ノ中ニ於テ右ノ端ノ三ツノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ノ完全ナル開立商ニ等シ

此原則ハ第三章ノ原則第二(三二)ト全ク同シ手數ヲ用ヰテ證明スルコトヲ得ベシ

例トヘバ　98654965　ノ開立商ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲ省キテ得ル所ノ數ハ　98654　トイフ數ノ完全ナル開立商ニ等シ

開立商ノ中ニ二ツ以上ノ數字アル場合 例トヘバ　98654965　トイフ數ノ完全ナル開立商ヲ求メントスルニ先ヅ此數ヲ數字三ツヾヽノ群ニ分析スレバ求ムル所ノ開立商ノ中ニハ數字三ツホドアルコトヲシル次ニ原則第二ニヨリテ此開立商ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲトリ除キテ得ル所ノ數ハ　98654　ノ完全ナル開立商ニ等シ又此 98654 トイフ數ノ開立商ノ中ニ於テ右ノ端ノ數字ヲ取リ除キテ得ル所ノ數ハ　98　ノ完全ナル開立商ニ等シ因テ開立九々ヲ唱ヘテ　98　ヲ開ケバ

今求ムル所ノ開立商ノ左ノ端ノ數字4ヲ得、偖其次ノ數字ヲ求ムルニハ98654ノ開立商ノ中ノ第二ノ數字ヲ求ムレバヨシ、然ルニ98654ノ中ニハ、原則第一ニヨリテ、第一40ノ立方64000第二40ノ平方1600ノ三倍ト今求ムル所ノ數トノ積、第三40ノ三倍ト今求ムル所ノ數ノ平方トノ積、第四今求ムル所ノ數ノ立方、第五此計算ノ剩餘ヲ含メリ、故ニ98654ヨリ64000ヲ引キタルモノ34654ノ中ニハ40ノ平方1600ノ三倍4800ニ今求ムル所ノ數ヲ掛ケタルモノト、其他ノ數トヲ含メリ、故ニ4800ニテ34654ヲ割リ、或ハ48ニテ346ヲ割リテ得ル所ノ完全商7ハ、今求ムル所ノ數ニ等シキカ、或ハ之ヨリ大ナルカ、二ツニ一ツナリ、因テ先ツ7トイフ數字ガ果シテ今求ムル所ノモノニ適スルカ否ヲ驗スガ手順ナリ

偖47ノ立方ガ98654ヨリ大ナラザルカ否ヲ試ミルニハ、原則第一ニヨリテ第一、40ノ平方ノ三倍4800ト7トノ積、第二40ノ三倍

120ト7ノ平方トノ積、第三7ノ立方トノ三ツノ數ノ和ガ34654ヨリ大ナラザルカ否ヲ試ミレバヨシ、此三ツノ數ノ和ヲ簡便ニ作ルニハ、先ツ4ノ三倍12ノ右ニ7ヲカキ添ヘテ127トナシ、之ニ7ヲ掛ケテ得ル所ノ數889ヲ4800ニ加ヘ、此寄セ算ノ結果5689ニ更ニ7ヲ掛ケテ39823

$$\begin{array}{r} 127 \\ 7 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4800 \\ 889 \\ \hline 5689 \\ 7 \\ \hline 39823 \end{array}$$

トナセバヨシ、如何トナレバ

$$4800=3\times40^2$$

$$889=(3\times40+7)\times7=3\times40\times7+7^2$$

$$5689=3\times40^2+3\times40\times7+7^2$$

$$39823=3\times40^2\times7+3\times40\times7^2+7^3$$

ナル故ニ　　ナリ

從テ

偖箇樣ニシテ得ル所ノ數ハ34654ヨリモ大ナルユヘ、7トイフ數ハ餘リ大キ過キルコトヲ知リ得、因テ7ヨリ一ヲ引キタルモノ即チ6トイ

フ數ヲ前ト同シ手數ニテ試ミルニ、此回ハ得ル所ノ數 33336 ガ 34654 ヨリモ小サキヘ、今求ムル所ノ數ハ即チ 6 ニ等シ、且ツ 33336 ヲ 34654 ヨリ引ケバ、98654 ヨリ 46 ノ立方ヲ引キタルモノ 1318 ヲ得ベシ、故ニ與ヘラレタル數 98654965 ノ開立商ノ中ニアル始ノ二ツノ數字ハ 4 ト 6 トナリ、即チ此開立商ハ 460 ニ或ル數ヲ加ヘタルモノナリ、而シテ與ヘラレタル數ノ中ヨリ 460 ノ立方ヲ引キタルモノハ 1318965 ニ等シ

$$\begin{array}{r} 126 \\ 6 \\ \hline 756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ 756 \\ \hline 5556 \\ 6 \\ \hline 33336 \end{array}$$

偖此開立商ノ中ノ第三ノ數字ヲ求ムルニハ前ニイヘルコトヽ同シ道理ニヨリテ、460 ノ平方ノ三倍ニテ 1318965 ヲ割リ、或ハ 46 ノ平方ノ三倍ニテ 13189 ヲ割レバ、今求ムル所ノ數ハ此割リ算ノ完全商ニ等シキカ、或ハ之ヨリ小サキカ、二ツニ一ツナルベシ、コノ 46 ノ平方

ノ三倍ヲ簡便ニ作ルニハ、前ニ已ニ書キタル 756 ト 5556 ト 6 ノ平方 36 トヲ加ヘ合ハセテ 6348 トナセバヨシ、如何トナレバ

$$756=3\times40\times6+6^2$$
$$5556=3\times40^2+3\times40\times6+6^2$$

ナルユヘ

$$6348=3\times40^2+3\times2\times40\times6+3\times6^2$$
$$=3\times(40^2+2\times40\times6+6^2)=3\times46^2$$

ナレバナリ、偖 6348 ニテ 13189 ヲ割レバ、2 トイフ完全商ヲ得ルユヘ、今求ムル所ノ數ハ 2 カ或ハ 2 ヨリ小サキ數ナリ、因テ前ト同シ手數ヲ用テコノ 2 トイフ數ヲ試ミル爲ニ、460 ノ三倍 1380 ニ 2 ヲ加ヘ、之ニ 2 ヲカケテ後ニ、之ヲ 634800 ニ加ヘ、更ニ 2 ヲカケテ得ル所ノ數 1275128 ガ 1318965 ヨリ引ケルカ否ヲ試ミレバヨシ、爰ニテハ此引キ算ヲ行フコトヲ得ルユヘ、2 ガ即チ今求ムル所ノ數ニシテ、此引キ

算ノ結果 43837 ガ吾ガ輩ノ計算ノ剩餘ナリ

實際ニ於テ此計算ヲ行フニハ次ノ圖ノ如クスルヲヨシトス

98.654.965	462					
346.54	48	127	48	126	6348	1382
13189.65	889	7	756	6	2764	2
43837	5689		5556		637564	
			36			

前ニ述ベタルコトヽ此圖トヲ比較スレハ計算ノ手續ヲ分明ニ知ルコトヲ得ベシ

コヽノ例ノ上ニテイヘルコトヲ擴メテ次ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則 或ル完全數ノ完全ナル開立商ヲ求ムルニハ先ヅ此數ノ右ヨリ始メテ三桁ゴトノ數字ノ左脇ニ點ヲウチテ此數ヲ若干ノ群ニ分析シ、偖左ノ端ノ群ノ數ノ完全ナル開立商ヲ求ムレバ、今求ムル所ノ開立商ノ左ノ端ノ數字aヲ得ベシ、次ニ箇様ニシテ得タル數aノ立方ヲ此群ヨリ引キタルモノヽ右ニ次ノ群ノ數ヲ卸スベシ、之ヲ第一ノ剩餘トス、偖次ニ第一ノ剩餘ヲaノ平方ノ三百倍ニテ割ルベシ、偖此割リ算ノ完全商bヲaノ三倍ノ右ニ書キ添ヘ之ニbヲ掛ケテ得ル所ノ數ヲaノ平方ノ三百倍ニ加ヘ更ニ之ニbヲ掛ケテ得ル所ノ數ヲ第一ノ剩餘ヨリ引クコトヲ得ルカ否ヲ驗メスベシ、若シ引クコトヲ得ザルトキハ、bヨリ一ツダケ小サキ數ヲトリテ同シ手數ヲ行フベシ、次第ニ此ノ如クシ引キ算ヲ行ヒ得ルニ至レバ試ミル所ノ數ガ即チ開立商ノ第二ノ數字ナリ、此時ハ此引キ算ノ結果ノ右ニ次ノ群ノ數ヲ卸シ第二ノ剩餘ヲ作ルベシ、偖已ニ開立商ノ中ニ得タル二ツノ數字ニテ成リタル數ノ平方ノ三百倍ヲ用ヰテ割リ算ヲ行ヒ開立商ノ第三ノ數字ヲ求ムルコト前ノ如クスベシ、次第ニカクノ如クシ與ヘラレタル數ノ中ニ卸スベ

キ群ナキニ至リテ已ムベシ、此時行ヒタル引キ算ノ結果ガ開立方ノ剩餘ナリ

立方根ノ近似數

第二章ノ定理第六(三一六)ニヨリテ、凡テ完備ナル立方數ニ非ル數ノ立方根ニ十分ノ一、百分ノ一、……ダケヨリ近キ數ヲ求ムルニハ、此數ニ十、百……ノ立方即チ1000, 1000000,……ヲ掛ケテ得ル所ノ數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開立商ヲ求メ、之ヲ十、百……ニテ割レバヨシ、故ニ左ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則 凡テ完備ナル立方數ニ非ル完全數、帶小數、若クハ小數ノ立方根ヲ第n小數原位マデ計算スルニハ、「コンマ」ヨリ打チ立チテ左ノ方ハ右ノ方トニ三桁ヅヽ數字ヲ組ミ合ハセテ、此數ヲ若干ノ群ニ分析シ、然ル後完全數ノ開立商ヲ求ルトキト同シ樣ナル手數ヲ行ヒ、且ツ「コンマ」ハ付キタル群ヲ卸シタルトキ得ル所ノ數字ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

例トヘバ 632,4873 トイフ帶小數ノ開立商ヲ百分ノ一マデ計算スルニハ、此數ノ右ニ零ヲ二ツ書キ足シテ後、法則ノゴトク之ヲ分析シ、次ノ圖ノ如ク計算ヲ行フベシ、即チ求ムル所ノ數ハ 8,58 若シクハ 8,59 ナリ

632,487.300	8,58		
1204.87	192 246	192 245	21675 2558
183623.00	1476 6	1225 5	20464 8
858588	20676	20425 25	2187964

注意 通常ノ分數ヲ與ヘラレテ其二ツノ項ガトモニ完備ナル立方數ナルトキハ、此分數ノ立方根ヲ求ムルニハ、此二ツノ項ノ立方根ヲ求ムレバヨシ、若シ然ラザルトキ、此分數ノ立方根ヲ第n小數原位マデ計算セントスルニハ、此分數ヲ先ヅ小數ニ直シテ「コンマ」ノ下桁數nノ三倍ホド計算シオキテ、前ノ法則ヲ適用スレバヨシ

キ群ナキニ至リテ已ムベシ、此時行ヒタル引キ算ノ結果ガ開立方ノ剩餘ナリ

立方根ノ近似數

第二章ノ定理第六(二六)ニヨリテ、凡テ完備ナル立方數ニ非ル數ノ立方根ニ十分ノ一、百分ノ一、……ダケヨリ近キ數ヲ求ムルニハ、此數ニ十、百……ノ立方即チ 1000, 1000000,……ヲ掛ケテ得ル所ノ數ノ完全ナル部分ノ完全ナル開立商ヲ求メ、之ヲ十、百……ニテ割レバヨシ、故ニ左ノ法則ヲ立ツルコトヲ得ベシ

法則 凡テ完備ナル立方數ニ非ル完全數、帶小數、若クハ小數ノ立方根ヲ第n小數原位マデ計算スルニハ「コンマ」ヨリ打チ立チテ、左ノ方ニ右ノ方トニ三桁ヅヽ數字ヲ組ミ合ハセテ、此數ヲ若干ノ群ニ分析シ、然ル後完全數ノ開立商ヲ求ルトキト同シ様ナル手數ヲ行ヒ、且ツ「コンマ」ノ付キタル群ヲ卸シタルトキ得ル所ノ數字ニ「コンマ」ヲ打ツベシ

例ヘバ 632,4873 トイフ帶小數ノ開立商ヲ百分ノ一マデ計算スル

ニハ、此數ノ右ニ零ヲ二ツ書キ足シテ後、法則ノゴトク之ヲ分析シ、次ノ圖ノ如ク計算ヲ行フベシ、即チ求ムル所ノ數ハ 8,58 若シクハ 8,59 ナリ

632,487.300	8,58					
120487	192	246	192	245	21675	2558
18362300	1476	6	1225	5	20464	8
858588	20676		20425		2187964	
			25			

注意 通常ノ分數ヲ與ヘラレテ其二ツノ項ガトモニ完備ナル立方數ナルトキハ、此分數ノ立方根ヲ求ムルニハ、此二ツノ項ノ立方根ヲ求ムレバヨシ、若シ然ラザルトキ、此分數ノ立方根ヲ第n小數原位マデ計算セントスルニハ、此分數ヲ先ヅ小數ニ直シテ「コンマ」ノ下桁數nノ三倍ホド計算シオキテ、前ノ法則ヲ適用スレバヨシ

不盡數ノ立方根ヲ求ムルニモ、之ト同シ樣ナル手數ヲ行ヘバヨシ

羃根ヲ求ムル法ニツキ一般ノ注意

一般ニ或ル數ノ第m羃根ヲ計算スルノ法ハ、開平方及ビ開立方ノ理論ニ倣ヒテ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ、サリナガラ實際ニ於テ立方根及ビ第四以上ノ羃根ヲ求ムルニハ、箇樣ノ方法ニヨル代リニ、所謂對數トイフ者ヲ用ウルヲ便利トス、コヽニ開立方ノ法則ヲ説明シタルハ、重ニ開平方ノ法則ヲ他ノ場合ニ擴ムルコトノ一例ヲ示ス爲ニ過キザルナリ

第五編ノ演習問題

(一) 同シ種類ノ二ツノ量ガ互ニ公度ヲ有スルトキハ、此二ツノ量ノ間ニハ無數ノ公度アリ

(二) 二ツノ量ノ諸〻ノ公度ノ中ニ於テ最モ大ナルモノヲ求ムルニハ、二ツノ完全數ノ最大公約數ヲ求ムルトキノ手數(上ノ一八二)ト同シ樣ナル方法ヲ用ウルコトヲ得

(三) 凡テ或ル不盡數ニ隨意ノ小數原位ダケヨリ近キ不足ナル近似數ハ、循環小數若シクハ循環帶小數ナルコト能ハズ

(四) 凡テ半ノ數ノ平方ハ8トイフ數ノ倍數ニ1ヲ加ヘタルモノニ等シ

(五) 次ニ擧グル諸〻ノ數ノ平方根ヲ計算セヨ

(1) 285156　(2) 649636　(3) 1718721　(4) 25090081

(5) 5833,9044　(6) 93,026025　(7) 0,00167281

(六) 次ニ擧グル諸〻ノ數ノ平方根ヲ、(1)ヨリ(3)マデハ「コンマ」ノ下二桁ホド、(4)ヨリ(7)マデハ五桁ホド、(8)ヨリ(10)マデハ三桁ホド計算セヨ

(1) 1440　(2) 471813　(3) 522898,354

(4) 89,0003875983　(5) 12389,34853601

(6) $\frac{3}{2}$　(7) $\frac{24}{13}$　(8) $\sqrt{5}$　(9) $\sqrt{\frac{3}{8}}$　(10) $2+\sqrt{13}$

(七) 或ル完全數ガ二ツノ相隣レル完全數ノ積ニ等シキ爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ、此數ノ完全ナル開平商ト開平方ノ剩餘トガ互ニ相等シキコトナリ

(八) 二ツノ相隣レル完全數ノ積ガ 4692 ニ等シキコトヲ知リテ、此等ノ數ヲ求ム

(九) 或ル八若干ノ碁石ヲ平方形ニ並ベントスルニ、平方形ノ各邊ニ碁石若干ヲ置クヤウニスレバ十七ノ碁石餘リ、各邊ニ今一ツ多ク置クヤウニセントスレバ十足ラズトイフ、此八ノ持テル碁石ハ幾何ゾ

(一〇) 長サ三千二百六十七間幅二千三百五十二間ノ長方形アリ、之ト面積ヲ等シクスル平方形ノ邊ノ長サヲ求ム

(一一) 相隣レル二ツノ完全數ノ立方ノ差ハ此二ツノ數ノ積ノ三倍ニ一ヲ加ヘタルモノニ等シ

(一二) 或ル八雙陸ノ賽若干ヲ積ミテ立方形ヲ作ラントスルニ、各邊ニ在ル賽ノ數ヲ若干ニスレバ百餘リ、此數ヲ今一ツ多クセントスレバ六十九足ラズトイフ、此八ノ持テル賽ノ數ヲ問フ

(一三) 次ニ擧グル諸〻ノ數ノ立方根ヲ計算セヨ

(1) 2621144　(2) 41063625　(3) 519718464

(4) 79917 8,752　(5) 9274,236301　(6) 333,964485672

(一四) 次ニ擧グル諸〻ノ數ノ立方根ヲ、(1)ヨリ(3)マデ及ビ(13)ト(14)ハ「コンマ」ノ下三桁ホ