臺灣省林業試驗所報告
第三號
BULLETIN
of
TAIWAN FOREST RESEARCH INSTITUTE
No. 3

相關廻歸及曲線配合在林木生長研究上之應用

劉 業 經

The Application of the Correlation Regression and Curve Fitting to the Studies on Increment of Forest Trees.

by
Liu Yeh-ching

中華民國三十六年五月
臺灣省林業試驗所印行
臺灣 臺北
Published by
TAIWAN FOREST RESEARCH INSTITUTE
Taipeh, Taiwan, China
May 1947

目　　次

相關迴歸及曲線配合在林木生長研究上之應用

(附：圖 10，表 27)

劉　業　經

The Application of the Correlation Regression and Curve Fitting to the Studies on Increment of Forest Trees.

by

Liu Yeh-ching

I. 引　　言

關於林木材積表之調製，在森林計算學上已有一定之法則，此乃森林學者所熟知，然其方法頗多複雜煩冗，乏數學意味。本篇關於馬尾松材積表調製法部分，乃應用生物統計上相關及迴歸之方法以計算之。其目的在引進生物統計在森林學上之應用，並指出樹高，胸高直徑及材積三因子複迴歸之正確求法，而非標新立異也。

又林木生長路徑之推定，一般皆採用樹幹解析法繪製曲線圖以示之，此種方法因用之者衆，自未可厚非，惟所繪之凌亂不堪包括環境因子影響在內之曲線，是否即可以表示林木正常之生長路徑，殊有問題。蓋凡生物之生長，若無環境影響，自有其一定程序，孰快孰慢必以其年齡之老少爲依據，換言之，其生長路徑必爲一單純之曲線或直線，但環境因子非常複雜，因時而異，今遽以包括環境因子之曲線作爲林木生長之路徑，且以爲預測之依據，是無異以過去之環境因子作爲將來之環境因子，其謬誤之甚，不言可知。作者深知其缺點，乃致力於曲線配合之研究，以期達成下列二目的以補其缺憾。

(1) 求出以年齡爲依變數之各種生長因子之適當公式類型。

(2) 計算出各該因子之最適合方程式，並根據所得方程式，繪製一單純曲線，以示各林木生長之正常路徑，俾森林經營者得一更精確之依據。

本文經五閱月整理，其所得結果，尚差強人意，爰筆之於此，或可供森林計算學上之一參考

！惟作者才疏，舛誤難免，尚冀海內鴻達，有以教之！

本文承業師林渭訪所長及鄧輔教授詳加指示與改正，並賴潘技佐家發竭力協助，計算始得加速完成，銘感之餘，謹此誌謝！

II. 資料之來源

一、材 積 表

用以調製材積表者，僅爲馬尾松（Pinus massoniana Lamb.）一種，其資料，乃於民國卅四年八月間在福建永安嶺漁潭間山崗上散生之馬尾松異齡林中所採集者。考其土質爲殘積土類，據福建省地質土壤調查所報告第四號所載，屬於茅坪粘土系，乃由紅色砂岩風化而成，土層甚薄在表面常露出未風化之母岩。地表植物幾純爲小芒萁骨（Gleichenia Linearis clarke）所佔據，間有烏飯，山礬及烏珠（Syzygium buxifolium H. et A.）散生其中，在土壤侵蝕稍甚之地，則有禾本科之一種Eriachne pallescens R. Br. 生長之，PH 值4。

取樣方法，用隨機選伐法，計共伐採百株，每株之伐採點，爲 0.3 公尺，伐倒後，隨即檢查其年齡並測量其長度及各區分之直徑。

材積之計算計分爲三部：

（1） 幹足材積 應用圓柱體求式計算之，即以第〇號斷面積乘以伐採點之高得之。

（2） 樹幹材積 乃按 Huber 氏區分求積式求得之。

（3） 梢端材積 乃按圓錐體求積式 $V=\frac{1}{3}g_n l$ 求之。

總上幹足樹幹梢端三部材積之和，即爲全幹材積（單位：立方公尺）

二、生長曲線配合

配合生長曲線所用之資料爲楠木（Phoebe neurantha, Gamble）及木荷（Schima superba Gardn. et Champ. = S. Confertiflora, Merr. 兩種，其資料均取諸福建省研究院農林研究所研究專報第一號所載者，其計算方法，以及立地情形，均詳載該專報，不贅。

III. 馬尾松材積表之計算

吾人在研究生物，社會，經濟等統計問題時，對於尋求兩種事物之相互關係，實較專考一種性狀之單獨變異爲重要。蓋一種結果之成功，常爲二個或數個因子所造成，而此數因子對於結果之關係及因子與因子間之相互關係，自須一一窮究，方爲合理，林木亦爲生物之一，故欲研究其材積生長，自須先究其對於有關因子如高生長，直徑生長等因子之相互關係，方能竟其全功，而材積表之調製原理，亦應依據其有關因子之關係情形而預測之數字，其目的在便利應用者可依據以簡便所得之因子，即可預測其材積。作者本此原則，乃應用生物統計上相關迴歸之方法，求出一馬尾松材積生長之複迴歸方程式，以供林業家之參考與應用。

但論及材積之計算公式，爲 $V=f\cdot\frac{\pi}{4}D^2\cdot H$。$f$ 爲形數，D 爲直徑，H 爲樹高，若樹高爲一定數，則材積實與胸高直徑爲正比，兩者之關係，顯爲拋物線相關，是故若由胸高直徑以推測

材積，亦非用曲線廻歸方程式不可。一般生物統計上所常用之複廻歸方程式，皆爲一次式，是乃表明諸變數間之關係，皆爲直線相關，若其中他一因子固定，則依變數常隨某一自變數成等差級數而增減。設若諸變數間之關係非爲直線相關，則應用此種一次複廻歸方程式以推算依變數，其結果必不準確，是以材積與胸高直徑之關係，既爲抛物線相關，則材積隨胸高直徑爲二級等差級數而增減，自不能應用一次之複廻歸方程式推算，至若材積與胸高斷面積之關係顯爲直線相關(斷面積 $A = \frac{\pi}{4} D^2$)，故可應用於常用之複廻歸方程式中以與樹高爲推算材積之因子，藉供調製材積表之用。同時復以胸高直徑爲一因子計算複廻歸方程式以資比較。

又因所取之樣本，年齡相差甚大，深恐其相關情形，受年齡之影響，故將10－20年與21－40年生者分爲兩部，分別計算其相關及廻歸，並將40年以上之林木放棄，其結果示後：

一、21－40年生馬尾松材積表之演算。

上已述及材積表乃根據樹高，胸高斷面積二因子對於材積之關係，求該二因子之複廻歸方程式而預測者，玆將演算三個性狀複廻歸所需之符號及數值列下：

1. 各因子之平均數：

$n = 65 \quad M_H = 11.048 \pm 2.124 \quad M_D = 22.6715 \pm 3.319$

$M_A = 0.04112 \pm 0.01319 \quad M_V = 0.211475 \pm 0.09017$

2. 各因子之平方和：

$\Sigma(H-\bar{H})^2 = \Sigma H^2 - (\Sigma H)^2/_n = 8223.1819 - 718.15^2/_{65} = 288.7292$

$\Sigma(A-\bar{A})^2 = \Sigma A^2 - (\Sigma A)^2/_n = 0.12111737 - 2.6737^2/_{65} = 0.01113781$

$\Sigma(V-\bar{V})^2 = \Sigma V^2 - (\Sigma V)^2/_n = 3.42738917 - 13.7461^2/_{65} = 0.52038509$

3. 各因子之乘積和：

$\Sigma(H-\bar{H})\ (A-\bar{A}) = \Sigma HA - \Sigma H \cdot \Sigma A/_n = 30.80222 - 718.15 \times 2.6737/_{65} = 1.261948$

$\Sigma(H-\bar{H})\ (V-\bar{V}) = \Sigma HV - \Sigma H \cdot \Sigma V/_n = 161.937683 - 718.15 \times 13.7461/_{65} = 10.114426$

$\Sigma(A-\bar{A})\ (V-\bar{V}) = \Sigma AV - \Sigma A \cdot \Sigma V/_n = 0.63580052 - 2.6737 \times 13.7461/_{65} = 0.07037056$

4. 簡單相關，淨相關，複相關及標準淨廻歸係數：

$r_{HA} = 0.6985 \qquad r_{HV} = 0.8001 \qquad r_{AV} = 0.9243$

$r_{HA \cdot V} = -0.1793 \qquad r_{HV \cdot A} = 0.5656 \qquad r_{AV \cdot H} = 0.8559$

$R_{V \cdot HA} = 0.8073 \qquad \beta_{VH \cdot A} = 0.3017 \qquad \beta_{VA \cdot H} = 0.7136$

5. 淨相關及複相關係數之顯著性測定：

淨相關及複相關係數之顯著性乃均用費雪(Fisher) t法及z法測定者，玆將其結果示如下：

$r_{HA \cdot V}$ 之實得 $t = 1.435 < 1.960$（5％）不顯著

$r_{HV \cdot A}$ 之實得 $t = 5.375 > 2.576$（1％）極顯著

$r_{AV \cdot H}$ 之實得 $t = 13.033 > 2.576$（1％）極顯著

$R_{V \cdot HA}$ 之實得 $z = 2.0304 > 0.8025$（1％）極顯著

6. 相關係數之討論：

第一表 馬尾松(21—40年生)材積表

D(cm) / A(cm) / V(m³) / H(m)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	(.0177)	(.0201)	(.0227)	(.0254)	(.0284)	(.0314)	(.0346)	(.0380)	(.0415)	(.0452)	(.0491)	(.0531)	(.0573)	(.0616)	(.0661)	(.0707)	(.0775)
7.5	.05175	.06346	.07615	.08932	.10396	.11860	.13421	.15080	.16788	.18593	.20496	.22448	.24497	.26596	.28821	.31036	.33778
8.0	.05816	.06987	.08255	.09573	.11036	.12500	.14062	.15726	.17428	.19234	.21137	.23089	.25138	.27236	.29461	.31676	.34018
8.5	.06456	.07627	.08896	.10213	.11677	.13141	.14762	.16361	.18069	.19874	.21777	.23729	.25778	.27876	.30102	.32317	.34659
9.0	.07096	.08267	.09536	.10854	.12317	.13781	.15343	.17002	.18709	.20515	.22418	.24396	.26419	.28517	.30742	.32957	.35291
9.5	.07737	.08908	.10177	.11494	.12958	.14422	.15983	.17642	.19350	.21155	.23058	.25010	.27059	.29157	.31383	.33598	.35940
10.0	.08377	.09548	.10817	.12134	.13598	.15062	.16623	.18282	.19990	.21796	.23699	.25650	.27700	.29793	.32023	.34238	.36580
10.5	.09078	.10189	.11457	.12775	.14239	.15703	.17264	.18923	.20631	.22436	.24339	.26291	.28340	.30438	.32664	.34878	.37221
11.0	.09658	.10929	.12098	.13415	.14879	.16343	.17904	.19563	.21271	.23077	.24979	.26931	.28981	.31079	.33304	.35519	.37861
11.5	.10299	.11470	.12738	.14056	.15520	.16984	.18545	.20204	.21912	.23717	.25620	.27572	.29621	.31720	.33945	.36159	.38503
12.0	.10939	.12110	.13379	.14696	.16160	.17624	.19185	.20844	.22552	.24357	.26260	.28212	.30261	.32360	.34585	.36800	.39142
12.5	.11580	.12751	.14020	.15337	.16801	.18264	.19826	.21485	.23192	.24998	.26901	.28853	.30902	.33000	.35225	.37440	.39782
13.0	.12220	.13391	.14660	.15977	.17441	.18905	.20466	.22125	.23833	.25638	.27541	.29493	.31542	.33640	.35866	.38081	.40423
13.5	.12860	.14032	.15300	.16618	.18081	.19545	.21107	.22766	.24473	.26279	.28182	.30133	.32183	.34281	.36506	.38721	.41063
14.0	.13501	.14672	.15941	.17258	.18722	.20186	.21747	.23406	.25114	.26919	.28822	.30774	.32823	.34921	.37147	.39362	.41704
14.5	.14141	.15312	.16581	.17898	.19362	.20826	.22388	.24047	.25754	.27560	.29463	.31414	.33464	.35562	.37787	.40002	.42344
15.0	.14782	.15953	.17222	.18539	.20003	.21467	.23028	.24687	.26395	.28200	.30130	.32055	.34104	.36202	.38428	.40642	.42985

觀察上 4. 5. 兩項，消除材積後之樹高與胸高斷面積之淨相關係數爲負，但不顯著，此乃表明消去材積之影響後，樹高與胸高斷面積並無一定關係。消除胸高斷面積後之樹高與材積之淨相關係數爲正，且極顯著，可知該二性狀之相關甚爲密切，樹高增加，材積亦隨之增加。消除樹高後之胸高斷面積與材積之淨相關係數爲正，且極顯著，則知二者之相關甚密切，胸高斷面積增加，材積亦隨之增加。材積與樹高，材積與胸高斷面積之相關，雖均極顯著，但以後者爲甚，可知胸高斷面積之增減對於材積之影響較樹高爲大。又樹高胸高斷面積二變量對於材積之複相關係數極顯著，可知樹高胸高斷面積之相互關係對於材積聯合發生之影響亦甚著。

7. 複迴歸方程式之演算：

將 1. 2. 3. 及4. 各項所得之一部分數值代入下複迴歸公式：

$$V = M_V + \beta_{VH.A}\frac{\sqrt{\Sigma V^2-(\Sigma V)^2/n}}{\sqrt{\Sigma H^2-(\Sigma H)^2/n}}(H-M_H)\ \beta_{VA.H}\frac{\sqrt{\Sigma V^2-(\Sigma V)^2/n}}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)^2/n}}(A-M_A)=$$

$$0.211475+0.3017\times\frac{\sqrt{0.5203859}}{\sqrt{288.7229}}(H-11.0484)+0.7136\times\frac{\sqrt{0.5203859}}{\sqrt{0.01113781}}(A-0.04112)$$

解之得：

$$V=0.012809H+4.879370A-0.130682\cdots\cdots\cdots(I)$$

上式即爲吾人所希望之迴歸方程式，蓋材積（V）爲依變數，樹高（H）及胸高斷面積（A）爲獨立變數，根據此式可得一馬尾松材積表如第一表。

8. 用樹高胸高斷面積及用樹高胸高直徑爲獨立變數以預測材積之結果比較。

關於用樹高，胸高直徑爲獨立變數演成迴歸方程以推算材積之錯誤，前已有所述及，茲再實際計算之，以資參考。

據計算結果，各種相關及迴歸係數均與用胸高斷面積者同。即高與胸徑之相關係數等於高與胸高斷面積之相關係數，胸徑與材積之相關係數等於胸高斷面積與材積之相關係數，此與理論亦符，因 $D=\sqrt{\frac{A}{\frac{\pi}{4}}}$，同用一數乘除後，與他因子之相關，自無不同之理。其複迴歸方程式爲

$$V-0.012809H+0.019386D-0.206962\cdots\cdots\cdots(II)$$

第二表 （I）（II）兩迴歸方程式之計算數與實測數之比較

樹高 (m)	胸徑 (cm)	胸高斷面積 (m²)	材積 (m³) 方程(I)	方程(II)	實測	備考
8.16	2.16	.03664	.15262	.31630	.18255	實測數乃由原記載表內隨便挂出者
10.16	20.90	.03428	.16672	.32835	.15165	
11.22	25.70	.05190	.26627	.43489	.23776	
13.55	26.00	.05310	.30175	.47064	.31756	
9.20	17.30	.02354	.10202	.24626	.10400	
12.20	22.50	.03980	.21979	.38549	.21640	
7.10	14.50	.01650	.04772	.16503	.07760	
14.77	28.30	.06292	.36552	.53035	.44232	

據上表比較之結果，可知用方程式（II）預測出之材積與實測數相差甚大，其不適用處是不難想像；又若樹高不變，依（II）公式推算之材積，隨與直徑成等差級數而增減，其與原計算材

積之公式顯然相背，其不合理明矣。

10—20年生馬尾松材積表之演算。

演算複廻歸方程所需之符號及數值：

1. 各因子之對數及均數：

$n=27$ $M_H=7.24\pm2.07$ $M_D=15.55\pm3.90$

$M_A=0.01550\pm0.00785$ $M_V=0.06227\pm0.03611$

2. 各因子之平方和：

$$\Sigma(H-\bar{H})^2=\Sigma H^2-(\Sigma H)^2/_n=1525.7387-195.41^2/_{27}=111.4769$$

$$\Sigma(A-\bar{A})^2=\Sigma A^2-(\Sigma A)^2/_n=0.00809098-0.4186^2/_{27}=0.00160113$$

$$\Sigma(V-\bar{V})^2=\Sigma V^2-(\Sigma V)^2/_n=0.13860567-1.6813^2/_{27}=0.0339105$$

3. 各因子之乘積和：

$$\Sigma(H-\bar{H})(A-\bar{A})=\Sigma HA-\Sigma H\cdot\Sigma A/_n=3.387886-195.41\times0.4186/_{27}=0.348307$$

$$\Sigma(H-\bar{H})(V-\bar{V})=\Sigma HV-\Sigma H\cdot\Sigma V/_n=13.980891-195.41\times1.6813/_{27}=1.812638$$

$$\Sigma(A-\bar{A})(V-\bar{V})=\Sigma AV-\Sigma A\cdot\Sigma V/_n=0.3318363-0.4186\times1.6813/_{27}=0.00707225$$

4. 簡單相關，淨相關，複相關，及標準淨廻歸係數：

$r_{HA}=0.8481$ $r_{HV}=0.9324$ $r_{AV}=0.9597$

$r_{HA\cdot V}=0.4596$ $r_{HV\cdot A}=0.7932$ $r_{AV\cdot H}=0.8820$

$R_{V\cdot HA}=0.9465$ $\beta_{VH\cdot A}=0.4222$ $\beta_{VA\cdot H}=0.6017$

以上淨相關及複相關係數之顯著情形，均與21—40年生者同，茲將計算所得之複廻歸方式示如下：

$$V=0.00736H+2.76808A-0.003393$$

因10—20年生之馬尾松鮮有斫伐之價值，故其材積表暫不計算，若有需要時，代入上式以求之即可。

三、10—20與21—40年生馬尾松高生長，胸徑生長及材積生長三性狀之淨相關係數及複相關係數之比較。

第三表 樹高胸高斷面積或胸高直徑淨相關係數之比較

齡階	$r_{HV\cdot A}$	Z	$n'-3$	$1/(n'-3)$
10—20	0.4596	0.4966	24	0.04167
21—40	0.1793	0.1813	62	0.01613
		0.3153±0.2404		0.05780

$$z=0.3153/0.2404=1.31156$$

查 z 表 $z=1.31156$ 時，p 約居於 0.19 與 0.20 之間，差異不顯著。

第四表 樹高與材積淨相關係數之比較

齡階	$r_{HV\cdot A}$	Z	$n'-3$	$1/(n'-3)$
10—20	0.7932	1.0800	24	0.04167
21—40	0.5656	0.6410	62	0.01613
		0.4490±0.2404		0.05780

$x=0.4490/0.2404=1.86776$

查 x 表 $x=1.86776$ 時，p 約居於 .06 與 .05 之間，差異不顯著。

第五表　胸徑或胸高斷面積與材積淨相關係數之比較

齡　階	$r_{AV.H}$	Z	n'-3	1/(n'-3)
10 — 20	0.9597	1.9422	24	0.04167
21 — 40	0.8539	1.2778	62	0.01613
		0.6444±0.2404		0.05780

$x=0.6444/0.2404=2.68053$

查 x 表 $x=2.68053$ 時，P 約居於 0.001 與 0.01 之間，差異極顯著。

第六表　複相關係數之比較

齡　階	$R_{V.HA}$	Z	n'-3	1/(n'-3)
10 — 20	0.9465	1.7970	24	0.04167
21 — 40	0.8073	1.1191	62	0.01613
		0.6779± .2404		0.05780

$x=0.6779/0.2404=2.81988$

查 x 表 $x=2.81988$ 時 P，約居於 .001 與 .01 之間，差異極顯著。

根據三至六表之結果：可知馬尾松之齡階不同，對於樹高與胸高直徑或胸高斷面積之相關及樹高與材積之相關並無影響，但能影響胸高直徑或胸高斷面積與材積之相關以及樹高胸高斷面積二變量對於材積之複相關，由此可知馬松尾齡階不同對於用樹高胸高斷面積二因子以推測材積之影響甚大。

IV. 楠木及木荷生長曲線之配合

林木之生長路徑何以要配合曲線之理由，前已述及，不贅。凡一種特殊形態之曲線，自有一種特殊分析方法，故當二變數間不爲直線關係時，欲精密研究其關係，必須盡力找得一適合其關係之算學方程式，此種問題顯然並不簡單，蓋有多數類型之方程式，以供選擇，且每種場合，對於測驗配合適度所用之精確測驗，又必須考慮也。在配合時第一步爲審視各數值在迴歸圖示上之趨勢，由其通常之特性，以定其須應用何種類型方程式，類型選定後，其實際方程式又必須用直接法以定之(范福仁譯：生物統計與試驗設計237頁)，然後再測驗配合之適度卽可。

迴歸方程式可大別爲二種類型：

（1） 多項式 (polynomial)

(a) $Y=a+bx$

(b) $Y=a+bx+cx^2$

(c) $Y=a+bx+cx^2+dx^3$

類　推

（2） 對數式 (Logarithmic)

(a) $Y=a+b\log x$

(b) $\log Y=a+bx$

(c) $\log Y=a+b\log x$

類　推

在多項式中 (a) 爲直線或一級拋物線 (Straight line or first order parabola) 方程式，(b) 爲二級拋物線或二次方 (Second order parabola or quadratic) 方程式，(c) 爲三級拋物線或三次方 (Third order parabola or Cubic) 方程式；(b) 曲線只有一最高點或最低點而無曲折點 (points of inflection)；(c) 曲線則兼有最高點與最低點時常彎曲而較峻峭。

對數式亦爲平面曲線 (plane Curve) 之一種，當 $x = \log y$ 時，因負數無對數，所以 y 要是正值，因而曲線全在 x 軸上方。$\log = -\infty$，故 $y=o$，或 x 軸，是一漸近線，又當對數式爲 $y=\log x$ 時，x 便是正數，$x=o$ 或 y 軸便是漸近線，所以當曲線之二端或一端，有與 x 軸或 y 軸平行之趨向，或起始點具極固定之斜度，當 x 增加時，又迅速改變，最後達到一點其斜度又頗固定，此種曲線即可決定其應屬於對數曲線，至已決定其爲對數曲線後，再用直接法預測適配之對數式類型，於是便可按照對數曲線之配合方法以配合之。

又對數曲線中，尚有一公式：$Y=a+bx+c\log x$ 此公式最適宜配合一種記錄，其開端之數目遞增甚速，稍後則漸慢，在材木生長曲線中，樹高總生長之記錄，幾均屬此種情形，而尤以陽性樹爲然。

茲將楠木及木荷之各種重要之生長曲線配合之結果示下：本文所以特選此樹種之原因，蓋因前者可以代表闊葉樹類中之陰性樹種，後者示可以代表闊葉樹類中之陽性樹故也。

又關於連年生長，平均生長，生長率曲線，本不必配合，即將理論總生長數值，依常法求之，即可得一單純曲線，今爲欲得此等曲線之一適合方程式以便應用計，故仍將材積部份者配合之，此等曲線常甚凌亂，尤以連生長爲然，不易獲得適配之公式，若遇此種情形時，可先從理論總生長之數值，以常法求出之，檢視其究屬何種曲線，然後將原資料配合之即得。

一、楠　木

1. 樹高總生長曲線之配合

觀察樹高總生長之記錄，其開端之數目遞增極速，故其所成之曲線，開始時曲較快，而入後則漸慢，此種曲線，雖類似拋物線，而實非拋物線，若用對數曲線 ($Y=a+bx+c\log x$) 以配合之，實較第二第三級拋物線爲宜，茲將其配法及結果示下：

上式 x 即爲始點至縱坐之距離，a 爲常數，b 及 c 爲決定曲線之方向，爲計算便利起見，可排成以下之項列：

第七表　$Y = a + bx + c\log x$ 曲線係數之計算

實測y	a	x	xy	x^2	對數 x	x 對數 x	對數 x^2	y 對數 x	理論值 y
1.30	a	1	1.30	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.000000	0.86
4.30	a	2	8.60	4	0.3010	0.6020	0.0906	1.294300	4.46
6.30	a	3	18.90	9	0.4771	1.4313	0.2276	3.005730	6.67
7.80	a	4	31.44	16	0.6021	2.4084	0.3625	4.732506	8.30
9.30	a	5	46.50	25	0.6990	3.4950	0.4886	6.500700	9.63

11.44	a	6	68.64	36	0.7782	4.6992	0.6056	8.902608	10.76
12.16	a	7	85.12	49	0.8451	5.9157	0.7142	10.276416	11.74
12.87	a	8	102.96	64	0.9031	7.2249	0.8156	11.622397	12.63
13.54	a	9	121.86	81	0.9542	8.5878	0.9105	12.919868	13.40
14.13	a	10	141.30	100	1.0000	10.0000	1.0000	14.130000	14.12
14.71	a	11	161.81	121	1.0414	11.4554	1.0845	15.318994	14.90
15.30	a	12	105.60	144	1.0792	12.9504	1.1647	16.511760	15.57
15.89	a	13	206.57	169	1.1139	14.4807	1.2403	17.699871	16.20
16.47	a	14	230.58	196	1.1461	16.0454	1.3135	18.876267	16.80
17.06	a	15	255.90	225	1.1761	17.6415	1.3832	20.064266	17.38
17.63	a	16	282.03	256	1.2041	19.2656	1.4499	21.228283	17.94
18.47	a	17	313.99	289	1.2304	20.9168	1.5139	22.725488	18.47
19.37	a	18	348.66	324	1.2553	22.5954	1.5758	24.315161	18.79
19.70	a	19	374.30	361	1.2788	24.2972	1.6353	25.192360	19.50
20.03	a	20	400.60	400	1.3010	26.0200	1.6923	26.059030	19.99
20.50	a	21	430.50	441	1.3222	27.7662	1.7482	27.105100	20.47
21.50	a	22	463.00	484	1.3424	29.5323	1.8020	28.861600	20.94
309.83 ∥ Σ(y)	22 ∥ Σ(a)	253 ∥ Σ(x)	4283.21 ∥ Σ(xy)	3795 ∥ Σ(x^2)	21.0507 ∥ Σ(對數x)	287.3016 ∥ Σ(x對數x)	22.8196 ∥ Σ(對數x^2)	337.343205 ∥ Σ(y對數x)	

附說：對數 x，x 對數 x，及對數 x^2 各項可從 H. Love: Application of Statistical Methods to Agricultural Research 附表內查得。(有沈驪英氏中譯本)。

將上表各數值之總和代入下列三方程式，解之以求 a, b, 及 c 三個未知數。

(Ⅰ) $\Sigma a+\Sigma(x)b+\Sigma(\text{對數}x)c=\Sigma(y)$

(Ⅱ) $\Sigma(x)a+\Sigma(x^2)b+\Sigma(x\text{對數}x)c=\Sigma(xy)$

(Ⅲ) $\Sigma(\text{對數}x)a+\Sigma(x\text{對數}x)b+\Sigma(\text{對數}x^2)c=\Sigma(y\text{對數}x)$

(Ⅰ) $22a+253b+21.0507c=309.83$

(Ⅱ) $253a+3795b+287.3016c=4283.21$

(Ⅲ) $21.0507a+287.3016b+22.8196c=337.343205$

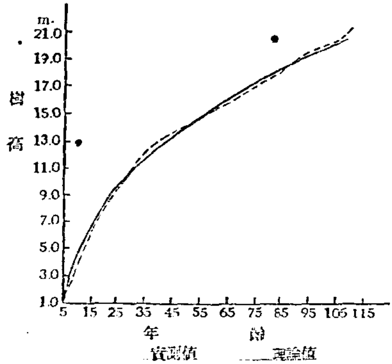
解之得：

$$Y=0.6129+0.2431x+11.156\log x$$

求 y 值時即將 1, 2, 3 ……及其對數代入上式，1 即得即等於第一齡階 5. 2 即等於第二齡階10，其餘數類推。

茲將實測值及理論值繪一曲線圖以資比較

第一圖　楠木樹高總生長之實測及理論值曲線圖



2. 胸高直徑總生長曲線之配合

審視直徑總生長迴歸圖示，顯然用直線公式，就可配合其結果，直線之配合法，本有多種，玆將普通用之一法（王綬：實用生物統計法58頁）求之，此法之最大特點，爲必須將產量由小而大排列之，且 x 之數值亦以 0, 1, 2, 3……代表實測數值，由小而大順序排列，故用此法以配合總生長，尙無不便，若遇大小次序不盡一致之記錄，不若用他法爲便也，本式所用之公式符號及求此公式之方程式符號數值列下：

$Y=mx+b$　$N=21$　$\Sigma(y)=374.12$　$\Sigma(x)=210$　$\Sigma(x)^2=2870$　$\Sigma(xy)=4916.52$

將上列各數值代入下二公式以求直線公式中之 m, b=常數。

（Ⅰ）$\Sigma(y)=m\Sigma(x)+Nb$

（Ⅱ）$\Sigma(xy)=m\Sigma(x^2)+b\Sigma(x)$

卽 $374.12=210m+216$…………（Ⅰ）

$4916.25-2870m+2106$…………（Ⅱ）

解之得：　$m=1.5264$　　$b=2.5512$

故胸高直徑總生長之方程爲：

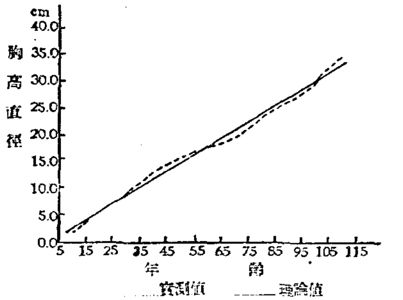
$Y=1.5264x+2.5512$

上式 $x=0, 1, 2, 3$……卽相當於 5, 10, 15, 20……齡階之 Y 值，玆將所得之理論 Y 值及曲線圖示下：

第八表　楠木胸高直徑總生長之實測值與理論值（cm.）

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
10	2.15	2.25	45	14.20	13.24	80	23.13	23.92
15	4.18	4.08	50	15.24	14.76	85	24.90	25.45
20	5.90	5.60	55	16.35	16.29	90	26.33	26.97
25	7.13	7.13	60	17.73	17.82	95	23.05	28.50
30	8.63	8.66	65	18.60	19.34	100	30.23	30.02
35	10.43	10.18	70	19.70	20.87	105	32.33	31.55
40	12.53	11.76	75	21.33	22.39	110	34.83	33.06

第二図 林木胸高直徑總生長之實測值與理論值曲線圖



8. 材積總生長曲線之配合

觀察材積總生長之記錄及迴歸圖示，最初生長甚慢，幾與 x 軸平行，以後則急劇上升，此種曲線一視而知其不適於多項式類型之公式，而適於對數式，據預測結果，知其適於對數式中之 $\log Y=a+b\log x$ 類型，此種方程式之配合法，乃用$\log y$與$\log x$作變數，其計算一如直線配合所用之方法，惟須注意者，其配合適度之測定當以 y 及 Y 之對數為根據，並不根據於實際數值，茲示其計算方法如次：

第九表 $\log Y = a + b \log x$ 曲線係數之計算

x	y	$y_1=\log y$	$x_1=\log x$	x_1^2	$x_1 y_1$	log Y	Y
10	0.0011	−2.9587	1.000	1.000000	−2.9587000	−2.678560	0.0021
15	0.0054	−2.2677	1.176	1.382976	−2.6668152	−2.224200	0.0060
20	0.0136	−1.8665	1.301	1.692601	−2.4283165	−1.931458	0.0117
25	0.0231	−1.1364	1.398	1.954404	−2.2876872	−1.687640	0.0130
30	0.0384	−1.4157	1.477	2.181529	−2.0909889	−1.491106	0.0333
35	0.0644	−1.1912	1.544	2.383936	−1.8392128	−1.323472	0.0475
40	0.0927	−1.0329	1.602	2.566404	−1.6547058	−1.178356	0.0663
45	0.1214	−0.9158	1.654	2.735716	−1.5147332	−1.048252	0.0895
50	0.1417	−0.8587	1.699	2.886601	−1.4589313	−0.935662	0.1158
55	0.1641	−0.7852	1.740	3.027600	−1.3662480	−0.833060	0.1469
60	0.1887	−0.7242	1.778	3.161284	−1.2876276	−0.738040	0.1828
65	0.2150	−0.6676	1.813	3.286969	−1.2103588	−0.650430	0.2236
70	0.2486	−0.6045	1.845	3.404025	−1.1153025	−0.570370	0.2659
75	0.2875	−0.5414	1.875	3.155625	−1.0151250	−0.495310	0.3196
80	0.3325	−0.4783	1.903	3.621409	−0.9102049	−0.425254	0.3756
85	0.3883	−0.4103	1.929	3.721041	−0.7914687	−0.360202	0.4362
90	0.4363	−0.3603	1.954	3.818116	−0.7040262	−0.279669	0.5050
95	0.5002	−0.3009	1.978	3.912484	−0.5951802	−0.237604	0.5786
100	0.5752	−0.2402	2.000	4.000000	−0.4804000	−0.182560	0.6568
105	0.6723	−0.1724	2.021	4.084441	−0.3484204	−0.130018	0.7410
110	0.7959	−0.0975	2.041	4.165681	−0.1989975	−0.079980	0.8310
n=21		−19.5264 ∥ $\Sigma(y_1)$	35.728 ∥ $\Sigma(x_1)$	62.502342 ∥ $\Sigma(x_1^2)$	−23.9234507 ∥ $\Sigma(x_1y_1)$		

將第九表所得數值代入下二方程式

$$na+\Sigma(x_1)b=\Sigma(y_1)$$

$$\Sigma(x_1)a+\Sigma(x_1^2)b=\Sigma(x_1y_1)$$

得： $21a+35.728b=-19.5264$

$$35.728a+62.502842b=-28.9234507$$

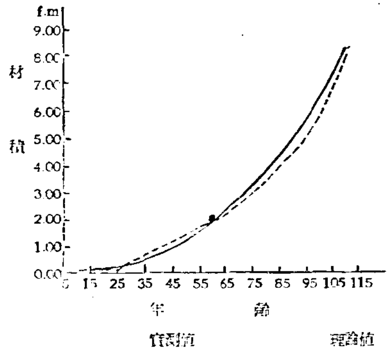
解之 $b=2.502$ $a=-5.18656$

故此曲線公式為

$$\log Y=-5.18656+2.502\log x$$

茲用 x 實際數值及其 $\log Y$ 之反對數 (Antilogarithem) 所繪之理論曲線與實測數值所繪之曲線比較示如第三圖

第三圖 楠木材積總生長之實測值與理論值曲線圖



4. 材積之連年及平均生長曲線之配合

觀察材積連年生長之記錄及圖示，其起始點 (Origin) 具極固定之斜度，但當 x 增加時，則迅速改變，故其應屬於對數曲線，據預測結果，知用 $\log Y=a+b\log x$ 類型之曲線配合為宜，計算方法與3.同其方程式為：

$$\log Y=-4.9147586+1.5407\log x$$

又觀察平均生長之記錄及圖示，知其不適於直線公式，即適於二級拋物線公式，今為比較計，兩公式均行配合之，此處之直線配合法與胸高直徑者不同，法為計算出迴歸數 (b) 後，再定其迴歸方程式 $Y=\bar{y}-b_{yx}\bar{x}+b_{yx}x$ ，其中之 $(\bar{y}-b_{yx}\bar{x})$ 為常數。此法在遇記錄大小順序不甚一致時用之最便，式中 x 即實際數值，茲將計算時所需之各種數值及計算法略示如次：

$n=21$ $\Sigma(x)=1260$ $\Sigma(x^2)=94850$ $\Sigma(y)=0.06814$ $\Sigma(xy)=5.30915$

$[\Sigma(x)]^2/n=75600$

第十表　$Y=a+b_{yx}x$ 直線係數之計算

y	x	x^2	xy
0.00011	10	100	0.00110
0.00036	15	225	0.00540
0.00068	20	400	0.01360
0.00093	25	625	0.02325
0.00128	30	900	0.03840
0.00184	35	1225	0.06440
0.00233	40	1600	0.09320
0.00270	45	2025	0.12150
0.00283	50	2500	0.14150
0.00298	55	3025	0.16390
0.00315	60	3600	0.18800
0.00331	65	4225	0.21515
0.00355	70	4900	0.24850
0.00383	75	5625	0.28725
0.00416	80	6400	0.33280
0.00457	85	7225	0.38845
0.00485	90	8100	0.43650
0.00527	95	9025	0.50065
0.00575	100	10000	0.57500
0.00640	105	11025	0.67200
0.00726	110	12100	0.79860
$\Sigma(y)=0.06814$	$\Sigma(x)=1260$	$\Sigma(x^2)=94850$	$\Sigma(xy)=5.30915$

迴歸係數 $(b_{yx})=\dfrac{\Sigma(y-\bar{y})(x-\bar{x})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}=\dfrac{\Sigma(xy)-\Sigma(x)\Sigma(x)/n}{\Sigma(x)^2-[\Sigma(x)]^2/n}$

$$=\frac{5.30915-1260\times0.06814/_{21}}{94850-1260^2/_{21}}=0.000064$$

$\bar{x}=1260/_{21}=60.0$　$\bar{Y}=0.06814/_{21}=0.003245$

$a=(\bar{Y}-b_{yx}\bar{x})=0.003245-0.000064\times60.0=-0.0006$

$\therefore Y=-0.0006+0.000064x$

至於用二級拋物線配合，所需之符號及數值與普通方程式示下：

$\Sigma(y)=0.06814$　$\Sigma(a)=21$　$\Sigma(x)=210$　$\Sigma(x^2)=2870$　$\Sigma(x^3)=314100$

$\Sigma(x^4)=7222666$　$\Sigma(xy)=0.92575$　$\Sigma(x^2y)=14.27623$

將上列數值代入下三普通方程式：

$\Sigma a+\Sigma(x)b+\Sigma(x^2)C=\Sigma(y)$　$\Sigma(x)a+\Sigma(x^2)b+\Sigma(x^3)c=\Sigma(xy)$

$\Sigma(x^2)a+\Sigma(x^3)b+\Sigma(x^4)c=\Sigma(x^2y)$

解之得 a, b, c 三未知數，再代入二級拋物線方程式$(Y=a+bx+cx^2)$，即為：

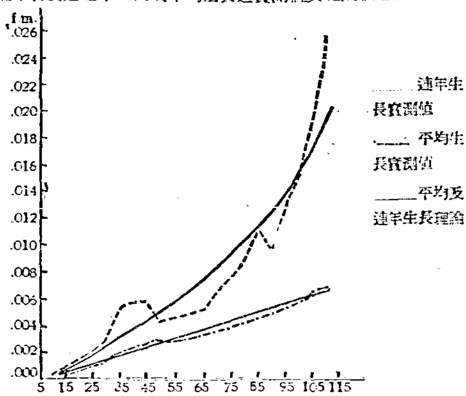
$Y=0.00028836+0.0002489x+0.00000342x^2$

以 0,1,2……代入 x 即得齡階 10.20.25……之 Y 值，茲將各齡階連年及平均生長實測值及理論值列下：

第十一表　楠木連年生長及平均生長之實測值與理論值

齡階	連年生長 fm		平均生長 fm		
	實測	理論	實測	直線理論值	二級拋物線理論值
10	0.00022	0.00042	0.00011	0.00004	0.00029
15	0.00087	0.00071	0.00036	0.00036	0.00054
20	0.00163	0.00123	0.00063	0.00068	0.00080
25	0.00191	0.00174	0.00093	0.00100	0.00107
30	0.00305	0.00230	0.00128	0.00132	0.00134
35	0.00520	0.00291	0.00184	0.00164	0.00162
40	0.00567	0.00358	0.00233	0.00196	0.00190
45	0.00574	0.00430	0.00270	0.00228	0.00221
50	0.00405	0.00504	0.00283	0.00260	0.00250
55	0.00448	0.00583	0.00298	0.00302	0.00281
60	0.00494	0.00668	0.00315	0.00324	0.00312
65	0.00524	0.00756	0.00331	0.00356	0.00344
70	0.00672	0.00347	0.00355	0.00388	0.00377
75	0.00778	0.00942	0.00333	0.00420	0.00410
80	0.00900	0.01040	0.00416	0.00452	0.00445
85	0.01127	0.01140	0.00457	0.00484	0.00478
90	0.00950	0.01240	0.00485	0.00516	0.00515
95	0.01277	0.01360	0.00527	0.00548	0.00551
100	0.01507	0.01467	0.00575	0.00580	0.00588
105	0.01941	0.01590	0.00640	0.00612	0.00625
110	0.02533	0.01689	0.00726	0.00644	0.00664

第四圖　楠木材積之連年生長及平均生長之實測值與理論值之曲線圖



觀上表，材積平均生長曲線，用直線公式與二級拋物線公式所推測之數值均似適合，但用〔克〕平方法 (Chi Square test) 測驗結果，而仍以直線為更適合也，茲將連年及平均生長之實測與理論數值示如第四圖：

5. 材積生長率之曲線配合

觀察材積生長率實測值圖示，知用任何多項式都不能適當配合之，蓋此曲線有一平坦展開且在二端有與二軸平行之趨向，尤其當 x 再行

增加時，曲線長期幾與x軸平行，此為典型之對數曲線，經預測結果，其應屬於

$\log Y = a + b \log x$，計算（同3.項）結果，其方程式為：

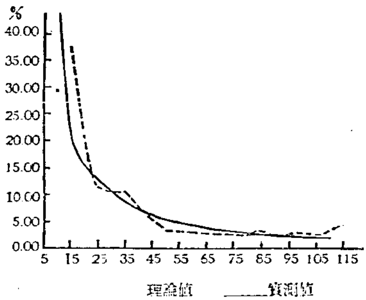
$$\log Y = 2.17841232 - 1.2638 \log x$$

茲將其各齡階之實測值及理論值列表及圖示如下：

第十二表　楠木材積生長率之實測與理論值　（%）

齡階	實測值	理論值	齡階	實測值	理論值	齡階	實測	理論
15	37.42	24.67	50	3.13	5.39	85	3.18	2.75
20	20.11	17.15	55	2.98	4.78	90	2.33	2.56
25	11.21	12.93	60	2.84	4.28	95	2.77	2.39
30	10.25	10.30	65	2.64	3.86	100	2.84	2.24
35	10.89	8.46	70	2.95	3.52	105	2.17	2.11
40	7.56	7.32	75	2.95	3.23	110	3.51	1.99
45	5.54	6.10	80	2.95	2.93			

第五圖　楠木材積生長率之實測值與理論值曲線圖



二、木荷

1.　樹高總生長之曲線配合

驗現木荷樹高總生長之記錄及曲線圖示，其開端之數目遞增極速，故其所成之曲線，開始彎曲較快，而入後則漸慢，此種曲線亦應用對數曲線（$Y = a + bx + c\log x$）配合之為妥，此方程式係數之計算法與第七表同，其符號及數值如次：

$\Sigma(y) = 575.12$　　$\Sigma(a) = 24$　　$\Sigma(x) = 300$　　$\Sigma(xy) = 8489.03$

$\Sigma(x^2) = 4900$　　Σ(對數x)$= 23.7926$　　Σ(x對數x)$= 351.7455$

Σ(對數x^2)$= 26.5788$　Σ(y對數x)$= 638.923032$　將以上各數值代入方程式得：

$24a + 300b + 23.7926c = 575.12$ ……………………（Ⅰ）

$300a + 4900b + 351.7455c = 8489.03$ …………（Ⅱ）

23.7926a+351.7455b+26.5788c=639.923032…………(Ⅲ)

解之得：

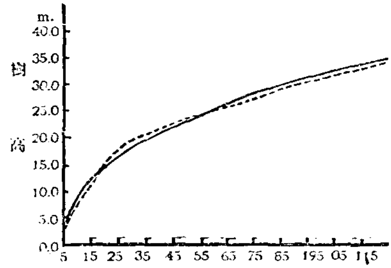
$$Y=2.8949+0.3124x+1.7313\ \log x$$

上項之 x 値係用 1, 2, 3……代替實際年齡 5, 10, 15……故推算 Y 値時，即將 1, 2, 3……代入 x 即可。茲將其實測及理論樹高列表及圖示如次：

第十三表　木荷樹高總生長之實測值與理論值　(m.)

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
5	2.63	3.21	45	22.75	22.23	85	29.30	29.51
10	7.30	8.67	50	23.66	23.33	90	30.13	30.25
15	11.30	12.09	55	24.57	24.36	95	30.97	30.97
20	14.80	14.57	60	25.44	25.33	100	31.65	31.67
25	17.70	16.56	65	26.16	26.24	105	32.24	32.25
30	18.86	18.24	70	26.86	37.11	110	32.83	33.01
35	20.50	19.71	75	27.63	27.94	115	33.50	33.66
40	21.65	21.03	80	28.47	28.74	120	34.42	34.29

第六圖　木荷樹高總生長之實測值與理論值曲線圖



2. 胸高直徑總生長之曲線配合

木荷胸高直徑總生長之記錄亦係開端遲緩迅速，故所成之曲線，開始時當較曲較快入後則漸慢，此種條件與高生長相似，故宜用同類型對數式以配合之，其符號與數值以及所求得之方程式如次：

$\Sigma(y)=133.70$　　$\Sigma(a)=24$　　$\Sigma(x)=300$　　$\Sigma(x^2)=4900$

$\Sigma(xy)=11329.84$　　$\Sigma(\text{對數}x)=23.7926$　　$\Sigma(x\text{對數}x)=351.7455$

$\Sigma(\text{對數}x^2)=26.5788$　　$\Sigma(y\text{對數}x)=835.969329$　代入方程式得：

$$24a+350b+23.7926c=723.70 \cdots\cdots (\text{I})$$

$$350a+4900b+351.7455c=11329.84 \cdots\cdots (\text{II})$$

$$23.7926a+351.7455b+26.5788c=835.969529 \cdots\cdots (\text{III})$$

解之得：

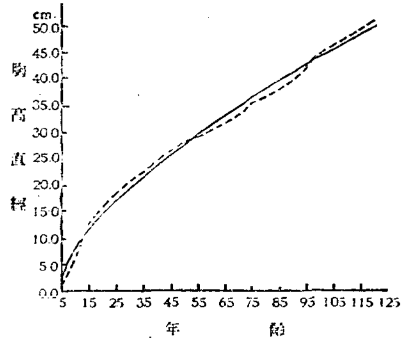
$$Y=0.8754705+1.14x+15.58 \log x$$

計算 x 亦爲用 1, 2, 3……代替實際齡階 5, 10, 15……故計算 Y 值時，卽將 1, 2, 3……代入 x 卽可。玆將胸高直徑之實測値與理論值列表及圖示如次：

第十四表　木荷胸高直徑總生長之實測值與理論值 (cm.)

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
5	1.33	2.02	45	26.63	25.99	85	37.93	39.43
10	6.40	7.85	50	28.20	27.86	90	39.98	40.95
15	12.43	11.73	55	29.48	29.64	95	42.13	42.46
20	15.90	14.82	60	30.83	31.37	100	44.38	43.95
25	18.78	17.47	65	31.93	33.05	105	46.30	45.42
30	21.00	19.84	70	33.38	34.70	110	47.55	46.87
35	22.63	22.02	75	35.10	36.30	115	49.28	48.31
40	24.40	24.07	80	36.38	37.79	120	51.20	49.74

第七圖　木荷胸高直經總生長之實測值與理論值曲線圖 (Cm.)



實測值　______理論值

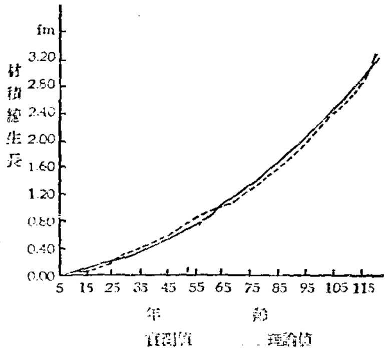
3.　材積總生長曲線之配合

驗視材積總生長記錄及圖示，由首至尾遞增情形，尙稱規則，顯然用二級拋物線便可配合其結果，經適合度測定，亦甚適合，其方程式爲 $Y=0.01634+0.0311x+0.00453x^2$ x 值爲用 0, 1, 2, 3……代替實際齡階 5, 10, 15, 20……玆將其實測值及理論值列表及圖示如次：

第十五表　木荷材積總生長之實測值與理論值　(fm.)

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
5	0.0003	0.0163	45	0.6276	0.5551	85	1.5920	1.6736
10	0.0082	0.0520	50	0.7305	0.6632	90	1.8025	1.8542
15	0.0608	0.0967	55	0.8279	0.7303	95	2.0048	2.0438
20	0.1335	0.1504	60	0.9294	0.9066	100	2.2420	2.2426
25	0.2216	0.2131	65	1.0293	1.0419	105	2.4843	2.4503
30	0.3071	0.2351	70	1.1505	1.1862	110	2.6713	2.6672
35	0.3955	0.3660	75	1.3139	1.3396	115	2.8984	2.8931
40	0.4993	0.4560	80	1.4307	1.5021	120	3.2016	3.1280

第八圖　木荷材積總生長之實測值與理論值曲線圖



4.　材積連年生長及平均生長曲線之配合

a.　連年生長

檢視材積連年生長之記錄及圖示，其開始遞增較速，以後則甚凌亂，此種曲線，欲覓一適配公式，確非易事，惟有從材積理論總生長依常法先求出其連年生長，驗視其究屬何種曲線類型，然後配合之為便，計算結果，顯然為一直線，故用直線式配合之，配時(法如第十表)所用之符號及數值如次：

$n=24 \qquad \Sigma(x)=1500 \qquad \Sigma(y)=0.64033$

$\Sigma(xy)=51.47765 \qquad \Sigma y\Sigma x/_n=40.020625$

$\Sigma(y-\bar{y})(x-\bar{x})=11.457025 \qquad \Sigma(x^2)=122500$

$(\Sigma x)^2/_n=93750 \qquad \Sigma(x-\bar{x})^2=28750$

$b_{yx}=\Sigma(y-\bar{y})\ (x-\bar{x})/\Sigma(x-\bar{x})^2=0.0003985$

$\bar{x}=\Sigma(x)/_n=62.5 \quad , \bar{y}=\Sigma(y)/_n=0.02668$

$a=(\bar{y}-b_{yx}\bar{x})=0.00177$

$\therefore\ Y=0.00177+0.0004x$

上式之 x 值即爲實際齡階，玆將材積連年生長之實測值及理論值列表如次：

第十六表　木荷材積連年生長之實測值及理論值　(fm.)

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
5	0.00006	0.00377	45	0.02555	0.01977	85	0.03225	0.03577
10	0.00157	0.00577	50	0.02059	0.02177	90	0.04211	0.03777
15	0.01054	0.00777	55	0.01947	0.02377	95	0.04016	0.03977
20	0.01453	0.00977	60	0.02029	0.02577	100	0.04744	0.04177
25	0.01762	0.01177	65	0.01999	0.02777	105	0.04845	0.04377
30	0.01711	0.01377	70	0.02424	0.02977	110	0.03741	0.04577
35	0.01768	0.01577	75	0.03263	0.03177	115	0.04512	0.04777
40	0.02086	0.01777	80	0.02336	0.03377	120	0.06065	0.04977

b. 平均生長

驗視材積平均生長之記錄及曲線圖示，其上升甚有秩序，幾無屈折點，此種特性，顯然二級拋物線便可配合其結果，玆將所需符號與數值及計算所得之方程式列下：

$\Sigma(y)=0.3635$　　$\Sigma(x)=253$　　$\Sigma(x^2)=3795$

$\Sigma(x^3)=64009$　　$\Sigma(x^4)=1151403$　　$\Sigma(xy)=4.9383$

$\Sigma(x^2y)=81.1783$

$$Y=0.00392+0.00132x-0.000016x^2$$

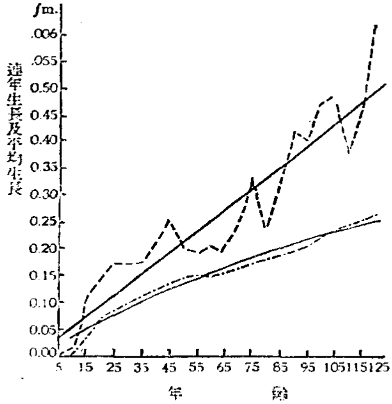
x 值爲用 0, 1, 2……代替實際齡階 10, 15, 20……故計算 Y 值時，以 0, 1, 2……代入 x 即可，玆將其實測值及理論值表列如次：

第十七表　木荷材積平均生長之實測值與理論值　(fm.)

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
10	0.0008	0.0039	50	0.0145	0.0135	90	0.0200	0.0209
15	0.0041	0.0052	55	0.0151	0.0145	95	0.0211	0.0217
20	0.0067	0.0065	60	0.0155	0.0155	100	0.0224	0.0225
25	0.0089	0.0077	65	0.0158	0.0165	105	0.0237	0.0232
30	0.0102	0.0089	70	0.0164	0.0175	110	0.0243	0.0239
35	0.0113	0.0101	75	0.0175	0.0184	115	0.0253	0.0241
40	0.0125	0.0113	80	0.0179	0.0193	120	0.0267	0.0251
45	0.0140	0.0124	85	0.0157	0.0201			

玆再將材積連年生長及平均生長之實測值與理論值圖示如下：

第九圖　木荷材積逐年生長及平均生長之實測值與理論值曲線圖



逐年生長實測值　　＿＿平均生長實測值　　　逐年及平均生長理論值

5. 材積生長率曲線之配合

驗現木荷材積生長率之曲線圖與楠木相似，曲線有平坦展開且至二端有與二零軸平行之趨向，尤其當增加時，曲線幾與x軸平行，故宜用 $\log Y=a+b\log x$ 對數式配合之，法如第九表。茲將所需之符號及數值與計算得之方程式列下：

$n=23 \qquad x_i=39.868 \qquad y_i=13.82$

$\Sigma(x_i^2)=71.072304 \qquad \Sigma(x_iy_i)=21.016417$

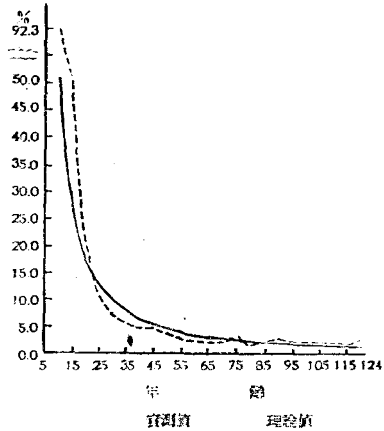
$\log Y=3.1923 - 1.495 \log x$

茲將其實測值及理論值列表及圖示如次：

第十八表　木荷材積生長率之實測值與理論值（%）

齡階	實測	理論	齡階	實測	理論	齡階	實測	理論
10	92.29	49.81	50	3.03	4.49	90	2.52	1.87
15	49.48	27.19	55	2.53	3.90	95	2.15	1.72
20	17.02	17.67	60	2.34	3.42	100	2.26	1.59
25	10.67	12.65	65	2.06	3.07	105	2.07	1.47
30	6.75	9.64	70	2.25	2.72	110	1.46	1.33
35	5.19	7.65	75	2.69	2.45	115	1.65	1.29
40	4.79	6.39	80	1.72	2.25	120	2.01	1.21
45	4.66	5.24	85	2.16	2.00			

第十圖　木荷材積生長率之實測値與理論値比較圖



V. 摘　　要

根據計算結果，馬尾松材積表之調製法及楠木，木荷生長曲線之配合法，可作如下之摘要。

一、用胸高直徑與以用胸高斷面積爲變量求與樹高材積二變量之相關係數，結果相同。

二、樹高與胸高直徑或胸高斷面積之淨相關係數爲負且不顯著（$\gamma_{HD.V}$ or $\gamma_{HA.V}$ = −0.1793）可知消去材積之影響後，樹高與胸徑或胸高斷面積並無一定之關係。材積與樹高及材積與胸高直徑之相關係數均極顯著，尤以後者爲甚（$\gamma_{HAA}=0.5656$；$\gamma_{AVH}=0.8559$），即表明胸高直徑之增減對於材積之影響較樹高爲大；又樹高，胸高直徑或胸高斷面積對於材積之複相關係數極顯著（$\gamma_{VHA}=0.8073$），即表明二者相互關係對於材積聯合發生之影響亦甚大。

三、用樹高胸高直徑二變數以度量材積而求其複迴歸方程式時，絕不能用胸高直徑直接計算，宜用胸高斷面積代替之。

四、林木齡階不同，其樹高，胸高直徑及材積之相互關係情形亦異。故計算上列因子之相關時，最好能加上樹齡因子，惟目前吾國現存之馬尾松林，大多數爲異齡林，故爲適應目前情形計，須設取某一齡階以計算之。

五、馬尾松材積表及迴歸公式，僅適用於不鬱閉狀態之馬尾松林，其10—20年生之求積迴歸公式爲：$V=0.007032H+2.870536A-0.033135$，21－40年生之求積迴歸公式爲：$V=0.012809H+4.879370A-0.130682$。

六、楠木及木荷之樹高總生長曲線之趨勢相同，均爲一種對數曲線，其開端之數目遞增甚速，故其所成之曲線，開始彎曲較快，入後則漸慢，其5－110或120年生之適配公式爲 $Y=a+bx+$

$c\log x$. 計算所得之方程式，楠木：$Y=0.6129+0.2431x+11.156\log x$，木荷：$Y=2.8949+0.3124x+17.313\log x$。上二式$x$值均以 1, 2, 3……代替實際齡階 5, 10, 15……。

七、楠木及木荷胸高直徑總生長曲線各異，前者為直線上升，故應以直線式配之，計算自10－115 年之公式為：$Y=2.5512+1.526x$（x值為用 0, 1, 2……代替 5, 10, 15……等實際齡階)。後者有如樹高總生長，開端之數目遞增甚速，久後則漸慢，故應以對數式$Y=a+bx+c\log x$配之。計算自 5－120 年，結果得：$Y=0.8754705+1.14x+15.58\log x$（$x$值為用 1, 2, 3……代替 5, 10,15……等實際齡階)。

八、楠木及木荷之材積總生長曲線亦各異。前者開始生長甚慢，幾與x軸平行，故為一種對數曲線，計算自 10－110 年之方程式為：$\log Y=-5.18556+2.502\log x$（$x$值為實際齡階)；後者為二級拋物線，計算自 5－120 年結果，其方程式為：$Y=0.01634+0.0311x+0.00453x^2$（$x$值為用 0, 1, 2……代替實際齡階 5, 10, 15……)。

九、楠木及木荷材積連年生長各異。前者（自 10－110 年)之方程式為：$\log Y=-4.9147586+1.5407\log x$（$x$值為實際齡階)；後者（自 5－120年）方程式為：$Y=0.00177+0.0004x$（x值為實際齡階 5, 10, 15……)。

十、楠木及木荷之材積平均生長曲線亦異。前者為直線，計算自 10－110 年所得方程式為：$Y=-0.0006+0.000064x$（x值為實際齡階)。後者為二級拋物線，計算自 10－120 年所得之方程式為：$Y=0.00392+0.00132x-0.000016x^2$（$x$值為用 0, 1, 2……代替實際齡階 10, 15, 20……)。

十一，楠木及木荷材積生長率之曲線相若，開端急劇下降，兩端有與二零軸平行之趨向，且當x再行增加時，曲線平展，幾與x軸平行，故均為同一之對數式類型（$\log Y=a+b\log x$)。前者自 10－110 年方程式為：$\log Y=2.878412-1.2638\log x$。後者自 10－120 年之方程式為：$\log Y=3.1923-1.495\log x$，二式$x$值均為實際齡階。

十二、綜合（六）至（十一）項結果，可知樹性不同，其生長曲線，除高生長及材積生長率有同樣之趨勢外，其餘均各異。又高生長曲線雖相若，但木荷之初年直徑生長大於楠木，故若以馬尾松之材積與樹高與胸徑之相關結論（胸徑之增減對於材積之影響較樹高為大）而言，故木荷之初年之材積生長比楠木快，此與實測結果以及一般理論（陰性樹初期生長慢，陽性樹初期生長快）均相符合。

VI. 參 考 文 獻

1. 鈴木茂次：林業計算學 上冊
2. 本多靜六等：森林家必携
3. 周昌雲、沈梓培：福建永安三元兩縣之土壤
4. 謝漢光、梁偉：馬尾松材積及形數之研究 廣西農業 第四卷 第四期
5. 林淵訪、劉棠孝：福建經濟樹木生長之研究 福建省研究院農林研究所專報 第一號1945
6. 范福仁譯：生物統計與試驗設計

7. 王 綬：實用生物統計法

8. 唐藝菁 實用最小二乘式 商務印書館

9. G. Chapman: Forest management 1931.

10. R. A. Fisher: Statistical Methods for Research Workers. Oliver and Boyd, London, 1936.

11. L. H. C. Tippett: The Methods of Statistics. Williams and Norgate, Ltd., London, 1931.

12. H. H. Love: Application of Statistical Methods to Agricultural Research.

13. Smith, Gale, Neeley: New Analytic Geometry.

VII. 英文摘要 (English Summary)

According to the results of culculating, the methods of construting volume table for *Pinus massoniana* Lamb. and fitting increment curves of *Phoebe neurantha* Gamble. and *Schima superba* Gordn. & Champ. may be summarized as follows:

1. The correlation coefficients of height or volume, obtained by using chest-height diameter as the dependent variable, are equal to those by chest-height circulararea.

2. The partial correlation coefficients between height and chest-height diameter or chest- height circulararea are insignificantly negative ($\gamma_{HD.V}$ or $\gamma_{HA.V}=-0.1793$), when the effect of volume is elimiated. It means that, there is almost no correlation between the height and chest-height diameter or chest-height circulararea. While the partial correlation coefficients between volume and height or chest-height circulararea all are very significant and positive, especially in the latter ($\gamma_{HV.A}=0.5636$, $\gamma_{AV.H}=0.8559$). It may be said that the effect of the value of chest-height diameter on volume is greater than that of height on volume. The coefficients of multiple correlation of volume ($R_{V.HA}=0.8073$), obtained with two variable of height and chest-height diameter or chest-height circulararea, are very significant. It may be also said that the height and chest-height diameter or chest-height circulararea have a greatly combined effect on the value of volume.

3. A certain height and chest-height diameter are giving, we may calculate the volume by means of the regression equation of volume on height and chest-height diameter, but we should avoid to use the chest-height diamter directly. Is more reasonable to use the chest-height circulararea instead of the chest-height diameter.

4. As the relationship between volume and height or chest-height diameter are different in age, we must add a new variable, the age, to determine the correlation among the volume, height and chest-height diameter. In china, the forests of *Pinus massoniana*

are most unevenaged, for the convenience of calculation and the fit of circumstances, we determined the correlation by using age-gradation as a variable instead of age.

5. The volume table and regression equations only fit for unclosing stand-crop of *Pinus massoniana*. The regression equation to volume of 10-20 years old stands is:

$$V=0.00736H+2.76808A-0.03393$$

And that of 21-40 years old stands is:

$$V=0.012809H+4.879370A-0.130632$$

6. The total increment curves in height of *Phoebe neurantha* and *Schima superba* have the same tendency. They are the form of logarithmic curves, in which the first few items may be curving rather rapidly and the remaining value tend to curve less rapidly. The fit equation to these logarithmic curves is: $Y=a+bx+c\log x$ in which x is the age of trees. Y is the total increment in height. The results we obtained may be found as follows:

Phoebe: $Y=0.6129+0.2431x+11.156\log x$

Schima: $Y=2.8949+0.3142x+17.313\log x$

In above equation x is the number of age-gradation as used 1, 2, 3……instead of the age-gradation 5, 10, 15……

7. The total increment curve in chest-height diameter of *Phoebe neurantha* is different from that of *Schima superba*. The former may be considered as a straight line, and its equation is: $Y=2.5512+1.526x$ (x is the number of age-gradation as used 0, 1, 2, 3……instead of the age-gradation of 5, 10, 15, 20……). The later is very similar to height increment, and its equation is: $Y=0.875405+1.14x+15.58\log x$ (x is the number of age-gradation as used 1, 2, 3……instead of the age-gradation of 5, 10, 15……).

8. In the total increment cures of volume, *Phoebe neurantha* and*S chima superba* are quite different from each other. Since the curve of *Phoebe neurantha* began to grow slowly and was almost paralled to X-axis, it may be considered as another type of logarithmic curves. Its equation is: $\log Y=-5.18656+2.502\log x$(x is the value of age-gradation as 5, 10, 15……). The curve of *Schima superba* is a type of second order parabola, and its equation is: $Y=0.01634+0.0311x+0.00453x^2$ (x is the number of age-gradation as used 0, 1,2……instead of the age-gradation of 5, 10, 15……).

9. The current anual increment curve in volume of *Phoebe neurantha* is different from that of *Schima superba*. The equation of *Phoebe neurantha* is: $\log Y=-4.9147586+1.5407\log x$ (x is the value of age-gradation as 5, 10, 15……). The equation of *Schima superba* is: $Y=0.00177+0.0004x$ (x is the value of age-gradation as 5, 10, 15……).

10. As regard to the mean anual increment curves in volume, *Phoebe neurantha* is quite different from *Schima superba*. The former may be considered as a straight line, and its equation is: $Y=-0.0006+0.000064\,x$ (x is the value of age-gradation as 5, 10, 15 ……). The later is a type of second order parabola expressed in the following equation: $Y=0.00392+0.00132\,x-0.000016\,x^2$ (x is the number of age-gradation 0, 1, 2, 3……instead of the age-gradation of 5, 10, 15, 20……).

11. The curves of increment percentage of *Phoebe neurantha* and *Schima superba* show the same tendency. Since Y value lessened rapidly at first, and then held almost a constant, the end of these curves is paralled to X-axis and Y-axis respectively. These curves may be considered as the logarithmic type. Their equations are:

Phoebe: $\log Y=2.878412-1.2638\,\log x$

Schima: $\log Y=3.1923+1.495\,\log x$

(x represents the value of age-gradation as 5, 10, 15……).

12. Summarizing the statements of (6) to (11), we know that all the increment curves, except in height increment and increment percentage in volume being the same type, are quite different in species of various habits. Although the height increment curves of these two species are the same type, the early period, the diameter increment of *Schima superba* rba is more rapid than that of *Phoebe neurantha*; therefore, in regard to volume increment, the former is also rapid than the latter. Both of the common conceptions, the increment during early period of light-demanding trees is more rapid than that of shade bearing trees, and the results obtained are the same to the conclusion given above.