升學預備

平面幾何學問題解法指導

上海中華書局印行

幾何學問題解法指導

(平 面 部)

目　　次

幾何學問題解法指導

(平 面 部)

摘要第一

直線之重要定理

直線,角

1. 平角皆相等.

2. 一直線與他之一直線之接角,互為補角.

此逆定理亦真.

3. 對頂角相等.

4. 過一點至一直線上可作一垂線,然只以一為限.

5. 從一點向一直線引諸直線,此諸直線以中垂線為最短.各斜線與

垂線成等角,則各斜線相等,對大角之斜線比對小角之斜線更長.

此逆定理亦眞.

平行線

1. 一直線與他之二直線相交,任合下列三條件之一,其他之二直線爲平行線.

(i)錯角相等.(ii)同位角相等.(iii)在同側之內角爲補角.

此逆定理亦眞.

2. 同垂直於一直線之二直線,爲平行線.

三角形

1. 任一邊比他二邊之和小而比其差大.

2. 二邊相等則二角亦相等.

此逆定理亦眞.

3. 對大邊之角比對小邊之角大.

此逆定理亦眞.

4. 兩三角形任合次列三條件之一,則爲相似三角形.

(i) 二邊及其夾角各相等.

(ii) 一邊及其兩端之角各相等.

(iii) 三邊相等.

5. 二邊各相等,惟其夾角不等,則對夾角更大之邊亦更大.

此逆定理亦眞.

多角形之角

1. 三角形內角之和,等於二直角.

2. n 邊形內角之和等於 (2n−4) 直角.

3. 凸多角形外角之和,等於四直角.

平行四邊形

1. 平行四邊形:

   (i) 對角相等.

   (ii) 對邊相等.

   (iii) 對角線互爲他之二等分.

2. 四邊形合下列四條件之一者,爲平行四邊形.

   (i) 二雙之對角各相等.

   (ii) 二雙之對邊各相等.

   (iii) 對角線互爲他之二等分.

   (iv) 一雙之對邊平行且相等.

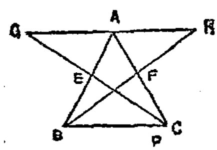
3. 三角形二邊之中點,結成直線與第三邊平行且等於第三邊之二分之一.

   此逆定理亦眞.

直線形

1. 有△ABC從AB,AC之中點E,F作CE且延長之,令EG=CF.又作BF且延長之,令FH=BF.則G,A,H之三點同在一直線上.

【證】



就△EBC,△EAG論,

AE=EB,EG=EC,(假設)

∠E為對頂角而相等,

∴ 兩形全等,∴∠G=∠D,∴GA∥BC.

同樣△FBC≡△FHA,

∴ AH∥BC.

∴ GA,AH各過A點,且平行於BC.

故為一直線.

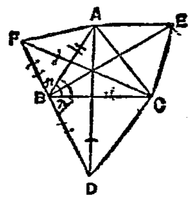
即G,A,H同在一直線上.

2. 有△ABC從各邊上各作正三角

形BCD, CAE, ABF; 則直線AD, BE, CF各相等.

【證】

就 $\triangle ABD$, $\triangle FBC$



$AB=FB$, $BD=BC$;

$\angle ABD=\angle ABC+\angle r$,

$\angle FBC=\angle ABC+\angle n$,

然 $\angle r=\angle n$.(因各爲正三角形之一角)

∴ $\angle ABD=\angle FBC$,

∴ $\triangle ABD=\triangle FBC$.

∴ $AD=FC$.

同樣 $AD=BE$.

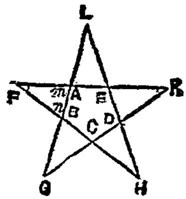
∴ $AD=BE=CF$.

3. 有正五邊形將各邊延長至相交,則其各交點之角之和等$2\angle R$.

【證】

ABCDE 爲正五邊形,將各邊延長得交點G,H.

K,L,F. 然 $\triangle FBA$, $\triangle GBC$, ……等任何亦爲二等邊而爲全等之三角形.然多角形外角之和等於四直角.



$$\therefore \quad 5\angle m=4\angle R,$$

$$\therefore \quad 5(\angle m+\angle n)=8\angle R.$$

$$\therefore \quad \angle m+\angle n=\frac{8}{5}\angle R.$$

$$\therefore \quad \angle F=2\angle R-\frac{8}{5}\angle R=\frac{2}{5}\angle R.$$

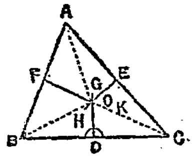
$$\therefore \quad \angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L=5\left(\frac{2}{5}\angle R\right)$$

$$=2\angle R.$$

4. 有三角形從各邊之中點,作此邊之垂線,則此三垂線同過一點,且與三頂點成相等之距離.

[證]

從 BC 之中點 D,



作垂線 GD,

又從 CA 之中點 E,

作垂線 HE.

此二垂線相交於 O 點.

連結 OB,OC,OA.

則 △ODB, △ODC 爲二邊及夾角各相等故全等.

∴ OB=OC,

同樣 OC=OA.

然 AB 之中點 F 與 O 結成直線,

則△OFA, △OFB 三角相等.

∴ ∠OFA=∠OFB,

∴ OF⊥AB.

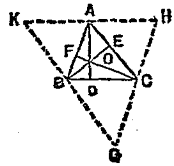
∴ 於 F 點作 AB 之垂線 FK,必過 O 點.

∴ 題云云.

5. 從三角形之各頂點向對邊作三垂線,同在一點相會.

【證】

從 △ABC 之各頂點,向對邊各作垂線 AD,BE,CF.



過 B,C,A 各引 AC,AB,BC 之平行線其交點為 G,H,K,則 KBCA,ABCH,ABGC 任何均為平行四邊形. ∴ KA=BC=AH 即 KA=AH.

同樣 KB=BG,GC=CH.而 AD⊥BC.

∴ AD⊥KH.

同樣 BE⊥KG,CF⊥GH 即 AD。BE,CF.

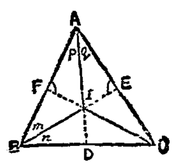
各為△GHK 各邊中點之垂直線.

∴ 由前題知三直線同過一點 O.

6. 三角形各角之二等分線同過一點,且此點至三邊之距離相等.

【證】

令 ∠A 及 ∠B 之二等分線相交於 I,



引 ID⊥BC, IE⊥AC, IF⊥AB.

則 I 在 ∠A 之二等分線上.

又 $\angle P=\angle q$，(假設)

AI 共有，

$\therefore$ $\triangle AEI\equiv\triangle AFI$.

$\therefore$ $IE=IF$.

同樣 $ID=IF$，

$\therefore$ $ID=IE$.

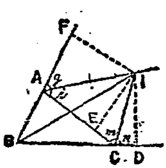
$\therefore$ $\triangle IDC\equiv\triangle IEC$，

$\therefore$ $\angle ICD=\angle ICE$.

$\therefore\angle C$ 之二等分線過 I.

7. 有三角形其一內角之二等分線，及其他二頂點外角之二等分線，必同過一點，且此交點至三邊成相等之距離.

【證】



$\angle B$ 及 $\angle ACD$ 之二等分線相交於 I，連結 IA. 證明 IA 爲 $\angle FAC$ 之二等分線.

作 $ID\perp BC$，$IE\perp AC$，$IF\perp AB$；

$\triangle IBD \equiv \triangle IBF$,(因斜邊與一銳角相等)

$\therefore ID=IF$.

同樣 $\triangle ICD \equiv \triangle ICE$,($\angle m=\angle n$,IC 共有)

$\therefore ID=IE$,

$\therefore IE=IF$.

$\therefore \triangle IAF \equiv \triangle IAE$(因斜邊與他之一邊相等)

$\therefore \angle g=\angle i$.

即 IA 爲 $\angle CAF$ 之二等分線.

8. 有二等邊三角形ABC,從底邊上任意一點P作BC之垂線,交他一邊CA延長上之K點,交AB上之S點,則KP+SP一定不變.

【證】

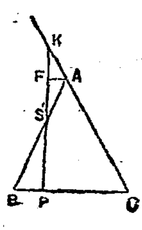
$\because AF=BC$,

$\therefore \angle KAF=\angle C=\angle B=\angle FAS$;

又 $KP \perp BC$,

$\therefore \angle KFA=\angle AFS$,

$\therefore \triangle KFA \equiv \triangle SFA$;



∴ $KF=FS$.

∴ $KP+SP=KF+FP+FP-FS=2FP$.

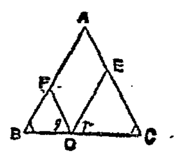
然 FP 爲 $\triangle ABC$ 之高,

∴ $KD+SP$ 爲一定不變.

9. 二等邊三角形ABC從底邊BC上任意取一點D,作DE平行於AB,作DF平行於AC,則平行四邊形AFDE之周圍爲一定.

【證】

於 $\triangle FBD$ 論,



$FD \parallel AC$;(假設)

∴ $\angle r=\angle C=\angle B=\angle q$

∴ $DFB=FD$.

又 AFDE 爲平行四邊形,

∴ $DE=AF$,

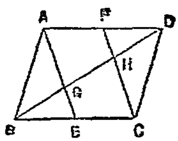
∴ $DE+DF=AF+FB=AB$,

∴ $AE+AF=AB$.

∴ AFDE 之周圍等於 2AB;即爲一定不變.

10. 有平行四邊形 ABCD, 從其相對邊 AD, BC 之中點 E,F 作 AE,CF 二直線,則分 BD 爲三等分.

【證】



∵ AECF 爲四邊形

又 AF$\underline{\parallel}$EC,

∴ AECF 爲平行四邊形,

∴ GE$\parallel$CH.

然 E 爲 $\triangle$BCH 之邊 BC 之中點,

∴ G 爲 BH 之中點.

又 F 爲 $\triangle$DAG 之邊 AD 之中點,

而 FH$\parallel$AG.

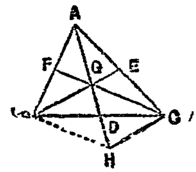
∴ H 爲 GD 之中點.

∴ BG=GH=HD.

11. 三角形之三中線,同交一點,此交點至各頂點之距離,等於其中線之$\frac{2}{3}$.

【證】

令中線 BE, CF 之交點爲 G.



連結 AG, 且延長之.

令 GH=AG,

連結 HB, HC. 就 $\triangle ABH$ 論,

FG 爲二邊 AB, AH 中點連結之直線.

∴ 平行於底邊 BH, 且等於其半分,

即 FG $\perp\!\!\!\!=$ $\frac{1}{2}$BH;

同樣 GE $\perp\!\!\!\!=$ $\frac{1}{2}$HC.

∴ BHCG 爲對邊平行, 即平行四邊形.

∴ GH 過 BC 之中點 D, 即三中線同過一點.

又 GE$=\frac{1}{2}$HC, HC=BG.

∴ GE$=\frac{1}{2}$GB, ∴ BG$=\frac{2}{3}$BE.

同樣 CG$=\frac{2}{3}$CF,

又 GD$=\frac{1}{2}$GH$=\frac{1}{2}$AG,

∴ AG$=\frac{2}{3}$AD.

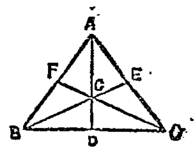
12. 三角形三中線之和, 比三邊之和

小,而比其和$\frac{3}{4}$大.

【證】

試延長AD至二倍,

而其連結至C,得



$2AD<AC+AB$

又 $2BE<AB+BC$

$+\ 2CF<BC+AC$

$2(AD+BE+CF)<2(AB+BC+CA).$

$\therefore\ AD+BE+CF<AB+BC+CA.$

又 $GB+GC>BC,$

即 $\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}FC>BC.$

同樣$\frac{2}{3}FC+\frac{2}{3}AD>AC$

$+\ \frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}BE>AB$

$\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+CA.$

$\therefore\ AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA).$

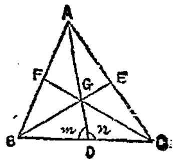
13. 三角形之中線,其至大邊之中線

比至小邊之中線小.

【證】

題言 AC>AB,

則 BE<CF.



令中線 AD,BE,CF

相交於 G,則就 $\triangle$ABD,$\triangle$ACD

論,BD=DC, AD 共有,AC>AB,

∴ $\angle$n>$\angle$m,

然就 $\triangle$GDC, $\triangle$GDB 論,

BD=DC, GD 共有, $\angle$n>$\angle$m,

∴ GC>BG.

即 $\frac{2}{3}$CF>$\frac{2}{3}$BE,

∴ CF>BE,

14. 有四邊形 ABCD 從各邊之中點 E, F, G, H 順次連成直線,則得一平行四邊形,此形之周,等於 AC+BD. 試證之.

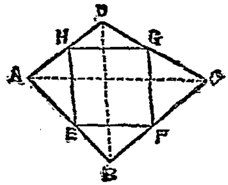
【證】

於 $\triangle ABD$,

$EH \underline{\parallel} \frac{1}{2} BD$;

於 $\triangle CBD$,

$GF \underline{\parallel} \frac{1}{2} BD$;



$\therefore\ EH \underline{\parallel} GF$,

$\therefore$ EFGH 為平行四邊形.

然 $HE+GF=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}BD=BD$,

$HG+EF=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AC=AC$,

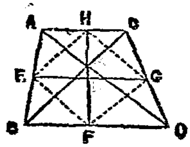
$\therefore\ EF+FG+GH+HE=AC+BD$.

15. 有四邊形連結對邊之中點之二直線,及連結對角線中點之二直線,同交於一點,且此點為三中線之中點.

【證】

令四邊形 ABCD 各邊之中點為 E,G,F,H.

又對角線之中點為 K,L.



就 $\triangle ABD$, $EH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$;

就 $\triangle CBD$, $GF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$;

∴ $EH \mathrel{\underline{\parallel}} GF$,

∴ EGFH 爲平行四邊形.

∴ 其對角線 EF, GH 互爲他之二等分.

又 $\triangle DAB$, $HK \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$;

$\triangle CAB$, $LG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$;

∴ $HK \mathrel{\underline{\parallel}} LG$.

∴ HKGL 爲平行四邊形,

∴ KL. GH 互爲他之二等分.

即 EF, GH, KL 皆在中點相交.

16. 設 D. E 各爲三角形 AEC 之邊 BC, CA 上之點, 而 $BD=\frac{1}{2}DC$, $CE=EA$; 則 AD 爲 BE 之二等分.

【證】

令 AD, BE 之交點爲 F,

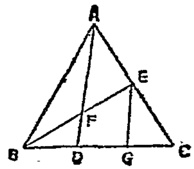
引 EG∥AD,

於 △CAD,

E 爲 AC 之中點,

∴ G 爲 DC 之中點.

從而 BD=DG=GC.



於 △BGE,

D 爲 BG 之中點,DF∥EG,

∴ F 爲 BE 之中點.

17. **二等邊三角形從底邊任意一點引二邊之垂線,則其和爲一定.試證之.**

【證】

ABC 爲二等邊三角形,

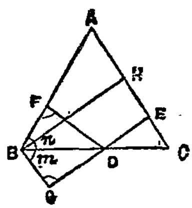
從 BC 底邊上之一點 D,

作 DE⊥AC, DF⊥AB;

則 DE 與 DF 交於一點.

試延長 ED 至 G,令 BG∥AC,

作 BH⊥AC.



於 $\triangle DFB$, $\triangle DGB$,

$\angle m=\angle C$,(錯角)$=\angle n$,

即 $\angle m=\angle n$.

又 $\angle G=\angle R=\angle F$, BD 共有.

∴ 兩形全等.

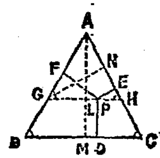
∴ $DF=DG$,

∴ $DF+DE=DG+DE=GE=BH$.

∴ $DF+DE$ 爲一定.

18. 有等邊三角形從任意一點向各邊作垂線,則此三垂線之和爲一定.

【證】



ABC 爲正三角形,從內一點 P 向各邊作垂線 PD, PE, PF;則 $PD+PE+PF$ 不拘 P 點之位置,常爲一定.

過 P 引 PC 之平行線 GH,

作 $GN\perp AC$,則 $\triangle AGH$, $AG=AH$.

∴ 由前題 $PE+PF=GN$.

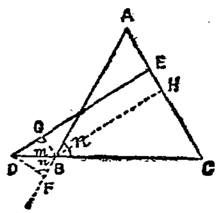
然 GN=AL，又 PD=LM。(AM⊥BC，L 爲 GH 之交點)。

∴ GN+PD=AL+LM=AM，

∴ PD+PE+PF=AM=一定。

19. 有二等邊三角形從底邊之延長線上任意取一點至相等之邊作垂線，則其垂線之差常爲一定。

【證】



D 爲 BC 延長線上之點，

作 DE⊥AC，DF⊥AB；

則 DE～DF=一定。

引 BG⊥DE，

就 △DGB，△DFB，

∠G=∠F=∠R；

∠m=∠C(∵BG∥AC)=∠n。

又 DB 共有，

∴ 二個直角三角形全等，

∴ DF=DG。

∴ DE−DF=GE，

然引 BH⊥AC,

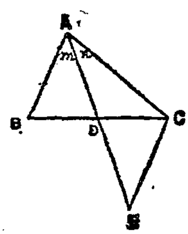
則 GE=BH,

∴ DE−DF=BH.

20. 三角形之中線與其隣邊所成之角比較之,則隣小邊之角比隣大邊之角更大.

【證】

令 AB<AC,



然 ∠m>∠n,

延長中線 AD;

取 DE=AD,

連結 EC,

於 AD=DE,

BD=DC,

∠ADB=∠CDE,

∴ 兩形全等.

∴ CE=AB.

然 AB<AC,

∴ CE<AC.

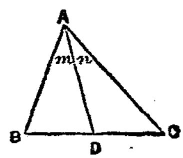
∴ ∠E>∠n,

∴ ∠m>∠n,

21. 三角形ABC之中線AD,比BC之半分大,等或小從而∠A爲銳角,直角或鈍角.

[證]

引中線AD,



於∠ABD,∠ADC,

∵ AD⋚BD,

從而 ∠B⋚∠m,

及 ∠C⋚∠n,

∴ AD⋚BD 從而 ∠B+∠C⋚∠m+∠n;

即 ∠B+∠C⋚∠A.

然 ∠A+∠B+∠C=2∠R,

∴ ∠A⋚∠B+∠C,

從而 ∠A⋚∠R

∴ AD⋚BC,

從而 $\angle A \gtreqless \angle R$.

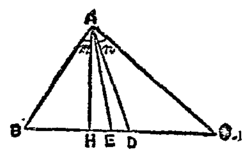
22. 有三角形,其一角之二等分線在從三角形之頂點與其對邊所引之垂線及中線之間.

【證】

AH 爲垂線,

AE 爲二分線,

AD 爲中線,



$AB<AC$,(假設)

則 $\angle B>\angle C$.

$\therefore \angle B+\frac{1}{2}\angle A>\angle C+\frac{1}{2}\angle A$,

$\therefore \angle AEC>\angle AEB$,

$\therefore$ AE 對於垂線 AH 在 C 之側.

次三角形之中線 AD 與 AB,AC 所成之角.

其對大邊之角比對小邊之角小,

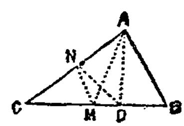
$\therefore \angle n<\angle EAC$,

$\therefore$ AD 對於 AE 而在 C 之側.

$\therefore$ 題云云.

23. △ABC之底角B大於他底角C之二倍,則底邊之中點與高之足之距離,爲他AB之半分.

【證】



引 AD⊥BC, 作中線 AM,

AC 之中點爲 N, 連結 ND;

則 △ADC 爲直角三角形,

N 爲斜邊 AC 之中點,

∴ $CN=DN$,

∴ $\angle NDC=\angle C$.

然 $\angle B=2\angle C$,而 $MN /\!/ AB$;

∴ $\angle NMC=\angle B$,

∴ $\angle NMC=2\angle NDC$.

又 $\angle NMC=\angle NDM+\angle MND$.

∴ $\angle MDN=\angle MND$,

∴ $MD=MN$,

然 $MN=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore$ $MD=\frac{1}{2}AB$.

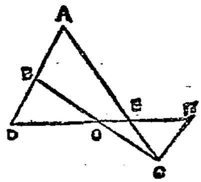
24. △ABC 及 △ACD 共有頂角，而 $AD=AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$. 則△ADE之底邊DE分△ABC之底邊BC爲二等分.

【證】

令 DE 與 BC 之交點爲 O，

延長 DE，引 CF∥AB，

交 DE 之延長線於 F. 則



∠F=∠D=∠AED(∵AD=AE)=∠FEC.

即∠F=∠FEC，

$\therefore$ CF=CE.

然 CE=BD，(∵AB+AC=AD+AE)

$\therefore$ CF=BD.

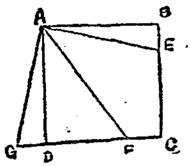
而 ∠DBO=∠OCF，

$\therefore$ △OBD≡△OCF.

$\therefore$ BO=CO.

25. 有□ABCD從A角頂至邊BC上任意一點E引直線AE;又引∠EAD之二等分線,交CD於F.延長CD至G,令DG等於BE.連結AG.則AFG爲二等邊三角形.

【證】



∵ △AGD≡△AEB

∴ ∠GAD=∠EAB

+又∠DAF=∠FAE

∠GAF=∠FAB

然 ∠FAB=∠AFG,

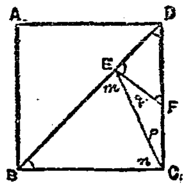
∴ ∠GAF=∠AFG,

∴ AFG爲二等邊三角形.

26. 有□ABCD從對角線BD上取BE,令等於BC.又從E作垂線,交CD於F.則DE,EF,FC互相等.

【證】

∵ △BCE爲二等邊,



$\therefore$ $\angle m=\angle n$.

$\therefore$ 其餘角 $\angle q=\angle p$;

$\therefore$ $\triangle FEC$ 爲二等邊,

而 $FE=FC$,

又 $\triangle EFD$,

$\angle E=\angle R$,

$\angle D=\frac{1}{2}\angle R$,

$\therefore$ $\angle F=\frac{1}{2}\angle R$.

$\therefore$ $\triangle EFD$ 爲二等邊,

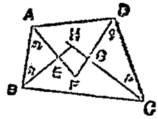
$ED=EF$,

$\therefore$ $DE=EF=FC$.

27. 四邊形各角之二等分線,所成之四邊形,其對角有如何相互之關係;若第一四邊形爲矩形,則第二之四邊形成如何之形狀?

【證】

ABCD 各角之二等分線爲



AF,BH,CH,DF;

其交點爲 E,F,G H.

∵ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$,

∴ $\angle m+\angle n+\angle p+\angle q=2\angle R$.

然 △EAB, △GCD 之內角和各爲 $2\angle R$,

而 $\angle E+\angle G=2\angle R$;

又四邊形 EFGH 內角之和等於 $4\angle R$.

∴ $\angle H+\angle F=2\angle R$.

是卽所求之關係也.

又第一四邊形爲爲矩形,則 $\angle A+\angle B=2\angle R$.

∴ $\angle m+\angle n=\angle R$, ∴ $\angle E=\angle R$,

同樣 $\angle G=\angle R$,

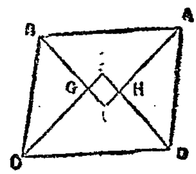
同樣 $\angle H=\angle R$,

同樣 $\angle F=\angle R$,

∴ EFGH 爲矩形.

28. 平行四邊形其四個內角之二等分線,相交之四邊形爲矩形.

【證】



ABCD 爲平行四邊形，

各角之二等分線之交

點爲 G，E，H，F。

於 $\triangle GBC$

$\angle GBC+\angle GCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)$

$=\frac{1}{2}(2\angle R)$

$=\angle R$。

$\therefore\ \angle G=\angle R$，

同樣 $\angle E$，$\angle H$，$\angle F$ 均爲 $\angle R$。

$\therefore$ GEHF 爲矩形。

29. 有 $\triangle ABC$ 其 $\angle B$ 之二等分線與 C 之外角之二等分線相交於 1，則 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$。

【證】

$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，

（$\because$ 三角形任一外角等於內對角之和）

$\therefore \angle q=\frac{1}{2}\angle A+\angle n.$

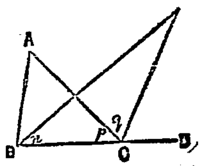
然 $\angle 1+\angle n+\angle P+\angle q=2\angle R,$

又 $\angle A+2\angle n+\angle P=2\angle R,$

$\therefore \angle 1+\angle q=\angle A+n.$

即 $\angle 1+\frac{1}{2}\angle A+\angle n=\angle A+\angle n,$

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle A.$



30. A, B二點在直線CD之同側, P為CD上之一點, AP, BP與CD成等角, Q為CD上之另一點,則AP, BP之和比AQ, BQ之和小.

【證】

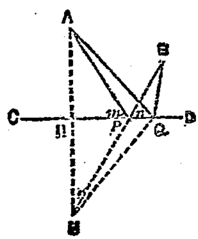
延長BP,引AH⊥CD,

又延長AH,令交BP之延長線上於E點.則

△AHP, △EHP

其 $\angle H=\angle R,$

而 $\angle m=\angle n=\angle P,$



又 HP 共有,

∴ $\triangle AHP \equiv \triangle EHP$,

∴ $AP=EP$.

同樣 $AQ=EQ$.

由是 $AP+DB=EP+PB=EB$

但 $EB<EQ+QB$

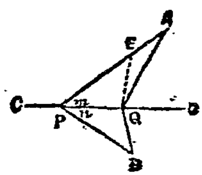
即 $EB<AQ+QB$.

即 $AP+PB<AQ+QB$.

31. 前題A,B在CD反對之側,則AP,EP之差比AQ,BQ之差更大.

【證】

取 $PE=PB$,



連結 EQ,

則 $\triangle EPQ$, $\triangle BPQ$,

其 $\angle m=\angle n$,(假設)

PQ 共有,

∴ 兩形全等,

∴ $EQ=QB$.

然 AE>AQ～EQ，

(三角形二邊之差比他一邊小)

而 AE=AP～PB，

∴ AP～PB>AQ～BQ.

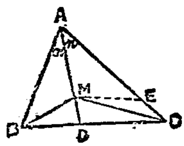
32. △ABC從∠A之二等分線上任取一點,至B,C距離之差,必比AB,AC之差小.

【題意】

∠A之二等分線爲AD，

AD上任意一點爲M，

則 MC～MB<AC～AB.



【證】

AC>AB，(假設)

取 AE=AB，連結 EM.

則 △ABM，△AEM，

∠m=∠n，

AM共有，

∴兩形全等，

∴ ME=BM.

然 $MC \sim ME < EC$,

而 $EC = AC - AB$,

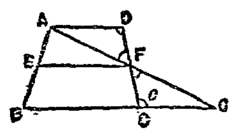
即 $MC \sim MB < AC \sim AB$.

33. 有梯形連結其不平行二邊之中點之直線,必與平行二邊平行,且等於其和之半分.

【題意】

ABCD 爲梯形,

AB,CD 之中點結成直線 EF.



則 $EF \parallel BC$,

且 $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

【證】

試連結 AF,且延長之交 BC 延長線上於 G 點,

就 $\triangle ADF$, $\triangle GCF$,

$DF = FC$,(假設)

$\angle D = \angle C$, $\angle F$ 爲對頂角而相等,

$\therefore$ 兩形全等.

∴ AF=FG, AD=CG,

∴ 就 $\triangle ABG$,

EF 爲連結二邊 AE,AG 中點之直線,

故與底邊 BG 平行,且等於其半分,

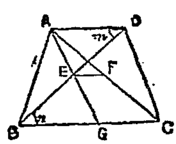
即 EF∥BC,

且 $EF=\frac{1}{2}(BC+CG)=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

34. 連結梯形二個對角線之中點之直線,與平行二邊平行,且等於其差之半分.

【題意】

梯形 ABCD 之 AC,BD 之中點爲 E,F;連結 EF,則 EF∥BC,且 $EF=\frac{1}{2}(BC\sim AD)$.



【證】

連結 AE,且延長之交 BC 於 G.

就 $\triangle AED$, $\triangle GEB$,

DE=EB,

$\angle m=\angle n$，$\angle E$ 為對頂角而相等，

　∴ 兩形全等。

∴ $AE=EG$，$AD=BG$。

∴ EF 為 $\triangle AGC$ 二邊中點所連結之直線，

與底 GC 平行，且等於其半分。

即 $EF /\!/ BC$，

且 $EF=\frac{1}{2}(BC\sim AD)$。

35. 設 D 為 $\triangle ABC$ 之重心，從 A, B, C, D 至與本形不相交之一直線上，引四個平行線 AA', BB', CC', DD'，則

$$3DD'=AA'+BB'+CC'.$$

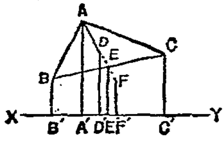
【證】

作 AD 且延長之，

$EF=DE$，引 $FF' /\!/ BB'$，

則 DD' $F'F$，AA' $F'F$，

BB' CC' 各為梯形。



然梯形取其不平行二邊之中點結成直線，等

於兩底和之和.

$$\therefore\ BB'+CC'=2EE'=FF'+DD'$$

$$\underline{AA' \qquad\qquad =AA}$$

$$AA'+BB'+CC'=(AA'+FF')+DD'$$

$$=2DD'+DD'$$

$$=3DD'.$$

摘要第二

圓之重要定理

基本之性質

1. 一點與圓中心之距離,視此點在圓內,圓外或在圓周上從而比半徑小或大或相等.

2. 半徑相等,其圓相同.

3. 直徑平分,圓爲二等分.

中心角,弧及弦

1. 等圓或同圓,其中心角相等或大或小,從而夾弧亦相等或大或小.此逆定理亦眞.

2. 等圓或同圓,其弧相等或大或小,從而中心角亦相等或大或小.此逆定理亦眞.

3. 弦之中點及其兩弧之中點,與圓之中心在一直線上而此直線垂直於弦·

4. 等圓或同圓,其等弦在此中心等距離,而大弦比小弦更近於中心·此逆定理亦眞·

圓周角,弓形之角

1. 圓周角爲立於同弧上中心角之半分·

2. 等圓或同圓,其立於等弧上之圓周角相等·

3. 同弓形之角相等·此逆定理亦眞·

4. 內接四邊形之對角,互爲補角·此逆定理亦眞·

割線之切線

1. 圓之中心與一直線之距離比半徑大,等,小,從而直線全在圓外或切圓或爲割線.

此逆定理亦眞.

2. 自圓外之一點,至圓周上只能作切線.

3. 切線與過切點之弦之夾角,等於相隣之弓形角.

此逆定理亦眞.

二圓

1. 二圓相交之中心線,與共通弦成直角,且分爲二等分.

2. 二圓相切之中心線,必過切點.

又於切點有共通切線.

3. 二圓相互之關係.

令 r, r' 各爲其半徑,d 爲其中心

之距離,則

(i) 全在外則 $d>r+r'$

(ii) 外切 $d=r+r'$

(iii) 相交 $r+r'>d>r\backsim r'$

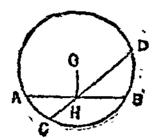
(iv) 內切 $d=r\backsim r'$

(v) 全在內 $d<r\backsim r'$

圓

36. 通過圓內一點H之諸弦,以過其點之直徑之垂直線為最小.

【證】



AB為垂直於直徑OH之弦,

且過H,

則AB為過H諸弦之最小者.

試引CD為過H之任意一弦,

從O作CD之垂線,

則其垂線之長必比OH更小.

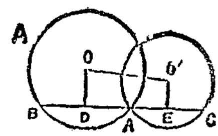
∴ AB<CD.

(∵同一圓內其距中心更小之弦必比距中心更大之弦大)

37. 通過二圓之交點引一直線,其兩端各在一圓周上,則連結中心之直線,投於此直線上之正射影,等於其半分.

【證】

BAC 爲過圓 O,O′ 交點 A 之弦.



令 $OD \perp BC \perp O'E$,

則 $DE=\frac{1}{2}BC$.

$\because\ OD \perp BA$, $\therefore\ DA=\frac{1}{2}BA$

$\because\ O'E \perp AC$, $\therefore\ AE=\frac{1}{2}AC$

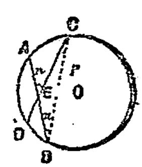
———————(+

$\therefore\ DE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

38. 作 AB, CD 二弦交於圓內之一點, 則 ∠AEC 等於立於弧 AC 及 BD 之中心角之和之半分.

【證】

圓周角等於立於同弧上中心角之半分.



$\therefore\ \angle P=\frac{1}{2}\angle DOB$

$\angle n=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\angle P+\angle n=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle DOB)$.

然 $\angle P+\angle n=\angle r$,

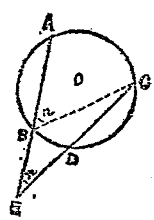
$\therefore\ \angle r=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle DOB)$.

39. 圓之二弦AB,CD各延長之交圓外一點E,則$\angle AEC$等於立在弧AC及BD上中心角之差之半分.

【證】

$\because\ \angle n=\frac{1}{2}\angle AOC$,

$\angle C=\frac{1}{2}\angle BOD$.



$\therefore\ \angle n-\angle C=$

$\frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOD)$.

然 $\angle r+\angle C=\angle n$,

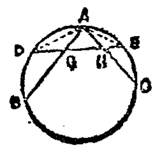
$\therefore\ \angle r=\angle n-\angle C$,

$\therefore\ \angle r=\frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOD)$.

40. 從一圓周上在反對之方向取二弧AB,AC;又從其中點D,E作弦DE,則與

二弦AB,AC成二等邊三角形.

【證】



AB,AC 各與 DE 相交,

其交點爲 G, H

$\angle AGH=\angle D+\angle DAB$,

$\angle AHG=\angle E+\angle EAC$,

然 $\angle DAB=\angle E$.

($\because \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}$)

又 $\angle D=\angle EAC$,

($\because \overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{AE}$)

$\therefore \angle ACH=AHG$.

$\therefore \triangle AGH$ 爲二等邊三角形.

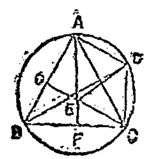
41. 有$\triangle ABC$從A,C向對邊引垂線,此二垂線相交於E.又外接圓之直徑爲BD,則AECD爲平行四邊形.

【證】

$\because AF\perp BC$, $CG\perp AB$,

$\angle BCD=\angle R$,

即 $DC \perp BC$.



(∵立於半圓上之圓周角爲直角)

$\therefore AF \parallel DC$.

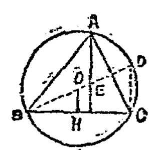
又 $\angle BAD = \angle R$ 即 $DA \perp AB$,

$\therefore CG \parallel AD$,

$\therefore$ AECD 爲平行四邊形.

42. 有三角形從其一頂點至垂心之距離,等於從外心至對該頂點之對邊所引垂線之二倍.

【證】



$\triangle ABC$ 之 E 爲垂心,

BD 爲直徑,O 爲中心,

$OH \perp BC$, 則 $AE = \angle OH$.

試連結 CD,又因 BD 爲直徑,

$\therefore DC \perp BC$,

又 $OH \perp BC$ $\therefore OH \parallel DC$,

且 O 爲 $\triangle BDC$ 之 BD 之中點.

∴ DC=2OH.

然作 AECD 四邊形,

AE∥DC, EC∥AD.

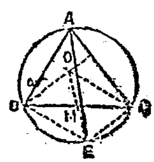
∴ AECD 爲平行四邊形,

∴ AE=DC.

∴ AE=2OH.

43. 有△ABC其垂心O,及邊BC之中心M,與從A引外接圓直徑之一端,同在一直線上.

【證】



從A引外接圓之直徑爲AE,連結BE,EC,

∵ O爲垂心,

∴ BO⊥AC.

又 EC⊥AC,(∵ AE爲直徑)

∴ BO∥EC,

同樣 CO∥BE,

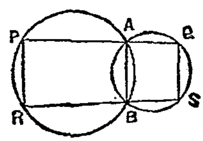
∴ OBEC爲平與四邊形,

∴ 對角線 BC,OE 互爲二等分.

∴ O,M,E 同在一直線上.

44. 有二圓相交,其交點爲A,B.過A,B引直線PAQ,ROS交圓周於P,Q,R,S,則PR∥QS試證之.

【證】



PRBA 爲內接於圓之四邊形.

∴ $\angle P=\angle ABS$;

然 ABSQ 亦內接於圓之四邊形,

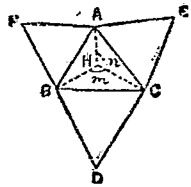
∴ $\angle ABS+\angle Q=2\angle R$,

∴ $\angle P+\angle Q=2\angle R$,

∴ PR∥QS.

45. 有三角形從各邊上各作一正三角形,則其外接三圓周必同過一點.

【證】



令正三角形 AFB 與正三角形 EAC 之外接圓相交於 H,連結 AH,BH,CH 則

$\angle F+\angle AHB=2\angle R.$

然$\angle F=\frac{1}{3}\angle R,$

$\therefore\ \angle AHB=\frac{4}{3}\angle R.$

同樣 $\angle n=\frac{4}{3}\angle R.$

$$\angle m=4\angle R-(\frac{4}{3}\angle R)\times 2=\frac{4}{3}\angle R,$$

$\therefore\ \angle m+\angle D=2\angle R.$

$\therefore$ HBDC 內接於圓之四邊形,

$\therefore$ H 在圓 AFB,圓 EAC,圓 DBC 之上.

46. 有二圓相交,從其一交點於各圓引一直徑,則直徑之他端與二圓之他一交點同在一直線上.

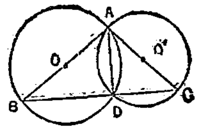
【證】

AB 爲圓 O 之直徑,

AC 爲圓 O′ 之直徑,

D 爲其他之交點,則

BD,DC 在一直線上。



∵ ∠ADB=∠R,

(半圓之圓周角爲直角)

∠ADC=∠R.

∴ ∠ADB+∠BDC=2∠R.

∴ BD,DC 同在一直線.

47. 有二等邊三角形ABC,其底角B,C等於頂角A之二倍,過A且切於BC邊之B點作圓周交AC於D點.則AD=BD=BC,試證之.

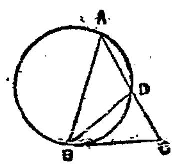
【證】

圓 ABD 切於 BC,

∴ ∠DBC=∠A。

然 ∠ABC=2∠A,

∴ ∠ABD=∠A,



∴ AD=BD.

∴ △BCD, △ABC 其二角相等,故所殘之

∠BDC=∠ABC=∠C,

∴ BD=BC.

∴ AD=BD=BC,

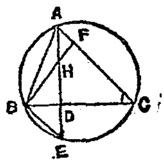
48. **從三角形一頂點向對邊作垂線,則其垂線之足,在垂線延長線交外接圓之點與垂心之中途.**

【證】

BF⊥AC, AD⊥BC,

H 為垂心, E 為 AD

延長線交圓周之點.



則 HD=DE,

作四邊形 HDCF.

則 ∠D+∠F=2∠R.

∴ 內接於圓.

∴ ∠H=∠C.

而 ∠C=∠E,(∵ 對於同弧之圓周角)

$\therefore \angle H=\angle E$.

$\therefore \triangle BDH, \triangle BDE$, BD 爲共有各爲直角三角形;故全等.

$\therefore HD=DE$.

49. ABC爲內接於圓之三角形,從弧BC之中點D作AB之垂線DE,則

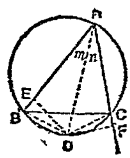
$$AE=\frac{1}{2}(AB+AC),\quad BE=\frac{1}{2}(AB\backsim AC).$$

【證】

就 $\triangle DBE$, $\triangle DCF$,

$BD=DC$;($\because \angle m=\angle n$)

其各對之弧相等.



又 $\angle DCF=\angle ABD$.($\because$ 內接四邊形之外角等於內對角)

$\therefore$ 兩形全等,

$\therefore BE=CF$.

然 $\triangle AED\equiv\triangle AFD$;($\because$ 斜邊及一銳角相等)

$\therefore AE=AF$.

$AB=AE+EB$

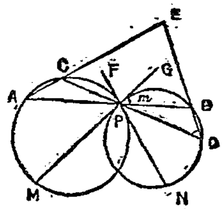
$AC=AF-FC$

相加以2除之，得$\frac{1}{2}(AB+AC)=AE$；

相減以2除之，得$\frac{1}{2}(AB\sim AC)=BE$.

50. 過二圓周之交點P，任意引二割線APB，CPD；割線之端結成直線AC，DB；各成引長之E角常等於P點，二切線所成之∠MPN.

【證】



$\angle E=\angle ACP-\angle P$，

然 $\angle ACP=\angle APN$.

（弦與切線之夾角等於相隣弓形之角）

$\angle D=\angle m$（同定理）

$=\angle APM$.

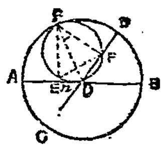
$\therefore \angle E=\angle APN-\angle APM$

$=\angle MPN$.

$\therefore \angle E$ 爲一定不變.

51. AB, CD 爲圓之直徑，從圓周上任意一點 P 向二直徑作垂線，則其垂線足之距離常一定不變.

【證】



$PE \perp AB$, $PF \perp CD$,

EF 不關 P 點之位置如何，而爲定長.

PEOF 爲相對之角，而互爲補角，故內接於圓而連結 PO，則 PO 爲其圓之直徑.

故圓 PEOF 之大爲一定.

而 $\angle FPE = \angle n =$ 一定.

$\therefore$ 弦EF 是對於一定大圓內之一定圓周角.

故爲一定之長.

52. 試證明西母生之逆定理.

西母生之逆定理從三角形外之一點 M,

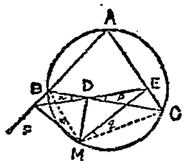
向各邊或其延長邊上作垂線,其各垂線之足在一直線上,則M在此三角形外接圓周上.

【證】

MD,ME,MF 爲向 $\triangle ABC$ 各邊之垂線,

FDE 爲一直線,則

M 在圓 ABC 之上.



四邊形 BFMD 其對角互爲補角,故內接於圓.

$\therefore \angle m = \angle n$,

又 $\angle n = \angle P = \angle q$.

$(\because \angle MDC = \angle MEC = \angle R)$

$\therefore \angle m = \angle q$.

$\therefore \angle FME = \angle BMC$.

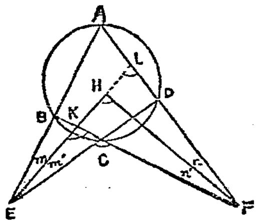
然 $\angle FME + \angle A = 2\angle R$.

$\therefore \angle BMC + \angle A = 2\angle R$.

$\therefore$ M 在圓 ABC 之上.

53. 內接四邊形試延長對邊相交作其交角之二等分線,必互爲直交.

【證】



$\triangle ABF$ 之內角及 $\triangle ADE$ 之內角相加等於 $4\angle R$.

從其相加之和減去 $\angle ABC+\angle ADE=2\angle R$,

則 $2\angle A+\angle AED+\angle AFB=2\angle R$,

即 $\angle A+\frac{1}{2}\angle AED+\frac{1}{2}\angle AFB=\angle R$.

然 $\angle m=\angle m'$, $\angle n=\angle n'$;

$\therefore \angle A+\angle m+\angle n=\angle R$.

然 $\angle A+\angle m=\angle L$,

$\angle L+\angle n=\angle H$.

即 $\angle H=\angle A+\angle m+\angle n=\angle R$.

54. 垂足三角形任何二邊,與原三角形之垂線或原三角形之邊,均成相等之

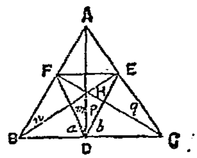
角.

【證】

AD⊥BC,BE⊥AC,CF⊥AB;

H為其交點.

四邊形FBDH其相對之角為補角,故內接於圓.



∴ ∠m=∠n,

　∠n=∠q,(∵ ∠BFC=∠BEC)

∴ B,C,E,F同在一圓周上.

　∠q=∠P,(∵ HDCE內接於圓)

∴ ∠m=∠P.

∴ ∠A=∠b.(∵ 為等角之餘角).

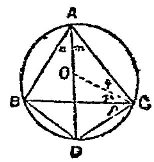
55. 過△ABC內接圓之中心O及頂點A,作直線交此三角形外接圓之周於D點,則三直線DB,DO DC等長.

【證】

∠m=∠n(假設)

　=∠P.(對於同弧之圓周角)

又 $\angle r=\angle q$.（假設）



$\therefore \angle m+\angle q=\angle P+\angle r$.

即 $\angle COD=\angle OCD$.

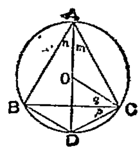
$\therefore OD=DC$.

然 $DC=DB$,

$\therefore OD=BD=CD$.

56. 就一圓周上取三點A,B,C;又於弧BC(不在A點之方)取中點D,連結DA,從直線DA上取點O.令DO=DC,則點O爲△ABC之內心.

【證】



$\because OD=OC$,

$\therefore \angle DOC=\angle DCO$.

然 $\angle DOC=\angle m+\angle ACO$.

$\angle DCO=\angle P+\angle q$.

又 $\angle m=\angle P$;

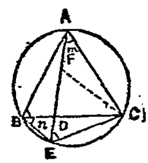
$\therefore \angle ACO=\angle q$.

∴ O 在 $\angle ACB$ 之二等分線上.

∴ O 爲內心.

57. 從內接正三角形之一頂點,至其所對劣弧上任意一點之距離,等於從他二頂點至其點距離之和.

【證】



ABC 爲正三角形,

E 爲 BC 弧上任意之點.

則 $AE=BE+CE$.

∵ $EF=CE$,

連結 FC,則

$\angle E=\angle B=\frac{2}{3}\angle R$.

而 $\triangle FEC$ 爲二等邊,

然一角等於$\frac{2}{3}\angle R$之二等邊三角形爲正三角形.

∴ $\triangle FEC$ 爲正三角形.

∴ $FC=EC$,

且 AC=BC.

$\angle AFC=\angle BEC$.(各爲$\frac{2}{3}\angle R$之補角)

$\therefore$ $\triangle BEC\cong\triangle AFC$.

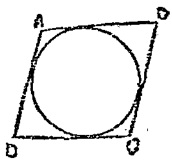
$\therefore$ BE=AF.

$\therefore$ AF+FE=BE+EC.

即 AE=BE+EC.

58. 外接於圓之平行四邊形爲菱形.

【證】



ABCD 爲平行四邊形,

$\therefore$ 對邊相等.

即 AB=CD, AD=BC.

然外接於圓之四邊形對邊之和相等.

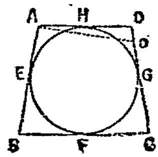
$\therefore$ AB+CD=BC+AD.

$\therefore$ 2AB=2BC.

$\therefore$ AB=BC.

59. 外接於圓四邊形,對邊之和互相等;反之亦然,試證之.

【證】



ABCD 爲外接於圓之四邊形。

則 AB+CD=BC+AD。

試從圓外一點引切線必相等。

$\therefore$ AE=AH

BE=BF

CG=CF

DG=DH

AB+CD=AD+BC。

逆 AD+BC=AB+CD。

則 ABCD 爲內接於圓之四邊形。

若 ABCD 不外接於圓。

作與此外接四邊形 ABCD'。

然 AD'+BC=AB+CD'

而 AD+BC=AB+CD(—

AD'−AD=D'D

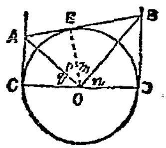
然 △A'DD 是不合理。

$\therefore$ D' 當與 D 合。

60. 從直徑之兩端引二切線,與他之一切線相交於A,B,則∠AOB爲直角.但O爲中心.

【證】

AB切O圓之點E;



則 $OE \perp AB$.

然 $\triangle ACD$, AEO;

爲二個直角三角形.

其 $AC=AE$,

AO共有,

∴兩形全等.

∴ $\angle P=\angle q$.

同樣 $\angle m=\angle n$.

然 $\angle P+\angle q+\angle m+\angle n=2\angle R$,

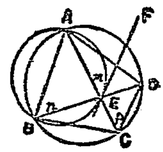
∴ $\angle P+\angle m=\angle R$.

即 $\angle HOB=\angle R$.

61. ABCD爲內接於圓之四邊形,E爲

其對角線之交點,則作外接於 △AEB 之圓,其在 E 點切於此圓之直線必與四邊形之一邊平行.

【證】



令 EF 爲外接於 ABE 圓之切線,

則 EF∥CD,

∴ $\angle m=\angle n$.

(切線與弦之夾角等於相隣弓形之角)

又 $\angle n=\angle P$.(同弓形之角)

∴ $\angle m=\angle P$.

∴ EF∥CD.

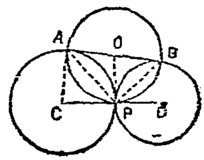
62. 有二圓外切於 P 點,又有直線 AB 切二圓於 A,B;則以 AB 爲直徑作圓.必切過 P 點及二圓中心相連之直線上.

【證】

作 PO⊥CD,

PO與AB交於O.

則OP,OA爲C圓之切線.



∴ OP=OA.

同樣 OP=OB.

∴ OA=OP=OB.

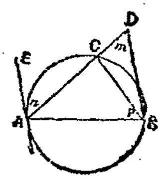
∴ O爲圓APB之中心.

∴ CD切於圓O.

63. 從圓周上之一點A引AB,AC二弦,又引BD與A點之切線平行延長AC交於D,則圓BCD切於AB.

【證】

EA切於圓ACB,



∴ ∠n=∠P.

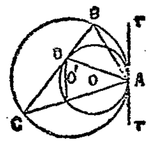
然 ∠n=∠m,

∴ ∠P=∠m.

∴ 圓DCB切於AB.

64. 中心O之圓在中心O′之圓之內,而相切於A點.從點A至O之圓周上任意一點D結成直線AD.又從點D作O圓之切線而交O′圓周上之B,C連結BAC角.則直線AD必分角BAC爲二等分.試證之.

【證】



$\angle C+\angle DAC=\angle BDA$

$=\angle TAD$

$=\angle TAB+\angle BAD.$

卽 $\angle C+\angle DAC$

$=\angle TAB+\angle BAD.$

然 $\angle C=\angle TAB,$

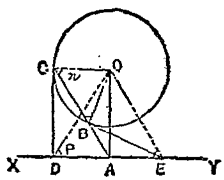
($\because$ TA 切於圓 O′)

$\therefore\ \angle DAC=\angle BAD.$

65. 從圓之中心O至任意直線xy作垂線,又過其垂線之足作割線,交圓周於B,C;從B,C作切於圓周之直線,其交xy之

二點在A點相等之距離.

【證】



四邊形爲OCDA.

其相對之角互爲補角,

故內接於圓.

$\therefore \angle P=\angle n$,

然 $\angle n=\angle OBC$.

又 $\angle OBE=\angle OAE$.

$\therefore$ O,B,A,E 同在一圓周上.

$\therefore \angle OBC=\angle OEA$.

$\therefore \angle P=\angle OEA$.

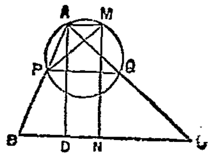
從而直角三角形OAD,OAE爲全等.

$\therefore AD=AE$.

66. 有$\triangle ABC$其二邊AB,AC常過定點P及Q而移動,則頂點A成一定圓之弧,又底邊BC恒爲其他定圓(其半徑爲$\triangle ABC$之高而等於AD)之切線.

[證]

引 AM∥I C,



作 N BC.

然 MAQ=∠C,

又∠C 爲定角.

∴∠MAQ 爲定角. 圓 APQ 爲定圓.

且 Q 爲定點.以 M 爲定點.

而 MN=AD.

∴M 爲中心 MN 爲半徑作圓.

則 BC 切於此圓.

∴BC 切於中心 M 半徑 AD 之圓.

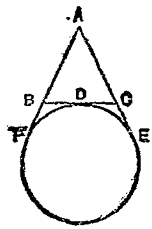
67. △ABC 之傍接圓切邊 BC 於 D 點切 AB,AC 之延長邊於 F,E 點,則 AE,AF 各等於三角形周圍之半分.又 BD,AB 之和及 CD,AC 之和亦各等於其半周.

[證]

∵ BF,BD 切圓,

∴ BF=BD.

同樣 $CE=DC$.



$\therefore AB+BF+AC+CE$

$=AB+BD+DC+AC$.

即 $AF+AE=AB+BC+AC$,

然 AF,AE 切於圓,

$\therefore AE=AF$.

$\therefore 2AF=2AE=AB+BC+AC$.

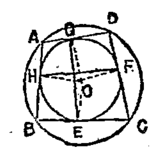
$\therefore AF=AE=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

又 $AB+BD=AC+CD=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

68. 有四邊形內接及外接於圓,則連結其切點之直線互為直交.

【證】

ABCD 四邊形內接於 O 圓,



且外接於 HEFG 圓.

而 H,E,F,G

為其四邊之切點.

則 $GE\perp HF$.

連結 OE,OF,OG,OH.

則四邊形 OECF,OGAH,各爲內接於圓之四邊形.

(∵對角互爲補角)

$\therefore \angle FOE+\angle C=2\angle R.$

$\angle GOH+\angle A=2\angle R.$

然 $\angle C+\angle A=2\angle R.$

$\therefore \angle FOE+\angle GOH=2\angle R.$

然弦 GE,HF 之夾角等於立在EF,GH弧上中心角之和之半分.

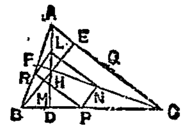
$\therefore \angle FOE+\angle GOH$ 之半分即等於直角.

69. 關於一個三角形之下得過九點畫一圓.(a)各邊之中點.(b)從各頂點至其對邊之垂線之足.(c)各頂點與垂心連結直線之中點.

【證】

AD,BE,CF 爲垂線,

H爲垂心，



P，Q，R，爲各邊之中點，

L，M，N，爲AH，BH，CH之中點.

PN爲△BCH二邊中點相連之直線.

∴ PN∥BH.

同樣LN∥AC，LR∥BH，RP∥AC.

∴ PNLR爲平行四邊形.

而BE⊥AC，∴ PN⊥LN. ∴ PNLR爲矩形.

∴ PNLR內接於圓.

而∠LDP=∠R=∠LRP.

∴ D在圓PNLR之上.

同樣E，F，M，Q亦在該圓之上.

摘要第三

軌跡及作圖之重要問題

軌跡

1. 從二點至等距離之軌跡,爲結二點成直線其中點上正交之直線.

2. 從相交二直線等距離之點之軌跡,爲其交角之二等分線之二個直線.

3. 從一點至一定距離之點之軌跡,爲其點爲中心,一定長爲半徑之圓周.

4. 從一定直線至一定距離之點之軌跡,此爲直線平行之二個直線.

5. 線分成一定之角,則其角頂之軌跡爲一弓形之弧.

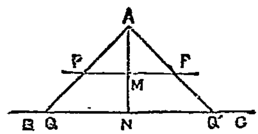
作圖題

1. 有限直線,得引垂直二等分線·
2. 就垂直線上之一點,得引垂線·
3. 從一直線外之定點,得引垂線·
4. 過一直線上之一點,作等於一定角之角,則以此直線爲一邊而畫之·
5. 一角得分爲二等分·
6. 過一定點分得引一定直線之平行線·
7. 求圓之中心·
8. 就圓周上之定點,得引切線·
9. 從定直線爲弦,得畫含定角之弓形·

軌跡及作圖之重要問題

70. 從定直線外之一點,引一直線;試求其直線中點之軌跡.

【證】



BC 爲定直線.

A 爲此直線外之一點.

從 A 引 BC 之直線 AQ.

令 AQ 中點爲 P.

引 $AN \perp BC$, AN 之中點爲 M.

連結 PM,則 $\triangle AQN$ 之 $PM /\!/ QC$.

$\therefore$ P 在過 AN 中點 M 且平行於 BC 之直線上.

次在此直線上任意取一點 P'.

連結 AP',且延長之交 BC 於 Q'.

則 $\triangle ANQ'$ 之 $MP' /\!/ NQ'$.

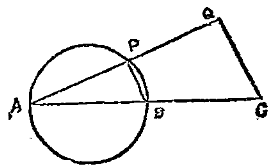
且 M 爲 AN 之中點.

$\therefore$ P' 爲 AQ' 之中點.

即 PM 爲所求之軌跡.

71. 圓周上之點A,與同圓周上任意之點結成直線·且延長至Q,令PQ=AP,則Q之軌跡如何·

【解】



令 AB 爲定圓之直徑,

延長 AB,取

BC=AB.

連結 CQ,PB.

然 △ACQ 之 PB,

爲結二邊中點之直線.

∴ PB∥QC,

然 ∠P=∠R.

∴ ∠Q=∠R.

∴ Q 在 AC 爲直徑之圓周上.

其逆定理亦容易證明.

72. 從一定點至多數同心圓引切線,則切線中點之軌跡如何·

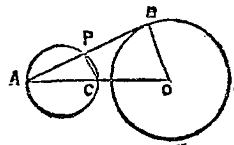
【解】

A 爲定點,

O 爲同心圓之中心,

AB 爲 O 圓之一切線.

其中點爲 P.



又 AO 之中點 C,

連結 PC.

則 PC∥OB,

然 ∠B=∠R.

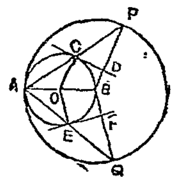
∴ ∠P=∠R.

∴ P 在 AC 爲直徑之圓周上.

其逆定理亦容易證明.

73. 從定圓直徑AB之一端,任意引一弦交其圓周於點C,在點C引切線.從B作其垂線且延長之與AC之延長線上交於P.試求P點之軌跡.

【解】



圓 ACB 之中心為 O,

試結 OC.

∵ $OC \perp CD$, $BD \perp CO$.

∴ $OC /\!/ BD /\!/ BP$.

然 O 為 AB 之中點.

∴ $BP = 2OC$.

然 B 為定點,而 P 在 B 為中心,2OC 為半徑之圓周上.

次從此圓周上任意取一點 Q.

結 AQ,BQ 作 $OE /\!/ BQ$ 與 AQ 之交點為 E.

∴ $OE = \frac{1}{2}BQ = OC$,而在 O 圓之上.

就 F 引 O 圓之切線 EF.

則 $OE \perp EF$.

∴ $BQ \perp EF$.

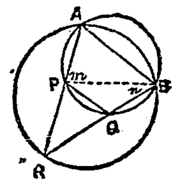
∴ Q 適於要件.

74. AB 為圓 APQB 之定弦,PQ 為同圓之徑.其長等於 AB 之半分,AP,BQ 在 R 點

相會,則PQ應在如何之位置,則R常在定圓周上.

【證】

試結PB.



∵ $\angle R+\angle n=\angle m$,

∴ $\angle R=\angle m-\angle n$.

然不拘P點之位置.

$\angle m$爲定角,

又由假設.

弦 $PQ=\frac{1}{2}AB$,

∴ $\angle n$爲定角.

∴ $\angle m-\angle n=\angle R$爲定角.

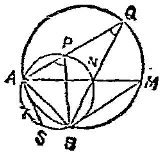
∴ $\angle R$在立於弦AB之上,且在含$\angle m-\angle n$弓形之弧上.

75. P爲圓弧APB上任意之點延,長AP令PQ=PB.則Q之軌跡爲某圓弧.

【證】

連結 QB。

則 $\angle Q=\angle PBQ$.



然 $\angle PBQ+\angle Q=\angle P$.

$\therefore \angle Q=\frac{1}{2}\angle P$.

然 $\angle P$ 爲定角.

$\therefore \angle Q=\frac{1}{2}\angle P$ 亦爲定角.

$\therefore$ Q 在 AB 上含 $\frac{1}{2}\angle P$ 之弓形之弧上.

次取弧 AQB 上任意之點 M.

結 MA,MB,NB,

$\angle M=\frac{1}{2}\angle ANB$,($\because$ N 爲 MA 與弧之交點)

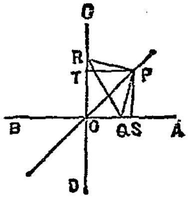
從而 $\angle M=\angle NBM$,

$\therefore$ NM=NB.

$\therefore$ 弧 AQB 上之點適於要件.

76. 從直交直線上任意取二點結成直線,爲正方形之對角線,則其正方形角頂之軌跡如何.

【解】



P爲QR對角線之正方形之一頂點.

PROQ爲因

$\angle COA=\angle QPR=\angle R$.

即對角爲補角故內接於圓.

∴連結PO,則

$\angle POQ=\angle PRQ=\frac{1}{2}\angle R$.

∴P在$\angle COA$之二等分直線上.

【別解】作$PT\perp OC$, $PS\perp BA$,

∴$\triangle PQS\equiv\triangle PRT$而PS=POT.

∴PTOS爲正方形,

而PO爲對角線.

∴$\angle POA=\frac{1}{2}\angle R$.

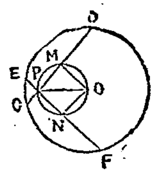
∴P在$\angle COA$之二等分直線上.

77. 過圓內或圓外之定點作弦,試求

其弦中點之軌跡.

【解】

圓之中心O,



定點爲P,

連P引任意之弦CD,

其中點爲M,

連結MO,

則MO⊥CD,

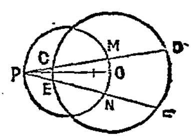
∴ ∠M=∠R,

∴ M在PO爲直徑之圓周上,

次於此圓周上,任意取一點N,

連結PN且延長之.

作EF弦,



則∠ONP=∠R,

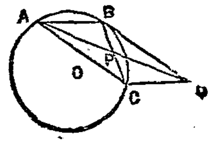
∴ ON⊥EF.

∴ N爲EF之中點.

78. AB爲定圓內之一定弦,AC爲從A所引此圓任意之弦,以AB,AC爲相隣

之二邊作成平行四邊形.則其對角線交點之軌跡如何.

【解】



ACDB 爲平行四邊形.

P 爲對角線 BC,AD 之交點.

∴ 互分爲二等分.

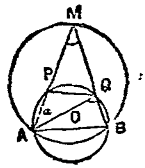
∴ $BP=\frac{1}{2}BC$,

然 B 爲定點.

∴ 由前題知 P 在圓之中心,與 B 連結直線爲直徑之圓周上.

79. AB 爲圓 APQB 之定弦,PQ 爲同圓之弦,其長有一定,PQ 移動,則 AP,BQ 交點 M 之軌跡如何.

【證】



連結 AQ,則

$\angle M=\angle AQB-\angle a$.

然 $\angle AQB$ 爲對於圓 O 定弦之圓周角,故爲一定.

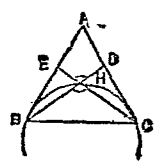
又 $\angle a$ 對於定長之弦 PQ 之圓周角，故亦爲一定。

$\therefore \angle AQB-\angle a=\angle m$ 爲一定。

$\therefore$ M 在立於 AB 弦上之圓周上。

80. 三角形已知底邊與頂角，試求其重心之軌跡.

【解】



就 $\triangle ABC$，

令 $BD\perp AC$；$CE\perp AB$；

H 爲垂心。

則四邊形 AEHD 其對角互爲補角。

故內接於圓。

$\therefore \angle BHC+\angle A=2\angle R$，

然頂角 $\angle A$ 爲定角。

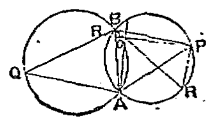
$\therefore$ 其補角 $\angle BHC$ 爲定角。

而底 BC 爲定長。

$\therefore$ H 在立於 BC 上含 $\angle A$ 之補角之弓形弧上。

81. 從圓外一點 P 引二切線,其切點爲A,B.過 A 任意引一弦 AQ;又引 AQ 之平行直線 PR. 與直線 QB 相交於 R. 則 R 之軌跡如何?

【解】



∵ $AQ /\!/ PR$,

∴ $\angle PRB = \angle Q$.

然 $\angle Q$ 爲一定,

而 $\angle PRB$ 亦爲一定.

且立於 PB 上含 $\angle Q$ 弦形弧上,

次於此弧上任意取一點 R',

結 BR' 與圓 BAQ 交於 Q'.

則 $\angle AQ'R' = \angle Q = \angle PRB = \angle R'$,

∴ $PR' /\!/ AQ'$,

∴ R' 適於題之要件.

82. O爲定點,OP 爲定長之直線,PQ 常與一定方向平行,且有一定之長 OP,

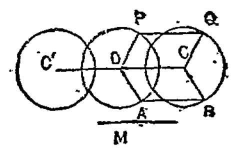
廻轉O點之圓．則Q點之軌跡如何？

【解】

取 OC=M，

連結 OP，CQ；

然 OCQP 爲平行四邊形，



∴ CQ=OP．

然以 C 爲定點，OP 爲 O 圓之半徑．

故 Q 在中心 C 半徑 OP 之圓周上．

次於此圓周上任意取一點 B．

作 AB$\underline{\parallel}$OC，

連結 OA，

則 OCBA 爲平行四邊形．

而 OA=CB=OP，

A 在 O 圓周上．

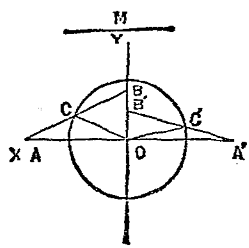
∴ 圓 C 爲所求之軌跡．

次 OC′=CC，在 C 反對之側．

∴ C′ 爲所求之圓周．

83. 直角交叉二直線上,有定長直線之兩端移動.試求其中點之軌跡.

【解】



x, y 爲直角交叉之二直線,定長直線M其兩端在x, y上移動.試求中點C之軌跡.

∵ $\triangle AOB$ 爲直角三角形,

C 爲斜邊之中點,

∴ $CO=AC=\frac{1}{2}AB$.

∴ C 在中心 O, 半徑 $\frac{1}{2}M$ 之圓周上.

次於此圓周上任意取一點 C',

依 $A'C'=OC'$ 以定 A'.

延長 $A'C'$, 交 y 上以定 B'.

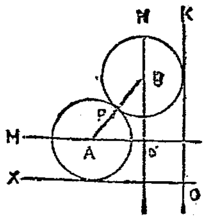
則 $\angle C'OA'=\angle C'A'O$,

∴ $\angle C'OB'=\angle C'B'O$,

∴ $A'B'=2OC'=M$.

84. 二圓相等而常相切,各切於直交二直線上移動.則其二圓切點之軌跡如何?

【解】



A,B 二圓相切,而各切於直交 X,Y 二直線上時移動,則二圓切點 P 與 A,B 在一直線上.而 AB=AP+PB.

然 A 圓,B 圓有一定之半徑.

AP+PB=AB 有一定之長.

∴ 中心 A 在平行於XO之直線上,

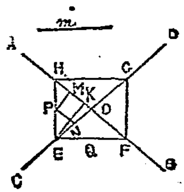
　中心 B 在平行於YO之直線上,

∴ 問題　定長直線之兩端,置於直交二直線 M,N 之上而移動,在其中點 P 之軌跡如何,是由前題,而知爲一圓周.

85. 至相交二直線離距之和,等於一定之長.試求其點之軌跡.

【解】

作EK⊥AB，且EK=m；取OE，OF，OG，OH作矩形EFGH；則此矩形之四邊，爲所求之軌跡．



此矩形邊上任意取點P．

作PM⊥AB，PA′⊥CD；

則PM+PN=EK．(問題17)

∴P適於要件．

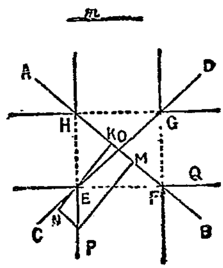
次取此矩形外之點，不適於要件，此容易證明．

86. 至相交二直線距離之差，等於一定之長．試求其點之軌跡．

【解】

令EK⊥AB，且EK=m，如是在CD上取E點，取OE，OF，OG，OH，作矩形EFGH．

試將各邊延長之，則其延出之部分，即所求之軌跡．



P為HE延長上任意之點,

PM⊥AB, PN⊥CD,

則 PM～PN=EK.(問題19)

∴P適於要件.

次在此直線外取Q點,不適於要件,此容易證明.

87. 過定角內之定點,引二邊間之直線,令此定點分該直線為二等分.

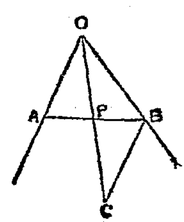
【作圖】

P為定角AOB內之一點,連結OP且延長之.

取PC=OP, 作CB∥OA, 連結BP且延長之.

交OA於A, 則AB即所求.

【說明】



就 △OPA, △CPB,

OP=PC,

∠AOP=∠PCB.

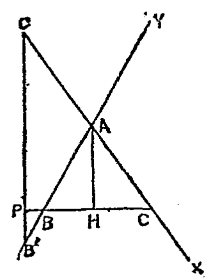
∠P為對頂角而相等.

∴兩形全等.

$\therefore$ AP=PB.

88. 過一定點作直線,令分相交二定直線爲等角.

【題意】



過定點P引直線.

令與定直線X,Y成等角.

【作圖】

引AH分X,Y之交角爲二等分.

引PH⊥AH,令交X,Y於CB.

是即所求.

又過P引AH平行線B'C'.

亦即所求.

【證明】

△ABH≡△ACH,(一邊與兩端之角各相等)

$\therefore$ ∠ABH=∠ACH.

就B'C'亦容易證明.

89. 知二角及周圍,試作三角形.

【作圖】

取 DE=m，作 $\angle D=\frac{1}{2}\angle B$， $\angle E=\frac{1}{2}\angle C$，

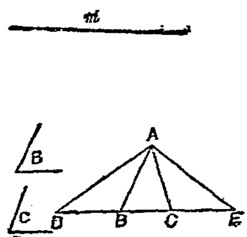
其交點爲 A，作 $\angle DAB=\angle ADB$， $\angle EAC=\angle E$．

則 $\triangle ABC$ 卽所求．

【證明】

$\angle ABC=\angle D+\angle DAB=2\angle D=\angle B$，

$\angle ACB=2\angle E=\angle C$，



又 AB=DB，

AC=CE，

$\therefore$ AB+BC+CA

=DB+BC+CE

=m．

$\therefore$ $\triangle ABC$ 卽所求．

90. 已知對角線與一邊之和或差，求作正方形．

【解】

作正方形 ABCD，

連結 AC，且延長之．

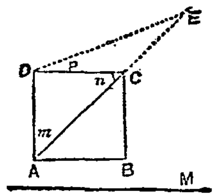
令 CE=CD，

則 AE=M.

連結 DE，

則 △CDE 之 CE=CD.

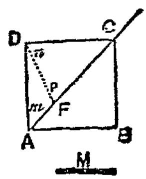
∴ 爲二等邊.



∴ $\angle E=\frac{1}{2}\angle n=\frac{1}{2}\angle R$，

而 $\angle m=\frac{1}{2}\angle R$.

∴ 作得 △DAE.



從而作得 ABCD，

作得其差爲△AFD.

91. 有定角BAC,從其一邊AB中之一定點P向AC引直線PQ,則∠APQ等於∠AQP之三倍.

【作圖】

延長CA引直線AD分∠MAB爲二等分.

次引直線AE分∠DAM爲二等分.

引PQ∥AE是即所求.

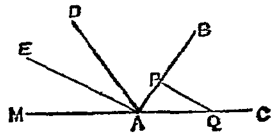
【證明】

$\angle PQA=\angle EAM$,

$\angle APQ=\angle EAP$,

然 $\angle EAP=3\angle EAM$,

$\therefore\ \angle APQ=3\angle PQA$.



92. 有二圓相交過其一交點引一割線,令圓周間之部分等於所設線分之長.

【作圖】

連結中心 O,O′ 以 OO′爲直徑作圓,

O 爲中心,而 $OB=\frac{1}{2}m$;(m 爲所設線分之長)

切 B 結 OB,過 A 引 $CD\parallel OB$,則 CD 卽所求.

【證明】

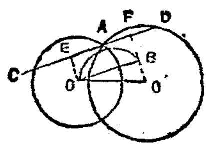
$\because\ OE\perp CD$,

又延長 O′B,

交 CD 於 F,

則 EOBF 爲矩形.

$\therefore\ EF=OB=\frac{1}{2}m$.



$\therefore$ $2EF=m$.

即 $CD=m$,

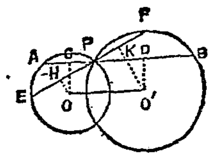
O' 爲中心 $\frac{1}{2}m$ 爲半徑畫圓,倘可得一所求之直線.

93. 過二圓之交點,引一最大之直線,但此直線之兩端各在一圓周上.

【作圖】

連中心 OO' 過 O 圓, O' 圓之交點 P, 引 $AB /\!/ OO'$, 則 AB 即所求.

【證明】



過 P 任引一直線 EF,

自 O, O' 向 AB, EF 各引垂線 $OC, O'D, OH, O'K$.

則 $CP=\frac{1}{2}AP$,

$PD=\frac{1}{2}PB$,

$CD=\frac{1}{2}(AP+PB)=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore$ $AB=2CD=2OO'$.

同樣 $HK=\frac{1}{2}EF$.

$\therefore$ $EF=2HK$.

然 $OO'>HK$,

$\therefore$ $AB>EF$.

94. 過定點引直線,截定圓周,令圓內之部分等於所設之線分.

【作圖】

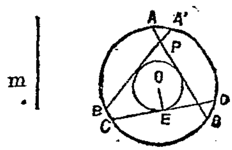
令 $CD=M$,

引 $OE\perp CD$.

以 O 爲中心,OE 爲半徑作圓.

過 P 引此圓之切線 AB,A'B'.

是即所求.



【證明】

從 O 至 AB,A'B',CD 之距離皆相等.

$\therefore$ $AB=A'B'=CD=m$.

【條論】P 在 OE 爲半徑之圓之中,則無解.

95. 從三角形之三邊,截取相等之弦畫圓.

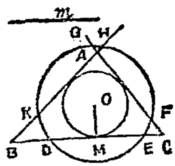
【作圖】

作內接於△ABC之圓,令M爲BC之切點.

依$OM=\frac{1}{2}m$以定O點.

以O爲中心,OD爲半徑.

作同心圓是即所求.



【證明】

令BC交第二圓於點E,

則 $DM=ME=\frac{1}{2}m$

$\therefore DE=m.$

然FG, HK, DE離中心O相等;爲第二圓之弦;

$\therefore FG=HK=DE.$

96. 試切定直線與圓作一有定半徑之圓.

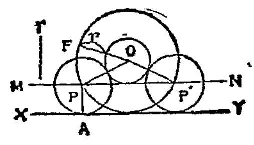
【作圖】

從定直線XY,至等於定半徑之距離引平行線

MN,次以定圓之中心O爲中心,O圓之半徑與定半徑之和或差之長爲半徑,作同心圓交MN於P,P'.以P,P'爲中心,所設定長之半徑r爲半徑作圓.

是卽所求.

【證明】



作 PA⊥XY,

則 PA=r.

∴ P圓切於XY,

又 OP等於兩圓半徑之和,

∴ P圓切於O圓.

就P'圓證之亦同樣.

97. 有二圓內切於A點,引直線AXY交二圓於X及Y;令XY等於所設之線分.

【作圖】

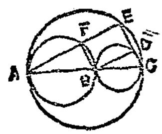
二圓之切點爲A,連結直徑AB,且引長之爲大圓之直徑AC;以BC爲直徑,作半圓截BD=m,引AFE∥BD,則AFE卽所求.

【證明】

連結 FB 及 CD,

試延長 CD 令

交 AF 於 E.



∵ $\angle D=\angle F=\angle E=\angle R$.

∴ E 在 AC 爲直徑之圓周上.

而 EDBF 即爲矩形.

∴ $EF=BD=m$.

98. 有底邊與底邊相隣之一角及二邊之和,求作三角形.

【作圖】

取 $BC=M$,

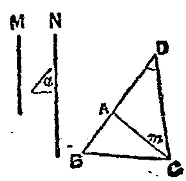
作 $\angle B=\angle a$,

截 $BD=N$,

連結 DC.

依 $\angle m=\angle D$ 引 AC,

則 $\triangle ABC$ 即所求.



【證明】

$\angle ACD$ 之 $\angle D=\angle m$;

$\therefore AC=AD.$

$\therefore AB+AC=AD+AB$

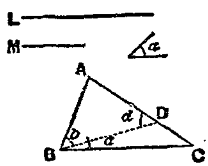
$=BD$

$=N.$

故是即所求.

99. 有底邊與底邊相隣之一角,及其他二邊之差.試作三角形.

【解】



作得 $\triangle ABC$,

令 $AD=AB$,

$(AC>AB)$.

連結 BD,

然 $DC=AC-AB=M$,

$BC=L, \angle C=\angle a$;

$\therefore$ 作得 $\triangle DBC$.

從而作得 $\triangle ABC$.

【作圖】

先作 $\triangle DBC$，延長 DC，

次 $\angle b=\angle d$。

引 AB 令與 CD 之延長綫交於 A。

則 $\triangle ABC$ 即所求。

100. 知底邊及頂角與其他二邊之和，試求三角形。

【作圖】

取 $BC=a$，就 BC 上作含 $\frac{1}{2}\angle a$ 之弓形。

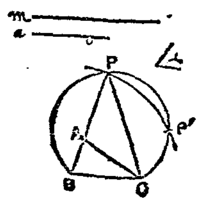
於此弧上截取 $BP=BP'=m$，

結 PC 作 $\angle PCA=\angle P$，則 $\triangle ABC$ 即所求。

【證明】

$\because$ $\triangle PAC$ 爲二等邊，

而 $PA=AC$。



$\therefore$ $AB+AC=AB+PA$

$=BP=m$。

又 $\angle BAC=2\angle P=\angle a$，

$\therefore$ $\triangle ABC$ 爲所求。

就 P' 亦得同樣之作圖。

101. 已知底邊頂角及其他二邊之差,求作三角形.

【解】

作得 $\triangle ABC$,取 $AD=AC$,

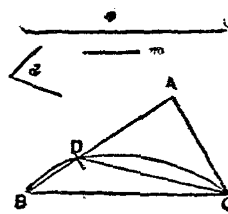
就 $\triangle DBC$ 之 BD 爲二邊之差是已知量.

又以 $\angle A=\angle a$,

而 $\angle ADC=\angle ACD$

$$=\frac{1}{2}(2\angle R-\angle a)$$

$$=\angle R-\frac{1}{2}\angle a.$$



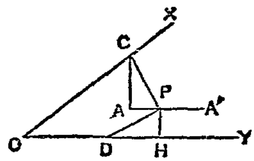
$\therefore\ \angle BDC=\angle R+\frac{1}{2}\angle a.$

又 $BC=a$,

$\therefore\ \triangle DBC$ 因知底邊頂角及其他之一邊而作,得從而得作 $\triangle ABC$.

102. 從一定點P至二定直線OX,OY,引二直線,令其夾角爲直角,且爲相等之長,又表示有二種之解答.

【作圖】



作 PH⊥OY,

引 PA∥OY,

令 PA=PH.

引 CA⊥AP,

令交 OX 於 C.

則 ∠CPD=∠R.

引 PD 卽求得 CPD.

【證明】

就 △CAP,△DHP;

∠A=∠H=∠R.(作圖)

PA=PH.

∠CPA=∠DPH.

∴ 兩形全等.

∴ PC=PD.

且 ∠CPD=∠R.

103. 過圓周上所設之二點 A,B 引互相平行二弦 AB 及 BD,試令其和爲最大.

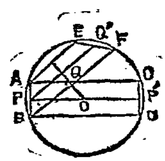
【作圖】

連結 AB，令其中點爲 P，結 OP 引 $AC \parallel OP \parallel BD$.

則 AC，BD 之和爲最大。

【證明】

任意取一方向引 $AE \parallel BF$，



作 ABDC 矩形.

延長 PO 交 CD 於 P'.

則 $AC+BD=2PP'$

$=4OP$.

又作 ABEF 梯形，

令 EF 之中點爲 Q'.

試連結 PQ'，則

$AE+BF=2PQ'=4PQ$

$(OQ \perp PQ')$.

然 $OP>PQ$，

$\therefore AC+BD>AE+BF$.

104. 試以三頂點置在三個平行線上，作等邊三角形.

【作圖】

X∥Y∥X,

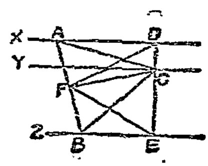
對於X,Y,X任意引一垂線DE.

則DE爲一邊作正三角形.

DE交y於C點連結FC.

引AB⊥FC連結AC,CB,

則△ABC即所求.



【證明】

四邊形FBEC內接於圓,

$\therefore \angle FBC=\angle FEC$

$=\frac{2}{3}\angle R.$

又AFCD亦內接於圓.

$\therefore \angle FAC=\angle FDC$

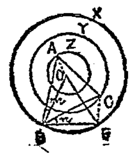
$=\frac{2}{3}\angle R.$

從而△ABC爲正三角形.

105. 試以三頂點置在三個同心圓周上,作一等邊三角形.

【作圖】

先作一正三角形 OBE;



以等於Z圓之半徑,截

取EC結BC以BC爲一邊。

作正三角形ABC。

則A在Z圓周上。

【證】就 △ABO, △CBE;

AB=BC, OB=BE,

且 ∠m=∠n,

∴ 兩形全等。

∴ OA=EC=Z 圓之半徑,

∴ A 在 Z 之圓周上。

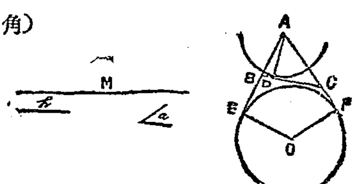
106. 知頂角及周圍與高,試作一三角形.

【作圖】

取 ∠EAF=∠α,(頂角)

截 AE=AF

$= \frac{1}{2}M$,



作 EO⊥AE, FO⊥AF;

其交點為O,

以O為中心,OE為半徑作圓.

又以A為中心,h(高)為半徑作圓.

引兩圓之共通切線交AE,AF於B,C;

則△ABC即所求之三角形.

【證】

作△ABC之傍切圓,

則 $AE=AF=\frac{1}{2}$(周圍),

然 $AE=AF=\frac{1}{2}M$,

∴ △ABC之周圍=M.

又令BC與A圓之切點為D.

則AD=h.

∴ △ABC為所求之三角形.

107. 知底邊及高與外接圓之半徑,求作三角形.

【作圖】

以外接圓之半徑R為半徑作圓,截弦BC=a.

從B至h之距離,引平行線AP,A'P'求得△ABC,△A'BC等.

【證】

BC=a,(作圖)

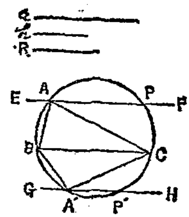
從A至BC之距離為h.

從A'至BC之距離亦等於h.

而外接圓之半徑等於R.

∴△ABC,△A'BC即所求.

作△PBC,△P'BC亦然.



108. 試以三定點為中心,作相切之三圓.

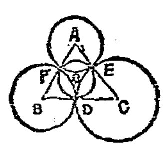
【作圖】

第一圖作△ABC內接圓,其切點為D,E,F,以B為中心,BD為半徑作圓.

C為中心,CD為半徑作圓.

A為中心,AF為半徑作圓.

是即所求.



第二圖作傍接圓 O',O'',O''' 以 A,B,C 還爲中心，各頂點至切點爲半徑作圓。

亦即所求。

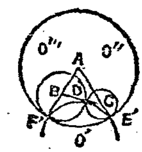
證】

第一圖以圓 O 爲內接圓，

$BD=BF$，

$AE=AF$，

$CD=CE$；



而 B 圓，C圓，A圓

各二圓互相切，

第二圖亦得同樣證之。

109. 有定三角形內接所設之三角形，試依此畫一合同之三角形.

【作圖】

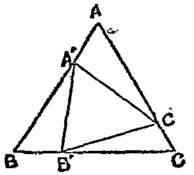
就 $\triangle PQR$ 之一邊 QR 上作一含 $\angle A$ 之弓形 $QA'R$，

又於 PQ 上作一含 $\angle C$ 之弓形 $PC'Q$，

過 Q 引 $A'C'=AC$，

連結 $A'R,C'P$ 且延長之，交於 B' 點。

則 $\triangle A'B'C'$ 與 ABC 全等.

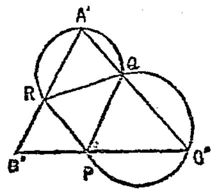


取 $AR'=A'R$,

$A'Q=AQ'$,

$BP'=B'P$,

則可作得 $\triangle P'Q'R'$.



【證】

$\because \angle A'=\angle A$,

$\angle C=\angle C$,

$A'C'=AC$.

$\therefore \triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$,

從而 $\triangle P'Q'R' \equiv \triangle PQR$.

$\therefore \triangle P'Q'R'$ 卽所求.

110. 試切定直線中之定點及切定圓作圖.

【作圖】

就直線 XY 上之定點 P 作垂線.

PB=O 圓之半徑 B 爲定點.

連結 BO,作 $\angle O=\angle B$ 交 PB 於 A.

以A爲中心,AP爲半徑作圓.

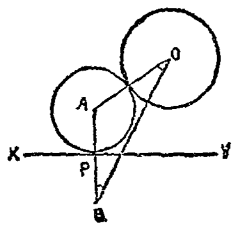
是即所求之圓.

【證】AO=AB=AP+PB

=AP+O圓之半徑.

即AO之距離等於兩圓之半徑.

∴ A,O圓相切B,在反對之側.



取PB'=PB.

與前同一之作圖,

則得其他之一圓A.

摘要第四

面積重要之定理

矩形之面積

1. 相隣之二邊相等,則此矩形重合.
2. $a=x+y+z$, 則 $ab=bx+by+bz$.
   但 a,b,x,y,z 等表線分, ab 表 a,b 二邊之矩形.以下仿此.
3. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
4. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

平面形之面積

1. 平行四邊形之面積與等底等高矩形之面積相等.
2. 三角形之面積等於底高相乘矩形之半.
3. 直角三角形其斜邊上之正方形,

等於其他二邊上正方形之和.

4. △ABC之∠A爲鈍角, CD⊥AB, 則

$\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2+2BA\cdot AD.$

5. △ABC之∠A爲銳角, 則

$\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2-2BA\cdot AD.$

6. △ABC之AD爲中線, 則

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2.$

面積

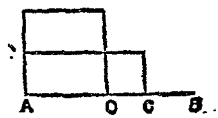
111. 分定直線爲二部分,則其所包之矩形,以二部分相等者爲最大.

【證】

AB爲定直線,

C爲AB線上之一點,

O爲其中點.



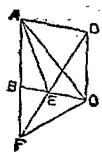
$AC \cdot CB = (AO + OC)(OB - OC)$

$= \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2$.

$\therefore \overline{AO}^2 > AC \cdot CB$.

112. 有平行四邊形ABCD,過D引直線;交邊BC於E,交邊AB之延長線上於F,則$\triangle ABE = \triangle CEF$.

【證】



$\because \triangle AED = \frac{1}{2} \square ABCD$,

$\therefore \triangle ABE + \triangle ECD$

$= \frac{1}{2} \square ABCD$,

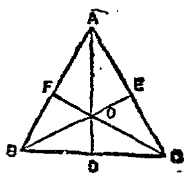
然 $\triangle FCD = \frac{1}{2} \square ABCD$.

即 $\triangle ECD + \triangle CEF = \frac{1}{2} \square ABCD$.

$\therefore ABE = \triangle CEF$.

113. 三角形之面積,等於其周圍與內接圓半徑乘積之半.

【證】



O爲三角形之內心,

從O至各項點連結,

則 $OD \perp BC$,

$OE \perp AC$, $OF \perp AB$.

然 $\triangle OBC = \frac{1}{2} OD \cdot BC$

$\triangle OCA = \frac{1}{2} OE \cdot AC$

$\triangle OBA = \frac{1}{2} OF \cdot AB$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} OD(BC + CA + AB)$.

$(\because OD = OE = OF)$.

114. 圓內有互爲直交二弦,則此弦四

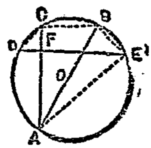
分上正方形之和,等於該圓直徑之正方形.

【證】

AC,DE 爲直交二弦,

O 爲中心,結 AO 且延

長之,交圓周於 B.



結 DC,CB,BE,EA.

然 $\angle ACB=\angle R=\angle AFE$.

$\therefore$ CB∥DE,

$\therefore$ DC=BE,

從而 $\overline{DF}^2+\overline{CF}^2+\overline{AF}^2+\overline{EF}^2=\overline{DC}^2+\overline{AE}^2$

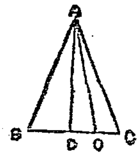
$=\overline{BE}^2+\overline{AE}^2$

$=\overline{AB}^2$.

($\because$ $\triangle AEB$ 之 $\angle E=\angle R$).

115. 有二等邊三角形ABC,從底邊BC或其延長線上任意取點O,則OA,AB上正方形之差,等於矩形OB,OC.

【證】



$$\overline{OA}^2=\overline{OD}^2+\overline{AD}^2$$

又 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$ (～

$\overline{OA}^2\sim\overline{AB}^2=\overline{OD}^2\sim\overline{BD}^2$

$=(OD+BD)(OD-BD)$

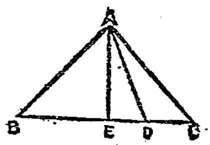
$=OB\cdot OC.$

(∵ BD=DC∴OD～BD=OD～DC=OC).

116. 有直角二等邊三角形ABC,從斜邊BC上任意取一點D,則

$$\overline{2AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2.$$

【證】



依定理

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2BD\cdot BE$

又 $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{DC}^2-2EC\cdot DC$ (+

$2\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-2(BD\cdot BE+DC\cdot EC)$

$=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-2(BD+DC)\overline{BE}$ (∵BE=EC)

$=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-BC(2BE)$

$=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-BC\cdot BC$

$=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$.

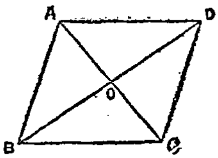
117. 有平行四邊形其各邊上正方形之和,等於其對角線上正方形之和.

【證】

ABCD 爲平行四邊形,

O 爲對角線之交點,

則就 $\triangle ABC$,其 O 爲 AC 之中點.



∴由定理

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BO}^2+2\overline{AO}^2$

$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=2\overline{OD}^2+2\overline{OC}^2$ (+

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{BO}^2+\overline{AO}^2$

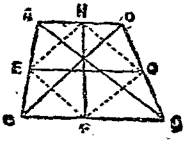
$=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2$.

118. 有四邊形其對角線上正方形之和,二倍於結對邊中點之直線上正方形之和.

【證】

ABCD 為四邊形,

各邊之中點為 E,F,G,H.



則 $EH=\frac{1}{2}BD$,

$EF=\frac{1}{2}AC$,

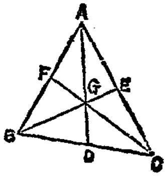
$FG=\frac{1}{2}BD$,

$HG=\frac{1}{2}AC$.

$$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(2EF)^2+(2FG)^2$$
$$=4\overline{EF}^2+4\overline{FG}^2$$
$$=2(\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2)$$
$$=2(\overline{EG}^2+\overline{FH}^2).$$

119. 從三角形之重心,向各頂點引直線,則各直線上正方形之和之三倍,等於三邊上正方形之和.

【證】



AD,BE,CF 三中線相交於G,

則 G 為 $\triangle ABC$ 之重心,

就 $\triangle GBC$ 之 $\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2\overline{GD}^2+2\overline{BD}^2$

就 $\angle GCA$ 之 $\overline{GC}^2+\overline{GA}^2=2\overline{GE}^2+2\overline{CE}^2$

就 $\triangle GAB$ 即 $\overline{AG}^2+\overline{GB}^2=2\overline{GF}^2+2\overline{AF}^2$

相加倍之則 $4(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$

$$=4\overline{BD}^2+4\overline{CE}^2+4\overline{AF}^2+4\overline{GD}^2+4\overline{GE}^2+4\overline{GF}^2$$

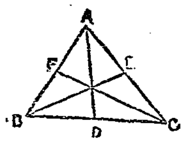
即 $4(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2+\overline{AG}^2$

$+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2$,

$\therefore 3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$.

120. **三角形邊上正方形之和之三倍,等於其中線上正方形之和之四倍.**

【證】



$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BD}^2+2\overline{AD}^2$

$\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{CE}^2+2\overline{BE}^2$

$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BF}^2+2\overline{CF}^2$ (+

$4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4\overline{BD}^2+4\overline{CE}^2+4\overline{BF}^2$ (二倍之)

$+4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)$.

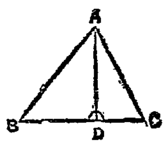
$\therefore 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)$

$(\because \overline{AB}^2=4\overline{BF}^2)$.

121. 三角形二邊上正方形之差,等於其二邊相會爲頂點,向對邊作垂線,此垂線之足所分對邊,爲二部分上正方形之差.

【證】

$\because AD\perp BC$,



$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$

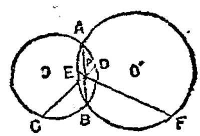
$\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2$

$\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BD}^2\sim\overline{DC}^2$.

122. 有二圓相交於A,B;從共通弦AB或其延長線上一點P引二直線.各交圓周於C,D,E,F;則此四點在一圓周上.

【證】

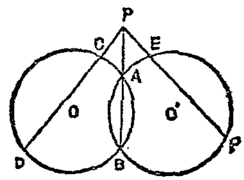
就O圓之 $CP\cdot PD=AP\cdot PB$,



就 O' 圓之 $EP \cdot PF = AP \cdot PB$,

$\therefore$ $CP \cdot PD = EP \cdot PF$,

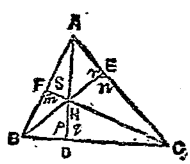
$\therefore$ E,C,F,D 同在一圓周上.



($\because$ 一點分有限直線之二部分所包之矩形相等則其直線之各端同在一圓周上)

123. 從三角形之頂點,至對邊引三直線同過一點,此點所分各直線之二部分,爲相等之矩形;則此點爲垂心.

【證】



從 $\triangle ABC$ 之三頂點,

向對邊引直線 AD,BE,CF;

其交點爲 H,

依題意

$BH \cdot HE = CH \cdot HF$,

$\therefore$ B,F,E,C 同在一圓周上.

$\therefore \angle m=\angle n.$

又 $AH \cdot HD=BH \cdot HE$,

$\therefore$ A,B,D,E 同在一圓上,

$\therefore \angle p=\angle r.$

同樣 $\angle q=\angle s$,

然 $\angle p+\angle q=2\angle R.$

又 $\angle m+\angle n=2\angle R.$

然 $\angle m=\angle n$, $\therefore \angle m=\angle n=\angle R.$

$\therefore$ BE,CF 爲垂線.

又 AD 亦爲垂線.

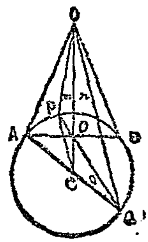
124. OA,OB 爲從中心 C 之圓外之 O 所引之二切線,過 AB 之中點 D 引弦 PDQ,則 OC 分 $\triangle$POQ 爲二等分.

【證】

作四邊形 OACB,

則其對角爲補角,

故內接於圓.



∴ $AD \cdot DB = OD \cdot DC$,

然 $AD \cdot DB = PD \cdot DQ$.

∴ $OD \cdot DC = PD \cdot DQ$.

∴ O,P,C,Q 同在一圓周上.

∴ $\angle m = \angle q$, $\angle n = \angle CPQ$.

然 $\angle CPQ = \angle q$,

∴ $\angle m = \angle n$.

∴ OC 分 $\angle POQ$ 爲二等分.

摘要第五

比及比例

比及比例

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,則

(i) $a\gtreqless b$ 從而 $c\gtreqless d$;

(ii) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

(iii) $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ 及 $\frac{a\pm b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

2. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\cdots\cdots$則

$\frac{x}{a}=\frac{x+y+z+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}$.

比例線

1. 三角形之底之平行線,分二邊爲等比.

此逆定理亦眞.

2. 線分依一定之比,內分或外分,各有一分點,然只以一爲限.

3. 三角形內角或外角之二等分線內分或外分,對邊爲二隣邊之比

相似形

1. 兩三角形合於次列之一者,爲相似形.

(i) 二角相等.

(ii) 二邊成比例其夾角相等.

(iii) 三邊之比各各相等.

2. 從直角三角形之直頂角向斜邊作垂線,其垂線爲分斜邊兩部分之比例中項.

又直角之一邊爲投於此邊之斜邊之正射影,與斜邊之比例中項.

3. 相似多角形得分同數之相似三角形.

4. 相似多角形之周之比等於對應邊之比.

面積之比

1. 等高(等底)矩形之比等於底(高)之比.

2. 四線分為比例,則外項之矩形等於內項之矩形.

3. 直角三角形其二邊上正方形之比等於其斜邊上所投正射影之比.

4. 過圓內或圓外一點之弦分所包之矩形有一定.

此逆定理亦真.

5. 從圓外一點引割線,其二部分之

矩形等於此點所引切線上之正方形.

6. 矩形爲底與高相乘有比例.

7. 一角相等之二個三角形(或平行四邊形)之比等於其角所夾二邊之相乘之比.

8. 相似三角形面積之比等於對應邊之二乘比,相似多角形亦然.

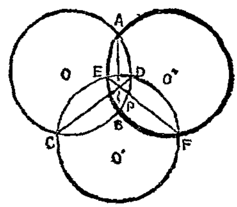
9. 三角形二邊之矩形等於第三邊相應之高與外接圓直徑之矩形.

10. 內接於圓之四邊形,其對邊矩形之和等於對角線之矩形.

比及比例

125. 有三圓各二圓相交,則其三個共通弦交於一點.

【證】



圓 O, 圓 O′ 相交於 C,D;

圓 O, 圓 O″相交於 A,B;

連結 AB, CD 相交於 P.

圓 O′, 圓 O″ 交點之一爲 E, 連結 EP, 且延長之交 O′ 圓於 F, 則知 F 在 O″ 之圓周上.

∵ 關於 O 圓, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$;

關於 O′ 圓, $CP \cdot PD = EP \cdot PF$.

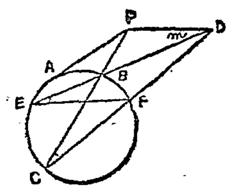
∴ $AP \cdot PB = EP \cdot PF$.

∴ F 在 O″ 圓之上.

126. 從圓外一點,引此圓之切線及割線,又從同點任意取一方向,引一與切線等長之直線,則此直線與其一端結前所

引割線交圓周之點成二直線,再交圓周之二點所結之直線平行.

【證】



AP 爲切線,

PBC 爲割線,

PD=PA,

DB,DC 交圓周於 E,F;

則 EF∥PD.

∵ $PB \cdot PC = \overline{PA}^2 = \overline{PD}^2$,

∴ PB:PD=PD:PC.

從而 △PBD∽△PDC,

∴ ∠m=∠C.

然 ∠C=∠E.

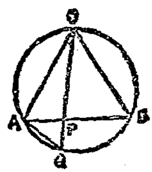
∴ ∠m=∠E.

∴ PD∥EF.

127. △OAB 爲二等邊三角形,從其頂點 O 任意引一直線,交底邊於 P;交外接

圓周於Q,則矩形OP·OQ常爲同大.

【證】



∵ $\angle Q=\angle B=\angle OAB$,

∴ 作AQP之外接圓,

∴ OA切於此圓,

∴ 由定理知

$OP\cdot OQ=\overline{OA}^2$.

然$\overline{OA}^2$爲一定.

∴ OP·OQ亦爲一定.

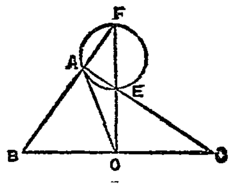
(附定理從圓外一切引割線,則其兩部分所包之矩形,等於該點所引切線上之正方形.)

128. 有直角三角形ABC,從其斜邊BC之中點O作立於此斜邊之垂線,而交他之二邊於E,F連結AO,則$\overline{AO}^2=OE\cdot OF$.

【證】

∵ $\angle FAC=\angle FOC=\angle R$,

∴ F,A,O,C同在圓周上,



$\therefore \angle F=\angle C$.

然 $\angle C=\angle OAC$.

($\because \triangle ABC$ 之 $\angle A=\angle R$)

$OA=OB=OC$,

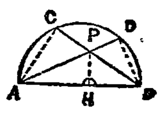
$\therefore \angle F=\angle OAC$.

$\therefore$ OA 切於圓 AEF,

$\therefore \overline{AO}^2=OE\cdot OF$.

129. 有半圓 ABCD, 引弦 AD,BC 相交於 P,則$AP\cdot AD+BP\cdot BC=\overline{AB}^2$.

【證】



作 $PH\perp AB$,

$\therefore \angle H=\angle R$.

$\angle D=\angle R$.

$\therefore$ 四邊形 PHBD 內接於圓,

$\therefore AP\cdot AD=AH\cdot AB$.……………………(1)

同樣四邊形 AHPC 內接於圓,

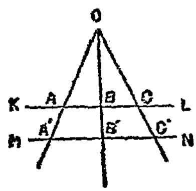
$\therefore BP\cdot BC=BH\cdot AB$.…………………(2)

(1)+(2)

$$AP \cdot AD + BP \cdot BC = AB(AH + BH)$$
$$= AB \cdot AB$$
$$= \overline{AB}^2.$$

130. 從一點引三直線,交二平行線於 A,B,C 及 A′,B′,C′, 則 AB:BC=A′B′:B′C′.

【證】



$\because \triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$,

$\therefore AB:A'B' = OB:OB'$.

又 $\triangle OBC \backsim \triangle OB'C'$,

$\therefore OB:OB' = BC:B'C'$.

$\therefore AB:A'B' = BC:B'C'$.

$\therefore AB:BC = A'B':BC'$.

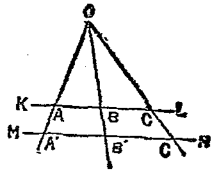
131. 二個平行線上之 A,B,C 及 A′,B′,C′ 適於 AB:BC=A′B′:B′C′;則連結 AA′,BB′,CC′ 三直線,或其延長線上,必同過一點.

【證】

AA'；BB'之交點爲O，

結OC交MN於C''；

證明C''合於C'卽得。



依前題

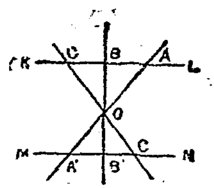
$AB:BC=A'B':B'C''$；

依題意

$AB:BC=A'B':B'C'$；

$\therefore B'C'=B'C''$.

$\therefore C''$合於C'.



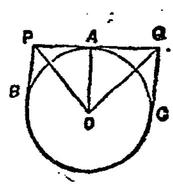
132. 圓之二切線平行，又於A點作第三切線交平行二切線於P, Q；則此圓之半徑爲AP, AQ間之比例中項。

【證】

$\because PB /\!/ QC$,

$\therefore \angle BPQ+\angle CQP=2\angle R$.

然 $\angle OPA=\frac{1}{2}\angle BPQ$,



$\angle OQA=\frac{1}{2}\angle CQP$,

$\therefore\ \angle OPA+\angle OQA=\frac{1}{2}(\angle BPQ+\angle CQP)$

$=\angle R$.

$\therefore\ \triangle OPQ$ 爲直角三角形.

$\therefore\ OA\perp PQ$,

然直角三角形從直角之頂點,向斜邊作垂線,

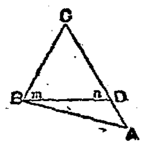
則垂線爲斜邊二部之比例中項.

$\therefore\ PA:OA=OA:AQ$.

133. ABC爲二等邊三角形,以其底BC爲半徑,B爲中心,畫圓周截AC邊於D,則BC爲AB,CD之比例中項.

【證】

於 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$,



其 $\angle n=\angle C=\angle ABC$,

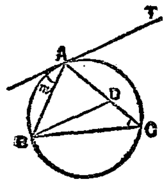
$\therefore\ \angle m=\angle A$.

$\therefore$ 兩形相似.

$\therefore\ AB:BC=BC:CD$.

134. 有三角形 ABC,從其外接圓周A點引切線,又過B點引該切線之平行線,而交AC於D;則AB為AC,AD之比例中項.

【證】



過A收切線AT,

其 $\angle m=\angle C$,

然 $\angle m=\angle ABD$;

($\because$ BD$/\!/$AT)

$\therefore$ $\angle C=\angle ABD$.

然 $\triangle ABD$, $\triangle ACB$ 共有 $\angle A$ 且他之一角相等,故相似.

$\therefore$ AC:AB=AB:AD.

135. 有△ABC從底邊BC之中點D,作 $\angle ADB$, $\angle ADC$, 則該二角之二等分線各交二邊於E,F;則EF$/\!/$BC.

【證】

$\because$ DE為 $\angle ADB$ 之二等分線,

∴ AE:EB=AD:BD.………(1)

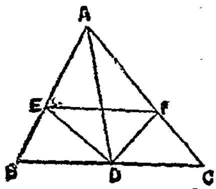
又 DF 爲 ∠ADC 之二等分線,

∴ AF:FC=AD:DC.………(2)

(1)(2) 左邊相等,

∴ AE:EB=AF:FC.

∴ EF∥BC.



136. 有 △ABC 引底邊 BC 平行線 ED, 交 AB,AC 於 E,D; 而 BD,CE 之交點爲 F, 過 F 引 BC 之平行線 KL, 交 AB,AC 於 K,L; 則 KL 之二等分點爲 F.

【證】

∵ △EKF∽△EBC,

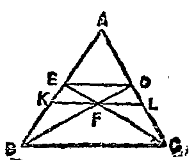
∴ KF:BC=EK:EB.

又 △DFL∽△DBC,

∴ ∥L:BC=DL:DC.

然 EFDLK∥BC,

∴ EK:EB=DL:DC.



∴ KF:BC=FL:BC.

∴ KF=FL.

137. CA,CB 爲圓之互垂半徑 DE 爲任意之弦 BD,BE;各交 AC 於 F 及 G,則 △BFG ∽△BED.

【證】

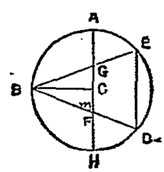
∠m 等於 $\overparen{AB}$,$\overparen{HD}$ 之中心角之和之半分,

∠E 等於 $\overparen{BH}$,$\overparen{HD}$ 之中心角之和之半分,

然 $\overparen{AB}=\overparen{BH}$,

(∵AC⊥BC)

∴ ∠m=∠E.



然 △BFG,△BED,

共有 ∠EBD.

∴相似.

138. 從 △ABC 之一邊 BC,引平行線交他之二邊 AB,AC 於 D,E;連結 DC,BE;其交點爲 F,則過 A,F 之直線必分邊 BC 爲二

等分.

【證】

∵ $\triangle DHF \backsim \triangle CGF$,

∴ $DH:GC=HF:FG$.

又 $\triangle HFE \backsim \triangle GFB$,

∴ $HE:BG=HF:FG$.

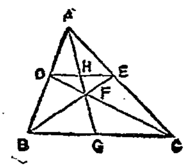
∴ $DH:GC=HE:BG$.

∴ $DH:HE=GC:BG$.

然 $DH:HE=BG:GC$.

∴ $GC:BG=BG:GC$.

∴ $BG=GC$.



139. 有 $\triangle ABC$, D 爲邊 AB 上之點, E 爲邊 AC 上之點, D, E 分 AB, AC 爲 3:2; 則 BE, CD 分其他爲 5:2.

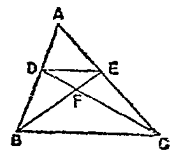
【證】

∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

∴ $DE:BC=AD:AB$.

然 AD:AB=AD:AD+DB

=2:2+3=2:5.



∴ DE:BC=2:5,

然 △DFE∽△CFB.

∴ DF:FC=EF:FB=DE:BC=2:5,

或 FC:DF=FB:EF=5:2.

【應用】三角形 ABC 之二邊 AB, AC 之上各設 D,E 點,而 AD:DB=AE:EC=1:2.結 CD,BE; 其交點為 F,過 F 作與底邊 BC 平行線 GH,且在二邊之間,則第一 GF=FH.

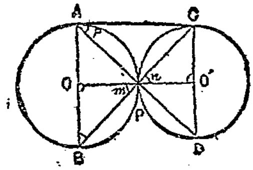
第二 G,H 各為 AB,AC 之中點.

140. **有外切二圓,不過原切點引一共通切線,則其兩切點間之部分,為二圓直徑間之比例中項.**

【證】

圓 O,O′ 外切於 P. AC 為共通切線. AB,CD 為其直徑.則 AC 為 AB,CD 之比例中項.

試結 BP,PC,OP,PO′



則 $\angle O=\angle O'$,

$\therefore$ $\angle B+\angle m=\angle n+\angle O'CP$.

即 $2\angle m=2\angle n$.

$\therefore$ $\angle m=\angle n$,

$\therefore$ BP:PC 爲一直線.

然 $\angle P=\angle B$, $\angle BAC=\angle ACD$,

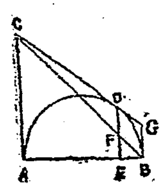
$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle CAD$.

$\therefore$ $AB:AC=AC:CD$.

141. 從半圓之直徑AB之一端A,引切線AC.次引第二切線CD,作DE爲AB之垂直線,結CB,則CB分DE爲二等分.

【證】

$\because$ $\triangle CFD \backsim \triangle CBG$,



$$\therefore \frac{CD}{DF}=\frac{CG}{GB}=\frac{CG}{DG}(\because GD=GB)$$

$$=\frac{AB}{EB}(\because GB /\!/ DE /\!/ CA)$$

$$=\frac{CA}{FE}(\because \triangle CAB \backsim FEB).$$

即$\frac{CD}{DF}=\frac{CA}{FE}$,

然 $CD=CA$.

$\therefore DF=FE$.

142. D爲三角形底邊BC上之點,則三角形ABD,ACD之外接圓直徑之比,等於AB:AC.

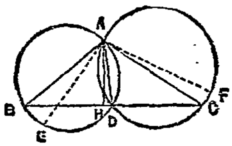
【證】

$\because$ 三角形之外接圓之直徑,爲高與二邊之第四比例項.

$\therefore$ AE,AF 爲直徑.

則 $AH:AD=AB:AE$.

同樣 $AH:AD=AC:AF$.



$\therefore AB:AE=AC:AF$.

$\therefore AE:AF=AB:AC$.

143. 有三個平行線AA′,BB′,CC′;又有二直線各交於A,B,C,A′,B′,C′.設AB:BC=m:n

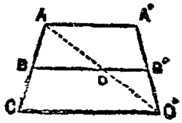
則 $(m+n)BB'=nAA'+mCC'$.

【證】

$\because \triangle ABD \backsim ACC'$,

$\therefore BD:CC'=AB:AC$

$=m:m+n$.



即 $(m+n)BD=mCC'$.⋯⋯(1)

又 $\triangle DC'B' \backsim \triangle AC'A'$,

$\therefore DB':AA'=B'C':A'C'$

$=n:m+m$.

$\therefore (m+n)DB'=nAA'$.⋯⋯(2)

(1)+(2) 得

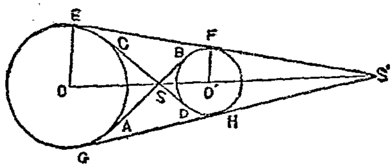
$(m+n)(BD+DB')=nAA'+mCC'$.

$\therefore (m+n)BB'=nAA'+mCC'$.

142. 二圓共同切線,各對之交點與其中心結成直線,則此直線與半徑之比,爲內分或外分.

【證】

EF 為二圓 O,O′ 之共通切線，與 OO′ 各延長之交於 S′；結 OE，O′F 則 $\triangle EOS' \backsim \triangle FO'S'$；



$\therefore OS':O'S' = OE:O'F$.

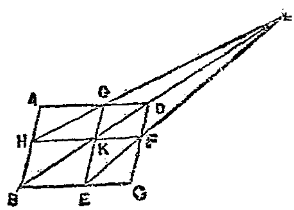
即 S′ 為 O O′ 與半徑比之外分點。

同樣知 S 為內分點。

145. 平行四邊形兩餘形對角線之延長線，必與原四邊形對角線之延長線，會於一點。

【證】

令 HG 交 BKD，於 L 證明 EF 必過 L 即得。



$\because \triangle GDL \backsim \triangle HKL$,

$\therefore \dfrac{LD}{LK} = \dfrac{GD}{HK}$

$$=\frac{GK}{HB}\ (\because \triangle GKD \backsim \triangle HBK)$$

$$=\frac{BE}{KF}.$$

即$\frac{LD}{LK}=\frac{DF}{KE}$.

∴ 連結 LF, LE.

則 $\triangle LDF \backsim \triangle LKE$.

∴ $\angle DLF=\angle KLE$.

∴ EF 必過 L.

146. 設 A,B,C,D 爲調和列點,

$$\text{則}\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB},$$

又 AB 之中點爲 O, 則

$$OC:OB=OB:OD.$$

【證】

由假設$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,

即$\frac{CB}{AC}=\frac{DB}{AD}$.

$$\frac{CB+AC}{AC}=\frac{DB+AD}{AD},$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{2AD-AB}{AD},$$

$$\frac{AB}{AC}=2-\frac{AB}{AD};$$

$$\therefore \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$

又由 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,

$$\frac{AC-CB}{AC+CB}=\frac{AD-DB}{AD+DB},$$

即 $\frac{2OC}{2OB}=\frac{2OB}{2OD}$,

$\therefore$ OC:OB = OB:OD.

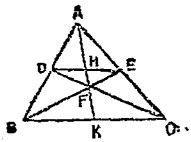
147. 引 $\triangle$ABC 之底 BC 之平行線 DE, 連結 DC 及 BE 相交於 F, 又結 AF 且延長之交 DE 及 BC 於 H 及 K; 則 A, H, F, K 爲調和列點.

【證】

$$\frac{HF}{FK}=\frac{HE}{BK},$$

($\because \triangle HFE \backsim \triangle KFB$)

$$=\frac{HE}{KC}.$$



(由問題 28 知 $BK=KC$)

$$=\frac{AH}{AK}.$$

($\because \triangle AHE \backsim \triangle AKC$)

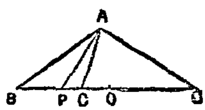
即 $\frac{HF}{FK}=\frac{AH}{AK}$.

$\therefore$ A,H,F,K 爲調和列點.

148. 從 $\triangle ABC$ 之頂角A,作二等分線,交底邊BC於P點,又從該頂角作外角之二等分線,交BC之延長線於Q點,而PQ之中點爲O;則(1) $OB \cdot OC=\overline{OA}^2$;(2) $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$;試證之.

【證】

AP 爲 $\angle BAC$ 之二等分線,



AQ 爲其外角,

$\therefore \angle PAQ=\angle R$,

而 O 爲 PQ 之中點,

$\therefore$ PO=AO=OQ.

次 $\frac{BP}{PC}=\frac{BQ}{QC}=\frac{AB}{AC}$, $\therefore\frac{BP+BQ}{PC+QC}=\frac{BQ-BP}{QC-PC}=\frac{AB}{AC}$.

即 $\frac{2OB}{PQ}=\frac{PQ}{2OC}=\frac{AB}{AC}$.........(1)

$\therefore$ $4OB\cdot OC=4\overline{OP}^2$, 即 $OB\cdot OC=\overline{OP}^2=\overline{OA}^2$.

又 $\frac{2OB}{2OP}\times\frac{2OP}{2OC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$, 從 (1)

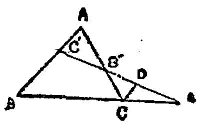
即 $\frac{OB}{OC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

149. 一直線交 $\triangle ABC$ 之邊 BC, CA, AB 於 A', B', C' 點, 則三比 $AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$ 之相乘比爲 1.

【證】

引 CD∥AB,

則 $\triangle AC'B'\backsim\triangle CDB'$,



$\therefore\frac{AB'}{B'C}=\frac{AC'}{CD}$.........(1)

又 $\triangle A'DC\backsim\triangle A'C'B$,

$\therefore \dfrac{CA'}{A'B}=\dfrac{CD}{BC'}$ ....(2)

又 $\dfrac{BC}{C'A}=\dfrac{BC'}{C'A}$ ....(3)

∴ (1) (2) (3) 爲

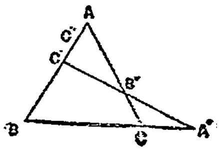
$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=\frac{AC'}{CD}\cdot\frac{CD}{BC'}\cdot\frac{BC'}{AC'}=1.$$

150. 分△ABC之邊BC,CA,AB於A′,B′,C′點,其三比AB′:B′C,CA′,A′B,BC′:C′A之相乘比等於1;則A′,B′,C′同在一直線上.

【證】

結 A′B′ 且延長之交 AB 於 C″,

由前題



$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC''}{C''A}=1.$$

然依假設

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1.$$

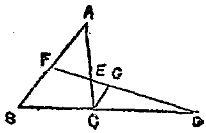
$$\therefore \frac{BC''}{C''A}=\frac{BC'}{C'A}.$$

∴ C″合於 1.

【應用】三角形各頂角之外角,分爲二等分,則其二等分線交邊之延長線上之三點,當同在一直線上,試證之.

151. 直線DEF交三角形之邊BC, CA, AB於D, E, F點,與AB及AC成相等之角,則有次之關係.BD:CD=BF:CE.

【證】



引 CG∥AB,

則 △FBD∽△GCD.

∴ BD:CD=BF:CG.

然 ∠AEF=∠AFE(假設)

=∠CGE.

即 ∠CEG=∠CGE,

∴ CG=CE.

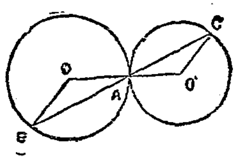
∴ BD:CD=BF:CE.

152. 二圓相切於A,通過A任意引一直線,交二圓周於B,C;則比AB:AC常不變.

【證】

令圓之中心爲O,O′;

結OA,OB,O′A,O′C;



則O,A,O′在一直線上.

而$\triangle OAB \backsim \triangle O'AC$.(∵三角相等)

∴ $AB:AC=OB:O'C$.

然$OB:O'C$爲半徑之比,一定不變.

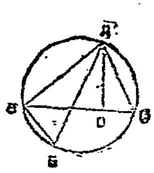
∴ $AB:AC$亦爲一定不變.

153. $\triangle ABC$之二邊AB,AC所包之矩形,等於從A向BC之垂線,與其外接圓之直徑所包之矩形.

【證】

令AD爲垂線,

AE爲直徑,



連結BE,

然$\triangle ABE$, $\triangle ADC$;

其$\angle E=\angle C$,

$\angle ABE = \angle ADC = \angle R$.

$\therefore\ \triangle ABE \backsim \triangle ADC$.

$\therefore\ AB:AE = AD:AC$.

$\therefore\ AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

154. 有平行四邊形 ABCD, 過其對角線 AC 上任意一點 P, 引一直線交邊 BA, BC, AD, DC 於 M, N, M′, N′; 則 $PM \cdot PN = PM' \cdot PN'$.

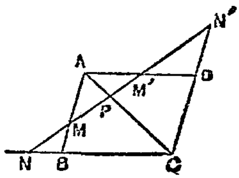
【證】

$\because\ \triangle PNC \backsim \triangle PM'A$,

$\therefore\ PN:PM' = PC:AP$.

又 $\triangle AMP \backsim \triangle CN'P$,

$\therefore\ PM:PN' = AP:PC$.



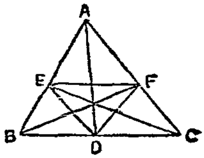
$\therefore\ PN:PM' = PN':PM$.

$\therefore\ PM \cdot PN = PM' \cdot PN'$.

155. 直線 AD 分 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 爲二等分, 而交邊 BC 於 D, 又直線 DE, DF 各分

$\angle$ADB, $\angle$ADC為二等分,且各交邊AB, AC於E,F點;則$\triangle$BEF:$\triangle$CEF等於AB:AC.

【證】



$\triangle$AEF:$\triangle$BEF

=AE:EB

(∵F為頂點故高相等)

=AD:BD.

(∵ DE為$\angle$ADB之二等分線)

即 $\triangle$AEF:$\triangle$BEF=AD:BD,

同樣 $\triangle$CEF:$\triangle$AEF=DC:AD.

邊邊相乘,則

$\triangle$CEF:$\triangle$BEF=DC:BD

=AB:AC.(∵AD為$\angle$BAC之二等分線)

156. 設ABC為正三角形,P為其外接圓周上對於BC在A反對之側之點,則PA上之正方形等於PB, PC所包之矩形,及BC上正方形之和.

【證】

$\because \angle P=\angle ACB=\angle n$,

$\therefore$ AB 爲 $\triangle PBD$ 外接圓之切線,

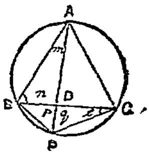
$\therefore AD\cdot AP=\overline{AB}^2$ ………(1)

又 $\angle p=\angle q, \angle l=\angle m$.

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle CDP$,

$\therefore AP:BP=CP:PD$.

$\therefore PD\cdot AP=BP\cdot PC$. ………(2)



(1)+(2)

$(AD+DP)AP=\overline{AB}^2+BP\cdot PC$.

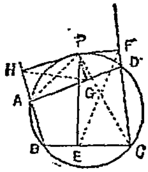
即 $\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+BP\cdot PC$.

157. 從圓周上之一點,至內接四邊形作垂線,則其向對邊之垂線所包之矩形相等.

【證】

P 爲圓周上之一點,

ABCD 爲其內接四邊形從 P 向各邊作垂線.



PE,PF,PG,PH

連結 PA,PC 及 HG,EF,

則 $\angle PGH=\angle PAH=\angle PCE=\angle PFE$,

又 $\angle PHG=\angle PAG=\angle PCF=\angle PEF$,

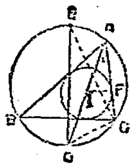
$\therefore\ \triangle PHG \backsim \triangle PEF$.

$\therefore\ PH:PG=PE:PF$.

$\therefore\ PH \cdot PF=PG \cdot PE$.

158. 有三角形其外接圓之直徑,及內接圓之半徑,所包之矩形,等於過內接圓中心之外接圓之弦分(中心爲分點)所包之矩形.

【證】



I 爲 $\triangle ABC$ 之內心,

AI 延長交圓周於 D,

DE 爲外接圓之直徑.

則 $IF \perp AC$,

就 $\triangle EDC$,$\triangle AIF$,

其 $\angle E=\angle m$,

$\angle ECD=\angle AFI=\angle R$,

∴ 兩形相似.

∴ $ED:AI=DC:IF$,

∴ $ED\ IF=AI\cdot DC$

$=AI\cdot ID$(∵$DC=ID$).

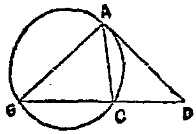
159. ABC爲內接於圓之三角形,從A點引切線交BC之延長部於D點,則

$CD:BD=\overline{CA}^2:\overline{BA}^2$.

【證】

就 $\triangle ABD$,

$\triangle CAD$,



其 AD 爲切線,

∴ $\angle B=\angle CAD$.

而 $\angle D$ 爲共通,

∴ 兩形相似.

∴ $\triangle CAD:\triangle ABD=\overline{CA}^2:\overline{BA}^2$,……(1)

然 $\triangle CAD$, $\triangle ABD$,

其 $\angle A$ 爲頂角.

則高相等.

$\therefore$ $\triangle CAD : \triangle ABD = CD : BD$.………(2)

從(1)(2)得

$CD : BD = \overline{CA}^2 : \overline{BA}^2$.

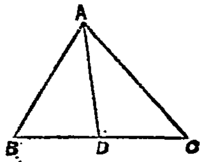
160. AD分 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 爲二等分,則 $\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$.

【證】

$\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 各以 $\angle A$ 爲頂點則高相等.

$\therefore$ 面積之比等於底邊之比.

即 $\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC$………(1)



然 AD 爲 $\angle A$ 之二等分線.

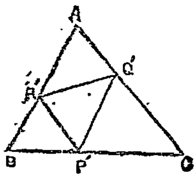
$\therefore$ $BD : DC = AB : AC$………………(2)

從 (1)(2) 得

$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$.

161. 有$\triangle ABC$從邊AB上取$AA'=\frac{1}{3}AB$，邊BC上取$BB'=\frac{1}{4}BC$，邊CA上取$CC'=\frac{1}{5}CA$，作成$\triangle A'B'C'$，則$\triangle A'B'C'$與$\triangle ABC$之面積之比若何.

【證】



$\because \triangle AA'C' : \triangle ABC$

$=(AA' : AB)(AC' : AC)$

$=(1:3)(4:5)$

$=4:15.$

即 $\triangle AA'C'=\frac{4}{15}\triangle ABC$,

又 $\triangle BB'A' : \triangle ABC$

$=(BA' : BA)(BB' : BC)$

$=(2:3)(1:4)$

$=1:6.$

$\therefore \triangle BB'A=\frac{1}{6}\triangle ABC.$

又 $\triangle CC'B' : \triangle ABC=(CB' : CB)(CC' : AC)$

$=(3:4)(1:5)=3:20.$

$\therefore\ \triangle CC'B'=\frac{3}{20}\triangle ABC,$

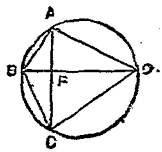
$\therefore\ \triangle AA'C'+\triangle BB'A+\triangle CC'B$

$$=\left(\frac{4}{15}+\frac{1}{6}+\frac{3}{20}\right)\triangle ABC=\frac{35}{60}\triangle ABC=\frac{7}{12}\triangle ABC.$$

$\therefore\ \triangle A'B'C':\triangle ABC=7:12.$

162. **內接於圓四邊形之對角線互為垂線,則對邊所包矩形之和,為四邊形之二倍.**

【證】



因內接於圓四邊形對邊所包矩形之和,等於對角線所包之矩形.

故 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$

然由假設 $AC\perp BD,$

$\therefore AC\cdot BD=AC(BE+ED)$

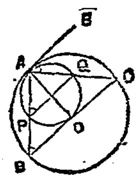
$=AC\cdot BE+AC\cdot ED$

$=2\triangle ABC+2\triangle ACD$

$=2ABCD.$

163. 有二圓內切於A,令切小圓周上之一點D,引大圓之弦BC結AB,AC,交小圓周於P,Q,則DC·AP＝DB·AQ.

【證】



∵ AE 爲二圓之共通切線,

∴ ∠A＝∠P,

∠A＝∠B,

∴ ∠P＝∠B,

PQ∥BC.

∴ AP:AQ＝AB:AC.

然依題意

AD 爲 ∠BAC 之二等分線.

∴ BD:DC＝AB:AC＝AP:AQ.

卽 BD:DC＝AP:AQ.

卽 DC·AP＝DB·AQ.

164. 以三中線作一三角形,則其面積對於原形面積之比若何.

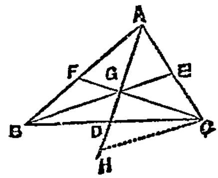
【解】

AD,BE,CF 爲中線,

G 爲重心,作 CH∥AB,

延長 AD 交於 H,則

△GHC 之三邊各由三



中線之$\frac{2}{3}$而成.

而 △DHC=△DGB.

∴ △DHC+△GDC=△GBD+△GDC=△GBC.

然 △GBC:△ABC=GD:AD.

從 G,A 作底 BC 之垂線,則容易證明.

然 GD=AD=1:3,

∴ △GBC:△ABC=1:3,

即 △GHC:△ABC=1:3,

而三中線所成三角形之面積爲 s,則

s:△GHC$=3^2:2^2=\frac{9}{4}$,即 △GHC$=\frac{4}{9}$s.

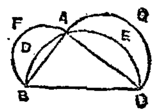
∴ $\frac{4}{9}$s:△ABC=1:3,

∴ s:△ABC=3:4.

165. 有直角三角形ABC,從斜邊BC上與三角形同側作一半圓BDAEC,又AB,AC在三角形反對之側,各作一半圓BFA,AGC;則BDAF,AGC則BDAF及AECG之和如何?

【解】

∵圓面積之比等於其直徑上正方形之比,就圓言亦同樣也.



∴ 半圓ABF:半圓ABC$=\overline{AB}^2:\overline{BC}^2$,

又半圓ACG:半圓ABC$=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$,

∴ 半圓ABF+半圓ACG:半圓ABC

$$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=\overline{BC}^2:\overline{BC}^2=1.$$

∴ 半圓ABF+半圓ACG=半圓ABC.

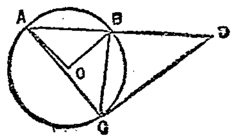
雙方去其共通之部分,則

圓形BDAF+圓形AECG=直角三角形ABC.

166. A,B,C爲圓周上之三點,D在直線

AB之延長線上,令 $AB=BC=BD$,則此圓之半徑等於$\overline{AB}^2\div CD$.試證之.

【證】



$\because AB=BC$,

$\therefore \angle ACB=\angle CAB$,

$\therefore \angle CBD=\angle ACB+\angle CAB$

$\qquad =2\angle ACB$

$\qquad =\angle AOB$.

即 $\angle CBD=\angle AOB$.

然 $\triangle OAB$,$\triangle BCD$ 爲二等邊三角形.

其頂角相等,故底角亦相等.

由是知兩形相似.

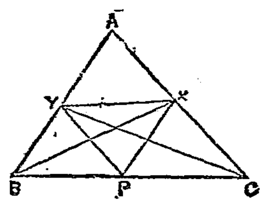
$\therefore \frac{OA}{AB}=\frac{BC}{CD}$,

即 $OA=\frac{AB\cdot BC}{CD}=\frac{\overline{AB}^2}{CD}$.

167. 有 $\triangle ABC$ 從底邊BC上之一點P,引二邊AB,AC之平行線PX,PY,交AC,AB

於XY;則$\triangle AXY$為$\triangle XPC$, $\triangle BYP$之比例中項.

【證】



$\because \frac{\triangle BYP}{\triangle AXY}=\frac{BY}{AY}$,

(BY,AX各作底看則高相等)

又$\frac{\triangle AXY}{\triangle XPC}=\frac{AX}{CX}$.

(AX,CX各作底看則高相等)

然$\triangle YBP \backsim \triangle XPC$($\because$各角各等)

$\therefore \frac{BY}{PX}=\frac{PY}{CX}$, $\therefore \frac{BY}{AY}=\frac{AX}{CX}$,

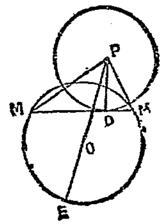
$\therefore \frac{\triangle BYP}{\triangle AXY}=\frac{\triangle AXY}{\triangle YPC}$.

168. 從圓周上一點P,為中心任意取一半徑作圓,切於後圓,引前圓之弦MN,則弦之位置不變;而常等於PM,PN.

【證】

D為MN切於P圓之點。

PE為O圓之直徑。



則 PM:PE=PD:PN,

∴ PM·PN=PD·PE.

然 PD,PE 各為定量,

∴ PD·PE 為定量。

從而 PM·PN 為定量。

169. 有圓之內接四邊形 ABCD, 試延長其對邊,相交於點P,則PB·AC=PA·BD.

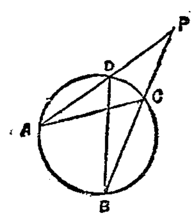
【證】

就 △PAC,△PBD,

其 ∠P 共通.

又 ∠A=∠B,

∴ 兩形相似。

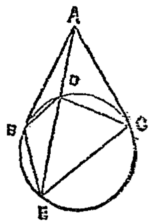


$\therefore \dfrac{PB}{PA}=\dfrac{BD}{AC}$,

∴ PB·AC=PA·BD.

170. 從圓外一點,引其圓之二切線及一割線以切線之二切點及割線之二交點,結成四邊形.則其二組對邊所包之矩形相等.試證之.

【證】



$\because$ $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$,

($\because$ $\angle BAE$ 爲共通

而 $\triangle ABD=\angle AEB$)

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BD}{BE}$.……(1)

又 $\triangle ADC \backsim \triangle ACE$.

($\because \angle EAC$ 共通而 $\angle ACD=\angle AEC$)

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DC}{EC}$.……(2)

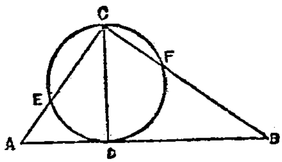
而 $AB=AC$. 故由 (1),(2)

$$\frac{BD}{BE}=\frac{DC}{EC}.$$

$\therefore$ $BD \cdot EC=DC \cdot BE$.

171. 有直角三角形ABC,試以斜邊AB爲底,其高CD爲直徑作圓交二邊AC, CB於E,F;而BF,AE,BC,及AC各以x,y,a,及b代之.則$x:y=a^3:b^3$.試證之.

【證】



∵ BD切於圓ECF,

∴ $\overline{BD}^2=BF\cdot BC=xa$,

又AD切於圓ECF,

∴ $\overline{AD}^2=AE\cdot AC=yb$,

∴ $\overline{BD}^2:\overline{AD}^2=ax:by$.

然△ABC其∠C=∠R, CD⊥AB,

∴ $\overline{BD}^2:\overline{AD}^2=\overline{BC}^4:\overline{AC}^4=a^4:b^4$,

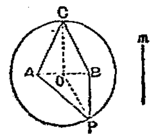
∴ $ax:by=a^4:b^4$,

∴ $x:y=a^3:b^3$.

172. 從二定點至一點之距離上作正方形,令此兩正方形之和,等於所設之正方形;試求該點之軌跡.

【解】

A,B 爲二定點;C 爲適於要件之點.



O 爲 AB 之中點.

連結 CA,CB,CO; 則

$$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2\overline{CO}^2+2\overline{AO}^2.$$

$$\therefore\ 2\overline{CO}^2+2\overline{AO}^2=m^2.$$

然 AO 之長爲一定,而 $2\overline{AO}^2$ 亦爲一定,

從而 $2\overline{OC}^2$ 爲一定,

∴ CO 之長爲一定.

∴ C 在中心 O, 半徑爲一定之長,所作圓之周上, 次從此圓周上任意取點 P; 連結 PA,PO;則

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{AO}^3=2\overline{CO}^2+\overline{CO}^2=m^2.$$

∴ P 適於要件.

摘要第六

軌跡及作圖

軌跡

1. 立於同底上面積相等之三角形，其頂之軌跡爲底之平行直線.

2. 至二定點距離上正方形之和爲一定，則其點之軌跡，爲一圓周.

3. 如前題其差爲一定，則其點之軌跡爲一直線.

4. 引二圓之切線相等，則其點之軌跡爲一直線.

5. 至二定點距離之比爲一定，則其點之軌跡爲一圓周.

作圖題

1. 所設之多角形，作爲等積三角形.

2. 所設三角形,就所設之直線上作等積平行四邊形.

3. 所設之矩形,作等積正方形.

4. 在定線分上作所設多角形之相似多角形.

5. 依一定正方形,作比 m:n 之正方形.

6. 分線分爲中末比.

7. 作正方形,正八邊形等.

8. 作正三角形,正六邊形等.

9. 作正十邊形,正五邊形等.

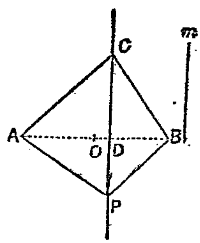
軌跡及作圖

173. 從二定點至一點距離上正方形之差,等於所設之正方形,試求該點之軌跡.

【證】

C為適於要件之點,

作 CD⊥AB, 結 CA,CB;



然 $\overline{CA}^2 \sim \overline{CB}^2$

$=(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)$

$=\overline{AD}^2-\overline{BD}^2$

$=(AD+BD)(AD-BD)$

$=AB\cdot 2OD$

$=2AB\cdot OD=m^2$.

然 2AB 為一定,∴ OD 之長亦為一定.

從而 D 點為定點,∴ C 在定點 D 之垂直線上.

次取此直線上之點為 P.

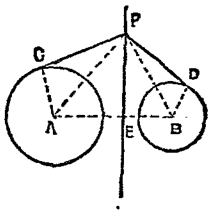
結 PA,PB.

$\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=\overline{DB}^2-\overline{AD}^2=2AB\cdot OD=m^2$。

∴ P 適於要件。

174. 從一點至二定圓引相等之切線，試求其點之軌跡(此軌跡云二圓之根軸)

【證】



A,B 爲二圓之中心，

P 爲適於要件之點，

連結 AP,PB;

又 PC,PD 爲切線。

連結 AC,BD 作 PE⊥AB。

然 $\overline{PC}^2=\overline{PA}^2-\overline{AC}^2$，

$\overline{PD}^2=\overline{PB}^2-\overline{BD}^2$。

又 PC=PD，

∴ $\overline{PA}^2-\overline{AC}^2=\overline{PB}^2-\overline{BD}^2$。

即 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BD}^2$。

然 $\overline{AC}^2-\overline{BD}^2$ 爲定量，

∴ $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2$ 爲定量。

∴由前題P在AB之垂直線上.

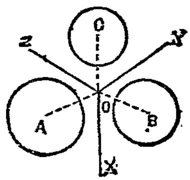
175. 三定圓之各二圓之根軸,會於一點.(此點云三定圓之根心)

【證】

A,B圓之根軸爲OX;

B,C圓之根軸爲OY;

其交點爲O,



茲證明A,C圓之根軸過O.

令A,B,C圓之半徑,各爲R,R′,R″;則

$$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=R^2-R'^2$$

$$\overline{OB}^2-\overline{OC}^2=R'^2-R''^2 \quad (+$$

$$\overline{OA}^2-\overline{OC}^2=R^2-R''^2.$$

∴O在A,C圓根軸之上.

176. 從一點向二等邊三角形之相等二邊,引一垂線,其所包之矩形,等於從同

點向底邊所引垂線上之正方形,則其點之軌跡,爲向兩等邊切於底邊兩端之圓周.

【證】

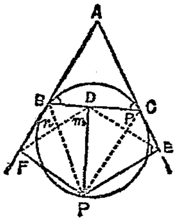
P 爲適於要件之點,

PE,PF,PD 各爲垂線,

則 $PE \cdot PF = \overline{PD}^2$.

$\therefore$ $PE:PD = PD:PF$,

而 $\angle DPE$, $\angle DPF$;



爲等角 $\angle BCE$, $\angle FBC$ 之補角,故亦相等.

故 $\triangle PDE$, $\triangle PFD$ 其一角等夾角之二邊,有比例爲相似.

$\therefore$ $\angle E = \angle m$,

而 $\angle E = \angle P$, $\angle m = \angle n$;

$\therefore$ $\angle P = \angle n$.

$\therefore$ 作圓 PBC,則此圓切於 AB 之 B 點.

同樣證明切於 AC 之 C 點.

177. 至相交二直線,有一定之比,試求該點之軌跡.

【證】

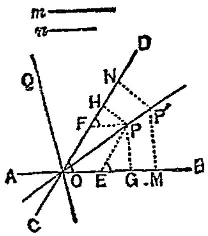
AB;CD 爲相交二直線,

P 爲適於要件之點,

引 PE∥OD,PF∥OB;

由假設 PG:PH

=m:n.



然 △PEG∽△PFH.

∴ PE:PF=PG:PH=m:n.

而 ▱FOEP 一角相等二隣邊之比爲一定,故其形爲一定.

從而 P 過 O 及過 PE:PF=m:n 之直線上.

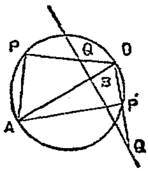
次取 P′ 爲此直線上之點 P′M,P′N,爲各至 OB,OD 之距離,則

P′M∥PG,P′N∥PH.

∴ P′M:P′N=PG:PH=m:n.

178. 從圓周上之一定點引一弦 OP. 又於此直線上求一點Q令 OP,OQ 之積等於所設之矩形,則Q之軌跡如何?

【證】



過 O 作直徑 OA,

Q 爲適於要件之點.

又 OB·OA=OP·OQ.

連結 QB,PA;

然 △OQB∽△OAP.(∵三角相等)

∴ OB:OQ=OP:OA.

∴ OA·OB=OP·OQ=定量.

然 OA 爲一定,故 OB 爲一定.

∴ B 爲定點.

∴ Q 在 B 點,垂於 OA 之直線上.

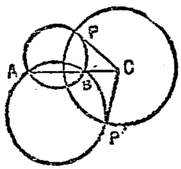
次此直線 Q,亦適於要件.

此容易證明.

179. 過直線 ABC 上之二定點 A,B 作

圓,從AB上之定點C,引該圓之切線,則該切點之軌跡,爲中心C之一圓.試證之.

【證】



CP 爲圓 ABP 之切線,P 爲切點,

CBA 爲圓 ABP 之割線.

∴ $CA\cdot CB=\overline{CP}^2$.

然 $CA\cdot CB$ 爲定量,

∴ CP 亦爲定量.

∴ P 在中心,C 適於 $CA\cdot CB=m^2$, 在半徑之圓周上.

次取此圓周上任意之點 P',

過 A,B,P' 作圓,

然 $\overline{CP'}^2=CA\cdot CB$.

∴ CP' 爲圓 ABP' 之切線.

∴ P' 適於要件.

180. 從定點引定圓之定線,依定比分

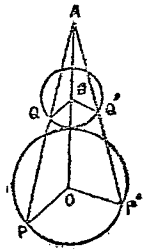
之.求其分點之軌跡.

【解】

A 爲定點, O 爲定圓之中心,

連結 O 圓周上任意一點 P, 至

A 結成 AP; 依



$AQ:AP=m:n$, 以決定 Q 點.

又依 $AB:AO=m:n$.

於 AO 上以決定 B.

連結 OP, BQ,

然 $\triangle APO \backsim \triangle AQB$, $\therefore AO:OP=AB:QB$.

$\therefore$ QB 之長爲一定, $\therefore$ Q 在中心 B 之圓周上.

次此圓周上任意一點 Q' 連結 AQ', 且延長之,

引 $OP' \parallel BQ'$ 交 AQ' 於 P'; 則

$AO:OP'=AB:BQ'=AB:BQ=AO:OP$.

$\therefore AO:OP'=AO:OP$.

$\therefore$ P' 在 O 圓周上.

卽 B 之圓周爲所求之軌跡.

181. 求二定點距離至定比之點之軌

跡.

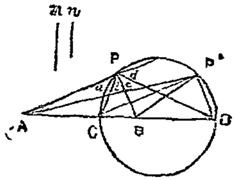
【解】

P爲適於要件之點,

依 m:n 分 AB 爲內分,

外分之點爲 C,D,連

結 PC,PD,然



$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,

∴ CP 爲 $\angle APB$ 之二等分線,

PD 爲 $\angle APB$ 之外角之二等分線.

∴ $\angle CPD=\angle R$.

∴ P 在直徑 CD 之圓周上,

次於此圓周上任意取一點 P',連結 P',C, P'A,

P'D 作 $\angle CP'B'=\angle AP'C$,則 $\angle CP'D=\angle R$.

而 $\angle AP'C=CP'B'$,∴P'D 爲 $\angle AP'B'$ 外角之二等分線.

$\therefore \frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB'}=\frac{AP'}{P'B'}$, $\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{CB'}{DB'}$,

又 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$, $\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{CB}{DB}$.

從 (1)(2) 知 B，B′ 相合 $\therefore \frac{AP'}{P'B}=\frac{m}{n}$.

182. 二定圓之視角相等,試求該點之軌跡.

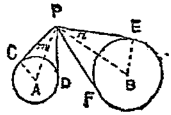
【證】

P 爲適於要件之點,

A,B 爲圓之中心.

連結 PC,PD,PEPF 爲切線.

則 PA,PB 分 $\angle CPD$，$\angle EPF$ 爲二等分線.



$\angle m=\angle n$,

而 $\angle C=\angle E=\angle R$,

$\therefore \triangle PCA \backsim \triangle PBE$,

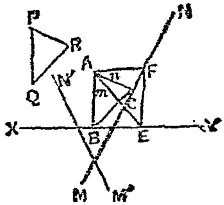
$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{CA}{BE}$.

$\therefore$ P 爲依 AB 定比.(兩圓半徑之比) 分點之軌跡.

183. 與定三角形相似之三角形之一頂點在一定點上,其他一頂點常在定直

線上,則第三頂點之軌跡,爲一直線.試證之.

【證】



A 爲定點,

PQR 爲定三角形,

XY 爲定直線,

作 $AB \perp XY$,

作 $\triangle ABC \backsim \triangle PQR$,

次作 AEF 爲適於他要件任意之三角形.

連結 FC,

然 $\triangle ABE$, $\triangle ACF$,

其 $\angle m = \angle n$.($\because \angle BAC = \angle EAF$)

又 $AB:AE = AC:AF$.($\because \triangle ABC \backsim \triangle AEF$)

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACF$, $\therefore \angle ACF = \angle ABE = \angle R$.

然 C 爲定點,AC 爲定直線,

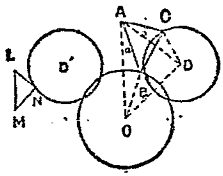
$\therefore$ F在 AC 一端 C 之垂直線上.

逆定理亦容易證明.

又有反對之側 M'N' 之軌跡.

184. △ABC常同一三角形相似,其一頂點A之位置有定,B點在定圓周上運動;試求C點之軌跡.

【證】



定圓之中心爲O,

連結AO,

作△AOD∽△LMN.

則△AIC爲適於要件之三角形.

連結BC,CD,

然△AOB,△ADC其∠m=∠n,(∵△AOD=△ABC)

又AO:AB=AD:AC,(∵△AOD∽△ADC)

∴ △AOB∽△ADC;

∴ AO:OB=AD:DC.

然AO,OB,AD爲一定量.

而CD爲其第四比例項,

∴ CD之長爲一定.

∴ C在中心D,半徑適於AO:OB=AD:x之x之

圓周上.

AOD 反對之側，亦得 D′ 之軌跡之圓.

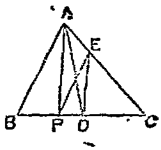
185. 試過三角形一邊中之定點,引一直線,分其面積爲二等分.

【作圖】

P 爲 △ABC 底邊 BC 上之點，

過 P 引直線 PE,分 △ABC 爲二等分.

先從 BC 之中點 D，至 A 連結 AD.



又連結 AP,引 DE//AP.

連結 PE，則 PE 爲所求之直線.

【證】

$\because$ △PDE=△ADE,($\because$ 等底等高)

$\therefore$ △PDE+△EDC=△ADE+△EDC.

即 △PEC=△ADC=$\frac{1}{2}$ △ABC.

186. 過四邊形之一頂點,引一直線,分此四邊形爲等積之二部分.

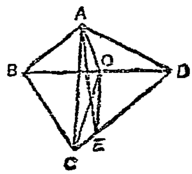
【作圖】

引四邊形ABCD之對角線BD,

其中點爲O,連結AC.

引OE∥AC,連結AE.

是即所求.



【證】

連結AO,OC,

其 $\triangle EAC=\triangle OAC$,(等高等底)

$\therefore\ \triangle EAC+\triangle ABC=\triangle OAC+\triangle ABC.$

即 $ABCD=ABCO=\triangle ABO+\triangle CBO$

$$=\frac{1}{2}(\triangle ABD+\triangle BCD)=\frac{1}{2}ABDC.$$

摘要第七

正多角形及圓

外接內接正多角形

1. 將圓周分為若干等分,從各分點,順次連之,則得內接正多角形,從各分點作切線,則得外接正多角形.

2. 正多角形之面積,等於周圍乘內接圓半徑之半.

3. 同邊數正多角形周圍之比,等於內接圓(或外接圓)半徑之比,其面積之比等於其二乘比.

4. 內接正多角形之一邊為 a, 相似外接正多角形之一邊為 a', 圓之半徑為 R.則

$$a' = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}.$$

5. 內接於圓正多角形之一邊爲 a, 其邊數二倍之內接正多角形之一邊爲 a′, 半徑爲 R, 則

$$a' = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}$$

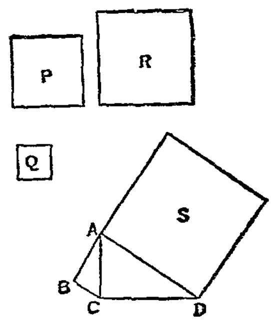
圓周及圓之面積

1. 二圓周之比,等於其半徑之比.
2. 周率之近似值,爲 $\pi = 3.1416$.
3. 圓之半徑爲 R,則周圍 $= 2\pi R$.
4. 圓之半徑爲 R,則面積 $= \pi R^2$.

正多角形及圓

187. 試作一正方形,等於若干正方形之和.

【作圖】



AB 等於正方形 P 之一邊,

BC 等於正方形 Q 之一邊,

作 ∠ABC 直角,引 CD,

令 CD 等於 R 之邊.

依此方法陸續行之,即得.

【證】

$S=\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=P+Q+R.$

三個以上之正方形,亦可依此法求之.

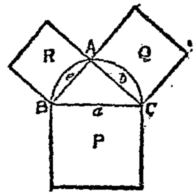
188. 試作一正方形等於二正方形之差.

【作圖】

作等於正方形P,Q之差之正方形.

則先以P之一邊a爲直徑畫圓.

其一端爲中心,等於Q之一邊爲半徑作弧,交於A點;自A至其他之一端,連結直線C,則C爲所求R之一邊.



【證】

$\because b^2+c^2=a^2$,

即 $Q+R=P$.

$\therefore R=P-Q$.

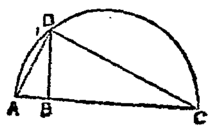
189. 試作正方形之n倍及n分之一之正方形.

【作圖】

引直線AC依$AB:BC=1:n$以定B點.

以AC爲直徑作圓,作$BD\perp AC$.

連結AD,DC則$\overline{DC}^2=n\overline{AD}^2$. $\boxed{P}$



【證】依定理

$\overline{AD}^2=AB\cdot AC$.

$\overline{DC}^2=BC\cdot AC$,

$\therefore \overline{AD}^2:\overline{DC}^2=AB:BC=1:n$(作圖)

$\therefore \overline{AD}^2:\overline{DC}^2=1:n$.

從而DA上取DA′等於P之一邊,

引AC之平行線得作rP.

190. 已知底邊,面積及從底邊一端,向對邊所引之中線,求作三角形.

【解】

由底邊及面積,可求得高,

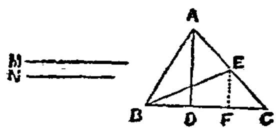
而作得$\triangle ABC$,

從中線BE之端E,引BC之垂線EF,

則$EF:AD=EC:CA$

$=1:2$.

$\therefore EF=\frac{1}{2}D$為既知量.



先作$\triangle EBC$.

然後依此再作$\triangle ABC$.

【作圖】

先取 BC=M,

從 BC 等於$\frac{1}{2}$H (H 爲高) 之距離之平行線以 B 爲中心, N 爲半徑作圓.

交其平行線於 E,連結 EC 且延長之,令 EA=EC;

連結 AB.

則 △ABC 即所求.

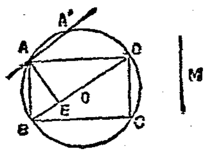
191. 定圓內作一內接定面積之矩形.

【作圖】

從定圓 O 任意引一直徑 BD,

依 BD:M=M:x,(M 爲定面積正方形之一邊) 以求 x; 從 BD 至 x 之距離引平行線 AA′,

交圓周於 AA′, 連結 AB,AD; 作 BC∥AD, 連結 CD, 則 ABCD 即所求之矩形.



【證】

▱ ABCD=AE·BD=x·BD.

然 BD:M=M:x.

∴ $BD \cdot x=M^2$.

∴ ABCD 為所求.

192. 從△ABC形內,取一點P,令△APB,△BPC,△CPA面積之比為1:2:3.

【作圖】

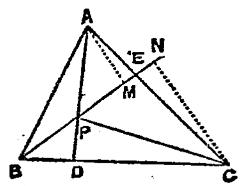
試依 $BD=\frac{1}{4}BC$,

$AE=\frac{1}{3}AC$ 以決定 D,E.

連結 AP,PB,PC,則

△APB, △BPC,

△CPA 即所求.



【證】

就 △APB, △CPB

作 AM⊥BE, CN⊥BE,

則 AM:CN=AE:EC=1:2.

而底邊 BP 為共通,

∴ △APB:△CPB=1:2.

同樣 △APB:△APC=1:3,

∴ △APB:△BPC:△APC=1:2:3.

193. **從定底邊上作等於定平行四邊形之二等邊三角形.**

【作圖】

ABCD 爲定平行四邊形,

QR 爲定底邊引 $AH \perp BC$.

依 $AH \cdot BC$

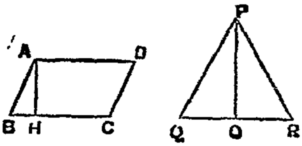
$= QR \cdot h$.

以求 h,

於 QR 上取高 2h.

作二等邊三角形 PQR.

是即所求.



【證】引 $PO \perp QR$,

則 $\Delta PQR = \frac{1}{2} PO \cdot QR = \frac{1}{2}(2h)QR = h \cdot QR$.

然 $h \cdot QR = AH \cdot BC$.

∴ ΔPQR 爲所求之三角形.

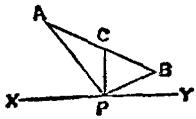
194. **試求定直線之一點至二定點,令其向一邊距離上正方形之和爲最小.**

【作圖】

連結AB,求其中點C.

作 $CP\perp XY$,

則P爲所求之要點.



【證】於 $\triangle PAB$,

其PC爲中線,

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{PC}^2$.

然 $\overline{AC}^2$ 爲定量,又不關P點之位置.

而有此關係,

$\therefore$ PC爲最小,則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 爲最小,

而CP爲從C向XY所引直線中最小者,

$\therefore$ P爲所求之點.

195. 求定直線上之一點,所分二部分上正方形之和(或差)等於所設之正方形.

【作圖】

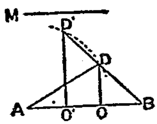
方形之和: AB爲所設之直線, $\angle B=\frac{1}{2}\angle R$,

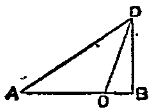
引BD以A爲中心,m爲半徑作圓,交BD於D,D'.

作 $DC\perp AB$, $D'C'\perp AB$; 則C,C'爲所求.

方形之差：就 B 取垂線 BD，取 $BD=m$，

連結 AD，令 $\angle\alpha=\angle A$，以引 DC；則 C 爲所求之點。





【證】方形之和，則 $\triangle DCB$ 爲直角二等邊三角形。

$\therefore DC=CB$，

$\therefore \overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{DC}^2=\overline{AD}^2=m^2$。

方形之差，$\triangle ACD$ 爲二等三角形，

$\therefore AC=CD$，

$\therefore \overline{AC}^2=\overline{CB}^2=\overline{CD}^2-\overline{CB}^2=\overline{BD}^2=m^2$。

196. **試外接定圓作與定三角形相似之三角形。**

【作圖】

O 圓爲所設之定圓，引半徑 OD，OE，OF。

作 $\angle DOE$ 爲 $\angle P$ 之補角，

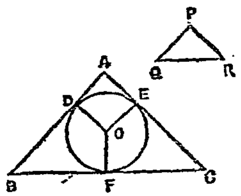
$\angle DOF$ 爲 $\angle Q$ 之補角；

就 D,E,F 引切線,

其切點之交點,爲

A,B,C.

則 $\triangle ABC$ 爲所求.



【證】

ADOE 之對角爲補角,

故內接於圓.

$\therefore \angle A+DOE=2\angle R$,

然 $\angle P+\angle DOE=2\angle R$.(作圖)

$\therefore \angle A=\angle P$.

同樣 $\angle B=\angle Q$,從而 $\angle C=\angle R$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle PQR$.

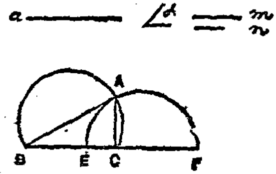
197. 知底邊,頂角及二邊之比,求作三角形.

【作圖】

取 $BC=a$,BC 上作含 $\angle Q$ 之弓形,

次依 $BE:EC=BF:FC=m:n$ 以定 E,F.

以 EF 爲直徑,畫半圓.



二弧相交於A;

連結AB,AC,則

△ABC卽所求.

【證】就△ABC,

其∠A在BC上含∠α弓形之弧上而等於∠α,又A在EF,爲直徑之半圓周上,而AB:AC=m:n;

∴△ABC爲所求.

198. 試過二定點及切一定直線畫圓.

【作圖】

連AB且延長之交XY於C.

於XY上,依$\overline{CP}^2=\overline{CP'}^2=CA\cdot CB$以定P,P'.

則過A,B,P之圓,及通A,B,P'之圓.

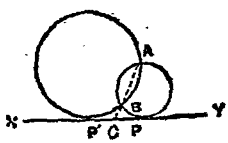
均爲所求.

【證】於圓ABP,

其$\overline{CP}^2=CA\cdot CB$,

∴CP切圓ABP.

同樣知CP'切圓ABP'.



199. 試過一定點及切二定直線作圓.

【作圖】

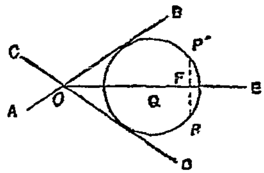
P為一定點, AB,CD為二定直線.

先引AB,CD交角之二等分線OE.

作$PF \perp OE$, $FP' = PF$,

過P,P'及切於AB

作圓Q是即所求.



【證】

Q圓之中心為Q,以其過對於OE之對稱點P,P'

而其中心在OE之上.

然OE上之點至AB,CD為等距離.

然Q圓切於AB.

∴ Q圓切於CD.

200. 試過二定點及切定圓畫圓.

【作圖】

A,B為二定點圓, O為定圓,

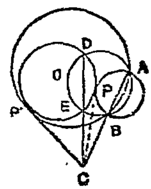
先過A,B交O圓任意作一圓ABED,

連結AB,DE且延長之,相會於C.

引O圓之切線 CP,CP′;

則圓 ABP,及圓 ABP′ 均爲所求之圓.

【證】



$\overline{CP}^2=CD\cdot CE$ (關於O圓)

$=CA\cdot CB$.(關於 ABED 圓)

即 $\overline{CP}^2=CA\cdot CB$,

∴ CP 爲圓 O 之切線.

∴ 圓 O,與圓 ABED 共有切線 CP.

∴ 兩圓相切.

圓 ABP′ 亦同樣也.

201. 設圓外有二定點,求圓周上一點至二定點連成直線,令其所夾之角爲最大最小.

【作圖】

A,B 爲O圓外之二定點,

先過 A,B 作O圓之外接圓 APB.

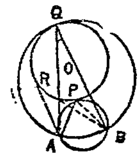
其切點爲P連 PA,PB,

則 ∠APB 爲最大.

次過A,B作O圓之內接圓AQB.

其切點爲Q連A,B;則

∠AQB爲最小.



【證】

從O圓周上任意一點R,連A,B;

則R點在圓APB之外,

又在圓AQB之中.

$\therefore \angle Q<\angle R<\angle P$.

202. 試引三角形底邊之平行線,令依既知之比,分其面積爲二部分.

【作圖】

求邊AB上之點P,

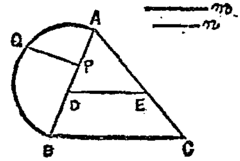
依AP:PB=m:n內分之,

以AB爲直徑作圓.

作PQ⊥AB交圓周於Q.

截AD=AQ,

引DE//BC是即所求.



【證】∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD^2}{AB^2}$$

$$=\frac{AQ^2}{AB^2}$$

$$=\frac{AP}{AB}$$

$$=\frac{m}{m+n}.$$

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{DBCE}=\frac{m}{n}.$$

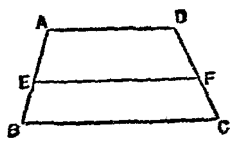
203. 試引梯形之底之平行線,令分其面積爲二等分.

【解】

假定EF爲所求之直線,

又假定延長BA,CD相交於O.

則 $\triangle OAD \backsim \triangle OEF \backsim \triangle OBC$.



然梯形AEFD

=梯形EDCF.

卽 $\triangle OEF-\triangle OAD=\triangle OBC-\triangle OEF$,

從而 $\overline{EF}^2-\overline{AD}^2=\overline{BC}^2-\overline{EF}^2$,

即 $2\overline{EF}^2=\overline{AP}^2+\overline{BC}^2$.

從而決定 EF 之長.

∴得定 E 點.

204. 試二圓之交點 A, 引弦 BAC, 令 AB:AC 等於所設之比.

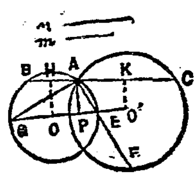
【作圖】

於 OO' 依 $OP:PO'=m:n$, $OQ:QO'=m:n$,

內分及外分於 P, Q 點連 AP, AQ 作 $BC\perp AP$, $EF\perp AQ$,

是均爲所求,

【證】作 $OH\perp BC$, $O'K\perp AC$



則 $HOO'K$ 爲梯形.

而 $AP /\!/ HO$.

∴ $HA:AK=OP:PO'$

$=m:n$,

然 $2HA=AB$,

$2AK=AC$.

∴ AB:AC=m:n.

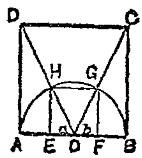
EF亦得同樣證明之.

205. 設於半圓內,作內接正方形,但其一邊重合於直徑之上.

【作圖】

AB上作正方形ABCD,連OC,OD交圓周於G,H;作GF⊥AB,HE⊥AB連HG;則HEFG為所求.

【證】



OC=OD,

OG=OH,

∴ HG∥DC.

∴ HE:DA=OH:OD

=HG:DC.

即 HE:DA=HG:DC.

然 DA=DC.

∴ HE=HG.

而HEFG之各角均為∠R故為正方形.

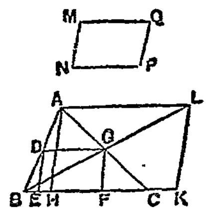
206. 三角形內作內接平行四邊形,但

其一邊重合於底邊之上,且與所設之平行四邊形相似.

【作圖】

$\triangle ABC$ 之 BC 上,作 $\square MNPQ$ 之相似形,$\square AHKL$ 連 BL 交 AC 於 G. 引 $DG /\!/ BC$, $DE /\!/ AH$, $GF /\!/ AH$; 則 $\square DEFG$ 為所求.

【證】



$DG:AL=BG:BL$

$=GF:LK.$

即 $DG:AL=GF:LK,$

$\therefore DG:GF=AL:LK.$

$\therefore DG:GF=MQ:PQ.$

而 $\square DEFG$ 與 $\square AHKL$ 有相等之角.

而 $\square MNPQ$ 亦有相等之角.

從而 $\square DEFG \backsim \square MNPQ.$

207. 試過圓周上之二點,引平行二弦,令此二弦之比,等於所設之比.

【作圖】

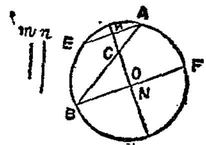
A,B 爲圓周上之二定點,連 AB,內分於C;

令 AC:CB=m:n,連 OC 且延長之爲直徑.

從 A,B 向 OC 上作垂線,交圓周於 E,F.

則 AE,BF 爲所求之平行二弦.

【證】



∴ $\triangle AMC \backsim \triangle BNC$,

∴ AM:BN=AC:CB

=m:n.

∴ 2AM:2BN=m:n,

卽 AE:BF=m:n.

若外分 AB 於 C′,則得其他一組之平行弦.

208. 矩形二邊之長爲10寸及8寸,今以此矩形之四邊爲底,各於形外作四個等邊三角形,順次連各頂點成一四邊形,求此四邊形之面積爲若干方寸.

【證】

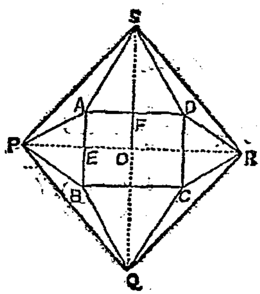
AB=8寸,BC=10寸,

$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=4\sqrt{3}$.

從而 $PR=8\sqrt{3}+10$.

又 $SF=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=5\sqrt{3}$,

$\therefore QS=10\sqrt{3}+8$.



而 PQRS 之面積 $=\frac{1}{2}PR\cdot QS$

$$=\frac{1}{2}(8\sqrt{3}+10)(10\sqrt{3}+8)$$

$$=(4\sqrt{3}+5)(10\sqrt{3}+8).\text{(平方寸)}$$

209.　正三角形之面積,試以其外接圓之半徑表之.

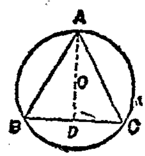
【解】

令 AD 爲高,

則 $AD=\frac{3}{2}R$.

$$BD=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2}$$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$



$\therefore BC=\sqrt{3}R.$

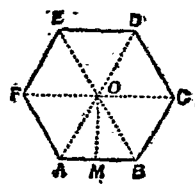
$\therefore$ 面積 $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}R\right)\left(\sqrt{3}R\right)$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$

210. 已知正六邊形之一邊,試計算其面積.

【解】



令 $AB=a$,

則 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}OM\cdot AB$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cdot a$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

$\therefore$ 面積 $s=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$

211. 有甲乙二個正多角形,甲之邊數為乙之邊數之二倍,甲之一角與乙之一角成9:8.求甲乙之邊數.

【解】

令甲乙之邊數為x, y,

則 $x=2y$.……………………………………(1)

又以直角為單位,則各正多角形之一角,為

$\frac{2x-4}{x}$, $\frac{2y-4}{y}$.

依題意

$\frac{2x-4}{x}:\frac{2y-4}{y}=9:8$.

簡之 $xy=18x-16y$,……………………(2)

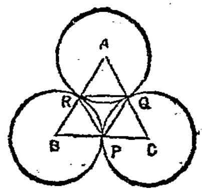
從(1)(2)得

$$\left.\begin{array}{l} x=20 \\ y=10. \end{array}\right\}\text{答}$$

212. 半徑二尺之三圓相切,試計算其間三邊形(圓弧)之面積.

【解】

正三角形ABC之面積,爲



$\frac{\sqrt{3}}{4}(AB)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(16)=4\sqrt{3}$.

扇形AQR$=\frac{1}{6}$(A圓之面積)

$=\frac{1}{6}(\pi\cdot 2^2)$

$=\frac{2}{3}\pi$.

∴圓弧PQR=△ABC一扇形AQR×3

$=4\sqrt{3}-2\pi$(平方尺).

213. 內接同圓之正六角形及正三角形之邊上作正方形,試比較其面積.

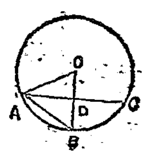
【解】

AC爲正三角形之一邊,

AB爲正六角形之一邊,

連OA, OB則OB, AC,

相交於D互分AC;



OB爲二等分.

從而令AB=a,

則 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\therefore$ $AC=\sqrt{3}a$.

$\therefore$ AC上正方形之面積 $s=3a^2$.

又a之一邊上正六角形之面積 $s'=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

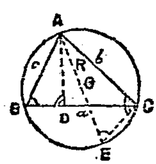
$\therefore$ $s':s=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2:3a^2=\sqrt{3}:2$.

214. 三角形三邊之長爲a, b, c;外接圓之半徑爲R,則三角形之面積爲$\frac{abc}{4R}$.

【解】

$\triangle ABC$之面積爲S,

則 $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC$.(AD爲高)



然引直徑AE連EC,則

$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

$(\angle B=\angle E, \angle D=\angle C=\angle R)$

$\therefore$ $AD:AB=AC:AE$,

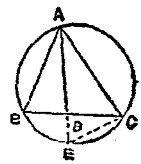
即 $AD:c=b:2R$.

$\therefore\ AD=\frac{bc}{2R}$.

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{2R}\right)a=\frac{abc}{4R}$.

215. $\triangle ABC$ 其 BC=7 寸,CA=8 寸,AB=6 寸,則 ∠A 之二等分線之長若干.

【解】



AD 為 ∠A 之二等分線,延長 AD.

交外接圓於 E.

連結 EC; 則

$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$,

$\therefore\ AB:AD=AE:AC$.

即 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$

$=AD(AD+DE)$

$=\overline{AD}^2+AD\cdot DE$

$=\overline{AD}^2+D\cdot :84=$

然 RD:DC=AB:AC:B6•

而 BC=7, ∴ BD=3, DC=4.

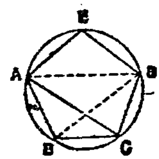
∴ $6\times8=\overline{AD}^2+3\times4$.

∴ $\overline{AD}^2=36$.

∴ AD=6.…………答 6 寸.

216. 正五邊形之一邊爲 m, 試求其對角線之長.

【解】



ABCDE 爲正五邊形,

連結角線 AC,BD,AD;

則 △ACD 之 AC=AD,

又 AC=BD.

依定理.

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot AC$.

即 $m^2+mx=x^2$.

∴ $x=\frac{m\pm\sqrt{m^2+4m^2}}{2}=\frac{m\pm m\sqrt{5}}{2}$.……答

217. 定圓之半徑爲 9 寸, 試分爲三等

分作兩個同心圓;則同心圓之半徑各若干.

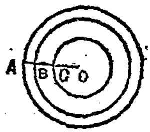
【解】

圓之面積與半徑之平方有比例,

故以O爲中心,作三個同心圓.

其半徑爲AO,BO,CO;則

$\overline{AO}^2:\overline{BO}^2:\overline{CO}^2=3:2:1.$



$\therefore\ \overline{AO}^2:\overline{BO}^2=3:2,$

即 $81:\overline{BO}^2=3:2.\ \therefore\ BO=3\sqrt{6}.$

又 $\overline{AO}^2:\overline{CO}^2=3:1,\ \therefore\ CO=3\sqrt{3}.$

答 $\begin{cases}3\sqrt{6}\text{寸}\\3\sqrt{3}\text{寸}\end{cases}$

(終)

三S平面幾何學

Schultze, Sevenoak, Schuyler:
Plane Geometry

仲光然
嚴幼芝合譯
徐任吾

一冊 一元七角

Schultze, Sevenoak, Schuyler三氏共同合著之Plane & Solid Geometry，其地位與二十年前之溫德華氏幾何學相仿，在我國銷行極廣。此為平面部分，出版以來，各地學校紛紛採用，譯者並將本書在上海中學試教數年，甚為滿意。可作中等學生幾何教本及與原文對照參考之用。

三S平面幾何學習題詳解

朱文熊著　全二冊　上冊一元六角　下冊二元二角

本書依照教科書體例，用最新之證明法，將「三S平面幾何學」中習題，一一詳細證明，如有例外或幾種作圖法時，皆兼收並采，使學者可以融會貫通。習題在某節，必以該節以前之定理證之，且所用定理，均極淺顯明白，凡深與難解之定理，概不引用。遇習題有二種以上之證明者，並列詳略二法，以備教授時可以任意採用。故凡採用該項教科書者，則此書更有購備之必要。

中華書局發行

國立邊疆學校
圖書館

借閱者注意

（一） 加意愛護勿失原有形狀
（二） 損壞或遺失應照原價加倍賠償
（三） 借閱以一星期為限期滿欲續借者須持書至館聲明但本館於必要收回時須即繳還
（四） 逾期不歸還者應照章納金

註冊商標

民國十四年四月印刷
民國廿五年二月九版

平面幾何學問題解法指導（全一冊）

◎定價銀四角

（外埠另加郵匯費）

編者　泰和匡文濤
發行者　中華書局
印刷者　中華書局
印刷所　上海澳門路　中華書局
總發行處　上海福州路　中華書局
分發行處　各省中華書局

（三八四四）