

大學叢書

投資數學

上冊

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書
投資數學
上冊

褚鳳儀著

(增訂本)

商務印書館發行

四 版 序

本版內容，頗有增訂，茲就重要各點，列舉如下：

- 一、本版中公式分 a, b, c 三組，a 組公式為必須記憶之公式；b 組公式記憶較難而演化較易，故學者可不必記憶，考試時可改用 a 組公式；c 組公式演化較難，若學者有相當數學程度，則須記憶公式之演化。反之，若學者之數學程度過低，則考試時可將應用公式附書於試題之中。經此訂正後，計有 a 組公式一百六十三個，b 組公式五十七個，c 組公式二十八個，共二百四十八個，較初版中公式多七個，若僅記憶 a 組公式，則與初版中公式相較，約已減少三分之一。
- 二、初版中年金公式，均以一年為單位時期，本版則改以計息期間為單位時期，如是則公式可較簡，而演算亦可較易。
- 三、本版中習題，增補本國應用問題甚多，若中國銀行之整存整付儲蓄存款、整存零付儲蓄存款、零存整付儲蓄存款、存本付息儲蓄存款，交通銀行之教育儲蓄存款，財政部發行之統一公債與復興公債，均多列試題，以求純熟。

- 四. 初版中關於零存整付儲蓄存款之計算, 須應用三表, 計算甚繁, 故本版添製「期初付複雜年金至第一期末終值表」, 以便計算.
- 五. 本版書末添列英文譯名, 以便閱讀英文參考書之學者.

以上五點爲本版中重要增訂之點, 其他如債券與折舊亦略有增訂, 而對數表亦稍稍擴大, 以便應用.

本版蒙同學朱君愛廬, 胡君珍楷, 奚君紹濂, 先後襄助, 至爲感謝, 特書數語, 以誌不忘.

中華民國二十七年八月五日

褚鳳儀

序

儲蓄爲積聚資金之母，然僅知儲蓄而未諳運用之道，則死藏現金不能利用者有之，用於不健全之企業，因而喪失其資金者有之，不能充分利用複利之作用，以加速其資金之積聚者，更比比皆是。故不知儲蓄，無以積聚資金，不知運用儲蓄，亦無以加速資金之積聚，而投資之道尙焉。

近世經濟組織，漸形複雜，投資之範圍，亦迥非昔比，或存款於銀行，或購買債券以生息，或投資於工商業，以圖股利之收益，或投保人壽保險，以防生命之不測。存款於銀行，則須明利息與年金之計算，購買債券，則債券市價之高下，影響於利息之多寡，投資於工商業，則償債方式與折舊方法，俱與公司之理財有關，投保人壽保險，則保險費隨投保者之死亡機率而異，凡此均有賴數理之研究，研究投資之數理，名曰投資數學。

投資數學之名稱甚多，若財政數學，政治數學，會計數學，高等商業數學，均先後爲各國學者所採用，投資數學研究之範圍，若利息，若年金，若債券，若折舊，若人壽保險，無一不與利率有關，而利率爲投資之要素，故本書採用投資數學之名。

投資數學爲我國商學院必修科目，而坊間猶無完備之書，故各校多採用美國教本，以爲之代。夫一國教育，常須借重他國教本，此種方策，是否合理，姑置不論，然即就坊間得購之外版投資數學而一探其內容，亦尙未見一完備之書，本書之編，未敢謂已盡完備之事，然拋磚引玉，願於短時期內，因此而得更完備之中國投資數學。

本書於重要投資數理，均有論列，而於利息確實年金與債券三編，討論尤詳。貼現與價值方程式二章，他書論者甚略，學者每多未能深切了解，故本書於第二編（利息）中，將此二章詳加擴充，以求數理之透穿，他書於確實年金一編，均未論及變額年金，然變額年金對於償債之方式與債券之發行，均有密切之關係，而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款，尤可有極大之應用，蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力，而我國銀行，海關，郵政，鹽務等處職員之儲蓄能力，均隨每年加薪而增大，故變額存款更適宜於彼等之儲蓄，此本書之所以詳論變額年金也。他書於債券之發行，或略而不論，或論而不詳，然債券發行之方式影響於政府或公司之理財甚大，而於市價與投資利率之推算，亦有密切之關係，故本書論列較詳。

本書於年金與債券論列較詳，故應用計算表，亦較他書爲多，附錄中之倒數表，累積倒數表，等差變額年金終值表與等差變額年金現值表，皆爲他書所無者也。

本書之編，參考美德法日四國出版之投資數學十餘種，其書名與著作者，詳列於目次之末，以備學者之參考。書中數理證明，均甚簡易，其稍複雜者，另置附錄甲，以便教學。

本書蒙同學周君頌康，湯君芝第，蔣君家森，盛君克中，潘君光潤，陶君嫩珠，與吾妹明馨，或助編計算表，或代任抄寫之勞，使編者心感，特誌數語，以示謝忱。

中華民國二十四年四月八日

褚鳳儀

目 次

| | |
|----------------------|----|
| 第一編 對數 | 1 |
| 第一章 對數之意義及其性質 | 1 |
| 第二章 對數之種類 | 5 |
| 第三章 對數表之編製及其應用 | 8 |
| 第一節 對數表之編製 | 8 |
| 第二節 指標與假數 | 11 |
| 第三節 由對數表檢查對數 | 12 |
| 第四節 由對數表檢查反對數 | 16 |
| 第五節 對數表之應用 | 18 |
| 第二編 利息 | 27 |
| 第一章 單利 | 27 |
| 第一節 普通利息 | 33 |
| 第二節 準確利息 | 42 |
| 第二章 複利 | 53 |
| 第三章 貼現 | 72 |
| 第一節 單貼現 | 75 |
| 第二節 複貼現 | 82 |
| 第四章 價值方程式 | 95 |
| 第一節 單貼現法 | 96 |

| | |
|-----------------------|------------|
| 第二節 複貼現法 | 119 |
| 第三編 級數 | 137 |
| 第一章 等差級數 | 138 |
| 第二章 等比級數 | 147 |
| 第三章 無盡級數 | 151 |
| 第四編 確實年金 | 165 |
| 第一章 年金之意義及其種類 | 165 |
| 第二章 定額年金 | 168 |
| 第一節 簡單年金 | 168 |
| 第二節 複雜年金 | 191 |
| 第三章 變額年金 | 223 |
| 第五編 年賦償還 | 247 |
| 第一章 年賦償還之意義及其種類 | 247 |
| 第二章 均等分償 | 249 |
| 第一節 本金均等分償 | 249 |
| 第二節 全均等分償 | 255 |
| 第三節 償本基金 | 259 |
| 第三章 變額年金分償 | 266 |
| 第六編 插補 | 275 |
| 第一章 插補之意義及其種類 | 275 |
| 第二章 因變數之插補 | 277 |

| | | |
|------------|------------------|------------|
| 第三章 | 自變數之插補 | 292 |
| 第七編 | 債券 | 301 |
| 第一章 | 債券之發行 | 301 |
| 第一節 | 債券之意義及其種類 | 301 |
| 第二節 | 無獎債券 | 303 |
| 第三節 | 有獎債券 | 326 |
| 第二章 | 債券市價之推算 | 344 |
| 第三章 | 投資利率之推算 | 384 |
| 第八編 | 折舊 | 407 |
| 第一章 | 折舊之意義 | 407 |
| 第二章 | 計算折舊之方法 | 410 |
| 第三章 | 資產之壽命與資產之換新 | 424 |
| 第四章 | 贖產估價 | 433 |
| 第九編 | 序列組合與機率 | 439 |
| 第一章 | 序列與組合 | 439 |
| 第二章 | 機率 | 444 |
| 第三章 | 生死機率 | 453 |
| 第十編 | 生命年金與人壽保險 | 461 |
| 第一章 | 生命年金 | 461 |
| 第二章 | 人壽保險 | 482 |
| 第一節 | 人壽保險之意義及其種類 | 482 |

| | |
|------------|-----|
| 第二節 純保費之計算 | 484 |
| 第三節 預備金之計算 | 494 |
| 本編應用公式 | 503 |

答 案 519

| | |
|-----------------------------------|----|
| 附錄甲 數學原理 | 1 |
| 附錄乙 書中所用英文譯名 | 1 |
| 附錄丙 民國二十五年統一公債與民國二十五年 復興公債發行條例 | 1 |
| 附錄丁 計算應用表 | 1 |
| 表一 對數表 | 1 |
| 表二 倒數表 | 25 |
| 表三 累積倒數表 | 26 |
| 表四 複利終值表(期數爲整數) | 27 |
| 表五 複利現值表 | 37 |
| 表六 年金終值表 | 47 |
| 表七 年金現值表 | 57 |
| 表八 年賦金表 | 67 |
| 表九 複利終值表(期數不滿一期) | 77 |
| 表十 實利率化虛利率表 | 78 |
| 表十一 期末付複雜年金至第一期末終值表 | 79 |
| 表十二 期初付複雜年金至第一期末終值表 | 80 |
| 表十三 等差變額年金終值表 | 81 |
| 表十四 等差變額年金現值表 | 86 |

| | |
|------------------------|----|
| 表十五 死亡生殘表 | 92 |
| 表十六 人壽保險與生命年金計算表 | 93 |
| 表十七 人壽保險預備金計算表 | 95 |

本書重要參考書:

W. L. Hart—**Mathematics of Investment**

E. B. Skinner—**The Mathematical Theory of Investment**

H. L. Rietz—**Mathematics of Finance**

Lovitt and Holtzclaw—**The Mathematics of Business**

G. Wentworth—**Commercial Algebra**

A. Barriol—**Théorie et Pratique des Opérations Financières**

H. Fuzet et L. Reclus—**Précis de Mathématiques Commerciales et
Financières**

A. Arnaud—**Tables des Valeurs Intrinsèques**

A. P. Vieoigne—**Tables Pour Faciliter les Calculs des Probabilités Sur la
Vie Humaine**

A. Schlimbach—**Politische Arithmetik**

M. Cantor—**Politische Arithmetik**

和田喜八—**商工實務計算**

小林行昌—**高等商業數學**

朱幼庵—**最新國庫券還本付息表**

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者，在代數學中用指數(Exponent)表之，例如 5^3 為三個 5 連乘之數， a^6 為六個 a 連乘之數。右上角之 3 與 6 即指數是也。 5^3 既為三個 5 連乘之數，故其數值即為 125，以算式表之則得：

$$5^3 = 125$$

上式中共有三數，已知此三數中之任何二數，即可求第三數，故設 x 為所求之第三數，即可得下列三式：

$$5^3 = x$$

$$x^3 = 125$$

$$5^x = 125$$

第一式中之 x ，可將三個 5 連乘而得，故此係一乘方 (Involution) 問題。第二式可化為下式：

$$x = \sqrt[3]{125}$$

式中之 x ，可將 125 開立方而得，故此係一開方 (Evolution) 問題。至於第三式中之 x ，則與前兩式均異，既非乘方問題，亦

非開方問題，故式中之 x ，須應用他法求得，對數 (Logarithm) 法者，即欲探求此未知之指數而創設之方法也。此未知之指數在對數法中即名曰對數，而第三式中之 5 即名曰底 (Base)，其右邊之 125 則名曰真數 (Number) 或反對數 (Anti-logarithm)，對數之符號為 \log ，即英文對數一字中前三個字母也。以此符號表示，則第三式可改作下式：

$$\log_5 125 = x$$

上式中之 x ，即以 5 為底 125 之對數，或即 3，蓋 5 之 3 方等於 125 故也。同理：

$$\log_2 16 = 4 \quad \because 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \because 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \quad \because 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \because 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \quad \because a^5 = a^5$$

對數之意義既明，今請進而討論對數之性質。對數能化乘除為加減，又能化乘方開方為乘除，此則對數之特有性質，亦即對數之效用也。茲將對數之性質分述證明於下：

(一) 對數化乘法為加法。

兩數相乘積之對數，等於兩數對數之和，即：

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \quad \dots\dots\dots a1)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$AB = a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \log_a AB = \log_a a^{x+y} = x + y$$

即

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得，則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和，其證明與兩數之乘積相似。

(二) 對數化除法為減法。

兩數相除，其商數之對數，等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數，即：

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots(a2)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \log_a \frac{A}{B} = \log_a a^{x-y} = x - y$$

即

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法, 化開方爲除法.

某數 n 方之對數, 等於某數對數之 n 倍, 即:

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots (a3)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

則依對數之定義得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

即 $\log_a A^n = n \log_a A$

n 得爲整數或分數, 正數或負數.*

* $\sqrt[3]{A^4} = A^{\frac{4}{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{A^3}} = A^{-\frac{3}{2}}$

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異。例如以 2 爲底，則 16 之對數爲 4；以 4 爲底，則 16 之對數爲 2；以 16 爲底，則 16 之對數爲 1，故須先決定對數之底，然後能求對數之值。任何數均可爲對數之底，然爲便於計算起見，數學上通用對數之底，祇有兩種，一爲 10，一爲 e 。 e 之數值爲 2.71828 強，參看附錄甲 2) 前者名曰常用對數 (Common logarithm)，後者名曰自然對數 (Natural logarithm) 或納氏對數 (Napierian logarithm)。應用數學中通用常用對數，但在高深純正數學中，則以自然對數爲主，本書係應用數學之一種，故除有特別說明外，均指常用對數而言，而常用對數之底，苟無誤解之危險，亦將略而不書，故：

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0^*$$

* $a^0 = 1$

$10^0 = 1$

$$\log 0.1 = -1^{**}$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算，即由前者可化為後者，亦可由後者化為前者，兩者之關係及其換算之公式，分述於下：

(一) 10 之自然對數與 e 之常用對數互為倒數，即：

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots(a4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義，得：

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_e 10}$$

即 $\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$

(二) 由常用對數化為自然對數

以 10 之自然對數，乘某數之常用對數，即得某數之自然

** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1$

對數, 即:

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots(a5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義, 得:

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10} A$$

即
$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A$$

(三) 由自然對數化爲常用對數.

以 e 之常用對數, 乘某數之自然對數, 即得某數之常用對數, 即:

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A \dots\dots\dots(a6)$$

(證) 由公式 (a5) 得:

$$\log_{10} A = \frac{1}{\log_e 10} \log_e A$$

即
$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A$$

第三章 對數表之編製及其應用

第一節 對數表之編製

對數表者，根據某數爲底，用以計算各數之對數而編製之計算表也。對數有常用對數與自然對數之分，故對數表亦有常用對數表與自然對數表之別。常用對數與自然對數既有一定之關係，故由常用對數表即可編製自然對數表，由自然對數表即可編製常用對數表，而自然對數表之編製，即可根據下列之關係：

$$\log_e(n+1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \dots\dots(c1)$$

(證明參看附錄甲6)

令 $n=1$

$$\begin{aligned} \text{則 } \log_e 2 &= \log_e 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0.693147 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 0.33333333 \\
 0.01234568 \\
 0.00082305 \\
 0.00006532 \\
 0.00000565 \\
 0.00000051 \\
 0.00000005 \\
 \hline
 0.34657359 \\
 \quad \times 2 \\
 \hline
 0.69314718
 \end{array}$$

令 $n=2$

$$\text{則 } \log_e 3 = \log_e 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} + \dots \right) = 1.098612$$

$$\begin{array}{r}
 0.2 \\
 0.00266667 \\
 0.00006400 \\
 0.00000183 \\
 0.00000006 \\
 \hline
 0.20273256 \\
 \quad \times 2 \\
 \hline
 0.40546512 \\
 0.69314718 \\
 \hline
 1.09861230
 \end{array}$$

令 $n=9$

$$\text{則 } \log_e 10 = \log_e 9 + 2 \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{3 \times 19^3} + \frac{1}{5 \times 19^5} + \dots \right)$$

$$= \log_e 9 + 0.10536052$$

$$\text{但 } \log_e 9 = 2 \log_e 3 = 2.1972246$$

$$\therefore \log_e 10 = 2.302585^*$$

* $\log_e 10 = 2.302585092994045684$

$$\begin{array}{r}
 0.05263158 \\
 0.00004860 \\
 0.00000008 \\
 \hline
 0.05268026 \\
 \quad \times 2 \\
 \hline
 0.10536052 \\
 2.19722460 \\
 \hline
 2.30258512
 \end{array}$$

10 之自然對數，即為 e 之常用對數之倒數，故 e 之常用對數，即可自 10 之自然對數求得如下：

$$\log_{10} e = \frac{1}{2.302585} = 0.4342945$$

故以 2.302585 乘某數之常用對數，即得某數之自然對數，以 0.4342945 乘某數之自然對數，即得某數之常用對數，即：

$$\log_e A = 2.302585 \log_{10} A \quad \dots\dots\dots (c2)$$

$$\log_e A = 0.4342945 \log_e A \quad \dots\dots\dots (c3)$$

應用公式 (c3) 吾人即可進而編製常用對數表，試就 2 與 3 兩數，計算其常用對數於下：

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2 &= 0.4342945 \times \log_e 2 \\
 &= 0.4342945 \times 0.693147 \\
 &= 0.301030
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 3 &= 0.4342945 \times \log_e 3 \\
 &= 0.4342945 \times 1.098612 \\
 &= 0.477121
 \end{aligned}$$

上所述者，為整數之常用對數，已知整數之常用對數，即

可計算小數之常用對數，蓋任何有限小數，以10之乘方乘之，即得整數，而10之乘方之常用對數，以其底爲10，故甚易求得也。

第二節 指標與假數

任取一數，例如5846，試將小數點逐漸向左移動，而計算各數之常用對數，並應用公式(a1)，則得：

$$\log 5846 = \log (1000 \times 5.846) = \log 1000 + \log 5.846 = 3 + \log 5.846$$

$$\log 584.6 = \log (100 \times 5.846) = \log 100 + \log 5.846 = 2 + \log 5.846$$

$$\log 58.46 = \log (10 \times 5.846) = \log 10 + \log 5.846 = 1 + \log 5.846$$

$$\log 5.846 = \log (1 \times 5.846) = \log 1 + \log 5.846 = 0 + \log 5.846$$

$$\log 0.5846 = \log (0.1 \times 5.846) = \log 0.1 + \log 5.846$$

$$= -1 + \log 5.846$$

$$\log 0.05846 = \log (0.01 \times 5.846) = \log 0.01 + \log 5.846$$

$$= -2 + \log 5.846$$

$$\log 0.005846 = \log (0.001 \times 5.846) = \log 0.001 + \log 5.846$$

$$= -3 + \log 5.846$$

詳察上列諸式，可見各數之對數，有一部完全相同，均爲 $\log 5.846$ ，其所不同者，祇有前面之整數，而此整數之變化，亦甚整齊，即小數點向左移上一位則此整數遞降一單位而成一等差級數

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

5.864 介於1與10之間，查 $\log 1=0$ ，而 $\log 10=1$ ，故 $\log 5.864$ 亦介於0與1之間。介於0與1之間之數，即為小數，故一數之對數由二部組成：一部為整數，一部為小數。前者名曰指標 (Characteristic)，後者名曰假數 (Mantissa)。指標有正負之分，而假數則常為正數。

指標之計算有一定規則可循。某數之指標，若為正數，則其數較某數之整數位數少一。故六位整數之指標為5，三位整數之指標為2，一位整數之指標為0。某數之指標若為負數，則其數即為第一個有效數字前所有‘零’之數。例如 0.3485 中第一個有效數字為3，其前祇有一個零，故其指標為-1。又如 0.004865 中第一個有效數字為4，其前共有三個零，故其指標為-3。

至於對數中之假數，則不能一視即得，須查常用對數表，其求法詳述於下節：

第三節 由對數表檢查對數

常用對數表(以後簡稱對數表，本書中若單稱對數表，均指常用對數表而言)中所載對數，限於1與10間之對數，換言之，對數表中祇有假數而無指標，後者須依前節中所述之規則求得。

設欲求 $\log 458.3$ 。真數共有三位整數，故對數之指標為2。其假數須查對數表。先在表之左端查458，再在表之上方查

3, 前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處之數字, 即為所求之假數, 惟其前面二數字, 因係許多假數之公共數字, 故對數表中常另列左端, 檢查時須一併抄錄。查對數表得 0.661150, 此即 $\log 458.3$ 之假數, 故:

$$458.3 = 2.661150$$

又設欲求 $\log 0.005624$ 。真數第一有效數字前共有三個零, 故對數之指標為 -3 。至其假數, 則可先查 562, 次查 4, 前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處為 0045, 惟角上有一“*”號, 須加注意, 此“*”號表示假數前面二數字在下方而不在上方, 故所求之假數係 0.750045 而非 0.740045。

指標有正負之分, 而假數常為正數, 故負指標中之負號不能置於對數之前, 但須置於指標之上以示區別, 即:

$$\log 0.005624 = \bar{3}.750045^*$$

對數表中之真數, 有一定位數, 或四位, 或五位, 或六位, 必有限制。試就四位真數對數表而言, 四位以上真數之假數, 不能一查即得, 須用比例計算, 方能得其近似值。

(例一) 求 $\log 5456.4$

整數四位, 故指標為 3,

次求 $\log 5.4564$ 。

對數表中無 5.4564 之對數, 然吾人可先求略小於此數之

* $\bar{3}.750045 = -3 + 0.750045$

$-3.750045 = -3 - 0.750045$

對數與略大於此數之對數，即 $\log 5.456$ 與 $\log 5.457$ 。查對數表，得：

$$\log 5.457 = 0.736954$$

$$\log 5.456 = 0.736874$$

假定真數之差額與對數之差額成比例，（實際上略有差異，例如 8.537 與 8.535 相差 0.002，而 8.536 與 8.535 相差 0.001，前者適為後者之倍，但其對數之差額，前者為 0.000101，而後者為 0.000050，前者較大於後者之倍。吾人作此假定者，所以便計算而求其近似值也。）則：

$$(5.457 - 5.456) : (5.4564 - 5.456) = (\log 5.457 - \log 5.456)$$

$$: (\log 5.4564 - \log 5.456)$$

設 $x = \log 5.4564 - \log 5.456$

則 $0.001 : 0.0004 = 0.000080 : x$

$$x = 0.000032$$

然實際演算時， x 之數值不必如此求得，檢查對數表中之比例部份可也。 $\log 5.457$ 與 $\log 5.456$ 相差 0.000080，故查比例部分 80，又 5.4564 與 5.456 相差 0.0004，故再查 80 一欄中左端之 4，得 32.0 對數表中之假數共有六位小數，故 3 字已在第五位小數，故：

$$x = 0.000032$$

$$\log 5.4564 = \log 5.456 + x$$

$$= 0.736874 + 0.000032$$

$$= 0.736906$$

$$\therefore \log 5456.4 = 3.736906$$

(例二) 求 $\log 45.706$:

查對數表, 得: $\log 4.571 = 0.660011$

$$\log 4.570 = \frac{0.659916}{95}$$

查比例部分, 得: 57.0

$$\begin{array}{r} 0.659916 \\ \quad \quad 57 \\ \hline 0.659973 \end{array}$$

$$\therefore \log 45.706 = 1.659973$$

(例三) 求 $\log 0.003854912$:

查對數表, 得: $\log 3.855 = 0.586024$

$$\log 3.854 = \frac{0.585912}{112}$$

3.854912 與 3.854 相差之數, 共有三位數, 即 912, 而比例部分祇有一位數, 若欲檢查比例部分, 則須分別檢查 9, 1, 2 三部, 然後相加, 惟 1 在 9 之後一位, 而 2 又在 1 之後一位, 故由 9 而 1 而 2, 小數點須逐漸向左移一位。

查比例部分, 得:

$$\begin{array}{r} 9 \quad 100.8 \\ 1 \quad 1.12 \\ 2 \quad 0.224 \\ \hline 912 \quad 102.144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.585912 \\ \underline{102144} \\ 0.586014144 \end{array}$$

$$\therefore \log 0.003854912 = \bar{3}.586014144$$

第四節 由對數表檢查反對數

有時已知某數之對數而欲求某數，即求反對數。反對數之符號爲 Antilog。設欲求 0.562531 之反對數，先在對數表之內部求得此數，然後檢查與此同一橫行左端之數字及同一縱行上端之數字，得 365 與 2，兩者併合爲一，即得 3652，即：

$$\text{antilog } 0.562531 = 3.652$$

通常計算反對數之真數，不載於表中，故求其反對數時，須檢查略小於此數之反對數與略大於此數之反對數，然後用比例計算。

(例一) 求 antilog 2.552042:

指標爲 2，故求得之反對數共有三位整數。

查對數表，得： antilog 0.552060 = 3.565

$$\text{antilog } 0.551938 = 3.564$$

$$(0.552060 - 0.551938) : (0.552042 - 0.551938) = (\text{antilog } 0.552060 - \text{antilog } 0.551938) : (\text{antilog } 0.552042 - \text{antilog } 0.551938)$$

設 $x = \text{antilog } 0.552042 - \text{antilog } 0.551938$

即 $0.000122 : 0.000104 = 0.001 : x$

第五節 對數表之應用

對數能化乘除爲加減，化乘方開方爲乘除。例如 1.045^{100} 須將 1.045 連乘一百次，演算之繁，可以想見，若應用對數表，則此問題即變爲一極簡易之乘法。又如 $\sqrt[5]{13}$ 非用極複雜之方法，不能求得其根，若應用對數表，則此問題又變爲一極簡易之除法，故對數表實爲一不可缺少之計算工具。茲舉數例於下，以示對數表之應用。

(例一) 求 $x = 3.485 \times 46.28$

應用公式 (a1) 得：

$$\begin{aligned}\log x &= \log 3.485 + \log 46.28 \\ &= 0.542203 + 1.665393 \\ &= 2.207596\end{aligned}$$

查反對數，得： $\log 1.613 = 0.207634$

$$\log 1.612 = \frac{0.207365}{269}$$

$$0.207596$$

$$\frac{0.207365}{231}$$

查比例部分，得 9。

$$\therefore x = 161.29$$

(例二) 求 $x = \frac{4.583}{0.049328}$

應用公式 (a2) 得:

$$\begin{aligned}\log x &= \log 4.583 - \log 0.049328 \\ &= 0.661150 - \bar{2}.693093 \\ &= 1.968057\end{aligned}$$

查反對數得:

$$\begin{array}{r} \log 9.291 = 0.968062 \\ \log 9.290 = 0.968016 \\ \hline 46 \\ 0.968057 \\ 0.968016 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$0.001 \times \frac{41}{46} = 0.00089$$

$$\therefore x = 92.9089$$

(例三) 求 $x = \frac{48.56 \times 7.3925 \times 0.04853}{3.164 \times 0.859 \times 432.6}$

應用公式 (a2), 得:

$$\begin{aligned}\log x &= \log (48.56 \times 7.3925 \times 0.04853) \\ &\quad - \log (3.164 \times 0.859 \times 432.6)\end{aligned}$$

應用公式 (a1), 得:

$$\begin{aligned}\log x &= (\log 48.56 + \log 7.3925 + \log 0.04853) \\ &\quad - (\log 3.164 + \log 0.859 + \log 432.6)\end{aligned}$$

$$\log 48.56 = 1.686279$$

$$\log 7.3925 = 0.868792$$

$$\log 0.04853 = \frac{\bar{2}.686010}{1.241081}$$

$$\log 3.164 = 0.500236$$

$$\log 0.859 = \bar{1}.933993$$

$$\log 432.6 = \frac{2.636087}{3.070316}$$

$$1.241081$$

$$3.070316$$

$$\hline 2.170765$$

查反對數, 得:

$$\log 1.482 = 0.170848$$

$$\log 1.481 = \frac{0.170555}{293}$$

$$293$$

$$0.170765$$

$$\hline 0.170555$$

$$210$$

查比例部分, 得 7.

$$\therefore x = 0.014817$$

(例四) 求 $x = 1.035^{100}$!

應用公式 (a3), 得:

$$\log x = 100 \log 1.035$$

$$= 100 \times 0.0149403$$

$$= 1.49403$$

查反對數，得： $\log 3.120 = 0.494155$

$$\log 3.119 = \frac{0.494015}{140}$$

$$\begin{array}{r} 0.494030 \\ 0.494015 \\ \hline 15 \end{array}$$

查比例部分，得 1

$$\therefore x = 31.191$$

(例五) 求 $x = \sqrt[10]{75.8941}$

應用公式 (a3)，得：

$$\begin{aligned} \log x &= \log 75.894^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \log 75.894 \\ &= \frac{1}{10} \times 1.880208 \\ &= 0.1880208 \end{aligned}$$

查反對數，得：

$$\log 1.542 = 0.1880840$$

$$\log 1.541 = \frac{0.1878030}{2810}$$

$$\begin{array}{r} 0.1880208 \\ 0.1878030 \\ \hline 2178 \end{array}$$

$$0.001 \times \frac{2178}{2810} = 0.000775$$

$$\therefore x = 1.541775$$

(例六) 求 $x = \sqrt[4]{3.869^3}$

$$x = \sqrt[4]{3.869^3} = 3.869^{\frac{3}{4}}$$

應用公式 (a3), 得:

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{3}{4} \log 3.869 \\ &= \frac{3}{4} \times 0.587599 \\ &= 0.44069925 \end{aligned}$$

查反對數, 得:

$$\log 2.759 = 0.440752$$

$$\log 2.758 = 0.440594$$

158

$$0.44069925$$

$$0.440594$$

10525

查比例部分, 得 7.

$$\therefore x = 2.7587$$

(例七) 求 $G = \sqrt[5]{65 \times 59 \times 58 \times 62 \times 57}$

應用公式 (a3), 得:

$$\log G = \frac{1}{5} \log (65 \times 59 \times 58 \times 62 \times 57)$$

應用公式 (a1), 得:

$$\log G = \frac{1}{5} (\log 65 + \log 59 + \log 58 + \log 62 + \log 57)$$

$$\log 65 = 1.812913$$

$$\log 59 = 1.770852$$

$$\log 58 = 1.763428$$

$$\log 62 = 1.792392$$

$$\log 57 = \frac{1.755875}{5)8.895460} \\ \underline{1.779092}$$

查反對數, 得:

$$G = 60.13$$

(例八) 解下之方程式:

$$25^{x+3} = 65 \times 6^x$$

上式中之指數, 係未知數, 與普通方程式異, 故此方程式, 名曰指數方程式 (Exponential equation). 指數方程式, 亦須應用對數, 蓋若上式之兩邊求其對數, 則得:

$$(x+3) \log 25 = \log 65 + x \log 6$$

即
$$1.397940(x+3) = 1.812913 + 0.778151x$$

移項得
$$0.619789x = -2.380907$$

$$\therefore x = -\frac{2.380907}{0.619789} = -3.8415$$

(例九) 解下之方程式:

$$\log(x-1) - \log(x^2 - 5x + 4) + 1 = 0$$

- a) 5 b) 7 c) 11
 d) 385 e) 314 f) 1332

4. 求下列各數之對數:

- a) 43.89 b) 0.003895 c) 0.63453
 d) 8693000 e) 0.000738649 f) 0.0342864

5. 求下列各數之反對數:

- a) 0.60119 b) 8.52022 c) 4.59017
 d) 2.35548 e) 1.6493563 f) 2.4835402

6. 應用對數表求:

a) $x = 63.45 \times 0.05496$

b) $x = \frac{385.26}{53.689}$

c) $x = \frac{38.54 \times 8.3945 \times 0.0063984}{1854 \times 0.63954 \times 38.952}$

d) $x = \frac{1.854 \times 0.045938 \times 0.0038652}{39.84 \times 4.3652 \times 0.038764}$

e) $x = 1.035^{25}$

f) $x = 1.0375^{30}$

g) $x = \sqrt[5]{3.594}$

h) $x = \sqrt[10]{3.6534^3}$

i) $G = \sqrt[5]{58 \times 62 \times 64 \times 67 \times 54 \times 48}$

j) $G = \sqrt[2]{325 \times 400 \times 385 \times 329 \times 381 \times 401 \times 375}$

k) $x = \frac{1.0375^{30} - 1}{0.0375}$

l) $x = \frac{1 - 1.0375^{-30}}{0.0375}$

7. 解下之指數方程式:

$$356^{x+3} = 512 \times 284^x$$

8. 解下之對數方程式:

$$\log \sqrt{3x+4} + \frac{1}{2} \log (5x+1) = 1 + \log 3$$

本編應用公式:

(a1)---(a6)

(c1)---(c3)

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \dots\dots\dots (a1)$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots (a2)$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots (a3)$$

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots (a4)$$

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots (a5)$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A \dots\dots\dots (a6)$$

$$\log_e (n+1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots \right] \dots\dots (c1)$$

$$\log_e A = 2.302585 \log_{10} A \dots\dots\dots (c2)$$

$$\log_{10} A = 0.4342945 \log_e A \dots\dots\dots (c3)$$

第二編 息利

運用他人之資金，而支付之報酬，名曰利息 (Interest)。銀行以媒介資金與信用 (Credit) 爲其主要之業務，關於利息之計算，幾無時無之。即其他一般商業，亦靡不與他人有金錢來往，故咸須計算利息。經營商業者日常所需之流動資本，常借自他人，故每年須支出鉅額之利息，我國各紗廠每年支出之利息，普通大於工人所得工資之總額，故利息實爲計算成本中之重要一項。經營商業者以一時不需之款存入銀行，以備需要時之支用，或於顧客之延期付款者，徵收相當金額，以資補償，故利息之收入，亦幾無日無之。

向人借用之金額，名曰本金 (Principal)。使用本金之期間，名曰時期 (Time or Term)。對於單位本金在單位時期內所支付之利息，名曰利率 (Rate of Interest)。本金與利息之和，名曰本利合計 (Amount)。

第一章 單利

計算利息所根據之本金，若在投資期內，假定不變，換言之，即每期收入之利息，假定不再投資，則投資時期內收入利

息之總額,名曰單利息(Simple Interest),而計算單利息之方法,即名曰單利法。投資期內之本金,既假定不變,則期內收入利息之總額,與投資時期成正比例,投資時期愈長,收入之單利息亦愈多,兩者之關係可用下式表示:

$$I = Pin \dots\dots\dots(a7)$$

I 單利息

P 本金

n 時期

i 利率

上式不特表示單利息與投資時期之關係,且亦表示單利息與本金及利率之關係,蓋單利息亦與本金及利率成正比例也。上式中共有四數,已知其中三數,即可求得第四數,故公式(a7)實表示四數中任何一數與其他三數之關係。

本利合計為本金與單利息之和,故本利合計與本金,利率,時期亦有一定之關係,其公式如下:

$$S = P(1 + in) \dots\dots\dots(a8)$$

S 本利合計

P 本金

i 利率

n 時期

本金,單利息,利率,時期,本利合計,為單利法中之五數,已知此五數中之三數,(但此三數中,至少有一數須為 i 或 n),即

可求其他二數。學者可根據公式(a7)與公式(a8),化出各有關公式。

(例一) 本金400元, 利率5%, 求五年後之單利息!

應用公式(a7)得:

$$I = 400 \times 0.05 \times 5 = 100 \text{ 元}$$

(例二) 本金350元, 利率 $3\frac{1}{2}\%$, 求八月後之本利合計!

應用公式(a8)得:

$$S = 350 \left(1 + 0.035 \times \frac{8}{12} \right) = 350 \times 1.023333 = 358.17 \text{ 元}$$

(例三) 本金425元, 四年後得單利息102元, 求利率!

應用公式(a7)得:

$$102 = 425 \times 4 \times i$$

$$i = \frac{102}{425 \times 4} = \frac{102}{1700} = \frac{6}{100} = 6\%$$

(例四) 本金500元, 利率7%, 問若干年後可得本利合計洋710元?

應用公式(a8)得:

$$710 = 500(1 + 0.07n)$$

$$1 + 0.07n = 1.42$$

$$0.07n = 0.42$$

$$n = \frac{0.42}{0.07} = \frac{42}{7} = 6 \text{ 年}$$

P, I, i, n, S, 爲單利法中之五數, 已如上述, 此外尚有一數, 有

時亦為問題中之一要件。吾人有時欲知本利合計為本金之二倍，三倍，四倍，……或 p 倍時所必須經過之時期。此表示倍數之 p 即為單利法中之第六數。 p 與 n 之關係，可應用公式 (a8)，依次求得如下：

$$S = P(1 + in)$$

$$S = pP$$

即 $pP = P(1 + in)$

$$p = 1 + in$$

$$n = \frac{p-1}{i} \dots\dots\dots (b1)$$

n 時期

i 利率

p 倍數

若 $p = 1$

則 $n = 0$

此即謂本利合計等於本金時，未經過任何時期，換言之即為方投資之時。

(例五) 利率 5%，求本利合計為本金三倍時所必須經過之時期。^{*}

* 若欲應用 a 組公式中之 (a8)，則得：

$$3P = P \left[1 + \frac{5}{100} n \right]$$

$$3 = 1 + \frac{5}{100} n$$

$$n = 2 \div \frac{5}{100} = 40 \text{ 年}$$

應用公式 (b1) 得：

$$n = \frac{3-1}{0.05} = \frac{2}{0.05} = \frac{200}{5} = 40 \text{ 年}$$

利率有年利率、月利率與日利率之別。以一年為單位時期而計算利息時所用之利率，名曰年利率。以一月為單位時期而計算利息時所用之利率，名曰月利率。以一日為單位時期而計算利息時所用之利率，名曰日利率。年利率通常用幾分幾釐幾毫表之。年利率一分二釐，意即謂 12%，年利率七釐五毫意即謂 $7\frac{1}{2}\%$ 。月利率通常亦用幾分幾釐幾毫表示，但此之所謂分釐毫，與前迥異，月利率一分二釐，意謂 1.2% 而非 12%，學者不可不詳察也。日利率通常用幾毫幾絲表示。所謂幾毫即指萬分之幾而言，故日利率三毫為 0.03%，日利率二毫五絲為 0.025%。

利率若用年利率，則公式中之 n 為年數；若用月利率，則 n 為月數；若用日利率，則 n 為日數。

(例六) 本金 300 元，日利率三毫五絲，求 45 日後之單利息。
應用公式 (a7) 得：

$$I = 300 \times 0.00035 \times 45 = 4.73 \text{ 數}$$

若時期為日數而利率用年利率，則一年有作為 360 日者，有作為 365 日或 366 日（閏年）者。根據 360 日為一年而計算之利息，名曰普通利息 (Ordinary Interest)。根據 365 日或 366 日為一年而計算之利息，名曰準確利息 (Exact Interest)。德法美等

國商業上通用普通利息法,而我國與英日等國則採用準確利息法.

習 題 二

填寫下列各題中空白之處!

| | 本金 | 年利率 | 時期 | 單利息 | 本利合計 |
|----|-------|-----|------|----------|--------|
| 1. | \$645 | 4½% | 4年 | | |
| 2. | | 5% | 2年3月 | \$112.50 | |
| 3. | \$400 | | 2年6月 | \$60 | |
| 4. | \$550 | 3½% | | \$77 | |
| 5. | | 8% | 3年3月 | | \$2520 |
| 6. | \$800 | 2½% | | | \$1200 |

求下列各題中之單利息.

| | 本金 | 利 率 | 時 期 |
|-----|-------|---------|------|
| 7. | \$548 | 年利率1分2釐 | 5年 |
| 8. | \$356 | 年利率8釐5毫 | 3年6月 |
| 9. | \$495 | 月利率1分 | 9月 |
| 10. | \$100 | 月利率8釐 | 12月 |
| 11. | \$100 | 日利率3毫 | 360日 |
| 12. | \$100 | 日利率3毫 | 335日 |

求下列各題中之時期.

| | 本 金 | 本利合計 | 年 利 率 |
|-----|--------|--------|-------|
| 13. | \$1000 | \$2500 | 5% |
| 14. | \$1000 | \$3000 | 6% |
| 15. | \$1000 | \$5000 | 7% |

數法 (Method of Constant Divisor) 等簡捷法。而整除法又有本金整除法，利率整除法與時期整除法之別。

整除法者，將本金，利率或時期分成數部，使後一部能整除前一部，先求各部利息，然後求其總和之法也。被分之部若為本金，則為本金整除法；若為利率，則為利率整除法；若為時期，則為時期整除法。

$$\text{令 } P = P_1 + P_2 + \dots + P_m$$

則代入公式 (a7) 得：

$$I = Pin = P_1in + P_2in + \dots + P_min$$

(例二) 本金 13500 元，年利率六釐，求 120 日之普通利息！

$$\text{令 } 13500 = 10000 + 2500 + 1000$$

2500 與 1000 均能整除 10000

$$10000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} = 200$$

$$10000 \text{ 元} \quad 200 \text{ 元}$$

$$2500 \text{ 元} \quad 50 \text{ 元}$$

$$\frac{1000 \text{ 元}}{13500 \text{ 元}} \quad \frac{20 \text{ 元}}{270 \text{ 元}}$$

$$\text{令 } i = i_1 + i_2 + \dots + i_m$$

則代入公式 (a7) 得：

$$I = Pin = P_1i_1n + P_2i_2n + \dots + P_m i_m n$$

(例三) 本金 4500 元，年利率五釐七毫半，求 100 日之普通利息！

$$\text{令} \quad 5.75\% = 5\% + 0.5\% + 0.25\%$$

0.5% 能整除 5%，而 0.25% 亦能整除 0.5%。

$$4500 \times 0.05 \times \frac{100}{360} = 62.50$$

$$5\% \quad 62.50 \text{ 元}$$

$$0.5\% \quad 6.25 \text{ 元}$$

$$\frac{0.25\%}{5.75\%} \quad \frac{3.125 \text{ 元}}{71.875 \text{ 元}}$$

$$\text{令} \quad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

則代入公式 (a7) 得：

$$I = Pin = Pin_1 + Pin_2 + \cdots + Pin_m$$

時期整除法又有年法 (Year Rule) 與一釐法 (One Per Cent Method) 之別。年法者，先求一年之標準利息，然後依次計算各部利息之法也。一釐法者，先求相當於一釐標準日數之利息，然後依次計算各部利息之法也。

(例四) 本金 2750 元，年利率四釐，求 3 年 4 月 10 日之普通利息！

$$2750 \times 0.04 = 110$$

$$3 \text{ 年之利息} \quad \$330$$

$$4 \text{ 月之利息} \quad 36.6667$$

$$\begin{array}{r} 10 \text{ 日之利息} \quad 3.0556 \\ \hline 3 \text{ 年 4 月 10 日之利息} \quad \$369.7223 \end{array}$$

普通利息既以一年作為 360 日計算，故年利率若為六釐，

則60日之利息，適為本金之1%。年利率若為五釐，則72日之利息，適為本金之1%。餘可類推。一釐法者，即應用此原理以求普通利息之一種時期整除法也。其法先製成利息一釐應得之日數表如下：

| 年利率 | 利息一釐應得之日數 | 年利率 | 利息一釐應得之日數 |
|-----|-----------|-----|-----------|
| 1½% | 240 | 8% | 45 |
| 2% | 180 | 9% | 40 |
| 3% | 120 | 10% | 36 |
| 4% | 90 | 12% | 30 |
| 4½% | 80 | 15% | 24 |
| 5% | 72 | 18% | 20 |
| 6% | 60 | 20% | 18 |

應用一釐法時，以題中日數，分成數部，其中一部，須為上表中應得日數或其倍數。若為表中應得日數，則將本金之小數點，移上二位，即得此部之利息。若為應得日數之十倍，則將本金之小數點，移上一位，即得此部之利息。若為應得日數十分之一，則將本金之小數點，移上三位，即得此部之利息。其他各部之日數，須為標準日數之分數。其利息即依標準部利息比例計算，將各部之利息相加，即得所求之利息。

(例五) 本金45863元，年利率四釐五毫，求124日之普通利息！

查表得50日

$$124 = 80 + 40 + 4$$

| | |
|----------|-------------------|
| 80 日之利息 | \$458.63 |
| 40 日之利息 | 229.315 |
| 4 日之利息 | 22.9315 |
| 124 日之利息 | <u>\$710.8765</u> |

若題中之利率，爲表中所無，則可兼用利率整除法與時期整除法。例若年利率爲七釐，則可應用一釐法先求六釐之利息，再以其六分之一加之即得。

(例六) 本金 45869 元，年利率七釐，求 66 日之普通利息！

| | | |
|-------|---------|-------------------|
| | 60 日之利息 | \$458.69 |
| | 6 日之利息 | 45.869 |
| 年利率六釐 | 66 日之利息 | <u>\$504.559</u> |
| | + | 84.0932 |
| 年利率七釐 | 66 日之利息 | <u>\$588.6522</u> |

上題亦可先求年利率八釐之利息，再減去八分之一。

| | | |
|-------|---------|-------------------|
| | 45 日之利息 | \$458.69 |
| | 15 日之利息 | 152.8967 |
| | 60 日之利息 | <u>\$611.5867</u> |
| | 6 日之利息 | 31.1587 |
| 年利率八釐 | 66 日之利息 | <u>\$672.7454</u> |
| | - | 84.0932 |
| 年利率七釐 | 66 日之利息 | <u>\$588.6522</u> |

上述三種整除法中，本金整除法最少應用，蓋本金常不易分成整除各部也。利率較爲複雜時，應用利率整除法較爲

便利。至於時期整除法，則應用甚廣，學者不可不熟諳者也。

若依同一年利率，計算各個本金所生利息之總和，則以應用定除數法計算利息，較為便利。定除數法者，先就各本金，分別計算其積數 (Interest Figures)，而求其總積數，然後由總積數化為利息之法也。所謂積數，即本金 (以一元為單位) 與日數相乘之積也。設本金為 100 元，日數為 45 日，則積數為 4500；本金為 250.25 元，日數為 40 日，則積數為 10010；餘可類推。以一定除數除總積數，即得所求之利息，此一定除數名曰定除數 (Fixed or Constant Divisor)。定除數之數值，隨年利率而異，年利率愈高，則定除數之值愈小，年利率愈低，則定除數之值愈大。

設 P_1, P_2, \dots, P_n 為各個本金， d_1, d_2, \dots, d_n 為各個本金投資日數， I_1, I_2, \dots, I_n 為各個本金所生之利息， I 為各個利息之總和， i 為公共年利率，則應用公式 (a9)，得：

$$I_1 = P_1 i \frac{d_1}{360}$$

$$I_2 = P_2 i \frac{d_2}{360}$$

.....

$$I_n = P_n i \frac{d_n}{360}$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$= P_1 i \frac{d_1}{360} + P_2 i \frac{d_2}{360} + \dots + P_n i \frac{d_n}{360}$$

$$= \frac{i}{360} (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_n d_n)$$

$$= (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_n d_n) \div \frac{360}{i}$$

上式中 $P_1 d_1, P_2 d_2, \dots, P_n d_n$ 即為各個本金之積數, $\frac{360}{i}$ 則為年利率 i 之定除數, i 為分數中之分母, 分數之數值與分母之數值成反比例, 故定除數之數值亦與年利率成反比例, 茲將主要年利率之定除數, 列表如下:

| 年 利 率 | 定除數 | 年 利 率 | 定除數 |
|-------|-------|-------|------|
| 二 釐 | 18000 | 七釐五毫 | 4800 |
| 二釐五毫 | 14400 | 八 釐 | 4500 |
| 三 釐 | 12000 | 八釐五毫 | 4235 |
| 三釐五毫 | 10286 | 九 釐 | 4000 |
| 四 釐 | 9000 | 九釐五毫 | 3789 |
| 四釐五毫 | 8000 | 一 分 | 3600 |
| 五 釐 | 7200 | 一分一釐 | 3273 |
| 五釐五毫 | 6545 | 一分二釐 | 3000 |
| 六 釐 | 6000 | 一分三釐 | 2769 |
| 六釐五毫 | 5538 | 一分四釐 | 2571 |
| 七 釐 | 5143 | 一分五釐 | 2400 |

定除數法尤便於活期存款(參看拙著商業算術150頁第四編活期存款)之計息, 蓋活期存款中之餘額常有變動, 計息

日數頗不一致，而計算各餘額利息所用之年利率則均相同故也。

(例七) 某銀行活期存款規定年利率三釐，茲據某甲之活期存款賬，得存款餘額與存款日數如下：

| 存款餘額 | 存款日數 |
|-------|------|
| 550 元 | 48 日 |
| 375 元 | 45 日 |
| 525 元 | 28 日 |
| 490 元 | 36 日 |
| 565 元 | 18 日 |

問某甲應得利息若干元？(一年以 360 日計算)

$$550 \times 48 = 26400$$

$$375 \times 45 = 16875$$

$$525 \times 28 = 14700$$

$$490 \times 36 = 17640$$

$$\frac{565 \times 18}{\text{總積數}} = \frac{10170}{85785}$$

查定除數表之三釐得 12000

$$\frac{85785}{12000} = 7.15 \text{ 元}$$

習 題 三

1. 本金 3500 元，年利率三釐五毫，求民國十九年三月六日至民國二十一年二月四日間之普通利息。

2. 本金 27500 元, 年利率五釐, 應用本金整除法, 求 72 日之普通利息!

3. 應用定除數法, 求下表中普通利息之總和 (年利率四釐)

| 本 金 | 日 數 |
|----------|-----|
| 1350 元 | 35 |
| 4855 元 | 45 |
| 6945 元 | 128 |
| 7856 元 | 64 |
| 9450 元 | 32 |
| 346.50 元 | 16 |
| 287.75 元 | 41 |
| 5895 元 | 4 |
| 1605 元 | 32 |
| 2586 元 | 5 |

4. 應用利率整除法, 求下表中之普通利息!

| | 本 金 | 年 利 率 | 日 數 |
|-----|--------|---------|------|
| (a) | 3000 元 | 12½% | 56 日 |
| (b) | 2500 元 | 5.2775% | 48 日 |

5. 本金 2500 元, 年利率六釐, 應用年法, 求民國二十年三月四日至民國二十二年六月十六日間之普通利息!

6. 應用一釐法, 求下表中之普通利息!

| | 本 金 | 年 利 率 | 日 數 |
|-----|---------|-------|-------|
| (a) | 4586 元 | 6% | 156 日 |
| (b) | 3869 元 | 7% | 89 日 |
| (c) | 4857 元 | 6½% | 75 日 |
| (d) | 8694 元 | 8% | 84 日 |
| (e) | 12350 元 | 9% | 123 日 |

第二節 準確利息

準確利息，以一年作為 365 日或 366 日。故計算準確利息須以兩時期間，實在經過之日數為日數。例欲計算五月二十六日至八月十八日之準確利息，須自五月二十六日數至八月十八日，方得準確日數。但為計算便利起見，可先製成日數推算表（參看拙著商業算術 84 頁第二節準確利息）：計算時，即可由表檢出兩時期之日數，然後相減，而得所求之日數。

(例一) 求自四月十五日至八月五日之準確日數！

| | |
|-----------------|----------|
| 15 | 四月份未經過日數 |
| 31 | 五月 |
| 30 | 六月 |
| 31 | 七月 |
| $\frac{5}{112}$ | 八月 |

準確利息，可依下之公式求得：

$$I_1 = Pi \times \frac{d_1}{365} \dots\dots\dots(a10)$$

$$I_2 = Pi \times \frac{d_2}{366} \dots\dots\dots(a11)$$

$$I = I_1 + I_2 = Pi \left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366} \right) \dots\dots\dots(a12)$$

I_1 平年之準確利息

I_2 閏年之準確利息

I 一部平年, 一部閏年之準確利息

P 本金

i 年利率

d_1 平年內之日數

d_2 閏年內之日數

(註) 由西歷確定閏年與平年, 有一定規則可循. 不能以 4 整除各年, 均爲平年, 例如西歷 1933, 1934, 1935 均爲平年. 能以 4 整除而不能以 100 整除各年, 均爲閏年, 例如西歷 1932, 1936 均爲閏年. 能以 100 整除而不能以 400 整除各年, 均爲平年, 例如西歷 1700, 1800, 1900 均爲平年. 能以 400 整除各年, 均爲閏年, 例如西歷 1600, 2000 均爲閏年.

(例二) 本金 25000 元, 年利率五釐, 求自 1933 年十一月五日至 1934 年三月八日之準確利息!

$$d_1 = 25 + 31 + 31 + 28 + 8 = 123$$

應用公式 (a10), 得:

$$I_1 = 25000 \times 0.05 \times \frac{123}{365} = 421.23 \text{ 元}$$

(例三) 本金 3000 元, 年利率六釐, 求自 1932 年三月五日至同年五月二十日之準確利息!

$$d_2 = 26 + 30 + 20 = 76$$

應用公式 (a11), 得:

$$I_2 = 3000 \times 0.06 \times \frac{76}{365} = 37.38 \text{ 元}$$

(例四) 本金 5000 元, 年利率八釐, 求自 1931 年八月十八日至 1932 年四月十二日之準確利息!

(解) 此題計息期間, 一部在平年, (1931 年八月十八日至同年十二月三十一日) 一部在閏年, (1931 年十二月三十一日至 1932 年四月十二日) 故計算準確利息, 須應用公式(a12).

$$d_1 = 13 + 30 + 31 + 30 + 31 = 135$$

$$d_2 = 31 + 29 + 31 + 12 = 103$$

$$I = 5000 \times 0.08 \times \left(\frac{135}{365} + \frac{103}{366} \right)$$

$$= 400 \times \left(\frac{135}{365} + \frac{103}{366} \right)$$

$$= \frac{54000}{365} + \frac{41200}{366} = 260.51 \text{ 元}$$

平年計算準確利息, 可用除三遞退法 (The Third Tenth and Tenth Rule, 日人 小林行昌 譯為七三法, 和 田喜八 譯為三分二重一割法) 較為簡捷, 其求法分述如下:

- A. $\frac{\text{本金} \times \text{年利率} \times \text{日數} \times 2}{1000}$
- B. $A \div 3$
- C. $B \div 10$ (即 $A \div 30$)
- D. $C \div 10$ (即 $A \div 300$)
- E. $A + B + C + D$

$$F. \quad E - \frac{E}{10000}$$

$$(證) \quad I = Pi \frac{d}{365} = \frac{2Pid}{730}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{730} &= \frac{1370}{730 \times 1370} = \frac{137}{100} \times \frac{10}{10001} = \left(1 + \frac{37}{100}\right) \times \frac{10}{10001} \\ &= \left(1 + \frac{111}{300}\right) \times \frac{10}{10001} = \left(1 + \frac{100}{300} + \frac{10}{300} + \frac{1}{300}\right) \times \frac{10}{10001} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \times \frac{10}{10001} \end{aligned}$$

$$但 \quad \frac{10}{10001} = \frac{10 \times 9999 \times 10000000}{10001 \times 9999 \times 10000000} = \frac{9999}{10000000} \times \frac{100000000}{99999999}$$

$$= \frac{10000-1}{10000000} \times 1.0000000\dot{i}$$

$$= \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{10000000}\right) \times 1.0000000\dot{i}$$

$$\therefore I = 2 Pid \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{10000000}\right)$$

$$\times 1.0000000\dot{i} = \frac{2 Pid}{1000} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{10000}\right) \times 1.0000000\dot{i}$$

上式中 $1.0000000\dot{i}$ 幾與 1 相等，故求 I 之近似值時，可略而不計，而 I 之數值即可自下式求得：

$$I = \frac{2 Pid}{1000} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \left(1 - \frac{1}{10000}\right)$$

$$= A \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \left(1 - \frac{1}{10000}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(A + \frac{A}{3} + \frac{A}{30} + \frac{A}{300} \right) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= (A + B + C + D) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= E \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= E - \frac{E}{10000}
 \end{aligned}$$

(例五) 本金 12500 元, 年利率四釐, 求 38 日之準確利息!

$$12500 \times 0.04 \times 38 \times 2 = 38000$$

| | |
|----------|----------------|
| <i>A</i> | 38 |
| <i>B</i> | 12.6667 |
| <i>C</i> | 1.2667 |
| <i>D</i> | <u>0.1267</u> |
| <i>E</i> | 52.0601 |
| | <u>-0.0052</u> |
| <i>F</i> | 52.0549 |

閏年計算準確利息, 年利率若為六釐, 則依法國人壽保險公司會計摩阿蘭(M. Mialin)之經驗, 可用下之簡捷法求得:

$$A = \frac{\text{本金} \times \text{日數}}{10000}$$

$$B = A \div 2$$

$$C = A \div 10$$

$$D = A \div 30$$

$$E = A \times 0.006$$

$$F = A + B + C + D + E$$

$$(證) \quad I = Pd \times \frac{0.06}{366} = 0.00016393 \frac{27}{16} Pd$$

$$F = A + B + C + D + E$$

$$= A + \frac{A}{2} + \frac{A}{10} + \frac{A}{30} + 0.006 A$$

$$= \frac{49}{30} A + 0.006 A = \frac{4918}{3000} A$$

$$= \frac{4918}{3000} \times \frac{Pd}{10000} = 0.00016393 \frac{1}{3} Pd$$

$0.00016393 \frac{27}{61}$ 與 $0.00016393 \frac{1}{3}$ 相差不及 0.0000000011 , 故以 F 代 I , 錯誤小於 Fd 之 0.0000000011 , 若 Fd 小於 9000000 , 則錯誤小於 0.0099 , 或即小於百分之一。

(例六) 本金 35000 元, 年利率六釐, 求自 1932 年三月十八日至同年六月一日之準確利息!

1932 年爲閏年

$$13 + 30 + 31 + 1 = 75 \text{ 日}$$

$$35000 \times 75 = 2625000$$

| | |
|---|--------------|
| A | 262.5 |
| B | 131.25 |
| C | 26.25 |
| D | 8.75 |
| E | <u>1.575</u> |
| F | 430.325 |

定除數法亦能應用於準確利息之計算，惟定除數既以年利率除一年內日數而得，故準確利息之定除數，與普通利息之定除數互異，茲就平年準確利息，將主要年利率之定除數，列表如下：

| 年 利 率 | 定除數 | 年 利 率 | 定除數 |
|-------|-------|-------|------|
| 二 釐 | 18250 | 七釐五毫 | 4867 |
| 二釐五毫 | 14600 | 八 釐 | 4563 |
| 三 釐 | 12167 | 八釐五毫 | 4294 |
| 三釐五毫 | 10429 | 九 釐 | 4056 |
| 四 釐 | 9125 | 九釐五毫 | 3842 |
| 四釐五毫 | 8111 | 一 分 | 3650 |
| 五 釐 | 7300 | 一分一釐 | 3318 |
| 五釐五毫 | 6636 | 一分二釐 | 3042 |
| 六 釐 | 6083 | 一分三釐 | 2808 |
| 六釐五毫 | 5615 | 一分四釐 | 2607 |
| 七 厘 | 5214 | 一分五釐 | 2433 |

(例七)某銀行活期存款規定年利率三釐，茲據某甲之活期存款帳，得存款餘額與存款日數如下：

| | |
|-------|------|
| 存款餘額 | 存款日數 |
| 550 元 | 48 日 |

| | |
|-------|------|
| 375 元 | 45 日 |
| 525 元 | 28 日 |
| 490 元 | 36 日 |
| 565 元 | 18 日 |

問某甲應得利息若干元?(一年以 365 日計算)

$$550 \times 48 = 26400$$

$$375 \times 45 = 16875$$

$$525 \times 28 = 14700$$

$$490 \times 36 = 17640$$

$$565 \times 18 = 10170$$

$$\text{總積數 } 85785$$

查定除數表之三釐得 12167

$$\frac{85785}{12167} = 7.05 \text{ 元}$$

按此題即第一節中之例七,兩者之答數互異,普通利息爲 7.15 元,準確利息爲 7.05 元.計算普通利息與平年準確利息之日數若相等,則兩者之間有一定關係,用公式表之如下:

$$I' = I - \frac{I}{73} \dots\dots\dots(b2)$$

$$I = I' + \frac{I'}{72} \dots\dots\dots(b3)$$

I 普通利息

I' 平年準確利息

(證) 設 P 爲本金, i 爲年利率, d 爲日數, 則

$$I = Pi \frac{d}{360}$$

$$I'' = Pi \frac{d}{365}$$

由第一式得: $Pid = 360 I$

由第二式得: $Pid = 365 I''$

$$\therefore 360 I = 365 I''$$

$$I = \frac{365}{360} I'' = \left(1 + \frac{1}{72}\right) I'' = I'' + \frac{I''}{72}$$

$$I'' = \frac{360}{365} I = \left(1 - \frac{1}{73}\right) I = I - \frac{I}{73}$$

試以上題, 則得:

$$I = 7.05 + \frac{7.05}{72} = 7.15$$

$$I'' = 7.15 - \frac{7.15}{73} = 7.05$$

整除數法有時雖亦應用於準確利息之計算, 然因不能應用最通行之一釐法, 故計算準確利息, 鮮有應用整除數法者。

普通利息與準確利息, 既有一定關係, 故凡普通利息之簡捷法均可間接應用於準確利息, 而準確利息之簡捷法, 亦均可間接應用於普通利息。

習 題 四

1. 求下列各題中之準確利息!

| | 本 金 | 年 利 率 | 起 期 年 月 日 | 止 期 年 月 日 | 準 確 利 息 |
|-----|----------|-------|--------------|--------------|---------|
| (a) | \$ 10000 | 5% | 1931 3 18 | 1931 8 5 | |
| (b) | 4500 | 6% | 1932 1 19 | 1932 6 8 | |
| (c) | 3525 | 7% | 1930 10 9 | 1931 4 8 | |
| (d) | 1875 | 6½% | 1931 10 9 | 1932 4 8 | |
| (e) | 1525 | 5% | 1933 5 6 | 1933 9 4 | |

2. 應用除三遞退法, 求下列各題中之準確利息.

| | 本 金 | 年 利 率 | 日 數 | 準 確 利 息 |
|-----|----------|-------|-----|---------|
| (a) | \$ 25000 | 6% | 123 | |
| (b) | 35000 | 7% | 58 | |
| (c) | 12500 | 4% | 112 | |
| (d) | 38500 | 5% | 64 | |
| (e) | 18500 | 8% | 58 | |

3. 應用定除數法, 求下表中利息之總和(年利率五釐).

(a) 普通利息

(b) 半年準確利息

| 本 金 | 日 數 |
|--------|-----|
| \$ 385 | 45 |
| 258 | 65 |
| 450 | 13 |
| 7850 | 12 |
| 395 | 21 |
| 685 | 23 |
| 1400 | 31 |

4. 計算普通利息與閏年準確利息之日數若相等,則兩者之間有何關係? 試求其換算之公式.

5. 本金 1000 元, 年利率 6%, 求 135 日之半年準確利息.

(a) 應用除三遞退法.

(b) 應用一釐法先求普通利息, 然後化爲準確利息.

6. 本金 1000 元, 年利率 5%, 求 86 日之普通利息.

(a) 應用一釐法.

(b) 應用除三遞退法先求準確利息, 然後化爲普通利息.

第二章 複利

複利(Compound Interest)者,每期利息,於每期之末,加入舊本金,而成新本金;再由新本金,計算下期利息之法也,即所謂利上生利是也。債券持票人,盡以其所得利息,購買新債券,以生新利息,此複利法也。銀行存款人,以其應得利息,重行存入,以生新利息,此亦一複利法也。複利法為投資數學之基礎,蓋一切長期投資,若年金,若債券,若人壽保險,均須應用複利計算故也。

複利法中之本利合計,名曰複利終值(Compound Amount),複利終值與本金之差額,即為複利息(Compound Interest)。前後兩計息日相隔之期間,名曰計息期或複利期(Conversion Period),每年內計息次數,名曰複利次數。單利法中之本金不變,故單利息與本金,利率,時期成正比例,複利法則不然,每期之複利息隨本金而漸增,故複利息不能由本金,利率與時期三者連乘而得。複利終值與複利息,可應用下列二公式求得:

$$S = Pu^n \dots\dots\dots(a13)$$

$$I = S - P = P(u^n - 1) \dots\dots\dots(a14)$$

S 複利終值

P 本金

i 每計息期內利率

n 時期(單位計息期)

I 複利息

$$u = 1 + i$$

(證) 期初本金 期內利息 期末終值

第一期 P Pi $P + Pi = P(1 + i)$

第二期 $P(1 + i)$ $Pi(1 + i)$ $P(1 + i) + Pi(1 + i) = P(1 + i)^2$

第三期 $P(1 + i)^2$ $Pi(1 + i)^2$ $P(1 + i)^2 + Pi(1 + i)^2 = P(1 + i)^3$

.....
 第 n 期 $P(1 + i)^{n-1}Pi(1 + i)^{n-1}P(1 + i)^{n-1} + Pi(1 + i)^{n-1} = P(1 + i)^n$

$$\therefore S = P(1 + i)^n = Pu^n$$

(例一) 本金一千元, 年利率八厘, 每年複利二次, 求二年後之複利終值與複利息!

代入公式 (a13) 得:

$$S = 1000 \times 1.04^4 = 1169.86 \text{ 元}$$

$$I = 1169.86 - 1000 = 169.86 \text{ 元}$$

上題中僅有四期, 故尚易計算. 若期數增至數十期, 則應用公式, 須以數十個 1.04 連乘. 非特浪費時間, 且一有錯誤, 即連累及最後之結果. 計算與覆核之煩, 實為事實所不許. 複利終值表 (表四) 者, 即所以應此需要而作. 表上所載之數, 係本

金一元，依每期利率 i ，至 n 期末之終值也。 i 與 n 均詳載表上。試就上題而論，則可查四期，四釐，而得 1.16985856，即本金一元，二年後可得終值 1.16985856 元也。

$$1000 \times 1.16985856 = 1169.86 \text{ 元}$$

有時題中之利率與時期，為複利終值表中所無，則複利終值之計算，須應用對數表。

(例二) 本金 325 元，年利率四釐，每年複利二次，求一百年後之複利終值？

代入公式(a13)得：

$$S = 325 \times 1.02^{200}$$

$$\log S = \log 325 + 200 \log 1.02$$

$$= 2.511883 + 200 \times 0.0086002$$

$$= 4.231923$$

$$\therefore S = 17058 \text{ 元}$$

每年複利次數，隨問題而異。債券利息若每年支付一次，則持票人祇能於每年末以其應得利息，購買新債券以生新利息也。反之，若每年支付二次或四次，則持票人於每半年末或每三月末，已能以其應得利息，購買新債券，以生新利息也。前者持票人運用其資金每年祇能複利一次，而後者則能複利至二次或四次，一年內複利之次數愈多，投資者所得之利息愈大。試以本金 100 元，年利率八釐為例，若一年複利一次，則投資者於一年末得複利息洋 8 元。若一年複利二次，則

投資者於六月末得利息4元,加入舊本金而成新本金104元,更以新本金按年息八釐生息.於一年末復得利息4.16元.故投資者共得複利息8.16元.若一年複利四次,則投資者於三月末得利息2元,加入舊本金而成新本金102元,更以新本金按年息八釐生息,於六月末得利息2.04元,更以新本金104.04元按年息八釐生息,於九月末得利息2.0808元,更以新本金106.1208元按年息八釐生息,於一年末得利息2.122416元,故投資者共得複利息8.243216元.以上三例雖均名爲年利率八釐,然投資者在一年內實際收入之利息,則各各不同.同一本金,同一時期,而實際收入之利息不等,則一年內計算利息之實際利率,亦不一致,故利率有虛利率(Nominal Rate of Interest)與實利率(Effective Rate of Interest)之別.若每年複利一次,則虛利率與實利率相等;若每年複利不止一次,則實利率大於虛利率,每年複利之次數愈多,兩者之差亦愈甚,其關係可用公式列之如下:

$$\alpha = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \dots\dots\dots(a15)$$

$$j = m \left[\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \dots\dots\dots(a16)$$

α 實利率

j 虛利率

m 每年複利次數

(證) 設 S 爲本金一元一年末之複利終值, 則應用公式 (a13), 得:

$$P=1$$

$$i = \frac{j}{m}$$

$$n = m$$

$$S = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

但 $S = 1 + \alpha$

$$\therefore \alpha = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$1 + \alpha = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$$1 + \frac{j}{m} = (1 + \alpha)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{j}{m} = (1 + \alpha)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$\therefore j = m[(1 + \alpha)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

(例三) 年利率六釐, 每年複利四次, 求實利率!

代入公式 (a15), 得:

$$\alpha = 1.015^4 - 1 = 0.06136355$$

(例四) 某銀行規定每年複利二次, 存款者欲得年利率六釐之實利率, 求虛利率!

代入公式 (a16), 得:

$$j = 2(1.06^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$1.06^{\frac{1}{2}}$ 可查期數不滿一期之複利終值表(表九), 得:

$$1.06^{\frac{1}{2}} = 1.02956302$$

$$j = 2 \times 0.02956302 = 0.05912604$$

由實利率求虛利率, 可查實利率化虛利率表(表十), 得:

$$a = 6\%$$

$$m = 2$$

$$j = 0.05912603$$

每年複利次數愈多, 實利率亦愈大, 然實利率之增加非漫無限制, 即使複利次數連續增加不絕, 實利率之數值亦有一定限制. 連續複利之利息, 名曰連續複利息 (Continuously Convertible Interest), 而其虛利率, 名曰息力 (Force of Interest), 息力通常用 δ (讀如 Delta) 表示. 息力與實利率之關係如下:

$$a = e^{\delta} - 1 \dots\dots(c4) \text{ (證明參看附錄甲 7)}$$

$$\delta = 2.302585 \log_{10} (1+a) \dots\dots\dots(c5)$$

a 實利率

δ 息力

e 自然對數之底

(證) 應用公式 (c4), 得:

$$e^{\delta} = 1 + a$$

$$\delta \log_{10} e = \log_{10} (1+a)$$

$$\begin{aligned}\delta &= \log_e 10 \log_{10} (1+\alpha) \\ &= 2.302585 \log_{10} (1+\alpha)\end{aligned}$$

(例五) 虛利率六釐，連續複利，求實利率 i

代入公式(c4)，得：

$$\alpha = e^{0.06} - 1$$

令

$$x = e^{0.06}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= 0.06 \log_{10} e \\ &= 0.06 \times 0.4342945 \\ &= 0.02605767\end{aligned}$$

$$x = 1.0618$$

$$\therefore \alpha = 0.0618$$

(例六) 實利率六釐，求息力 i ！

代入公式(c5)，得：

$$\begin{aligned}\delta &= 2.302585 \log_{10} 1.06 \\ &= 2.302585 \times 0.0253059 \\ &0.362216 \\ &\underline{\underline{2.403222}} \\ &\underline{\underline{2.765438}} \\ \delta &= \text{Anti log } \bar{2}.765438 = 0.05827\end{aligned}$$

息力與實利率亦可自下列二公式求得：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots \dots (c6) \\ \alpha &= \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \dots (c7) \end{aligned} \right\} \text{(證明參看附錄甲3)}$$

應用公式 (c6) 以解例六, 則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ + 0.000072 \\ \hline 0.060072 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.0018 \\ + 0.00000324 \\ \hline 0.00180324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.060072 \\ - 0.00180324 \\ \hline 0.05826876 \end{array}$$

應用公式 (c7) 以解例五, 則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ 0.0018 \\ + 0.000036 \\ \hline 0.061836 \end{array}$$

若每年連續複利, 則複利終值可自公式 (a13) 與 (c4) 求得:

(例七) 本金 500 元, 年利率七釐, 連續複利, 求十年末之複利終值!

代入公式 (c4) 得:

$$1 + \alpha = e^{0.07}$$

代入公式 (a13) 得:

$$S = 500 \times e^{0.7}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} S &= \log_{10} 500 + 0.7 \log_{10} e \\ &= 2.698970 + 0.7 \times 0.4342945 \\ &= 3.00297615 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 1006.88 \text{ 元}$$

有時複利終值，爲投資者預定若干年後收到之金額，則此終值爲已知之數，而現當投資之額反猶未知，例如存款者欲於十年後自銀行取得一萬元，則現當存入之額，須經計算求得，由是求得之數，名曰十年後一萬元之現值 (Present Value)。十年後收到之一萬元，與五年後收到之一萬元，雖同爲一萬元；然其現在之價值則迥然不同，蓋五年後收到之一萬元，再經五年之投資，至十年末之金額，遠在一萬元以上，故同一金額，收到之時期愈早，其現值亦愈大。複利現值公式，可自複利終值公式化得如下：

$$P = Sv^n \dots\dots\dots (a17)$$

P 複利現值

S 複利終值

n 時期 (單位計息期)

i 每計息期內利率

$$v = (1 + i)^{-1}$$

公式 (a17) 中，若 $S = 1$ 則 $P = v^n$ ，複利現值表 (表五) 即根據此式而作，故複利現值表中所載之現值，乃依每期利率 i 投資，在 n 期後收到一元之現值也。

(例八) 某甲欲於十年後積洋一萬元，問現須以若干元存入銀行？

a 年利率八釐，每年複利一次。

b 年利率七釐七毫半，每年複利一次。

c) 年利率八釐, 每年複利二次.

d) 年利率八釐, 連續複利.

a) 查複利現值表中十期八釐得:

$$v^{10} = 0.46319349$$

此為十年後一元之現值, 故十年後一萬元之現值, 當為:

$$P = 10000 \times 0.46319349 = 4631.93 \text{ 元}$$

b) 複利現值表中無利率 $7\frac{5}{4}\%$, 故須代入公式 (a17), 然後

應用對數表, 計算存入金額

$$P = 10000 \times 1.0775^{-10}$$

$$\log P = 4 - 10 \log 1.0775$$

$$= 4 - 0.324173$$

$$= 3.675827$$

$$\therefore P = 4740.53 \text{ 元}$$

c) $i = 4\%$

$$n = 20$$

$$P = 10000 \times 1.04^{-20}$$

$$= 10000 \times 0.45638695$$

$$= 4563.87 \text{ 元}$$

a) 應用公式 (c4), 得:

$$1 + a = e^{0.08}$$

$$P = 10000(e^{0.08})^{-10}$$

應用公式 (a17), 得:

$$\begin{aligned} P &= 10000 e^{-0.8} \\ \log_{10} P &= 4 - 0.8 \log_{10} e \\ &= 4 - 0.8 \times 0.4342945 \\ &= 3.6525644 \end{aligned}$$

查反對數, 得:

$$P = 4493.29 \text{ 元}$$

上所述者, 爲複利終值與複利現值之計算. 若欲求複利時期, 則可應用下式:

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b4)$$

n 時期 (單位計息期)

S 複利終值

P 複利現值

i 每計息期內利率

(證) $S = P(1+i)^n$ (公式 a13)

$$\log S = \log P + n \log (1+i)$$

$$\log S - \log P = n \log (1+i)$$

$$\therefore n = \frac{\log S - \log P}{\log (1+i)}$$

若 $S = pP$

則 $\log p = \log S - \log P$

以之代入公式 (b4), 則得下式:

$$n = \frac{\lg p}{\log(1+i)} \dots \dots \dots (b5)$$

n 時期(單位計息期)

p 複利終值與複利現值之比

i 每計息期內利率

$p=2$ 時,即複利終值為複利現值之二倍時,公式 (b5) 中之複利時期,可自下式求得其近似值:

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots (c8) \text{ (證明參看附錄甲9)}$$

n 時期(單位計息期)

i 每計息期內利率

(例九)本金三千元,依年利率七釐投資,問若干年後可得終值六千元?

a) 每年複利一次

b) 每年複利二次

$$a) p = \frac{6000}{3000} = 2$$

(第一法)代入公式 (b5), 得:

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.07} = \frac{0.301030}{0.0293838} = 10.245 \text{ 年}$$

(第二法)代入公式 (c8), 得:

$$n = \frac{0.693}{0.07} + 0.35 = 10.25 \text{ 年}$$

b) (第一法) 代入公式 (b5), 得:

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.035} = \frac{0.301030}{0.0149403} = 20.1488 \text{ 期}$$

$$\frac{20.1488}{2} = 10.0744 \text{ 年}$$

(第二法) 代入公式 (c8), 得:

$$n = \frac{0.693}{0.035} + 0.35 = 20.15 \text{ 期}$$

$$\frac{20.15}{2} = 10.075 \text{ 年}$$

每計息期內利率可自下式求得:

$$i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1 \dots\dots\dots (b6)$$

i 每計息期內利率

S 複利終值

P 複利現值

n 時期 (單位計息期)

(證) $S = P(1+i)^n$ (公式 a13)

$$\log S = \log P + n \log (1+i)$$

$$\log (1+i) = \frac{\log S - \log P}{n}$$

$$1+i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n}$$

$$\therefore i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1$$

若欲求息力,則可應用公式 (a13) 與 (c5).

(例十) 本金一千元,十年後可得本利合計二千五百元,求
年 利率!

a) 每年複利一次;

b) 每年複利四次;

c) 連續複利.

a)* 代入公式 (b6), 得:

$$\begin{aligned} i &= \text{antilog} \frac{\log 2500 - \log 1000}{10} - 1 \\ &= \text{antilog} 0.039794 - 1 \\ &= 0.096 \end{aligned}$$

b)* 代入公式 (b6), 得:

$$\begin{aligned} i &= \left[\text{antilog} \frac{\log 2500 - \log 1000}{40} - 1 \right] \\ &= (\text{antilog} 0.0099485 - 1) = 0.0232 \\ 4i &= 0.0928 \end{aligned}$$

c) 代入公式 (a13), 得:

$$2500 = 1000 \times v^{10}$$

$$v^{10} = 2.5$$

$$\log_{10} v = \frac{1}{10} \log_{10} 2.5$$

代入公式 (c5), 得:

$$\delta = \frac{2.302585}{10} \log_{10} 2.5$$

$$= 0.2302585 \times 0.397940$$

$$= 0.0916$$

* 若欲應用 a 組公式 (a13), 則得:

$$a) \quad 2500 = 1000 (1+i)^{10}$$

$$(1+i)^{10} = 2.5$$

$$\log (1+i) = \frac{1}{10} \log 2.5$$

$$= 0.039794$$

$$1+i = 1.096$$

$$i = 0.096$$

$$b) \quad 2500 = 1000 (1+i)^{40}$$

$$(1+i)^{40} = 2.5$$

$$\log (1+i) = \frac{1}{40} \log 2.5$$

$$= 0.0099485$$

$$1+i = 1.0232$$

$$i = 0.0232$$

$$4i = 0.0928$$

習題五

1. 求下列各題中之複利終值與複利息!

| | 本金 | 年利率 | 年數 | 每年複利次數 |
|----|--------|-----|----|--------|
| a) | \$ 450 | 6% | 10 | 1 |
| b) | 500 | 5% | 5 | 2 |
| c) | 450 | 3% | 15 | 12 |
| d) | 600 | 4% | 20 | 連續複利 |
| e) | 650 | 8% | 25 | 4 |
| f) | 700 | 7% | 18 | 4 |

| | | | | |
|----|-----|-----|-----|------|
| g) | 750 | 8% | 100 | 連續複利 |
| h) | 800 | 4½% | 10 | 4 |
| i) | 850 | 4½% | 10 | 2 |
| j) | 900 | 4½% | 10 | 連續複利 |

2. 化下列各題中之虛利率為實利率!

| | 虛利率 | 每年複利次數 |
|----|-----|--------|
| a) | 6% | 2 |
| b) | 6% | 4 |
| c) | 6% | 12 |
| d) | 6% | 365 |
| e) | 6% | 連續複利 |

3. 求下列各題中之現值!

| | 複利終值 | 年利率 | 年數 | 每年複利次數 |
|----|---------|-----|----|--------|
| a) | \$ 1000 | 6% | 10 | 1 |
| b) | 1500 | 6% | 15 | 2 |
| c) | 2000 | 6% | 20 | 連續複利 |
| d) | 2500 | 6½% | 12 | 1 |
| e) | 3000 | 5½% | 25 | 2 |
| f) | 3500 | 7% | 30 | 4 |
| g) | 4000 | 8% | 15 | 1 |
| h) | 4500 | 9% | 10 | 連續複利 |
| i) | 5000 | 10% | 5 | 4 |
| j) | 5500 | 12% | 12 | 1 |

4. 求下列各題中之時期或利率!

| | 複利終值 | 複利現值 | 每年複利次數 | 年數 | 年利率 |
|----|---------|---------|--------|----|-----|
| a) | \$ 4000 | \$ 2000 | 1 | | 8% |
| b) | 4000 | 2000 | 2 | | 8% |

| | | | | | |
|----|------|------|------|---|----|
| c) | 1500 | 725 | 連續複利 | | 7% |
| d) | 2500 | 1525 | 4 | | 6% |
| e) | 1000 | 200 | 1 | | 8% |
| f) | 3000 | 2000 | 1 | 5 | |
| g) | 2000 | 1500 | 2 | | 6 |
| h) | 1500 | 1000 | 連續複利 | | 7 |
| i) | 4000 | 3500 | 4 | | 8 |
| j) | 3500 | 2500 | 1 | | 10 |

5. 化下列各題中之實利率為虛利率!

| | 實利率 | 每年複利次數 |
|----|-----|---------------|
| a) | 6% | 4 |
| b) | 6% | 連續複利 |
| c) | 6% | $\frac{1}{2}$ |
| d) | 10% | 4 |
| e) | 7% | 365 |

6. 上題中(c)求得之虛利率,何以大於實利率?試言其故!

7. 同一本金,一用單利5%投資,一用複利3½%投資,問若干年後,後者之本利合計,超過前者之本利合計?(檢查複利終值表)!

8. 本金1000元,投資三十年,前十年年利率六厘,其後十年年利率五厘,最後十年年利率四厘,求三十年末之複利終值!

9. 同一本金,一用複利5%投資,一用複利3%投資,問若干年後,前者之終值,超過後者終值之二倍?

10. 同一本金,一用單利3%投資,一用複利3%投資,十年後兩者之本利合計,相差1097.91元,求最初本金!

11. 某甲以一百萬元，捐於某校，言定此項捐款須依年利率四厘投資，每年收入利息，某校祇能動用半數，其餘一半撥入基金，但基金超過五百萬元時，某校祇須以每年利息四分之一撥入基金，基金超過一千萬元時，某校得動用每年全部利息，問此時距捐款時若干年？

12. 問虛利率六厘，每年複利四次，若改用連續複利，當得息力若干？

13. 某工廠向中國銀行借款之利率為月息八釐七毫半，問合實利率若干？

14. 本金五百元，年利率八釐，每年複利二次，求十五年二月後之複利終值：

a) 全時期內依複利計算；

b) 最後不滿一期之部依單利計算。

15. 應用複利終值表與複利現值表求下列各數：

$$a) 1.04^{15\frac{1}{2}} \quad b) 1.04^{15\frac{2}{3}} \quad c) 1.04^{-15\frac{1}{3}} \quad d) 1.04^{-15\frac{2}{3}}$$

16. 下表為中國銀行整存整付儲蓄存款，存入國幣一千元，到期本息合計數目表，試覆核表中之本利合計（六個月複利一次）。

| 年 期 | 利 率 | 本利合計 | 年 期 | 利 率 | 本利合計 |
|-----|-------|------------|-----|-------|------------|
| 一 年 | 七 厘 | 1,071.22 元 | 九 年 | 八厘二五 | 2,070.09 元 |
| 二 年 | 七厘二五 | 1,153.07 | 十 年 | 八 厘 五 | 2,298.90 |
| 三 年 | 七厘二五 | 1,238.19 | 十一年 | 八厘七五 | 2,565.21 |
| 四 年 | 七 厘 五 | 1,342.47 | 十二年 | 八厘七五 | 2,794.57 |
| 五 年 | 七 厘 五 | 1,445.04 | 十三年 | 九 厘 | 3,140.68 |
| 六 年 | 七 厘 五 | 1,555.45 | 十四年 | 九 厘 | 3,429.70 |
| 七 年 | 七厘七五 | 1,702.76 | 十五年 | 九 厘 | 3,745.31 |
| 八 年 | 八 厘 | 1,872.98 | | | |

17. 下表為中國銀行整存整付儲蓄存款，預計滿期得本息國幣一千元，應存本金數目表，試覆核表中之應存本金（六個月複利一次）。

| 年 期 | 利 率 | 應存本金 | 年 期 | 利 率 | 應存本金 |
|-----|-------|----------|-----|-------|----------|
| 一 年 | 七 厘 | 933.51 元 | 九 年 | 八厘二五 | 483.07 元 |
| 二 年 | 七厘二五 | 867.25 | 十 年 | 八 厘 五 | 434.99 |
| 三 年 | 七厘二五 | 807.63 | 十一年 | 八厘七五 | 389.83 |
| 四 年 | 七 厘 五 | 744.90 | 十二年 | 八厘七五 | 357.84 |
| 五 年 | 七 厘 五 | 692.02 | 十三年 | 九 厘 | 318.40 |
| 六 年 | 七 厘 五 | 642.90 | 十四年 | 九 厘 | 291.57 |
| 七 年 | 七厘七五 | 587.28 | 十五年 | 九 厘 | 267.00 |
| 八 年 | 八 厘 | 533.91 | | | |

18. 下表爲中國銀行存本付息儲蓄存款,規定每次應取利息數目,(以存入國幣一千元爲標準)每年計息二次,試覆核表中(3)(4)(5)(6)四行.

| 年 期 (1) | 年利率 (2) | 每月一取 (3) | 每三月一取 (4) | 每六月一取 (5) | 每年一取 (6) |
|---------|---------|----------|-----------|-----------|----------|
| 二年至三年 | 七厘二五 | \$ 5.95 | \$ 17.96 | \$ 36.25 | \$ 73.81 |
| 四年至六年 | 七 厘 五 | 6.15 | 18.57 | 37.50 | 76.40 |
| 七 年 | 七厘七五 | 6.35 | 19.19 | 38.75 | 79.00 |
| 八 年 | 八 厘 | 6.55 | 19.80 | 40.00 | 81.60 |
| 九 年 | 八厘二五 | 6.76 | 20.41 | 41.25 | 84.20 |
| 十 年 | 八 厘 五 | 6.96 | 21.02 | 42.50 | 86.80 |
| 十一年至十二年 | 八厘七五 | 7.16 | 21.64 | 43.75 | 89.41 |
| 十三年至十五年 | 九 厘 | 7.36 | 22.25 | 45.00 | 92.02 |

19. 下表爲中國銀行存本付息儲蓄存款,規定應存本金數目,(以每次取利息國幣十元爲標準)每年計息二次,試覆核表中(3)(4)(5)(6)四行.

| 年 期 (1) | 年利率 (2) | 每月一取 (3) | 每三月一取 (4) | 每六月一取 (5) | 每年一取 (6) |
|---------|---------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 二年至三年 | 七厘二五 | \$ 1680.02 | \$ 556.68 | \$ 275.86 | \$ 135.48 |
| 四年至六年 | 七 厘 五 | 1624.80 | 538.29 | 266.67 | 130.88 |
| 七 年 | 七厘七五 | 1573.22 | 521.10 | 258.06 | 126.58 |
| 八 年 | 八 厘 | 1524.81 | 504.96 | 250.00 | 122.55 |
| 九 年 | 八厘二五 | 1479.36 | 489.80 | 242.42 | 118.76 |
| 十 年 | 八 厘 五 | 1436.58 | 475.54 | 235.29 | 115.20 |
| 十一年至十二年 | 八厘七五 | 1396.31 | 462.09 | 228.57 | 111.84 |
| 十三年至十五年 | 九 厘 | 1358.12 | 449.39 | 222.32 | 108.67 |

第三章 貼現

貼現 (Discount) 者，定期支付票據之執票人，在未到期前以票據上所載權利，移讓於人，藉以換取現金之謂也。貼現在商業上之效用甚大，直接能使資金之流轉迅速，間接即所以促進工商業之發展。例如製造商以其出品售於批發商，約定三月後付款，在未到期前，製造商須添購原料，支付工資，均需充分之現金，以資週轉；若製造商得以其對於批發商之權利，轉讓於人，則三月後到期之付款，隨時可變為現金，以維持其繼續不絕之生產，故貼現已成為工商業發展國家流動資金最重要來源之一。美國商業百分之八十五，賴貼現而得流動之資金。

票據貼現既為發展工商業之工具，則欲促進票據之流行，對於票據之執票人，不可不有迅速確實之保障。故各國靡不制定票據法，以利票據之流行。我國票據法，於民國十八年十月三十日公佈施行，而票據法施行法，則於民國十九年七月一日公佈施行。票據法上所載關於票據之種類，各國立法未能一致，德法等國僅以匯票 (Bill of Exchange) 與本票 (Promissory Note) 為票據，而我國與英美日等國，則以支票 (Check)

與匯票，本票同包含在票據之內，惟支票爲見票即付票據，故不適於貼現之用。

本票爲債權人約期支付之票據，而匯票則爲債權人命令債務人，於規定時期，付款若干於某人之票據也。故匯票有發票人，受款人與付款人三當事人，而本票祇有發票人與受款人二當事人，蓋本票之發票人即自爲付款人也。匯票之發票人雖命令付款人定期付款，然付款人苟無承認付款之表示，則匯票到期時付款人無付款之義務，而執票人亦不能強其付款也。故欲使付款人有到期付款之義務，須先使其有承認付款之表示，而此承認付款之表示，即票據法上所謂承兌 (Acceptance) 是也，付款人承兌時，以承認到期付款之意，表示於匯票之上，承兌後付款人始負票面金額支付之義務，故爲確定支付義務計，匯票執票人須向付款人提示承兌。

本票或匯票之執票人，以其債權轉讓於人時，除執票人票據(認票不認人)祇須交付即可流行外，均須簽字於票據之背面，以爲移讓債權之憑證，是謂背書 (Indorsement)。背書之人，名曰背書人 (Indorser)，而受讓債權之人，則名曰被背書人 (Indorsee)。付款人不能支付票據時，背書人亦負支付之責，蓋依票據法之規定，執票人得行使追索權 (Right of Recourse) 也。所謂追索權，即匯票遇拒絕付款或拒絕承兌，與本票遇不能付款時，執票人得向發票人，背書人，或票上其他債務人，請求償還票面金額之權也。

票面上所載之金額，名曰面值 (Face Value)。貼現票據，既未到期，則未到期前之利息，應由貼現人貼補，是謂貼現息 (Discount)。面值一元在單位時期內支付之貼現息，名曰貼現率 (Rate of Discount)。自面值內，扣去貼現息，所餘之金額，名曰淨收額 (Proceeds，日人譯為手收金)。

發行票據之日，名曰出票日 (Date of the Note)。到期付款之日，名曰到期日 (Date of Maturity)。貼現票據之日，名曰貼現日 (Date of Discount)。自貼現日至到期日之日數，名曰貼現時期 (Discount Period)。

票據有帶息票據 (Interest-Bearing Note) 與不帶息票據 (Non-Interest-Bearing Note) 之別，前者到期時付款人除照付面值外，尚須依票面上規定利率，支付出票日與到期日間之利息，而後者到期時付款人僅照面值付款，而無支付利息之義務也。票據到期時付款人應付之總額，名曰到期值 (Maturity Value)。帶息票據之到期值大於其面值，而不帶息票據之到期值，則與其面值相等也。貼現票據若為帶息票據，則貼現率即為到期值一元在單位時期內支付之貼現息，而淨收額即為到期值與貼現息相差之額。本書中所稱票據，除有特別說明外，均指不帶息票據而言。

請求貼現之票據，通常為數月期之短期票據，但間亦有數年期之長期票據者。短期票據之貼現，通常應用單利法，而長期票據之貼現，則非應用複利法不可，故貼現又有單貼現

與復貼現之別。

第一節 單貼現

單貼現 (Simple Discount) 者，依單利法計算貼現息之法也。貼現率為到期值一元在單位時期內支付之貼現息，而淨收額為到期值與貼現息之差，故單貼現息與淨收額可自下列兩式求得：

$$I = Sdn \dots\dots\dots(a18)$$

$$P = S - I = S(1 - dn) \dots\dots\dots(a19)$$

I 單貼現息

S 到期值

P 淨收額

d 貼現率

n 年數

貼現人借用之資金，為淨收額，而非到期值，故貼現人對於借用資金支付之利率，實大於貼現率。利率與貼現率，似同而實異，前者為計算淨收額 P 在 n 年內之利息所用之百分率，而後者則為計算到期值 S 在 n 年內之貼現息所用之百分率。 I 為對於到期值 S 之貼現息，亦即為對於淨收額 P 之利息，故若 i 為利率，則：

$$I = Pin$$

$$Sdn = Sin(1 - dn)$$

$$\therefore i = \frac{d}{1+dn} \dots\dots\dots(b7)$$

$$d = \frac{i}{1+in} \dots\dots\dots(b8)$$

上列二式,所以示單利率與單貼現率之關係,據此二式,可作單利率與單貼現率比較對照表如下:

| 單利率 | 折合單貼現率 | | | 單貼現率 | 折合單利率 | | |
|-----|--------|--------|--------|------|---------|---------|---------|
| | 一 年 | 六 月 | 三 月 | | 一 年 | 六 月 | 三 月 |
| % | % | % | % | % | % | % | % |
| 3 | 2.9126 | 2.9557 | 2.9777 | 3 | 3.0928 | 3.0457 | 3.0227 |
| 4 | 3.8462 | 3.9216 | 3.9604 | 4 | 4.1667 | 4.0816 | 4.0404 |
| 5 | 4.7619 | 4.8780 | 4.9383 | 5 | 5.2632 | 5.1282 | 5.0633 |
| 6 | 5.6604 | 5.8252 | 5.9113 | 6 | 6.3830 | 6.1856 | 6.0914 |
| 7 | 6.5421 | 6.7633 | 6.8796 | 7 | 7.5269 | 7.2539 | 7.1247 |
| 8 | 7.4071 | 7.6923 | 7.8431 | 8 | 8.6957 | 8.3333 | 8.1633 |
| 10 | 9.0909 | 9.5238 | 9.7561 | 10 | 11.1111 | 10.5263 | 10.2564 |

若依單利率貼現票據,則可應用公式(a8)先求淨收額,然後計算貼現息,蓋淨收額即為公式(a8)中之本金,而到期值即為其本利合計也。若依單貼現率貼現票據,則可應用公式(a18)先求貼現息,然後計算淨收額。銀行貼現票據,多依單貼現率計算貼現息,蓋以其計算較簡,且於銀行有利也。故後法名曰銀行貼現法,而前法則俗稱確實貼現法。凡計算銀行預收利息之利率,均指貼現率而言。

(例一)某甲以面值一萬元三月後到期之匯票請求貼現,求貼現息與淨收額!

a) 依單貼現率6%貼現;

b) 依單利率6.0914%貼現.

a) 先求貼現息

應用公式(a18), 得:

$$I = 10000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = 150 \text{ 元}$$

$$P = 10000 - 150 = 9850 \text{ 元}$$

b) 先求淨收額

應用公式(a8), 得:

$$10000 = P \left(1 + \frac{6.0914}{100} \times \frac{1}{4} \right)$$

$$P = 10000 \div \frac{406.0914}{400} = 9850 \text{ 元}$$

$$I = 10000 - 9850 = 150 \text{ 元}$$

兩者之答數相同, 蓋三月期之單貼現率6%與單利率6.0914%相等故也.

(例二) 某甲向某乙購貨, 共值洋二萬元, 除付現金五千元外, 餘由某甲開發六月後到期之本票, 由乙持向銀行請求貼現, 其淨收額應與貸款餘額相等, 求面值!

a) 依單利率7%貼現;

b) 依單貼現率6.7633%貼現.

a) 應用公式(a8), 得:

$$S = 15000 \left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{1}{2} \right) = 15525 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (a19), 得:

$$15000 = S \left(1 - \frac{6.7633}{100} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$S = 15000 \div \frac{193.2367}{200} = 15525 \text{ 元}$$

兩者之答數相同, 蓋六月期之單利率 7% 與單貼現率 6.7633% 相等故也。

觀此二例, 可知淨收額之計算, 以根據單貼現率為較便, 而面值之計算, 則以根據單利率為較便。

(例三) 某甲以三月後到期之六釐匯票請求貼現, 面值一萬二千元, 單貼現率七釐, 求貼現息與淨收額!

$$\text{到期值} = 12000 + 12000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = 12180 \text{ 元}$$

應用公式 (a18), 得:

$$I = 12180 \times \frac{7}{100} \times \frac{1}{4} = 213.15 \text{ 元}$$

$$P = 12180 - 213.15 = 11966.85 \text{ 元}$$

銀行貼現票據, 有以貼現日與到期日, 均算入貼現時期之內者, 有僅算一日者, 本書各題, 除有特別說明外, 均以後法為標準。

(例四) 某甲以六月十二日出票三月後到期之匯票, 於六月十八日持向銀行請求貼現, 面值二萬二千五百元, 貼現率六釐, 求貼現息與淨收額! (一年作為 365 日)

出票日後三月到期,故到期日爲九月十二日.

自貼現日至到期日共有86日.

應用公式(a18),得:

$$I = 22500 \times \frac{6}{100} \times \frac{86}{365} = 318.08 \text{ 元}$$

$$P = 22500 - 318.08 = 22181.92 \text{ 元}$$

英國票據法上,有所謂恩惠日 (Days of Grace 或譯猶豫日)者,即票據到期後,得猶豫三日,至到期後第三日,始爲法定日期日 (Legal Due Date),故貼現英國票據時,日數須多算三日.

(例五)七月四日出票,三月後到期之本票,於八月五日在英國貼現,面值 £458.10 s.6 d,* 貼現率 $2\frac{7}{8}\%$,求貼現息與淨收額! (一年作爲365日)

出票後三月到期,故到期日爲十月四日,而決定期日則爲十月七日,自八月五日至十月七日共有63日.

應用公式(a18),得:

$$I = £ 458^{10}/_6 \times \frac{2\frac{7}{8}}{100} \times \frac{63}{365} = £ 2^5/_6$$

$$P = £ 458^{10}/_6 - £ 2^5/_6 = £ 456^5/_6$$

定理:依單貼現率 d 貼現之貼現息,與依單利率 i 貼現之

* 1 鎊等于20先令,1先令等于12辨士.

貼現息相差之數，當 $d=i$ 時，即為後者在貼現時期依單利率 i 所生之利息。

(證) 設 S 為到期值， P 為淨收額， n 為貼現時期， I_1 為依單貼現率 d 貼現之貼現息， I_2 為依單利率 i 貼現之貼現息，則：

$$I_1 = Sdn$$

$$I_2 = Pin = Sin - I_2 in$$

$$I_1 - I_2 = Sn(d-i) + I_2 in$$

若 $d=i$

則 $Sn(d-i) = 0$

$$\therefore I_1 - I_2 = I_2 in \dots\dots\dots(c9)$$

(例六) 六月後到期之票據，依單貼現率六釐貼現之貼現息，與依單利率六釐貼現之貼現息，相差 8.73786 元，求面值！

應用公式 (c9)，得：

$$8.73786 = I_2 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore I_2 = 8.73786 \times \frac{100}{3} = 291.262$$

但 $I_2 = Pin = P \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$

$$\therefore P = 291.262 \times \frac{100}{3} = 9708.733$$

$$S = P + I_2 = 9708.733 + 291.262 = 10000 \text{ 元}$$

習 題 六

1. 求下列各題中之到期值, 貼現息與淨收額! (一年作365日)

| 面值 | 出票日 | 到期日 | 貼現日 | 票據種類 | 到期值 | 貼現方法 | 貼現息 | 淨收額 |
|------------|-------|--------|-------|--------|-----|---------------|-----|-----|
| a) \$ 5000 | 三月十四日 | 出票後三月 | 四月十二日 | 六厘帶息票據 | | 依單貼現率 四厘貼現 | | |
| b) 5500 | 四月十八日 | 出票後六十日 | 四月廿五日 | 不帶息票據 | | 依單利率五厘貼現 | | |
| c) 6000 | 五月三日 | 八月十四日 | 六月七日 | 不帶息票據 | | 依單貼現率六厘貼現 | | |
| d) 6500 | 六月四日 | 九月十八日 | 七月八日 | 五厘帶息票據 | | 依單貼現率七厘貼現 | | |
| e) 7000 | 七月二日 | 十月十五日 | 八月一日 | 不帶息票據 | | 依單利率三厘貼現 | | |
| f) 8000 | 七月四日 | 十月十五日 | 八月十八日 | 不帶息票據 | | 依單貼現率四厘貼現 | | |

2. 製下列單利率與單貼現率比較對照表!

| 單利率 | 折合單貼現率 | | | 單貼現率 | 折合單利率 | | |
|-----|--------|----|----|------|-------|----|----|
| | 一月 | 二月 | 三月 | | 一月 | 二月 | 三月 |
| % | | | | % | | | |
| 3 | | | | 3 | | | |
| 4 | | | | 4 | | | |
| 5 | | | | 5 | | | |
| 6 | | | | 6 | | | |
| 7 | | | | 7 | | | |
| 8 | | | | 8 | | | |
| 9 | | | | 9 | | | |
| 10 | | | | 10 | | | |

3. 某甲以面值一萬二千五百元六月後到期之匯票請求貼現, 求貼現息與淨收額!

- a) 依單貼現率 6% 貼現;
- b) 依單利率 6.1856% 貼現;
- c) 依單利率 6% 貼現;
- d) 依單貼現率 5.8252% 貼現.

4. 某甲向某乙購貨, 共值洋二萬五千元, 除付現金七千五百元外, 餘由某甲開發三月後到期之本票, 由乙持向銀行請求貼現, 其淨收額應與貨款餘額相等, 求面值!

- a) 依單利率 5% 貼現;
- b) 依單貼現率 4.9383% 貼現;
- c) 依單貼現率 5% 貼現;
- d) 依單利率 5.0633% 貼現.

5. 六月十五日出票, 三月後到期之本票, 於七月十二日在英國貼現, 面值 £ 396 $\frac{12}{4}$, 貼現率 3 $\frac{1}{8}$ %, 求貼現息與淨收額! (一年作為 365 日)

6. 某甲向某乙購貨, 值洋二萬元, 約定三月後付款, 設甲欲於半月後付清貨款, 問乙可允其減少貨價若干元? (假定某乙能依年利率七厘投資)

7. 某甲向某乙購貨, 約定若付現款, 僅需洋三萬元, 若於六月後付款, 則需洋三萬二千元, 設甲選擇第一種付款方法, 並向銀行借款三萬元, 俾得付清貨款, 問某甲依最高利率若干付息, 方不致受損?

8. 三月後到期之票據, 依單貼現率八厘貼現之貼現息, 與依單利率八厘貼現之貼現息, 相差 7.84314 元, 求面值!

9. 某甲向銀行借款二千五百元, 償付半年利息一百五十元, 求利率!

第二節 複貼現

複貼現 (Compound Discount) 者, 依複利法計算貼現息之法也. 單貼現之淨收額, 吾人已知自下式求得:

$$P = S(1 - dn)$$

但上式中之 n , 若等於 $\frac{1}{d}$ 或大於 $\frac{1}{d}$, 則淨收額為零或為負數, 兩者均非合理, 故長期票據之貼現, 不能應用單貼現法。

前後兩計息日(計算貼現息)相隔之期間, 名曰資金運轉期, 而每年內計算貼現息次數, 名曰資金運轉次數。

單貼現中, 有依單利率貼現者, 亦有依單貼現率貼現者, 複貼現亦然。其依複利率貼現者, 貼現票據之淨收額, 即為到期值之現值, 故可自複利現值公式求得。其依複貼現率貼現者, 則淨收額與貼現息, 可自下列二式求得:

$$P = S(1-d)^n \dots\dots\dots(a20)$$

$$I = S - P = S[1 - (1-d)^n] \dots\dots\dots(a21)$$

P 淨收額

S 到期值

d 每資金運轉期內之貼現率

n 時期(單位資金運轉期)

(證) 期末到期值 貼現息 期初淨收額

| | | |
|--------------------------|-----------------|---|
| 到期前一期 S | Sd | $S - Sd = S(1-d)$ |
| 到期前二期 $S(1-d)$ | $S(1-d)d$ | $S(1-d) - S(1-d)d = S(1-d)^2$ |
| 到期前三期 $S(1-d)^2$ | $S(1-d)^2d$ | $S(1-d)^2 - S(1-d)^2d = S(1-d)^3$ |
| | | |
| 到期前 n 期 $S(1-d)^{n-1}$ | $S(1-d)^{n-1}d$ | $S(1-d)^{n-1} - S(1-d)^{n-1}d = S(1-d)^n$ |

$$\therefore P = S(1-d)^n$$

$$I = S - S(1-d)^n = S[1 - (1-d)^n]$$

利率有實利率與虛利率之分，貼現率亦有實貼現率 (Effective Rate of Discount) 與虛貼現率 (Nominal Rate of Discount) 之別。設銀行以一萬元連續投資與半年期票據之貼現；另以一萬元連續投資於三月期票據之貼現，則雖依據同一貼現率貼現，銀行對一年後到期值一元實際取得之貼現息則迥異，換言之，即其實際計算貼現息之貼現率，二者互異。何則？設二者均依貼現率 6% 貼現，則前者現可貼現到期

值 10309.28 元 $\left(\frac{10000}{1 - \frac{3}{100}} = 10309.28\right)$ 之票據，至六月後即以收到

之 10309.28 元貼現到期值 10628.12 元 $\left(\frac{10309.28}{1 - \frac{3}{100}} = 10628.12\right)$ 之

票據，若是則對於一年後到期值一元，銀行僅得貼現息 $\frac{10628.12 - 10000}{10628.12}$ 即 0.05910 元，故名義上貼現率為 6%，實際上

貼現率為 5.910%，前者名曰虛貼現率，後者名曰實貼現率。若銀行以一萬元連續投資於三月期票據之貼現，則於投資之初，可貼現到期值 10152.28 元

$\left(\frac{10000}{1 - \frac{1.5}{100}} = 10152.28\right)$ 之票據，至三

月後即以收到之 10152.28 元貼現到期值 10306.88 元 $\left(\frac{10152.28}{1 - \frac{1.5}{100}} = 10306.88\right)$

=10306.88) 之票據, 至六月後即以收到之 10306.88 元貼現到期值 10463.84 元 $\left(\frac{11306.88}{1-\frac{1.5}{100}}=10463.84\right)$ 之票據, 至九月後即以收到之 10463.84 元貼現到期值 10623.19 元 $\left(\frac{10463.84}{1-\frac{1.5}{100}}=10623.19\right)$

之票據, 若是則對於一年後到期值一元, 銀行僅得貼現息 $\frac{10623.19-10000}{10623.19}$ 即 0.05866 元, 故虛貼現率為 6%, 而實貼現率僅有 5.866%.

連續投資於半年期票據之貼現, 則資金每年運轉二次; 連續投資於三月期票據之貼現, 則資金每年運轉四次, 資金之運轉, 若每年一次, 則實貼現率與虛貼現率相等; 若每年不止一次, 則實貼現率小於虛貼現率, 運轉之次數愈多, 其相差亦愈甚. 實貼現率與虛貼現率之關係如下:

$$\beta = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \dots\dots\dots(a22)$$

$$f = m[1 - (1 - \beta)^{\frac{1}{m}}] \dots\dots\dots(a23)$$

β 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

(例一) 化虛貼現率 8% 為實貼現率!

a) 每年運轉二次;

b) 每年運轉四次.

代入公式 (22), 得:

$$a) \beta = 1 - \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{25} = 1 - \frac{96^{25}}{100^{25}} = 1 - \frac{9216}{10000} = 7.84\%$$

$$b) \beta = 1 - \left(1 - \frac{2}{100}\right)^{4} = 1 - \frac{98^4}{100^4} = 1 - \frac{92236816}{100000000} = 7.763184\%$$

由實貼現率化虛貼現率, 亦可應用下列公式, 求其近似值:

$$f = \beta + \frac{m-1}{2m}\beta^2 + \frac{2m^2-3m+1}{6m^2}\beta^3, \dots\dots\dots (c10)$$

(證明參看附錄 10)

(例二) 化實貼現率 5% 為虛貼現率!

a) 每年運轉二次;

b) 每年運轉四次.

(第一法) 代入公式 (a23), 得:

$$a) f = 2[1 - (1 - 0.05)^{\frac{1}{2}}] = 2(1 - 0.97468) = 5.064\%$$

$$b) f = 4[1 - (1 - 0.05)^{\frac{1}{4}}] = 4(1 - 0.987259) = 5.0964\%$$

(第二法) 代入公式 (c10), 得:

$$a) f = 0.05 + \frac{1}{4} \times 0.05^2 + \frac{3}{24} \times 0.05^3 = 5.064\%$$

$$b) f = 0.05 + \frac{3}{8} \times 0.05^2 + \frac{21}{96} \times 0.05^3 = 5.096\%$$

每年運轉次數愈多, 實貼現率愈小, 但亦非漫無限制. 運轉不停之虛貼現率, 名曰貼現力 (Force of Discount), 通常以 δ' 表之. 貼現力與實貼現率之關係如下:

$$\beta = 1 - e^{-\delta'} \dots (c11) \text{ (證明參看附錄甲 11)}$$

$$\delta' = -2.302585 \log_{10} (1 - \beta) \dots \dots \dots (c12)$$

β 實貼現率

δ' 貼現力

e 自然對數之底

(證) 應用公式 (c11), 得:

$$e^{-\delta'} = 1 - \beta$$

$$-\delta' = \log_e (1 - \beta)$$

$$\delta' = -\log_e 10 \log_{10} (1 - \beta)$$

$$\therefore \delta' = -2.302585 \log_{10} (1 - \beta)$$

貼現力與實貼現率亦可自下列二式求得:

$$\delta' = \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^4}{4} + \dots (c13) \text{ (證明參看附錄甲 12)}$$

$$\beta = \delta' - \frac{\delta'^2}{2!} + \frac{\delta'^3}{3!} - \frac{\delta'^4}{4!} + \dots (c14) \text{ (證明參看附錄甲 12)}$$

δ' 貼現力

β 實貼現率

以上兩式中, 若僅欲求其近似數, 則可截取前二項.

(例三) 實貼現率 5%, 求貼現力!

(第一法) 應用公式 (c12), 得:

$$\begin{aligned} \delta' &= -2.302585 \log_{10} 0.95 = -2.302585 \times \bar{1}.977724 \\ &= 2.302585 \times 0.022276 = 0.05129238346 \end{aligned}$$

(第二法) 應用公式 (c13), 得:

$$\delta' = 0.05 + \frac{0.05^2}{2} + \frac{0.05^3}{3} + \frac{0.05^4}{4} + \dots$$

$$0.05$$

$$0.00125$$

$$0.0000416667$$

$$0.0000015625$$

$$\frac{0.0000000625}{0.0512932917}$$

若僅求其近似數，則得：

$$0.05 + 0.00125 = 0.05125$$

(例四) 貼現力 5%，求實貼現率！

(第一法) 應用公式 (c11)，得：

$$\beta = 1 - e^{-0.05}$$

令

$$x = e^{-0.05}$$

$$\log_{10} x = -0.05 \times 0.4342945$$

$$\log_{10} x = \bar{1}.978285275$$

$$x = 0.9512295$$

$$\therefore \beta = 1 - 0.9512295 = 0.0487705$$

(第二法) 應用公式 (c14)，得：

$$\beta = 0.05 - \frac{0.05^2}{2!} + \frac{0.05^3}{3!} - \frac{0.05^4}{4!} + \dots$$

| + | - |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 0.5 | 0.00125 |
| $\frac{0.000020833}{0.050020833}$ | $\frac{0.000000260}{0.001250260}$ |
| $\frac{-0.001250260}{0.048770573}$ | |

若僅求其近似數，則得：

$$0.05 - 0.00125 = 0.04875$$

單利率與單貼現率有一定之關係，複利率與複貼現率亦然，其關係用公式表之如下：

$$\delta = \delta' \dots\dots\dots (c15)$$

$$i = \frac{d}{1-d} \dots\dots\dots (b9)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \dots\dots\dots (b10)$$

δ 息力

δ' 貼現力

i 每計息期內利率

d 每資金運轉期內之貼現率

(證) $Se^{-n\delta} = Se^{-n\delta'}$ (公式 a17, a20, c4, 與 c11)

$$-n\delta = -n\delta'$$

$$\therefore \delta = \delta'$$

$$S(1+i)^{-n} = S(1-d)^n$$

(公式 a17 與 a20)

$$(1+i)^{-1} = 1-d$$

$$1+i-d-id=1$$

$$\therefore i = \frac{d}{1-d}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

(例五)某甲以面值一千元三年後到期之票據請求貼現，求淨收額與貼現息！

a) 依複貼現率 6% 貼現；

b) 依複利率 6.383% 貼現。

c) 應用公式 (a20)，得：

$$P = 1000 \times 0.94^3 = 830.58 \text{ 元}$$

$$I = 1000 - 830.58 = 169.42 \text{ 元}$$

d) 應用公式 (a17)，得：

$$P = 1000 \times 1.06383^{-3}$$

$$\log P = 3 - 3 \times 0.02687224 = 2.91938328$$

$$P = 830.58 \text{ 元}$$

$$I = 1000 - 830.58 = 169.42 \text{ 元}$$

兩者之結果相同，蓋複貼現率 6% 與複利率 6.383% 相等故也。

(例六)某甲以面值一千五百元五年後到期之票據請求貼現，求淨收額與貼現息！

- a) 依複貼現率 8% 貼現, 每年運轉四次;
 b) 依複利率 8.1633% 貼現, 每年複利四次.
 a) 應用公式 (a20), 得:

$$P = 1500 \times 0.98^{20}$$

$$\log P = 3.176091 + 20 \times \bar{1}.991226 = 3.000611$$

$$\therefore P = 1001.41 \text{ 元}$$

$$I = 1500 - 1001.41 = 498.59 \text{ 元}$$

- b) 應用公式 (a17), 得:

$$P = 1500 \times 1.02040825^{-20}$$

$$\log P = 3.176091 - 20 \times 0.0087739145 = 3.00061271$$

$$P = 1001.41 \text{ 元}$$

$$I = 1500 - 1001.41 = 498.59 \text{ 元}$$

兩者之結果相同, 蓋複貼現率 8% 與複利率 8.1633% 相等故也.

(例七) 某甲以面值五百元三年後到期之票據請求貼現, 求淨收額與貼現息!

- a) 依貼現力 6% 貼現;
 b) 依息力 6% 貼現.
 a) 應用公式 (a20) 與 (c11) }
 b) 應用公式 (a17) 與 (c4) } 得:

$$P = 500e^{-0.18}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} P &= 2.698970 - 0.18 \times 0.4342945 \\ &= 2.62079699\end{aligned}$$

$$\therefore P = 417.64 \text{ 元}$$

$$I = 500 - 417.64 = 82.36 \text{ 元}$$

習 題 七

1. 化下列各種之虛貼現率爲實貼現率!

| | 虛貼現率 | 每年運轉次數 | 實貼現率 |
|----|------|--------|------|
| a) | 6% | 二次 | |
| b) | 6% | 四次 | |
| c) | 6% | 連續運轉 | |
| d) | 5% | 二次 | |
| e) | 4% | 十二次 | |

2. 化下列各題中之實貼現率爲虛貼現率!

| | 實貼現率 | 每年運轉次數 | 虛貼現率 |
|----|------|--------|------|
| a) | 6% | 二次 | |
| b) | 6% | 四次 | |
| c) | 6% | 連續運轉 | |
| d) | 5% | 二次 | |
| e) | 4% | 十二次 | |

3. 化下列各題中之複利率爲複貼現率!

| | 複利率 | 每年複利次數或運轉次數 | 複貼現率 |
|----|-----|-------------|------|
| a) | 6% | 二次 | |
| b) | 6% | 四次 | |

- | | | |
|----|----|-----|
| c) | 6% | 一次 |
| d) | 5% | 二次 |
| e) | 4% | 十二次 |

4. 化下列各題中之複貼現率為複利率!

| | 複貼現率 | 每年複利次數或運轉次數 | 複利率 |
|----|------|-------------|-----|
| a) | 6% | 二次 | |
| b) | 6% | 四次 | |
| c) | 6% | 一次 | |
| d) | 5% | 二次 | |
| e) | 4% | 十二次 | |

5. 某甲以面值七百五十元三年後到期之票據請求貼現, 求淨收額與貼現息!

- 依複貼現率 7% 貼現;
- 依複利率 7.5269% 貼現;
- 依複利率 7% 貼現;
- 依複貼現率 6.5421% 貼現。

6. 某甲以面值六百五十元四年後到期之票據請求貼現, 求淨收額與貼現息!

- 依複貼現率 6% 貼現, 每年運轉二次;
- 依複利率 6.1856% 貼現, 每年運轉二次;
- 依複利率 6% 貼現, 每年運轉二次;
- 依複貼現率 5.8252% 貼現, 每年運轉二次。

7. 某甲以面值八百五十元五年後到期之票據請求貼現, 求淨收額與貼現息!

- 依單貼現率 8% 貼現;
- 依複貼現率 8% 貼現;
- 依複貼現率 8% 貼現, 每年運轉二次;

-
- d) 依複貼現率8%貼現, 每年運轉十二次;
- e) 依複貼現率8%貼現, 每年連續運轉.
8. 實貼現率6%, 求貼現力
- a) 應用公式 (c12),
- b) 應用公式 (c13).

第四章 價值方程式

兩票據在同一時日，依同一利率或同一貼現率貼現，若得同一淨收額，則在此時日，此兩票據名曰等值票據 (Equivalent Notes)，而此時日，名曰兩票據等值日 (Date of Equivalence of two Notes)。到期值 S_1 在 n_1 期後到期之票據，若與到期值 S_2 在 n_2 期後到期之票據等值，則在貼現時兩者之淨收額相等，以方程式表之，即得：

$$S_1(1-dn_1) = S_2(1-dn_2) \text{ (若依單貼現率 } d \text{ 貼現)} \quad (a24)$$

$$\frac{S_1}{1+in_1} = \frac{S_2}{1+in_2} \text{ (若依單利率 } i \text{ 貼現)} \quad (a25)$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} \text{ (若依複貼現率 } d \text{ 貼現)} \quad (a26)$$

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2} \text{ (若依複利率 } i \text{ 貼現)} \quad (a27)$$

以上諸方程式，均所以表示兩票據等值之關係，故此方程式，名曰價值方程式 (Equation of Value)。價值方程式不以表示兩票據之等值為限，方程式所表示等值之票據，可多至數張或數十張者，若 l 張票據之總淨收額與 k 張票據之總淨收額相等，則價值方程式即可用以表示 l 張票據與 k 張票據之等值。欲以 l 張票據掉換 k 張票據，祇須使其在貼現時之淨收額相等，換言之，祇須將兩者之淨收額列成價值方程式，

由此方程式即可求票據掉換中之未知一項。貼現有單貼現與複貼現之分，故列成價值方程式，亦有單貼現法與複貼現法之別。

第一節 單貼現法

定理二：到期值不等且未到期之兩票據，在同一時日，依兩種不同之單貼現法貼現，（一依單貼現率 r 貼現，一依單利率 r 貼現）不能均為等值。

（證）設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值， S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

$$S_1 \neq S_2$$

$$n_1 > 0$$

$$n_2 < 0$$

若依單貼現率 r 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1 - rn_1) = S_2(1 - rn_2)$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1 - rn_2}{1 - rn_1}$$

若依單利率 r 貼現而其淨收額亦等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1 + rn_1} = \frac{S_2}{1 + rn_2}$$

即

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1 + rn_1}{1 + rn_2}$$

$$\therefore \frac{1 - r n_2}{1 - r n_1} = \frac{1 + r n_1}{1 + r n_2}$$

$$1 - r^2 n_2^2 = 1 - r^2 n_1^2$$

$$n_2^2 = n_1^2$$

$$n_2 = \pm n_1$$

若

$$n_2 = n_1$$

則

$$S_1 = S_2$$

但 $S_1 \neq S_2$, 故此結果為不合理。

若 $n_2 = -n_1$

則兩者之一為負數，故與未到期之假定亦抵觸。故兩票據不能依兩種不同之單貼現法貼現而均為等值。

例如到期值 7900 元在六月後到期之票據，與到期值 7800 元在三月後到期之票據，若依單貼現率 5% 貼現則為等值，但若依單利率 5% 貼現則為不等值。又如到期值 4100 元在六月後到期之票據，與到期值 4050 元在三月後到期之票據，若依單利率 5% 貼現則為等值，但若依單貼現率 5% 貼現則為不等值。

定理三：到期值不等之兩票據，若現依單貼現法貼現而為等值，則在等值前後不能更為等值。

(證) 設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值， S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

$$S_1 \neq S_2$$

a) 若現依單貼現率 d 貼現而其淨收額相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1(1-dn_1) = S_2(1-dn_2)$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-dn_2}{1-dn_1}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依單貼現率 d 貼現而其淨收額亦相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1[1-d(n_1-p)] = S_2[1-d(n_2-p)]$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$\therefore \frac{1-dn_2}{1-dn_1} = \frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$(1-dn_2)(1-dn_1+dp) = (1-dn_1)(1-dn_2+dp)$$

$$1-dn_1+dp-dn_2+d^2n_1n_2-d^2n_2p$$

$$= 1-dn_2+dp-dn_1+d^2n_1n_2-d^2n_1p$$

$$d^2n_2p = d^2n_1p$$

即
$$n_2 = n_1$$

以之代入價值方程式, 則得:

$$S_1 = S_2$$

但
$$S_1 \neq S_2$$

故此結果為不合理, 即兩票據在等值日前後不能更為等值.

例如到期值 7900 元在六月後到期之票據, 與到期值 7800

元在三月後到期之票據，若現依單貼現率5%貼現則為等值，但若在一月後或一月前依單貼現率5%貼現則為不等值。

b) 若現依單利率*i*貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1+in_1} = \frac{S_2}{1+in_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+in_1}{1+in_2}$$

若在*p* (*p* 或正或負) 年後依單利率*i*貼現而其淨收額亦相等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1+i(n_1-p)} = \frac{S_2}{1+i(n_2-p)}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$\therefore \frac{1+in_1}{1+in_2} = \frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$(1+in_1)(1+in_2-ip) = (1+in_2)(1+in_1-ip)$$

$$1+in_2-ip+in_1+i^2n_1n_2-i^2n_1p$$

$$= 1+in_1-ip+in_2+i^2n_1n_2-i^2n_2p$$

$$i^2n_1p = i^2n_2p$$

$$n_1 = n_2$$

以之代入價值方程式，則得：

$$S_1 = S_2$$

但

$$S_1 \neq S_2$$

故此結果為不合理，即兩票據在等值日前後不能更為等值。

例如到期值 4100 元在六月後到期之票據，與到期值 4050 元在三月後到期之票據，若現依單利率 5% 貼現則為等值，但若在一月後或一月前依單利率 5% 貼現則為不等值。

關於兩票據之等值，吾人可設下列三問：

1. 以甲票掉換乙票，甲票之到期值當為幾何？
2. 以甲票掉換乙票，甲票應在何時到期？
3. 甲乙兩票應在何日等值？

吾人將應用價值方程式，依次求其公式於下。

1. 求新票之到期值。

a) 依單貼現率貼現：

$$S' = \frac{S(1-dn)}{1-dn} \dots\dots\dots(b11)$$

b) 依單利率貼現：

$$S' = \frac{S(1+in')}{1+in'} \dots\dots\dots(b12)$$

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

d 單貼現率

i 單利率

上列兩式自價值方程式化出，學者可自證之。

(例一) 到期值 5800 元於六十日後到期之票據，其付款人欲更換一張七十日後到期之票據，求新票之到期值！(一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 4% 貼現；

b) 依單利率 4% 貼現。

a) 代入公式 (b11)* 得：

$$S' = \frac{5800 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{60}{360} \right)}{1 - \frac{4}{100} \times \frac{70}{360}} = \frac{5800(9000 - 60)}{9000 - 70}$$

$$= \frac{5800 \times 8940}{8930} = 5806.49 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (b12*) 得：

* 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25)，則得：

$$a) \quad S_1 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{70}{360} \right) = 5800 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{60}{360} \right)$$

$$(900 - 7)S_1 = 5800(900 - 6)$$

$$S_1 = \frac{5800 \times 894}{893} = 5806.49 \text{ 元}$$

$$b) \quad \frac{S_1}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{70}{360}} = \frac{5800}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{60}{360}}$$

$$\frac{S_1}{900 + 7} = \frac{5800}{900 + 6}$$

$$S_1 = \frac{5800 \times 907}{906} = 5806.40 \text{ 元}$$

$$S' = \frac{5800 \left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{70}{360} \right)}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{60}{360}} = \frac{5800(9000+70)}{9000+60}$$

$$= \frac{5800 \times 9070}{9060} = 5806.40 \text{ 元}$$

2. 求新票之貼現時期

a) 依單貼現率貼現:

$$n' = \frac{S' - S(1 - dn)}{dS'} \dots\dots\dots (b13)$$

b) 依單利率貼現:

$$n' = \frac{S'(1 + in) - S}{iS'} \dots\dots\dots (b14)$$

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

d 單貼現率

i 單利率

(證) a) $S'(1 - dn') = S(1 - dn)$

$$1 - dn' = \frac{S(1 - dn)}{S'}$$

$$dn' = \frac{S' - S(1 - dn)}{S'}$$

$$\therefore n' = \frac{S' - S(1 - dn)}{dS'}$$

$$b) \frac{S'}{1 + in'} = \frac{S}{1 + in}$$

$$1 + in' = \frac{S'(1 + in)}{S}$$

$$in' = \frac{S'(1 + in) - S}{S}$$

$$\therefore n' = \frac{S'(1 + in) - S}{iS}$$

(例二) 到期值 1060 元於八十五日後到期之票據, 其付款人欲更換一張到期值 1050 元之票據, 開新票應在若干日後到期? (一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 6% 貼現;

b) 依單利率 6% 貼現.

a) 應用公式 (b13*), 得:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{1050 - 1060 \left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{85}{360} \right)}{\frac{6}{100} \times 1050} = \frac{1050 \times 6000 - 1060(6000 - 85)}{360 \times 1050} \\ &= \frac{6300000 - 1060 \times 5915}{360 \times 1050} = \frac{30100}{360 \times 1050} \text{年} = \frac{30100}{1050} \text{日} \\ &= 28 \frac{2}{3} \text{日} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b14*), 得:

$$\begin{aligned}
 n' &= \frac{1050\left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{85}{360}\right) - 1060}{\frac{6}{100} \times 1060} = \frac{1050(6000 + 85) - 1060 \times 6000}{360 \times 1060} \\
 &= \frac{1050 \times 6085 - 6360000}{360 \times 1060} = \frac{29250}{360 \times 1060} \text{年} = \frac{29250}{1060} \text{日} \\
 &= 27 \frac{63}{106} \text{日}
 \end{aligned}$$

3. 求甲乙兩票之等值時期.

a) 依單貼現率貼現:

* 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25), 則得:

$$a) \quad 1050\left(1 - \frac{6}{100}n_1\right) = 1060\left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{85}{360}\right)$$

$$1 - \frac{6}{100}n_1 = \frac{106 \times 5915}{105 \times 6000}$$

$$\frac{6}{100}n_1 = \frac{3010}{630000}$$

$$n_1 = \frac{301}{6 \times 630} \text{年} = \frac{301 \times 360}{6 \times 630} \text{日} = 28 \frac{2}{3} \text{日}$$

$$b) \quad \frac{1050}{1 + \frac{6}{100}n_1} = \frac{1060}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{85}{360}}$$

$$1 + \frac{6}{100}n_1 = \frac{105 \times 6085}{106 \times 6000}$$

$$\frac{6}{100}n_1 = \frac{2925}{636000}$$

$$n_1 = \frac{2925}{6 \times 6360} \text{年} = \frac{2925 \times 360}{6 \times 6360} \text{日} = 27 \frac{63}{106} \text{日}$$

$$x = \frac{S_1 n_1 - S_2 n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d} \dots\dots\dots (b15)$$

b) 依單利率貼現:

$$x = \frac{S_1 n_2 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i} \dots\dots\dots (b16)$$

x 甲乙兩票等值時距今之年數

S_1 甲票之到期值

S_2 乙票之到期值

n_1 甲票到期時距今之年數

n_2 乙票到期時距今之年數

d 單貼現率

i 單利率

(證) a) $S_1[1 - d(n_1 - x)] = S_2[1 - d(n_2 - x)]$

$$S_1 - S_1 d(n_1 - x) = S_2 - S_2 d(n_2 - x)$$

$$S_1 - S_1 d n_1 + S_1 d x = S_2 - S_2 d n_2 + S_2 d x$$

$$(S_1 - S_2) d x = d(S_1 n_1 - S_2 n_2) + S_2 - S_1$$

$$\therefore x = \frac{S_1 n_1 - S_2 n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d}$$

b) $\frac{S_1}{1 + i(n_1 - x)} = \frac{S_2}{1 + i(n_2 - x)}$

$$S_1 + S_1 i(n_2 - x) = S_2 + S_2 i(n_1 - x)$$

$$S_1 + S_1 i n_2 - S_1 i x = S_2 + S_2 i n_1 - S_2 i x$$

$$(S_2 - S_1) i x = i(S_2 n_1 - S_1 n_2) + S_2 - S_1$$

$$\therefore x = \frac{S_1 n_2 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i}$$

(例三) 到期值 7900 元於七月後到期之票據,與到期值 7800 元於四月後到期之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率 5% 貼現;

b) 依單利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (b15*), 得:

$$x = \frac{7900 \times \frac{7}{12} - 7800 \times \frac{4}{12}}{7900 - 7800} - \frac{1}{0.05}$$

$$= \frac{55300 - 31200}{1200} - 20 = \frac{1}{12} \text{ 年} = 1 \text{ 月}$$

即甲乙兩票在一月後等值.

b) 應用公式 (b16*), 得:

* 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25), 則得:

令兩票據在 x 月後等值

$$a) \quad 7900 \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{7-x}{12} \right) = 7800 \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{4-x}{12} \right)$$

$$79(1200 - 35 + 5x) = 78(1200 - 20 + 5x)$$

$$92035 + 395x = 92040 + 390x$$

$$5x = 5$$

$$x = 1 \text{ 月}$$

$$b) \quad \frac{7900}{1 + \frac{5}{100} \times \frac{7-x}{12}} = \frac{7800}{1 + \frac{5}{100} \times \frac{4-x}{12}}$$

$$\frac{79}{1200 + 35 - 5x} = \frac{78}{1200 + 20 - 5x}$$

$$96380 - 395x = 96330 - 390x$$

$$-5x = -50$$

$$x = 10 \text{ 月}$$

$$x = \frac{7900 \times \frac{4}{12} - 7800 \times \frac{7}{12}}{7900 - 7800} + \frac{1}{0.05}$$

$$= \frac{31600 - 54600}{1200} + 20 = \frac{10}{12} \text{年} = 10 \text{月}$$

即甲乙兩票在十月後等值，但甲乙兩票至十月後均已過期，故此問題為不可能。

(例四) 到期值 4100 元於五月後到期之票據，與到期值 4050 元於二月後到期之票據，在何時等值？

a) 依單利率 5% 貼現：

b) 依單貼現率 5% 貼現。

a) 應用公式 (b16**), 得：

** 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25)，則得：

令兩票據在 x 月後等值

$$a) \frac{4100}{1 + \frac{5}{100} \times \frac{5-x}{12}} = \frac{4050}{1 + \frac{5}{100} \times \frac{2-x}{12}}$$

$$\frac{410}{1200 + 25 - 5x} = \frac{405}{1200 + 10 - 5x}$$

$$496100 - 2050x = 496125 - 2025x$$

$$25x = -25$$

$$x = -1 \text{ 月}$$

$$b) 4100 \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{5-x}{12} \right) = 4050 \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{2-x}{12} \right)$$

$$410(1200 - 25 + 5x) = 405(1200 - 10 + 5x)$$

$$481750 + 2050x = 481950 - 2025x$$

$$25x = 200$$

$$x = 8 \text{ 月}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4100 \times \frac{2}{12} - 4050 \times \frac{5}{12}}{4100 - 4050} + \frac{1}{0.05} \\
 &= \frac{8200 - 20250}{600} + 20 = -\frac{1}{12} \text{年} = -1 \text{月}
 \end{aligned}$$

即甲乙兩票在一月前等值。

b) 應用公式 (b15**), 得:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4100 \times \frac{5}{12} - 4050 \times \frac{2}{12}}{4100 - 4050} - \frac{1}{0.05} \\
 &= \frac{20500 - 8100}{600} - 20 = \frac{8}{12} \text{年} = 8 \text{月}
 \end{aligned}$$

即甲乙兩票在八月後等值, 但甲乙兩票至八月後均已過期, 故此問題為不可能。

若以一新票更換無數舊票, 則此新票之到期值或其到期日, 須應用價值方程式求得。新票之到期值, 或與各舊票到期值之總額相等, 或不相等。新票之到期日, 名曰共同期日 (Common Due Date)。若新票之到期值與各舊票到期值之總額相等, 則此共同期日名曰平均期日 (Average Due Date), 故平均期日為共同期日之特別情形。

新票之到期值, 可自下列公式求得:

a) 依單貼現率貼現:

$$S' = \frac{\sum S_1 - d \sum (S_1 n_1)}{1 - dn'} \dots\dots\dots (b17)$$

b) 依單利率貼現:

$$S' = (1 + in') \sum \frac{S_1}{1 + in_1} \dots \dots \dots (b18)$$

S' 新票之到期值

S_1 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n_1 舊票之貼現時期

d 單貼現率

i 單利率

Σ (讀如 sigma) 總和之記號 (ΣS_1 表示各舊票到期值之總額)

(證) 設 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ 為 p 張舊票之到期值, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ 為其貼現時期。

$$\begin{aligned} a) \quad S'(1 - dn') &= S_1(1 - dn_1) + S_2(1 - dn_2) + S_3(1 - dn_3) \\ &\quad + \dots + S_p(1 - dn_p) \\ &= (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p) \\ &\quad - d(S_1n_1 + S_2n_2 + S_3n_3 + \dots + S_pn_p) \\ &= \sum S_1 - d \sum (S_1n_1) \end{aligned}$$

$$\therefore S' = \frac{\sum S_1 - d \sum (S_1n_1)}{1 - dn'}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{S'}{1 + in'} &= \frac{S_1}{1 + in_1} + \frac{S_2}{1 + in_2} + \frac{S_3}{1 + in_3} + \dots + \frac{S_p}{1 + in_p} \\ &= \sum \frac{S_1}{1 + in_1} \end{aligned}$$

$$\therefore S' = (1 + in') \sum \frac{S_1}{1 + in_1}$$

(例五) 某甲欲以五十日後到期之本票更換下列三票：

甲票二十日後到期，到期值 900 元；

乙票三十日後到期，到期值 870 元；

丙票四十二日後到期，到期值 1200 元；

求新票之到期值。(一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 4% 貼現；

b) 依單利率 4% 貼現。

a) 應用公式 (b17*)，得：

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{(900+870+1200) - \frac{4}{100} \left(900 \times \frac{20}{360} + 870 \times \frac{30}{360} + 1200 \times \frac{42}{360} \right)}{1 - \frac{4}{100} \times \frac{50}{360}} \\
 &= \frac{2970 \times 360 - \frac{4}{100} (18000 + 26100 + 50400)}{360 - 2} = \frac{1065420}{358} \\
 &= 2976.03 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b18*)，得：

$$\begin{aligned}
 S' &= \left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{50}{360} \right) \left(\frac{900}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{20}{360}} + \frac{870}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{30}{360}} + \frac{1200}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{42}{360}} \right) \\
 &= \frac{181}{180} \left(\frac{810000}{902} + \frac{261000}{301} + \frac{3600000}{3014} \right) \\
 &= \frac{1629000}{1804} + \frac{524900}{602} + \frac{3620000}{3014} \\
 &= 902.993 + 871.927 + 1201.062 = 2975.98 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

新票之共同期日與平均期日，可自下列諸公式求得：

a) 依單貼現率貼現:

$$n_c = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{d S'} + \frac{1}{d} \dots\dots\dots (b19)$$

$$n_a = \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1} \dots\dots\dots (a28)$$

b) 依單利率貼現:

* 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25), 則可將價值方程式之右邊, 代以三張舊票淨收額之總數。

$$\begin{aligned} a) \quad S_1 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{50}{360}\right) &= 900 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{20}{360}\right) \\ &\quad + 870 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{30}{360}\right) + 1200 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{42}{360}\right) \\ (900 - 5) S_1 &= 900(900 - 2) + 870(900 - 3) + 1200(900 - 4.2) \\ S_1 &= \frac{808200 + 78(390 + 1074960)}{895} \\ &= \frac{2663550}{895} = 2976.03 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{S_1}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{50}{360}} &= \frac{900}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{20}{360}} + \frac{870}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{30}{360}} + \frac{1200}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{42}{360}} \\ S_1 &= \left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{50}{360}\right) \left[\frac{900}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{20}{360}} + \frac{870}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{30}{360}} + \frac{1200}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{42}{360}} \right] \\ &= (900 + 5) \left(\frac{900}{900 + 2} + \frac{870}{900 + 3} + \frac{1200}{900 + 4.2} \right) \\ &= \frac{905 \times 900}{902} + \frac{905 \times 870}{903} + \frac{905 \times 1200}{904.2} \\ &= 900 + \frac{2700}{902} + 870 + \frac{1740}{903} + 1200 + \frac{960}{904.2} \\ &= 2970 + 2.993 + 1.927 + 1.062 = 2975.98 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$n_c = \frac{S'}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} - \frac{1}{i} \dots\dots\dots (b20)$$

$$n_a = \frac{\sum \frac{S_1 n_1}{1+in_1}}{\sum \frac{S_1}{1+in_1}} \dots\dots\dots (b21)$$

- n_c 共同期日距今之年數
 n_a 平均期日距今之年數
 S 新票之到期值
 S 舊票之到期值
 n_1 舊票到期日距今之年數
 d 單貼現率
 i 單利率
 Σ 總和之記號

$$(證) \quad a) \quad S'(1-dn_c) = \sum [S_1(1-dn_1)] = \sum (S_1 - S_1dn_1)$$

$$= \sum S_1 - d \sum (S_1n_1)$$

$$1-dn_c = \frac{\sum S_1 - d \sum (S_1n_1)}{S'}$$

$$dn_c = \frac{d \sum (S_1n_1) - \sum S_1}{S'} + 1$$

$$\therefore n_c = \frac{d \sum (S_1n_1) - \sum S_1}{dS'} + \frac{1}{d}$$

若

$$S' = \sum S_1$$

$$\begin{aligned}
 \text{則} \quad n_c = n_a &= \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{d \sum S_1} + \frac{1}{d} \\
 &= \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1} - \frac{1}{d} + \frac{1}{d} \\
 \therefore n_a &= \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1}
 \end{aligned}$$

上式中無 d , 故 n_a 之數值與單貼現率無關。題中貼現時期若為日數, 則不必化為年數, 即以之代入公式中之 n 可也。由是求得之 n_a 亦為日數。

$$\text{若} \quad S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_p$$

$$\begin{aligned}
 \text{則} \quad \sum S_1 &= p S_1 \\
 \sum (S_1 n_1) &= S_1 \sum n_1 \\
 n_a &= \frac{\sum n_1}{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \frac{S''}{1 + i n_c} &= \sum \frac{S_1}{1 + i n_1} \\
 \frac{1 + i n_c}{S''} &= \frac{1}{\sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} \\
 i n_c &= \frac{S''}{\sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} - 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore n_c = \frac{S''}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} - \frac{1}{i}$$

若

$$S'' = \sum S_1$$

則

$$\begin{aligned} n_c = n_a &= \frac{\sum S_1 - \sum \frac{S_1}{1+in_1}}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} \\ &= \frac{\sum \left(S_1 - \frac{S_1}{1+in_1} \right)}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} = \frac{\sum \frac{S_1 in_1}{1+in_1}}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} \end{aligned}$$

$$\therefore n_a = \frac{\sum \frac{S_1 n_1}{1+in_1}}{\sum \frac{S_1}{1+in_1}}$$

若

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_p$$

則

$$n_a = \frac{S_1 \sum \frac{n_1}{1+in_1}}{S_1 \sum \frac{1}{1+in_1}} = \frac{\sum \frac{n_1}{1+in_1}}{\sum \frac{1}{1+in_1}}$$

(例六) 某甲欲以到期值 2920 元之本票更換下列三票：

甲票八十日後到期，到期值 1500 元；

乙票九十日後到期，到期值 600 元；

丙票七十日後到期，到期值 840 元；

求新票之到期日！（一年作為 360 日）

a) 依單貼現率 6% 貼現；

b) 依單利率 6% 貼現。

a) 應用公式(119*), 得:

$$n_c = \frac{\frac{6}{100} \left(1500 \times \frac{80}{360} + 600 \times \frac{90}{360} + 840 \times \frac{70}{360} \right) - (1500 + 600 + 840)}{\frac{6}{100} \times 2920} + \frac{100}{6}$$

* 若欲應用 a 組公式 (a24) 與 (a25), 則得:

$$\begin{aligned} a) \quad 2920 \left(1 - \frac{6}{100} n \right) &= 1500 \left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{80}{360} \right) + 600 \left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{90}{360} \right) \\ &\quad + 840 \left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{70}{360} \right) \end{aligned}$$

$$2920(600 - 36n) = 1500(600 - 8) + 600(600 - 9) + 840(600 - 7)$$

$$2920(600 - 36n) = 1500 \times 592 + 600 \times 591 + 840 \times 593$$

$$600 - 36n = \frac{174720}{2920}$$

$$36n = \frac{11280}{2920}$$

$$n = \frac{11280}{36 \times 2920} \text{年} = \frac{11280}{292} \text{日} = 38 \frac{46}{73} \text{日}$$

$$b) \quad \frac{2920}{1 + \frac{6}{100} n} = \frac{1500}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}}$$

$$\frac{2920}{1 + \frac{6}{100} n} = \frac{900000}{608} + \frac{360000}{609} + \frac{504000}{607}$$

$$\frac{2920}{1 + \frac{6}{100} n} = 1480.263 + 591.133 + 830.313$$

$$1 + \frac{6}{100} n = \frac{2920}{2901.709}$$

$$\frac{6}{100} n = 0.006304$$

$$n = \frac{6}{100} \times 0.006304 \text{年}$$

$$= 6000 \times 0.006304 \text{日}$$

$$= 37.8 \text{日}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{20+9+9.8-2940}{175.2} + \frac{100}{6} = \frac{18.8}{175.2} \text{年} \\
 &= 38\frac{46}{73} \text{日}
 \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b20*), 得:

$$\begin{aligned}
 n_c &= \frac{2920}{\frac{6}{100} \left(\frac{1500}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{\frac{6}{100} \left(\frac{1500 \times 600}{600+8} + \frac{600 \times 600}{600+9} + \frac{840 \times 600}{600+7} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{6 \left(\frac{9000}{608} + \frac{3600}{609} + \frac{5040}{607} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{6(14.803+5.911+8.303)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920-2901.7}{6 \times 29.017} = \frac{18.3}{6 \times 29.017} \text{年} = \frac{18.3 \times 60}{29.017} \text{日} \\
 &= 37.8 \text{日}
 \end{aligned}$$

(例七) 上題中新票之到期值若改為 2940 元, 則新票應在何日到期?

$$1500+600+840=2940$$

新票之到期值, 與各舊票到期值之總額相等, 故可應用公式 (a28) 與 (b21).

a) 應用公式 (a28), 得:

$$1500 \times 80 = 120000$$

$$600 \times 90 = 54000$$

$$840 \times 70 = 58800$$

$$\hline 232800$$

$$n_a = \frac{232800}{2940} = 79 \frac{9}{49} \text{日}$$

b) 應用公式 (b21*), 得:

$$n_a = \frac{\frac{1500 \times \frac{80}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600 \times \frac{90}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840 \times \frac{70}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}}}{\frac{1500}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}}}$$

$$= \frac{\frac{1500 \times 800}{3648} + \frac{600 \times 900}{3654} + \frac{840 \times 700}{3642}}{\frac{1500 \times 3600}{3648} + \frac{600 \times 3600}{3654} + \frac{840 \times 3600}{3642}}$$

$$= \frac{328,947 + 147,783 + 161,450}{1480,263 + 591,133 + 830,313} = \frac{638,180}{2901,709} \text{年} = 79.2 \text{日}$$

公式 (b21) 並不較簡於公式 (b20), 故此題亦可應用公式 (b20) 計算.

* 若欲應用 a 組公式, 則可將上題 *b 中之 2920 易以 2940.

習 題 八

1. 求下列各題中新票之到期值或其到期日!(一年作為360日)

| | 舊票之到期值 | 舊票之到期日 | 貼現方法 | 新票之到期值 | 新票之到期日 |
|----|---------|--------|--------|---------|--------|
| a) | \$ 4500 | 九十日後 | 單貼現率6% | | 八十日後 |
| b) | 3600 | 七十日後 | 單利率3% | \$ 3650 | |
| c) | 5500 | 五十日後 | 單利率5% | | 六十日後 |
| d) | 4200 | 四十日後 | 單貼現率4% | 4190 | |
| e) | 6000 | 九十日後 | 單貼現率5% | 6020 | |
| f) | 6000 | 九十日後 | 單利率5% | 6020 | |
| g) | 5000 | 六十日後 | 單貼現率4% | | 八十日後 |
| h) | 5000 | 六十日後 | 單利率4% | | 八十日後 |

2. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票:

甲票三十日後到期,到期值1200元;

乙票五十日後到期,到期值800元;

丙票七十日後到期,到期值1400元;

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日!(一年作為360日)

| | 新票之到期值 | 新票之到期日 | 貼現方法 |
|----|---------|--------|--------|
| a) | | 八十日後 | 單貼現率4% |
| b) | | 八十日後 | 單利率4% |
| c) | | 二十日後 | 單貼現率4% |
| d) | | 二十日後 | 單利率4% |
| e) | | 六十日後 | 單貼現率4% |
| f) | | 六十日後 | 單利率4% |
| g) | \$ 3420 | | 單貼現率5% |
| h) | 3420 | | 單利率5% |
| i) | 3380 | | 單貼現率5% |

- | | | |
|----|------|---------|
| j) | 3380 | 單利率 5% |
| k) | 3400 | 單貼現率 5% |
| l) | 3400 | 單利率 5% |

3. 八月後到期,到期值 3850 元之票據,與十一月後到期,到期值 3900 元之票據,在何時等值?

- a) 依單貼現率 5% 貼現;
b) 依單利率 5% 貼現.

4. 五月後到期,到期值 2020 元之票據,與八月後到期,到期值 2030 元之票據,在何時等值?

- a) 依單貼現率 2% 貼現;
b) 依單利率 2% 貼現.

5. 某商欠貨款 1250 元,十二月十五日期,於八月五日付現款 800 元,同日發出不帶息本票二張,其面值相等,一張於十月十五日到期,一張於十一月二十日到期,單貼現率 6%,一年作為 365 日,求面值!

6. 求下列各題中各舊票之平均期日(依單貼現率貼現):

- a) 甲票四十五日後到期,到期值 3500 元;
乙票三十八日後到期,到期值 4525 元;
丙票六十二日後到期,到期值 3845 元;
- b) 甲票三十日後到期,到期值 4525 元;
乙票四十日後到期,到期值 3835 元;
丙票六十日後到期,到期值 6356 元;
丁票八十五日後到期,到期值 3856 元.

第二節 複貼現法

定理四: 到期值不等之兩票據,在同一時日,依兩種不同之複貼現法貼現,(一依複貼現率 r 貼現,一依複利率 r 貼現)

不能均爲等值。(與定理二相似)

(證) 設 S_1 爲 n_1 期後到期票據之到期值, S_2 爲 n_2 期後到期票據之到期值.

$$S_1 \neq S_2$$

若依每期複貼現率 r 貼現而其淨收額相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1(1-r)^{n_1} = S_2(1-r)^{n_2}$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = (1-r)^{n_2-n_1}$$

若依每期複利率 r 貼現而其淨收額相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1(1+r)^{-n_1} = S_2(1+r)^{-n_2}$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = (1+r)^{n_1-n_2}$$

$$\therefore (1-r)^{n_2-n_1} = (1+r)^{n_1-n_2}$$

$$1-r = (1+r)^{-1}$$

$$(1-r)(1+r) = 1$$

$$1-r^2 = 1$$

$$r = 0$$

以之代入價值方程式, 則得:

$$S_1 = S_2$$

但 $S_1 \neq S_2$, 故此結果爲不合理.

例如三年後到期，到期值1000元之票據，與二年後到期，到期值950元之票據，若依複貼現率5%貼現則為等值，但若依複利率5%貼現則為不等值，又如三年後到期，到期值1050元之票據，與二年後到期，到期值1000元之票據，若依複利率5%貼現則為等值，但若依複貼現率5%貼現，則為不等值。

定理五：若兩票據現依複貼現法貼現而為等值，則在等值日前後無論何時，亦均為等值。（適與定理三相反）

（證）設 S_1 為 n_1 期後到期票據之到期值， S_2 為 n_2 期後到期票據之到期值。

a) 若現依每期複貼現率 d 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$$

若在 p (p 或正或負) 期後依每期複貼現率 d 貼現而其淨收額不相等，設兩者之差為 k ，則得價值方程式如下：

$$S_1(1-d)^{n_1} r^{-p} = S_2(1-d)^{n_2} r^{-p} + k$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} + k(1-d)^p$$

但
$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$$

$$\therefore k(1-d)^p = 0$$

$$\therefore 1-d \neq 0$$

$$\therefore k = 0$$

即兩票在 p 期後亦為等值。

例如三年後到期，到期值1000元之票據，與二年後到期，

到期值 950 元之票據，若依複貼現率 5% 貼現，無論何時均為等值。

b) 若現依每期複利率 i 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2}$$

若在 p (p 或正或負) 期後依每期複利率 i 貼現而其淨收額不相等，設兩者之差為 k ，則得價值方程式如下：

$$S_1(1+i)^{-(n_1-p)} = S_2(1+i)^{-(n_2-p)} + k$$

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2} + k(1+i)^{-p}$$

但
$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2}$$

$$\therefore k(1+i)^{-p} = 0$$

$$\therefore (1+i)^{-p} \neq 0$$

$$\therefore k = 0$$

即兩票在 p 期後亦為等值。

例如三年後到期，到期值 1050 元之票據，與二年後到期，到期值 1000 元之票據，若依複利率 5% 貼現，無論何時均為等值。

甲乙兩票依複貼現法貼現，在等值日前後亦為等值，故在單貼現法中，吾人有時欲知兩票應在何日等值，而在複貼現法中則否。在複貼現法中，吾人所欲知者，以新票掉換舊票，新票之到期值當為幾何？或新票之到期日應為何時？新票之到期值或其到期日，可應用價值方程式求得如下：

a) 依每期複貼現率 d 貼現:

$$S' = S(1-d)^{n-n'} \dots\dots\dots (b22)$$

$$n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log (1-d)} \dots\dots\dots (b23)$$

b) 依每期複利率 i 貼現:

$$S' = S(1+i)^{n-n'} \dots\dots\dots (b24)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b25)$$

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期(單位資金運轉期或複利期)

n 舊票之貼現時期(單位資金運轉期或複利期)

d 每資金運轉期內貼現率

i 每計息期內利率

(證) a) $S'(1-d)^{n'} = S(1-d)^n$

$$S' = \frac{S(1-d)^n}{(1-d)^{n'}}$$

$$\therefore S' = S(1-d)^{n-n'}$$

$$\log S' = \log S + (n-n') \log (1-d)$$

$$\frac{\log S' - \log S}{\log (1-d)} = n - n'$$

$$\therefore n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log (1-d)}$$

b) $S'(1+i)^{-n'} = S(1+i)^{-n}$

$$S' = \frac{S(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n'}}$$

$$\therefore S' = S(1+i)^{n'-n}$$

$$\log S' = \log S + (n' - n) \log (1+i)$$

$$\frac{\log S' - \log S}{\log (1+i)} = n' - n$$

$$\therefore n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log (1+i)}$$

(例一) 一年半後到期, 到期值 4500 元之付款人, 欲更換一張一年後到期之票據, 求新票之到期值!

a) 依複貼現率 12% 貼現 (每年連轉二次);

b) 依複利率 12% 貼現 (每年複利二次).

a) 應用公式 (b22*), 得:

$$S' = 4500 \times \left(1 - \frac{6}{100}\right)^{3-2} = 4500 \times \frac{94}{100} = 4230 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (b24*), 得:

$$\begin{aligned} S' &= 4500 \times 1.06^{2-3} = 4500 \times 1.06^{-1} = 4500 \\ &\times 0.94339623 = 4245.28 \text{ 元} \end{aligned}$$

* 若欲應用 a 組公式 (a26) 與 (a27), 則得:

$$a) S_1 \times 0.94^2 = 4500 \times 0.94^3$$

$$S_1 = 4500 \times 0.94 = 4230 \text{ 元}$$

$$b) S_1 \times 1.06^{-2} = 4500 \times 1.06^{-3}$$

$$S_1 = 4500 \times 1.06^{-1} = 4245.28 \text{ 元}$$

(例二) 三年後到期, 到期值 4500 元之付款人, 欲更換一張到期值 5000 元之票據, 求新票之到期日!

a) 依複貼現率 6% 貼現;

b) 依複利率 6% 貼現.

a) 應用公式 (b23*), 得:

$$n' = 3 + \frac{\log 4500 - \log 5000}{\log 0.94} = 3 + \frac{-0.045757}{-0.026872}$$

$$= 4.70 \text{ 年}$$

b) 應用公式 (b25*), 得:

$$n' = 3 + \frac{\log 5000 - \log 4500}{\log 1.06} = 3 + \frac{0.045757}{0.025306}$$

$$= 4.81 \text{ 年}$$

舊票若不止一張, 則新票之到期值及其到期日, 可自下列諸公式求得.

* 若欲應用 a 組公式 (a26) 與 (a27), 則得:

$$a) 5000 \times 0.94^{n_1} = 4500 \times 0.94^3$$

$$\log 5000 + n_1 \log 0.94 = \log 4500 + 3 \log 0.94$$

$$n_1 = 3 + \frac{3.653213 - 3.698970}{-0.026872} = 4.70 \text{ 年}$$

$$b) 5000 \times 1.06^{-n_1} = 4500 \times 1.06^{-3}$$

$$\log 5000 - n_1 \log 1.06 = \log 4500 - 3 \log 1.06$$

$$n_1 = 3 + \frac{3.698970 - 3.653213}{0.025306} = 4.81 \text{ 年}$$

a) 依每期複貼現率 d 貼現:

$$S'' = \sum [S_1(1-d)^{n_1-n'}] \dots\dots\dots (b26)$$

$$n' = \frac{\log \sum [S_1(1-d)^{n_1}] - \log S'}{\log (1-d)} \dots\dots\dots (b27)$$

b) 依每期複利率 i 貼現:

$$S'' = \sum (S_1 v^{n_1-n'}) \dots\dots\dots (b28)$$

$$n' = \frac{\log S'' - \log \sum (S_1 v^{n_1})}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b29)$$

S'' 新票之到期值

S' 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期(單位資金運轉期或複利期)

n_1 舊票之貼現時期(單位資金運轉期或複利期)

d 每運轉期內貼現率

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Σ 總和之記號

(證) 設 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ 為 p 張舊票之到期值, n_1, n_2, n_3, \dots

n_p 為其貼現時期.

$$\begin{aligned} a) \quad S''(1-d)^n &= S_1(1-d)^{n_1} + S_2(1-d)^{n_2} + S_3(1-d)^{n_3} + \dots \\ &\quad + S_p(1-d)^{n_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'' &= S_1(1-d)^{n_1-n'} + S_2(1-d)^{n_2-n'} + S_3(1-d)^{n_3-n'} + \dots \\ &\quad + S_p(1-d)^{n_p-n'} \end{aligned}$$

$$\therefore S' = \sum [S_1(1-d)^{n_1-n'}]$$

$$S'(1-d)^{n'} = \sum [S_1(1-d)^{n_1}]$$

$$\log S' + n' \log (1-d) = \log \sum [S_1(1-d)^{n_1}]$$

$$\therefore n' = \frac{\log \sum [S_1(1-d)^{n_1}] - \log S'}{\log (1-d)}$$

$$b) S'v^{n'} = S_1v^{n_1} + S_2v^{n_2} + S_3v^{n_3} + \dots + S_pv^{n_p}$$

$$S' = S_1v^{n_1-n'} + S_2v^{n_2-n'} + S_3v^{n_3-n'} + \dots + S_pv^{n_p-n'}$$

$$\therefore S' = \sum (S_1v^{n_1-n'})$$

$$S'v^{n'} = \sum (S_1v^{n_1})$$

$$\log S' + n' \log v = \log \sum (S_1v^{n_1})$$

$$n' = \frac{\log \sum (S_1v^{n_1}) - \log S'}{\log v}$$

但

$$\log v = -\log (1+i)$$

$$\therefore n' = \frac{\log S' - \log \sum (S_1v^{n_1})}{\log (1+i)}$$

(例三) 某甲欲以二年後到期之本票更換下列三票：

甲票一年後到期，到期值 1000 元；

乙票一年半後到期，到期值 1200 元；

丙票二年半後到期，到期值 1400 元；

求新票之到期值！

a) 依複貼現率 10% 貼現 (每年運轉二次);

b) 依複利率 10% 貼現 (每年複利二次).

a) 應用公式 (b26*), 得:

$$\begin{aligned} S' &= 1000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{-2} + 1200 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{-1} + 1400 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^1 \\ &= \frac{1000}{\left(\frac{95}{100}\right)^2} + \frac{1200}{\frac{95}{100}} + 1400 \times \frac{95}{100} = \frac{10000000}{9025} + \frac{1200000}{95} + 1330 \\ &= 3701.19 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b28*), 得:

$$S' = 1000 v^{-2} + 1200 v^{-1} + 1400 v^1$$

$$v^{-2} = (1+i)^2 = 1.1025$$

$$v^{-1} = 1+i = 1.05$$

$$v^1 = 0.95238095$$

$$S' = 1102.5 + 1260 + 1333.33 = 3695.83 \text{ 元}$$

* 若欲應用 a 組公式 (a26) 與 (a27), 則可將價值方程式之右邊, 代以三張售票淨收額之總數.

$$a) S_1 \times 0.95^4 = 1000 \times 0.95^2 + 1200 \times 0.95^3 + 1400 \times 0.95^3$$

$$S_1 = \frac{1000}{0.95^2} + \frac{1200}{0.95} + 1400 \times 0.95 = 3701.19 \text{ 元}$$

$$b) S_1 \times 1.05^{-4} = 1000 \times 1.05^{-2} + 1200 \times 1.05^{-3} + 1400 \times 1.05^{-3}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 1000 \times 1.05^2 + 1200 \times 1.05 + 1400 \times 1.05^{-1} \\ &= 3695.83 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例四) 某甲欲發一新票, 更換下列三舊票:

甲票二年後到期, 到期值 1000 元;

乙票三年後到期, 到期值 1200 元;

丙票五年後到期, 到期值 1400 元;

求新票之到期日!

a) 新票之到期值 3701.19 元, 依複貼現率 5% 貼現;

b) 新票之到期值 3695.83 元, 依複利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (b27*), 得:

$$n' = \frac{\log (1000 \times 0.95^2 + 1200 \times 0.95^3 + 1400 \times 0.95^5) - \log 3701.19}{\log 0.95}$$

* 若欲應用 a 組公式 (a26) 與 (a27), 則可將價值方程式之右邊, 代以三張舊票淨收額之總數.

$$a) \quad 3701.19 \times 0.95^{n_1} = 1000 \times 0.95^2 + 1200 \times 0.95^3 + 1400 \times 0.95^5$$

$$3701.19 \times 0.95^{n_1} = 0.95^2 (1000 + 1200 \times 0.95 + 1400 \times 0.95^3)$$

$$3701.19 \times 0.95^{n_1} = 0.95^2 \times 3340.325$$

$$\log 3701.19 + n_1 \log 0.95 = 2 \log 0.95 + \log 3340.325$$

$$n_1 = 2 + \frac{\log 3340.325 - \log 3701.19}{\log 0.95} = 4 \text{ 年}$$

$$b) \quad 3695.83 \times 1.05^{-n_1} = 1000 \times 1.05^{-2} + 1200 \times 1.05^{-3} + 1400 \times 1.05^{-5}$$

$$3695.83 \times 1.05^{-n_1} = 1.05^{-5} (1000 \times 1.05^3 + 1200 \times 1.05^2 + 1400)$$

$$3695.83 \times 1.05^{-n_1} = 1.05^{-5} \times 3880.625$$

$$\log 3695.83 - n_1 \log 1.05 = -5 \log 1.05 + \log 3880.625$$

$$n_1 = 5 + \frac{\log 3695.83 - \log 3880.625}{\log 1.05} = 4 \text{ 年}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log 0.95^2 + \log (1000 + 1200 \times 0.95 + 1400 \times 0.95^3) - \log 3701.19}{\log 0.95} \\
 &= 2 + \frac{\log 3340.325 - \log 3701.19}{1.977724} = 2 + \frac{3.523788 - 3.568341}{-0.022276} \\
 &= 2 + \frac{0.044553}{0.022276} = 4 \text{ 年}
 \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b29*), 得:

$$\begin{aligned}
 n' &= \frac{\log 3695.83 - \log (1000 v^2 + 1200 v^3 + 1400 v^5)}{\log 1.05} \\
 &= \frac{\log 3695.83 - \log v^5 - \log [1000(1+i)^3 + 1200(1+i)^2 + 1400]}{\log 1.05} \\
 &= \frac{\log 3695.83 + 5 \log 1.05 - \log (1157.625 + 1323 + 1400)}{\log 1.05} \\
 &= 5 + \frac{\log 3695.83 - \log 3880.625}{\log 1.05} = 5 + \frac{3.567712 - 3.588902}{0.021189} \\
 &= 5 - \frac{0.021190}{0.021189} = 4 \text{ 年}
 \end{aligned}$$

單貼現價值方程式通常依據單貼現率, 而複貼現價值方程式, 則通常依據複利率。

複貼現價值方程式得以任何時期為比較時期。

習 題 九

1. 求下列各題中新票之到期值!

| | 舊票之到期值 | 舊票之到期日 | 新票之到期日 | 貼 現 方 法 | 新票之到期值 |
|----|---------|--------|--------|---------|--------|
| a) | \$ 4500 | 三年後 | 二年後 | 複貼現率 4% | |
| b) | 4500 | 三年後 | 二年後 | 複利率 4% | |

| | | | | |
|----|------|-----|-----|--------|
| c) | 4500 | 三年後 | 二年後 | 單貼現率4% |
| d) | 4500 | 三年後 | 二年後 | 單利率4% |
| e) | 5000 | 五年後 | 六年後 | 複利率5% |
| f) | 5000 | 五年後 | 四年後 | 複利率5% |
| g) | 5500 | 二年後 | 一年後 | 複貼現率6% |
| h) | 5500 | 二年後 | 三年後 | 複貼現率6% |

2. 求下列各題中新票之到期日!

| | 舊票之到期值 | 舊票之到期日 | 新票之到期值 | 貼現方法 | 新票之到期日 |
|----|---------|--------|---------|--------|--------|
| a) | \$ 5200 | 四年後 | \$ 5300 | 複利率4% | |
| b) | 5200 | 四年後 | 5300 | 複貼現率4% | |
| c) | 5200 | 四年後 | 5300 | 單貼現率4% | |
| d) | 5200 | 四年後 | 5300 | 單利率4% | |
| e) | 6800 | 五年後 | 6900 | 複利率5% | |
| f) | 6800 | 五年後 | 6700 | 複利率5% | |
| g) | 3500 | 二年後 | 3600 | 複貼現率5% | |
| h) | 3500 | 二年後 | 3400 | 複貼現率5% | |

3. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票:

甲票三年後到期, 到期值 2500 元;

乙票五年後到期, 到期值 3000 元;

丙票六年後到期, 到期值 3500 元.

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日!

| | 新票之到期值 | 新票之到期日 | 貼現方法 |
|----|--------|--------|--------|
| a) | | 二年後 | 複貼現率4% |
| b) | | 四年後 | 複貼現率4% |
| c) | | 七年後 | 複貼現率4% |
| d) | | 二年後 | 複利率4% |
| e) | | 四年後 | 複利率4% |
| f) | | 七年後 | 複利率4% |

| | | |
|----|---------|---------|
| g) | \$ 8500 | 複貼現率 5% |
| h) | 9000 | 複貼現率 5% |
| i) | 9500 | 複貼現率 5% |
| j) | 8500 | 複利率 5% |
| k) | 9000 | 複利率 5% |
| l) | 9500 | 複利率 5% |

4. 某甲新購一屋，約定於下列兩種付款方法中，某甲得任選一種：

第一種：付款一千元，以後四年內每年付一千元；

第二種：付現款六百五十元，以後四年內每年付一千一百元；

問何種付款方法利於某甲？（複利率 5%）

5. 某甲於民國二十年底負債二千元，二年後到期，又負債一千元，三年半後到期，二十一年底某甲以現款一千五百元支付於其債權者，並約定於二十二年六月底與二十三年底支付相等金額，以清償其債，求此相等金額！（複利率 5%，每年複利二次）

6. 某甲於民國二十年底負債五千元，言定年利率 10%，每年複利二次，某甲於二十一年六月底付現款一千元，於二十二年底付現款八百元，於二十三年六月底付現款一千五百元，求某甲清償其債時應付現款額：

a) 某甲於二十四年底清償其債；

b) 某甲於二十五年底清償其債；

c) 某甲於二十六年底清償其債。

7. 某甲於民國二十年底負債一萬元，言定年利率 9%，每年複利二次，某甲於二十一年底付現款五百元，於二十二年六月底付現款二千元，於二十三年底出給不帶息本票二張，一張面值一千五百元，一年半後到期，一張面值二千五百元，二年後到期，某甲除出給本票外，並支付現款若干，以清償其債，求此現款額。

本編應用公式

公式 (a7) - (a28)

(b1) - (b29)

(c4) - (c15)

$$I = P i n \dots\dots\dots(a7)$$

$$S = P(1 + i n) \dots\dots\dots(a8)$$

$$n = \frac{P - i}{i} \dots\dots\dots(b1)$$

$$I = P i \times \frac{d}{360} \dots\dots\dots(a9)$$

$$I_1 = P i \times \frac{d_1}{365} \dots\dots\dots(a10)$$

$$I_2 = P i \times \frac{d_2}{365} \dots\dots\dots(a11)$$

$$I = I_1 + I_2 = P i \left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{365} \right) \dots\dots\dots(a12)$$

$$I'' = I' - \frac{I'}{73} \dots\dots\dots(b2)$$

$$I' = I'' + \frac{I''}{27} \dots\dots\dots(b3)$$

$$S = P u^n \dots\dots\dots(a13)$$

$$I = S - P = P(u^n - 1) \dots\dots\dots(a14)$$

$$a = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1 \dots\dots\dots(a15)$$

$$j = m \left\{ \left(1 + a \frac{1}{i^m} \right) - 1 \right\} \dots\dots\dots(a16)$$

$$a = e^{\delta} - 1 \dots\dots\dots(c4)$$

$$\delta = 2.302585 \log_{10} (1 + a) \dots\dots\dots(c5)$$

$$\delta = \left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots \right) \dots\dots\dots(c6)$$

$$a = \left(\delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \right) \dots\dots\dots(c7)$$

$$P = Sv^n \dots\dots\dots (a17)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b4)$$

$$n = \frac{\log p}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b5)$$

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots\dots\dots (c8)$$

$$i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1 \dots\dots\dots (b6)$$

$$I = Sdn \dots\dots\dots (a18)$$

$$P = S - I = S(1 - dn) \dots\dots\dots (a19)$$

$$i = \frac{d}{1 - dn} \dots\dots\dots (b7)$$

$$d = \frac{i}{1 + in} \dots\dots\dots (b8)$$

$$I_1 - I_2 = I_2 in \dots\dots\dots (c9)$$

$$P = S(1 - d)^n \dots\dots\dots (a20)$$

$$I = S - P = S(1 - (1 - d)^n) \dots\dots\dots (a21)$$

$$\beta = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \dots\dots\dots (a22)$$

$$f = m(1 - (1 - \beta)^{\frac{1}{m}}) \dots\dots\dots (a23)$$

$$f = \beta + \frac{m-1}{2m} \beta^2 + \frac{2m^2-3m+1}{6m^2} \beta^3 \dots\dots\dots (c10)$$

$$\beta = 1 - e^{-\delta'} \dots\dots\dots (c11)$$

$$\delta' = -2.302585 \log_{10} (1 - \beta) \dots\dots\dots (c12)$$

$$\delta' = \left(\beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^4}{4} + \dots\dots\dots\right) \dots\dots\dots (c13)$$

$$\beta = \left(\delta' - \frac{\delta'^2}{2!} + \frac{\delta'^3}{3!} - \frac{\delta'^4}{4!} + \dots\dots\dots\right) \dots\dots\dots (c14)$$

$$\delta = \delta' \dots\dots\dots (c15)$$

$$i = \frac{d}{1 - d} \dots\dots\dots (b9)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \dots\dots\dots (b10)$$

$$S_1(1-dn_1) = S_2(1-dn_2) \dots\dots\dots (a24)$$

$$\frac{S_1}{1+i^{n_1}} = \frac{S_2}{1+i^{n_2}} \dots\dots\dots (a25)$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} \dots\dots\dots (a26)$$

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2} \dots\dots\dots (a27)$$

$$S' = \frac{S(1-dn)}{1-dn'} \dots\dots\dots (b11)$$

$$S' = \frac{S(1+in')}{1+in} \dots\dots\dots (l12)$$

$$n' = \frac{S' - S(1-dn)}{aS'} \dots\dots\dots (b13)$$

$$n' = \frac{S'(1+in) - S}{iS'} \dots\dots\dots (b14)$$

$$x = \frac{S_1n_1 - S_2n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d} \dots\dots\dots (b15)$$

$$z = \frac{S_1n_2 - S_2n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i} \dots\dots\dots (b16)$$

$$S' = \frac{\Sigma S_1 - d\Sigma(S_1n_1)}{1-dn'} \dots\dots\dots (b17)$$

$$S' = (1+in')\Sigma \frac{S_1}{1+i^{n_1}} \dots\dots\dots (b18)$$

$$n_c = \frac{d\Sigma(S_1n_1) - \Sigma S_1}{dS'} + \frac{1}{d} \dots\dots\dots (b19)$$

$$n_a = \frac{\Sigma(S_1n_1)}{\Sigma S_1} \dots\dots\dots (a28)$$

$$n_c = \frac{S'}{i\Sigma \frac{S_1}{1+in_1}} - \frac{1}{i} \dots\dots\dots (b20)$$

$$n_1 = \frac{\Sigma \frac{S_1n_1}{1+in_1}}{\Sigma \frac{S_1}{1+in_1}} \dots\dots\dots (b21)$$

$$S' = S(1-d)^{n-n'} \dots\dots\dots (b22)$$

$$n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (b23)$$

$$S' = S(1+i)^{n'-n} \dots\dots\dots (b24)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (b25)$$

$$S' = \Sigma(S_1(1-d)^{n_1-n'}) \dots\dots\dots (b26)$$

$$n' = \frac{\log \Sigma(S_1(1-d)^{n_1}) - \log S'}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (b27)$$

$$S' = \Sigma(S_1 v^{n_1-n'}) \dots\dots\dots (b28)$$

$$n' = \frac{\log S' - \log \Sigma(S_1 v^{n_1})}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (b29)$$

第三編 級數

凡有若干項數字連續,而其前後項有一定之關係,得以一公式表示其各項之數值者,均名曰級數。(Progression or Series)

| | | | | | | |
|-----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 例如: | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |
| | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 |
| | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |
| | 10 | 33 | 92 | 205 | 390 | 665 |

均級數也;第一級數中,前後兩項相差之數均相等.第二級數中,以前項除後項,其商均相等.至於第三級數,第一項爲一之平方,第二項爲二之平方,第三項爲三之平方,第四項爲四之平方,第五項爲五之平方,第六項爲六之平方.第四級數則第一項爲一之立方,第二項爲二之立方,第三項爲三之立方,第四項爲四之立方,第五項爲五之立方,第六項爲六之立方.第五級數則以一,二,三,四,五,六,依次代入下式

$$3x^3 + 2x + 5$$

即得第一,二,三,四,五,六項.

級數之種類甚多,茲舉其較重要者,分別詳述於下列各章.

第一章 等差級數

第一級數前後項之差相等，故曰等差級數，或算術級數 (Arithmetic Progression)。其相等之差，名曰公差 (Common Difference)，公差得為正數或負數，前者名曰昇級數 (Increasing Progression)，後者名曰降級數 (Decreasing Progression)。第一級數為昇級數，其公差為 3，下列級數則為降級數，其公差為 -2。

$$11 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \quad -3$$

設首項為 a ，末項為 l ，公差為 d ，項數為 n ，則：

$$\text{第一項} = a$$

$$\text{第二項} = a + d = a + (2-1)d$$

$$\text{第三項} = a + 2d = a + (3-1)d$$

$$\text{第四項} = a + 3d = a + (4-1)d$$

故第 n 項即末項 l ，當為：

$$l = a + (n-1)d \dots\dots\dots (a29)$$

已知等差級數之首項，項數與公差，即可應用上式，以求其末項。

求首項，公差，或項數之公式，可自公式 (a29) 化出，學者可自化之。

又設 S 為等差級數之和，則：

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots\dots + (l-2d) + (l-d) + l$$

若以等式之右邊，前後倒置，則得：

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

若將以上兩式之左右兩邊,各自相加,則左邊爲 $2S$,右邊之第一項,爲

$$a+l,$$

其第二項爲

$$(a+d) + (l-d) = a+l,$$

其第三項爲

$$(a+2d) + (l-2d) = a+l,$$

故右邊之各項,均爲 $a+l$,即:

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l)$$

但右邊共有 n 項,故:

$$2S = n(a+l)$$

$$\text{即} \quad S = \frac{n(a+l)}{2} \cdots \cdots (a30)$$

已知等差級數之首項,項數,與末項,可應用公式(a30),以求其和。

(例一) 已知等差級數之首項爲3,公差爲2,項數爲10,求末項與級數之和!

應用公式(a29),得:

$$l = 3 + (10-1) \times 2 = 21$$

應用公式(a30),得:

$$S = \frac{10(3+21)}{2} = \frac{10 \times 24}{2} = 120$$

a, l, n, d, S , 爲等差級數中之五數, 已知其中三數, 即可求其他二數.

(例二) 已知: $S=80$

$$a=3$$

$$d=2$$

求 l 與 n !

應用公式 (a29), 得:

$$l=3+2(n-1)=2n+1$$

應用公式 (a30), 得:

$$80 = \frac{n}{2} (3+l)$$

以 l 之值代入上式, 得:

$$160 = n(2n+4)$$

$$n^2 + 2n - 80 = 0$$

$$(n+10)(n-8) = 0$$

$$n+10 \neq 0$$

$$\therefore n=8$$

$$l=16+1=17$$

(例三) 已知: $S=80$

$$l=17$$

$$a=2$$

求 a 與 n !

應用公式 (a29), 得:

$$17 = a + 2(n-1)$$

$$a = 19 - 2n$$

應用公式 (a30), 得:

$$80 = \frac{n}{2} (a+17)$$

以 a 之值代入上式, 得:

$$160 = n(36 - 2n)$$

$$n^2 - 18n + 80 = 0$$

$$(n-8)(n-10) = 0$$

若 $n-8=0$

則 $n=8$

$$a = 19 - 16 = 3$$

即 3 5 7 9 11 13 15 17

若 $n-10=0$

則 $n=10$

$$a = 19 - 20 = -1$$

即 -1 1 3 5 7 9 11 13 15 17

(例四) 已知: $n=8$

$$d=2$$

$$S=80$$

求 a 與 $l!$

應用公式(a29), 得:

$$l = a + 14$$

應用公式(a30), 得:

$$80 = 4(a + l)$$

以 l 之值代入上式, 得:

$$20 = a + a + 14$$

$$2a = 6$$

$$\therefore a = 3$$

$$l = 3 + 14 = 17$$

上述之五級數中, 第三, 第四與第五級數, 其前後項之差雖不相等, 然若將前後項相減而成一新級數, 再將此新級數之前後項相減而又成一新級數, 如此依次相減, 均能化爲各項相等之新級數.

第三級數:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ & & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

第四級數:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ & 7 & 19 & 37 & 61 & 91 \\ & & 12 & 18 & 24 & 30 \\ & & & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

第三級數:

| | | | | | |
|----|----|----|-----|-----|-----|
| 10 | 33 | 92 | 205 | 390 | 665 |
| | 23 | 59 | 113 | 185 | 275 |
| | | 36 | 54 | 72 | 90 |
| | | | 18 | 18 | 18 |

以上三級數中,至最後一列,各項均相等.第二列各項爲第一列中前後項之差,而第三列各項爲第二列中前後項之差,故第二列爲第一列之一次差 (First Order of Differences), 第三列爲第一列之二次差 (Second Order of Differences). 第三級數之二次差,其各項均相等,至於第四與第五級數,則其三次差之各項均相等,此種級數名曰高次等差級數 (Arithmetic Progression of Higher Order). 第三級數爲二次等差級數,而第四與第五級數則爲三次等差級數.至於普通等差級數,其一次差之各項均相等,故可名曰一次等差級數.

高次等差級數之末項及其總和,可自下列二公式求得:

$$l = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2} d_r \dots (c16) \text{ (證明參看附錄甲 13)}$$

$$S = na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots (r+1)} d_r \dots (c17) \text{ (證明參看附錄甲 14)}$$

l 末項 s 總和 n 項數 a_1 首項 d_1 一次差之首項 d_2 二次差之首項

.....

 d_r r 次差之首項

(例五) 求下列高次等差級數之第十項及其前十項之和!

1 32 243 1024 3125 7776 16807.....第十項

(解) 1 32 243 1024 3125 7776 16807

31 211 781 2101 4651 9031

180 570 1320 2550 4380

390 750 1230 1830

360 480 600

120 120

此爲五次等差級數

$$n=10$$

$$a_1=1$$

$$d_1=31$$

$$d_2=180$$

$$d_3=390$$

$$d_4=360$$

$$d_5=120$$

代入公式 (c16), 得:

$$\begin{aligned}
 l &= 1 + 9 \times 31 + \frac{9 \times 8}{1 \times 2} \times 180 + \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times 390 + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 360 \\
 &\quad + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 120 = 1 + 279 + 6480 + 32760 \\
 &\quad + 45360 + 15120 = 100000
 \end{aligned}$$

代入公式 (c17), 得:

$$\begin{aligned}
 S &= 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times 31 + \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} \times 180 + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 390 \\
 &\quad + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 360 + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 120 \\
 &= 10 + 1395 + 21600 + 81900 + 90720 + 25200 = 220825
 \end{aligned}$$

習 題 十

1. 填寫下表空白之處!

| | 首項 | 公差 | 項數 | 末項 | 等差級數之和 |
|----|----|----|----|----|--------|
| a) | 5 | 4 | 14 | | |
| b) | 35 | | 10 | 17 | |
| c) | 1 | 3 | | 31 | |
| d) | | 2 | 15 | 35 | |
| e) | 19 | -2 | 20 | | |

2. 等差級數之第一項爲3, 第二項爲5, 第三項爲7, 其和爲48, 求項數!

3. 求證:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

4. 已知: $S = 69$

$$l = 19$$

$$d = 3$$

求 a 與 n !

5. 已知: $S=126$

$$d=5$$

$$n=7$$

求 a 與 L

6. 求下列各級數前二十項之和!

a) $1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad 4 \cdot 5 \quad 5 \cdot 6 \quad \dots$ 第二十項

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad 4 \cdot 5 \cdot 6 \quad 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots$ 第二十項

7. 求下列各級數之第二十項及前二十項之和!

a) $1 \quad 16 \quad 81 \quad 256 \quad 625 \quad 1296 \dots$ 第二十項

b) $5 \quad 11 \quad 19 \quad 29 \quad 41 \quad 55 \dots$ 第二十項

c) $4 \quad 11 \quad 22 \quad 37 \quad 56 \quad 79 \dots$ 第二十項

第二章 等比級數

上述五級數中之第二級數，其前後項之比相等，故曰等比級數，或幾何級數 (Geometric Progression)。其相等之比，名曰公比 (Common Ratio)。

設首項爲 a ，末項爲 l ，公比爲 r ，項數爲 n ，則：

$$\text{第一項} = a$$

$$\text{第二項} = ar = ar^{2-1}$$

$$\text{第三項} = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$\text{第四項} = ar^3 = ar^{4-1}$$

故第 n 項即末項 l ，當爲：

$$l = ar^{n-1} \dots\dots\dots (a31)$$

已知等比級數之首項，公比與項數，可應用公式 (a31)，以求末項。

求首項，公比，或項數之公式，可自公式 (a31) 化出，學者可自化之。

又設 S 爲等比級數之和，則：

$$S = a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^{n-1}$$

若以 r 乘上式之兩邊，則得：

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

第一式之右邊,除首項外,俱與第二式之右邊(末項除外)相等,故自上式減去下式,則得:

$$S - rS = a - ar^n$$

即 $(1 - r)S = a(1 - r^n)$

$$\therefore S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \dots\dots\dots(a32)$$

以 l 代 ar^{n-1} , 則得:

$$S = \frac{a - rl}{1 - r} \dots\dots\dots(a33)$$

已知等比級數之首項,公比,與項數(或末項),可應用公式(a32)(或公式a33),以求其和。

(例一)已知等比級數之首項為4,公比為3,求第十項與前十項之和!

應用公式(a31),得:

$$l = 4 \times 3^{10-1} = 4 \times 3^9 = 4 \times 19683 = 78732$$

應用公式(a32),得:

$$S = \frac{4(1 - 3^{10})}{1 - 3} = 2 \times 59048 = 118096$$

a, l, n, r, S , 為等比級數中之五數,已知其中三數,即可求其他二數。

(例二)已知: $S = 189$

$$l = 96$$

$$r = 2$$

求 n 與 a !

應用公式 (a33), 得:

$$189 = 192 - a$$

$$\therefore a = 3$$

應用公式 (a31), 得:

$$96 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$32 = 2^{n-1}$$

$$\log 32 = (n-1) \log 2$$

$$1.50515 = 0.301030 (n-1)$$

$$n-1 = \frac{1.50515}{0.30103} = 5$$

$$\therefore n = 6$$

(例三) 已知:

$$S = 189$$

$$a = 3$$

$$n = 6$$

求 l 與 r !

應用公式 (a31), 得:

$$l = 3r^5$$

應用公式 (a33), 得:

$$189 = \frac{3 - rl}{1 - r}$$

以 l 之值代入, 得:

$$189 = 3 \times \frac{1 - r^6}{1 - r}$$

$$63 = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5$$

上式係一高次方程式，通常不易解答，惟本題中之 r ，用代入測驗法，即可求得

$$r = 2$$

$$l = 3 \times 2^5 = 96$$

習 題 十 一

1. 填寫下表中空白之處！

| | 首項 | 公比 | 項數 | 末項 | 等比級數之和 |
|----|----|----|----|-----|--------|
| a) | 2 | | 5 | 162 | |
| b) | 2 | 3 | | 486 | |
| c) | 2 | | | 162 | 242 |
| d) | 2 | 3 | 7 | | |
| e) | 2 | | 6 | | 723 |
| f) | 2 | 3 | | | 242 |
| g) | | 3 | 6 | 486 | |
| h) | | | 4 | 54 | 80 |
| i) | | 3 | | 162 | 242 |
| j) | | 3 | 5 | | 2186 |

2. 求下列各級數之和！

$$a) S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1$$

$$b) S = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i)$$

$$c) S = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{1-n} + (1+i)^{-n}$$

$$d) S = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{2-n} + (1+i)^{1-n}$$

3. 設上題中 $n=10$, $i=6\%$, 求各級數之和！

a) 應用上題中求得之公式；

b) 應用複利終值表與複利現值表。

第三章 無盡級數

級數之項數多至無窮盡者曰無盡級數 (Infinite Series). 表示級數變化規律之項, 名曰一般項 (General Term). 自然數組成一等差級數, 但其項數無窮盡, 故此等差級數爲一無盡級數, 而其一般項爲 n .

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots$$

任取一竹竿, 就其中端折而爲二, 取此二竿之一更就其中端折而爲二, 復取此二小竿之一更就其中端折而爲二, 如是依次折斷, 永無止境, 未折各竿組成一等比級數, 但其項數無窮盡, 故此等比級數爲一無盡級數, 而其一般項爲 $\frac{1}{2^n}$.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \dots$$

上述二級數, 雖均爲無盡級數, 然一則其和無限, 一則有限, 蓋第一級數之和爲:

$$S = \frac{n(1+n)}{2}$$

若 n 大至無窮大, 則 S 亦大至無窮大, 故無一定限制, 第二級數之和則不然, 應用公式 (a32), 得:

$$S = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

若 n 大至無窮大, 則 $\frac{1}{2^n}$ 小至無窮小, 故 S 之極限為 1.

無盡級數之和若有一定限制, 則名曰收斂級數 (Convergent Series), 反之則名曰發散級數 (Divergent Series). 故第一級數為發散級數, 而第二級數為收斂級數, 有時無盡級數之和, 雖不至大至無窮大, 然變化不定, 無確定之極限, 例如下之無盡級數:

$$1+1-1-1+1+1-1-1+\dots$$

其和游移於 1, 2, 1, 0, 之間, 無一定之限制, 是曰不定級數 (Oscillating Series).

通常吾人祇能應用收斂級數, 故無盡級數之能收斂與否, 吾人須知鑒別之. 惟無一鑒別方法能適用於一切級數, 其最有用者, 為直接比較法 (Direct-Comparison Test) 與比例測驗法 (Test-Ratio Test).

(一) 直接比較法: 若第一級數之各項, 自某項起, 常小於或至多等於第二級數之相當各項, 若已知第二級數為收斂級數, 則第一級數亦為收斂級數. 若第一級數之各項, 自某項起, 常等於或大於第二級數之相當各項, 若已知第二級數為發散級數, 則第一級數亦為發散級數. 用作比較收斂級數, 通常取公比之絕對值小於 1 之等比級數與級數 e , 用作比較發散級數, 則取倒數級數 (Harmonic Series). 蓋等比級數之和為:

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

若 r 之絕對值小於 1, 則 n 大至無窮大時, $\frac{ar^n}{1-r}$ 小至無窮小, 故 S 之極限爲 $\frac{a}{1-r}$, 而此等比級數爲一收斂級數. 級數

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

之極限爲 e , 故級數 e 亦爲一收斂級數. 至於倒數級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

吾人可書作如下:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ \text{二項} \qquad \qquad \qquad \text{四項} \\ + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ \text{八項}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

$$> \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

若再將十六項相加, 三十二項相加, …… 其和靡不大於 $\frac{1}{2}$, 故

此級數之和增加無限,換言之,倒數級數爲一發散級數.

(例一) 鑒別下列無盡級數之性質!

$$a) \quad \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots$$

$$b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$a) \quad \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots$$

此級數之各項,小於下列等比級數之相當各項

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

但吾人已知公比絕對值小於一之等比級數爲收斂級數,故此級數亦爲一收斂級數.

$$b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

此級數之各項,以 $\frac{1}{2}$ 除之,即與倒數級數之相當各項相等,但吾人已知倒數級數爲發散級數,故此級數亦爲發散級數.

(二) 比例測驗法: 設

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

爲一無盡級數,又設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = t$$

若 $|t| < 1$, 則此級數爲收斂級數;

若 $|t| > 1$, 則此級數爲發散級數;

若 $|t|=1$, 則此級數之性質尚不能確定.

* \lim 爲極限之記號, ∞ 爲無窮大之記號.

(例二) 鑒別下列無盡級數之性質!

$$a) \quad \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$b) \quad \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$a) \quad u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1$, 故此級數爲收斂級數.

$$b) \quad u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2} > 1$, 故此級數爲發散級數.

級數之各項若正負相間而互相更迭者曰更迭級數(Alternating Series). 更迭級數各項之絕對值若均小於其前一項,而其一般項又以零為極限,則為收斂級數.例如下之更迭級數.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

為收斂級數,蓋各項之絕對值小於其前一項,而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

應用數學中最重要之級數為包含一未知數之級數,而尤以冪級數(Power series)為更重要,其形式如下:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

上式中 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 為已知數,而未知數之指數為一正整數

冪級數之性質,隨未知數之數值而異,未知數之數值在一定界限之內者為收斂級數,其在界限之外者則為發散級數,故吾人須確定冪級數為收斂級數時未知數之界限,確定界限之方法,以比例測驗法為最有效.

冪級數便於函數(註)數值之計算,故應用至廣,在投資數學中最有用之冪級數,有二項級數(Binomial Series),指數級數(Exponential Series)與對數級數(Logarithmic Series)三種,茲分別述之於後.

二項式 $(a+x)^n$ 展開,若 n 為一正整數,則得:

(註) 若甲變數隨乙變數而變,則甲變數為乙變數之函數(Function).

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2$$

$$+ \dots + x^n \quad (\text{參看附錄甲1})$$

此爲一冪級數，其項數有盡，各項之係數爲

$$a^n \quad \frac{n}{1} a^{n-1} \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \quad \dots \quad 1$$

其一般項則爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)r} a^{n-r} x^r$$

若 n 爲負數或分數，則級數之項數多至無窮盡，故爲一無盡級數。

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \dots \dots \dots (a34)$$

若 n 爲一正整數，則上式右邊第 $(n+1)$ 項以後各項之係數均等於零，換言之，即其項數有窮盡之時，故 n 爲正整數時，公式 (a34) 亦能成立。公式 (a34) 右邊由二項式展開而得，故此級數名曰二項級數。

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)r} a^{n-r} x^r}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} a^{n-r+1} x^{r-1}}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} \frac{x}{a}$$

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-r+1}{r} \frac{x}{a} = \frac{x}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-r+1}{r}$$

$$= \frac{x}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{r} - 1 \right) = -\frac{x}{a}$$

二項級數若為收斂級數，則須滿足下列條件：

$$\left| -\frac{x}{a} \right| < 1$$

$$|x| < |a|$$

公式 (a34) 右邊之級數若為一收斂級數，則求 $(a+x)^n$ ，即可先展開成級數而後求其和。

(例三) 求 $\sqrt{99}$! (至小數七位為止)

$$\sqrt{99} = (100-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$|-1| < |100|$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{99} &= 100^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times 100^{-\frac{1}{2}}(-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 \cdot 2} 100^{-\frac{3}{2}}(-1)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} 100^{-\frac{5}{2}}(-1)^3 + \dots \\ &= 10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{1600000} - \dots \end{aligned}$$

截取前四項，得：

$$\begin{aligned} \sqrt{99} &= 10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{1600000} \\ &= 10 - 0.05 - 0.000125 - 0.000000625 \\ &= 10 - 0.050125625 = 9.949874375 = 9.9498744 \end{aligned}$$

(例四) 求 $1.05^{\frac{1}{12}}$! (至小數七位為止)

$$1.05^{\frac{1}{12}} = (1+0.05)^{\frac{1}{12}}$$

$$0.05 < 1$$

$$\begin{aligned}
\therefore 1.05^{12} &= 1 + \frac{1}{12} \times 0.05 + \frac{1 \left(-\frac{11}{12} \right)}{1 \cdot 2} \times 0.05^2 \\
&+ \frac{1 \left(-\frac{11}{12} \right) \left(-\frac{23}{12} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 0.05^3 + \frac{1 \left(-\frac{11}{12} \right) \left(-\frac{23}{12} \right) \left(-\frac{35}{12} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&\times 0.05^4 + \dots \\
&= 1 + \frac{5}{1200} - \frac{11 \times 5^2}{12^2 \times 20000} + \frac{11 \times 23 \times 5^3}{12^3 \times 6000000} \\
&- \frac{11 \times 23 \times 35 \times 5^4}{12^4 \times 240000000} + \dots
\end{aligned}$$

截取前五項，得：

$$\begin{aligned}
1.05^{12} &= 1 + \frac{5}{1200} - \frac{11 \times 5^2}{12^2 \times 20000} + \frac{11 \times 23 \times 5^3}{12^3 \times 6000000} \\
&- \frac{11 \times 23 \times 35 \times 5^4}{12^4 \times 240000000} \\
&= 1 + 0.004166667 - 0.000095486 \\
&+ 0.000003050 - 0.000000111 \\
&= 1.00407412 = 1.0040741
\end{aligned}$$

指數級數亦為投資數學中常見之冪級數，其形式如下：

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

其一般項為

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n+1} = x \cdot 0$$

若 x 爲有限數，則 t 等於零，故 x 爲有限數時，指數級數爲一收斂級數，其和之極限爲 e^x (參看附錄甲 3)。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (e18)$$

若 $x=1$ ，則得：

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (e19)$$

(例五) 求 e^{-1} ! (至小數四位爲止)

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

截取前八項，得：

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} \\ &= 1 - 1 + 0.5 - 0.166667 + 0.041667 \\ &\quad - 0.008333 + 0.001389 - 0.000198 \\ &= 0.367858 = 0.3679 \end{aligned}$$

第三種冪級數爲對數級數，其形式如下：

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

其一般項爲

$$\begin{aligned} & -(-1)^n \frac{x^n}{n} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= -\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = -\frac{n}{n+1} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{n+1}x \\ &= -x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -x \end{aligned}$$

若 $|x|$ 小於 1, 則此級數為收斂級數; 若 $x=1$, 則此級數為一更迭級數, 吾人已知其為收斂級數; x 為 -1 或其絕對值大於 1 時, 此級數為發散級數. 對數級數為收斂級數時, 其和之極限為 $\log_e(1+x)$, (參看附錄甲 6) 對數級數之名即以此故.

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \dots \dots (e20)$$

(例六) 求 $\log_e 1.1!$ (至小數四位為止)

$$\begin{aligned} \log 1.1 &= \log_e(1+0.1) = 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} \\ &\quad - \frac{0.0001}{4} + \frac{0.00001}{5} - \dots \dots \end{aligned}$$

截取前四項得:

$$\begin{aligned} \log_e 1.1 &= 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 \\ &= 0.095308 = 0.0953 \end{aligned}$$

習 題 十 二

1. 確定下列各級數之性質.

$$a) 0.06 + \frac{0.06^2}{2} + \frac{0.06^3}{3} - \frac{0.06^4}{4} + \dots$$

$$b) 0.05 - \frac{0.05^2}{2!} + \frac{0.05^3}{3!} - \frac{0.05^4}{4!} + \dots$$

$$c) 0.04 + \frac{0.04^2}{2} + \frac{0.04^3}{3} + \frac{0.04^4}{4} + \dots$$

$$d) 2 + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} + \dots$$

2. 確定下列各冪級數為收斂級數時 x 之數值。

$$a) \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \dots$$

$$b) 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

$$c) \frac{1}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \dots$$

$$d) 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

3. 求下列各數! (至小數七位為止)

$$a) \sqrt{101} \qquad b) \sqrt[3]{999} \qquad c) 1.05^{\frac{1}{2}}$$

$$d) 1.05^{\frac{1}{3}} \qquad e) 1.05^{\frac{1}{4}} \qquad f) 1.05^{\frac{1}{5}}$$

4. 求下列各數! (至小數四位為止)

$$a) e^{\frac{1}{2}} \qquad b) e^{\frac{1}{3}} \qquad c) e^2$$

5. 求 $\log_e 1.2!$ (至小數四位為止)

a) 應用公式 (a20)

b) 應用公式 (c1)

本編應用公式

公式 (a2b) — (a34)

(c16) — (c20)

$$l = a + (n-1)d \dots\dots\dots (a29)$$

$$s = \frac{n(a+l)}{2} \dots\dots\dots (a30)$$

$$l = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots\dots (c16)$$

$$S = na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} d_r \dots \dots \dots (c17)$$

$$l = ar^{n-1} \dots \dots \dots (c31)$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \dots \dots \dots (c32)$$

$$S = \frac{a-rl}{1-r} \dots \dots \dots (c33)$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}x^2 + \dots \dots \dots (c34)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \dots \dots (c18)$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \dots \dots (c19)$$

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \dots \dots (c20)$$

第四編 確實年金

第一章 年金之意義及其種類

依一定契約，按期收受或支付一定之金額，是曰年金 (Annuity)。每月初支付之房金，每季或每年初支付之保險費，每月末收受之養老金，每半年或每年末收受之債券利息，是皆年金也。年金之收支，在每期之末者，曰期末付年金，(或稱普通年金 Ordinary Annuity)，其在每期之初者，曰期初付年金 (或稱到期年金 Annuity Due) 本書中所稱年金，除有特別說明外，均指期末付年金而言。

年金又可分為確實年金與生命年金二種。年金之收支，在規定期限間，不受任何事故之影響者，曰確實年金 (Annuity Certain)。年金之收支，因一人或數人之死亡而終止者，曰生命年金 (Life Annuity)。生命年金與人之壽命有關，故須先明機率 (第九編) 之原理，然後能計算生命年金 (第十編)，本編請先論確實年金。

確實年金有定額年金與變額年金之別。每期收支之年金在規定期限間，其金額永無變動者，曰定額年金 (Constant Annuity)；其在規定期限間，任意變動或依一定規律而變動

者，曰變額年金 (Varying Annuity)。通常年金均屬定額年金。本書中所稱年金，除有特別規定外，均指定額年金而言。

確實年金又可分為有限年金，延期有限年金，永續年金，與延期永續年金四種。約定年金之支付，以若干期為限者，曰有限年金 (Temporary Annuity)。約定最初若干期不付年金，以後若干期繼續支付年金者，曰延期有限年金 (Deferred Annuity)。約定年金之支付，永遠繼續而無終止之期者，曰永續年金 (Perpetuity)。約定最初若干期不付年金，以後永遠繼續支付者，曰延期永續年金 (Deferred Perpetuity)。

每期支付之年金，在規定期限末之總值，名曰年金終值 (Final Value or Amount of the Annuity)；其在訂約時之總值，名曰年金現值 (Present Value of the Annuity)。前後兩支付年金時日間之時期，名曰支付期間 (Payment Interval)。前後兩計算利息時日間之時期，名曰計息期間 (Conversion Period)。自最初支付期間之始，至最後支付期間之末，中間相隔之時期，名曰年金時期 (Term of the Annuity)。每一支付期間支付之金額，名曰每次年金額 (Periodic Payment of the Annuity)。每計息期內支付年金總額，名曰每期年金總額 (Rent Per Conversion Period)。例如每月末支付年金一百元，約定繼續支付六十期，每半年計息一次，則支付期間為一月，計息期間為六月，年金時期為十期，每次年金額為一百元，每期年金總額為六百元。又如每兩年末支付年金一千元，約定繼續支付十

期，每半年計息一次，則支付期間為二年，計息期間為六月，年金時期為四十期，每次年金額為一千元，每期年金總額為二百五十元。

第二章 定額年金

年金之支付，有一期一次者，亦有一期數次或數期一次者，前者計算較簡，而後者稍繁，故前者可名曰簡單年金，而後者可名曰複雜年金。茲分別論之於以下兩節。

第一節 簡單年金

簡單年金一元繼續支付 n 期之終值，通常以 $s_{\overline{n}|}$ 表之，其數值可自下之公式求得：

$$s_{\overline{n}|} = \frac{u^n - 1}{i} \dots\dots\dots (a35)$$

$s_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值

i 每計息期內利率

n 年金時期(單位計息期)

$$u = 1 + i$$

(證) 年金支付期 與最後支付期間 年金一元在最後支
 之末相隔之期數 付期間末之終值

| | | |
|--------------|---------|-----------------|
| 第一期末 | $n - 1$ | $(1 + i)^{n-1}$ |
| 第二期末 | $n - 2$ | $(1 + i)^{n-2}$ |
| 第三期末 | $n - 3$ | $(1 + i)^{n-3}$ |
| | | |
| 第 $(n-2)$ 期末 | 2 | $(1 + i)^2$ |

| | | |
|--------------|---|-------|
| 第 $(n-1)$ 期末 | 1 | $1+i$ |
| 第 n 期末 | 0 | 1 |

年金終值即為每期年金額終值之總和，故

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

上式之右邊為一等比級數，其首項為1，公比為 $1+i$ ，項數為 n ，應用公式 (a32)，得：

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{u^n - 1}{i}$$

(別證) 以本金1元存入銀行，於每期末得利息 i 元，並於 n 期末收回本金1元，以之列成價值方程式，(以 n 期末為比較時期)，則得：

$$u^n = i s_{\overline{n}|i} + 1$$

$$i s_{\overline{n}|i} = u^n - 1$$

$$\therefore s_{\overline{n}|i} = \frac{u^n - 1}{i}$$

$s_{\overline{n}|i}$ 為年金一元之終值，若年金額為 R 元，則以 R 乘 $s_{\overline{n}|i}$ ，即得年金 R 元之年金終值：

$$K = R s_{\overline{n}|i} \dots \dots \dots (a36)$$

R 年金額

K 年金額 R 元之終值。

$s_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值。

依公式 (a35) 可製年金終值表 (表六)，故每計息期內利率若為普通利率，則可應用年金終值表，檢查年金一元之終值。

(例一) 每半年末支付年金 300 元, 求五年末之年金終值!

a) 虛利率一分二釐; 每年複利二次;

b) 虛利率一分零五毫; 每年複利二次.

$$a) \quad i = 3\%$$

$$n = 10$$

$$R = 300$$

應用年金終值表, 得:

$$s_{\overline{10}|6\%} = 13.18079494$$

$$K = 300s_{\overline{10}|6\%} = 3954.24 \text{ 元}$$

$$b) \quad i = 5.25\%$$

$$n = 10$$

$$R = 300$$

應用公式 (a35), 得:

$$s_{\overline{10}|5.25\%} = \frac{1.0525^{10} - 1}{0.0525}$$

$$x = 1.0525^{10}$$

$$\log x = 10 \log 1.0525$$

$$= 0.222221$$

$$x = 1.6680962$$

$$s_{\overline{10}|5.25\%} = \frac{0.6680962}{0.0525}$$

$$K = 300s_{\overline{10}|5.25\%} = \frac{2004288.6}{525} = 3817.69 \text{ 元}$$

簡單年金一元繼續支付 n 期之現值，通常以 $a_{\overline{n}|}$ 表之。年金現值為各期年金在年金時期初之總值，而年金終值乃其在年金時期末之總值，故設年金時期為 n 期，每計息期內利率為 i ，則以 $(1+i)^{-n}$ 乘年金終值，即得年金現值，即：

$$a_{\overline{n}|} = (1+i)^{-n} s_{\overline{n}|} = (1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \dots\dots\dots(a37)$$

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值。

i 每計息期內利率。

n 年金時期(單位計息期)。

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$a_{\overline{n}|}$ 為年金一元之現值，若年金額為 R 元，則以 R 乘 $a_{\overline{n}|}$ ，即得年金 R 元之年金現值

$$A = Ra_{\overline{n}|} \dots\dots\dots(a38)$$

R 年金額。

A 年金額 R 元之年金現值。

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值。

依公式 (a37) 可製年金現值表(表七)，故每計息期內利率若為普通利率，則可應用年金現值表，檢查年金一元之現值。

(例二) 每半年支付年金五百元，年金時期五年，求年金現值！

a) 虛利率一分, 每年複利二次;

b) 虛利率一分零四毫, 每年複利二次。

$$a) \quad i = 5\%$$

$$n = 10$$

$$R = 500$$

查年金現值表, 得:

$$a_{\overline{10}|} @ 5\% = 7.72173493$$

$$A = 500a_{\overline{10}|} = 3860.87 \text{ 元}$$

$$b) \quad i = 5.2\%$$

$$n = 10$$

$$R = 500$$

應用公式 (a37), 得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1 - 1.052^{-10}}{0.052}$$

令

$$x = 1.052^{-10}$$

$$\log x = -10 \log 1.052 = -10 \times 0.0220157$$

$$= \bar{1}.779843$$

$$x = 0.6023417$$

$$a_{\overline{10}|} = \frac{0.3976583}{0.052}$$

$$A = 500a_{\overline{10}|} = \frac{198829.15}{52} = 3823.64 \text{ 元}$$

若年金之支付,不在每期之末而在每期之初,則每期初支付之年金一元,至期末已爲 $(1+i)$ 元 (i 爲每計息期內利率),故期初付年金一元,實與期末付年金 $(1+i)$ 元相等. 期初付年金之終值與現值,可自下列各公式求得:

$$s'_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \dots\dots\dots (a39)$$

$$a'_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1 \dots\dots\dots (a40)$$

- $s'_{\overline{n}|}$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 期之終值.
- $s_{\overline{n+1}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $n+1$ 期之終值.
- $a'_{\overline{n}|}$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 期之現值.
- $a_{\overline{n-1}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $n-1$ 期之現值.

(證) $s'_{\overline{n}|} = (1+i)s_{\overline{n}|} = (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$

$$\therefore s'_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$$

$$a'_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|} = (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + \frac{i}{i}$$

$$\therefore a'_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$$

(別證) 若於 n 期末增加年金一元,而每期初支付之年金一元,視作上期末支付,則增加後變爲繼續支付 $n+1$ 期之期末付年金,故得

$$s'_{\overline{n}|} + 1 = s_{\overline{n+1}|} \quad \therefore s'_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$$

又若除去第一期初支付之年金一元,而每期初支付之年金一元,視作上期末支付,則除去後變爲繼續支付 $n-1$ 期之期末付年金,故得

$$a'_{\overline{n}} - 1 = a_{\overline{n-1}} \quad \therefore \quad a'_{\overline{n}} = a_{\overline{n-1}} + 1$$

(例三) 每半年初支付年金一百元, 年利率八釐, 每年複利二次, 年金時期七年半, 求年金終值與年金現值!

$$i = 4\%$$

$$n = 15$$

$$R = 100$$

應用公式 (a39), 得:

$$s'_{\overline{15}} = s_{\overline{15}} - 1 = 21.82453114 - 1 = 20.82453114$$

$$K = 100s'_{\overline{15}} = 2082.45 \text{ 元}$$

應用公式 (a40), 得:

$$a'_{\overline{15}} = a_{\overline{15}} + 1 = 10.56312293 + 1 = 11.56312293$$

$$A = 100a'_{\overline{15}} = 1156.31 \text{ 元}$$

簡單年金一元, 延期 m 期, 以後繼續支付 n 期之終值與現值, 通常以 $m|s_{\overline{n}}$ 與 $m|a_{\overline{n}}$ 表之. 延期有限年金之終值, 與延期無關, 故與普通有限年金之終值相同. 至其現值則不然, 其數值之大小, 隨延期之久暫而異, 延期期數愈長, 則年金現值愈小, 延期期數愈短, 則年金現值愈大, 設在延期內亦按期支付年金, 則在此延期內所支付年金之現值, 與延期有限年金之現值相加, 即得普通有限年金 $(m+n)$ 期之現值, 故

$$m|a_{\overline{m}} + a_{\overline{n}} = a_{\overline{m+n}}$$

$$\therefore m|a_{\overline{m}} = a_{\overline{m+n}} - a_{\overline{n}} \dots\dots\dots (a41)$$

$a_{\overline{m}|i}$ 簡單年金一元延期 m 期以後繼續支付 n 期之現值。

$a_{\overline{m+n}|i}$ 單簡年金一元繼續支付 $m+n$ 期之現值。

$a_{\overline{m}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 m 期之現值。

永續年金之支付，無終止之期，故不能計算終值，至其現值則可求得其極限，永續年金一元之現值通常以 a_{∞} 表之，其數值可自下式求得：

$$a_{\infty} = \frac{1}{i} \dots\dots\dots (a_{12})$$

a_{∞} 永續年金一元之現值。

i 每計息期內利率。

(證)
$$a_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - v^n}{i}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i}$$

延期 m 期，永續年金一元之現值，通常以 ${}_m|a_{\infty}$ 表之，其數值可自下式求得：

$${}_m|a_{\infty} = \frac{v^m}{i} \dots\dots\dots (a_{13})$$

${}_m|a_{\infty}$ 延期 m 期永續年金一元之現值。

m 延期期數。

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證)
$${}_m|a_{\infty} = v^m a_{\infty}$$

但
$$a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

$$\therefore m |a_{\infty} = \frac{v^m}{i}$$

(例四) 每年末支付年金二百元, 實利率五釐, 求年金現值!

a) 延期十年, 以後繼續支付二十年;

b) 延期十年, 以後永遠繼續支付;

c) 永遠繼續支付.

a) $i = 5\%$

$$m = 10$$

$$n = 20$$

$$R = 200$$

應用公式(a41), 得:

$$10 |a_{\overline{20}|} = a_{\overline{20}|} - a_{\overline{10}|} = 15.37245103$$

$$- 7.72173493 = 7.6507161$$

$$A = 200 \times 10 |a_{\overline{20}|} = 200 \times 7.6507161$$

$$= 1530.14 \text{ 元}$$

b) $i = 5\%$

$$m = 10$$

$$n = \infty$$

$$R = 200$$

應用公式(a43), 得:

$$10 |a_{\infty} = \frac{v^{10}}{0.05} = 20 \times 0.61391325 = 12.278265$$

$$A = 200 \times 10 | a_{\infty} = 200 \times 12.278265 = 2455.65 \text{ 元}$$

c) $i = 5\%$

$$n = \infty$$

$$R = 200$$

應用公式 (a42), 得:

$$a_{\infty} = \frac{1}{0.05} = 20$$

$$A = 200 \times a_{\infty} = 200 \times 20 = 4000 \text{ 元}$$

若已知年金額, 年金終值, 與每計息期內利率, 則年金時期可自下式求得:

$$n = \frac{\log(Ki + R) - \log R}{\log(1 + i)} \dots \dots \dots (b30)$$

n 年金時期 (單位計息期),

K 年金終值,

R 年金額,

i 每計息期內利率.

(證)
$$K = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{Ki}{R} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{Ki + R}{R} = (1+i)^n$$

$$\log(Ki + R) - \log R = n \log(1+i)$$

$$\therefore n = \frac{\log(Ki + R) - \log R}{\log(1+i)}$$

(例五) 每年末支付年金五百元, 實利率七釐, 問至少若干年後, 方可得一萬元以上之終值?

$$i = 7\%$$

$$R = 500$$

$$K = 10000$$

應用公式 (b30)*, 得:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log(700+500) - \log 500}{\log 1.07} = \frac{3.079181 - 2.698970}{0.0293838} \\ &= \frac{0.380211}{0.0293838} = 12.94 \text{ 年} \end{aligned}$$

若已知年金額, 年金現值, 與每計息期內利率, 則年金時期可自下式求得:

$$n = \frac{\log R - \log(R - Ai)}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (b31)$$

n 年金時期 (單位計息期).

R 年金額.

A 年金現值.

i 每計息期內利率.

* 若欲應用 a 組公式 (a35) 與 (a36), 則得:

$$10000 = 500 \times \frac{1.07^n - 1}{0.07}$$

$$1.07^n - 1 = 1.4$$

$$1.07^n = 2.4$$

$$n = \frac{\log 2.4}{\log 1.07} = \frac{0.380211}{0.0293838} = 12.94 \text{ 年}$$

$$(證) \quad A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{Ai}{R} = 1 - (1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = \frac{R - Ai}{R}$$

$$-n \log(1+i) = \log(R - Ai) - \log R$$

$$\therefore n = \frac{\log R - \log(R - Ai)}{\log(1+i)}$$

(例六) 每半年末支付年金一千元, 年利率一分二釐, 每年複利二次, 年金現值一萬元, 求年金時期!

$$i = 6\%$$

$$R = 1000$$

$$A = 10000$$

應用公式 (b31)*, 得:

$$n = \frac{\log 1000 - \log(1000 - 600)}{\log 1.06} = \frac{3 - 2.60206}{0.0253059}$$

* 若欲應用 a 組公式 (a37) 與 (a38), 則得:

$$10000 = 1000 \times \frac{1 - 1.06^{-n}}{0.06}$$

$$1 - 1.06^{-n} = 0.6$$

$$1.06^{-n} = 0.4$$

$$n = -\frac{\log 0.4}{\log 1.06} = -\frac{1.60206}{0.0253059} = \frac{0.39794}{0.0253059} = 15.725 \text{ 期}$$

$$\frac{n}{2} = 7.86 \text{ 年.}$$

$$= \frac{0.39794}{0.0253059} = 15.725 \text{ 期}$$

$$\frac{n}{2} = 7.86 \text{ 年}$$

若欲求年金額，則可應用公式 (a36) 或公式 (a38)。

(例七) 某甲欲於十年末積洋一萬元，問每年末須存洋若干元於銀行？(銀行規定年利率七釐，每年複利一次)

$$i = 7\%$$

$$n = 10$$

$$K = 10000$$

應用公式 (a36)，得：

$$10000 = R s_{\overline{10}|i}$$

$$R = \frac{10000}{s_{\overline{10}|i}} = \frac{10000}{13.81644796} = 723.78 \text{ 元}$$

(例八) 某甲以洋一萬元存入銀行，欲於以後十年間，每年末自銀行取得年金，求此年金額！(銀行規定年利率七釐，每年複利一次)

$$i = 7\%$$

$$n = 10$$

$$A = 10000$$

應用公式 (a38)，得：

$$10000 = R a_{\overline{10}|i}$$

$$R = \frac{10000}{a_{\overline{10}|i}} = \frac{10000}{7.02358154} = 1423.78 \text{ 元}$$

以上兩題中 $s_{\overline{n}|}$ 與 $a_{\overline{n}|}$ 均在分母，故計算稍繁，欲便計算可先製就 $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ 表與 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 表，則除法可變為乘法，前者名曰年賦金表(表七)(其名稱之來源參看第五編)，後者則亦可自年賦金表化出，不必另製一表，蓋 $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ 與 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 有下列之關係：

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i \dots\dots\dots(a44)$$

$a_{\overline{n}|}$ 前單年金一元繼續支付 n 期之現值。

$s_{\overline{n}|}$ 前單年金一元繼續支付 n 期之終值。

i 每計息期內利率。

(證)
$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} - \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} = i \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1}$$

即
$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = i$$

$$\therefore \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i$$

若應用年賦金表，則以上兩題可解答如下：

(例七) $R = 10000 \frac{1}{s_{\overline{10}|}} = 10000 \left(\frac{1}{a_{\overline{10}|}} - 0.07 \right)$
 $= 10000 \times (0.14237750 - 0.07) = 723.78$ 元

(例八) $R = 10000 \frac{1}{a_{\overline{10}|}} = 10000 \times 0.1423775 = 1423.78$ 元

若以一定現值，依一定投資利率，購買一定年金額，則由公式計算而得之年金時期不能適為整數，故通常有一次年

金額，須小於其他各次之年金額，比較小之年金額，或於最後一期支付，成於最初一期支付，其數值可自下列二公式求得：

$$L = Au^n - R(s_{\overline{n}|} - 1) \dots\dots\dots(b32)$$

$$F = Au^n - Ra_{\overline{n-1}|} \dots\dots\dots(b33)$$

L 最後一期支付之零星年金額。

F 最初一期支付之零星年金額。

R 每期年金額。

A 年金額 R 之現值。

$s_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值。

$a_{\overline{n-1}|}$ 簡單年金一元繼續支付 $n-1$ 期之現值。

n 年金時期(單位計息期)。

i 每計息期內利率。

$$u = 1 + i$$

(證)

$$Au^n = Ru s_{\overline{n-1}|} + L$$

$$Au^n = R(s_{\overline{n}|} - 1) + L$$

$$\therefore L = Au^n - R(s_{\overline{n}|} - 1)$$

$$A = F \frac{1}{u} + Ru_{\overline{n-1}|} \frac{1}{u}$$

$$Au = F + Ru_{\overline{n-1}|}$$

$$\therefore F = Au - Ru_{\overline{n-1}|}$$

(例九) 某甲以洋一萬元，購買年金若干期，每期年金額 1000 元，年利率一分二釐，每年複利二次，求零星年金額！

a) 零星年金額於最初一期收受；

b) 零星年金額於最後一期收受。

$$i = 6\%$$

$$A = 10000$$

$$R = 1000$$

$$A = Ra_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R} = \frac{10000}{1000} = 10$$

查年金現值表，得：

$$n = 16$$

a) 應用公式 (b33)*，得：

$$\begin{aligned} F &= 10000 \times 1.06 - 1000a_{\overline{16}|6\%} \\ &= 10600 - 9712.25 = 887.75 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b32)*，得：

$$\begin{aligned} L &= 10000 \times 1.06^{16} - 1000(s_{\overline{16}|6\%} - 1) \\ &= 25403.5168 - 24672.5281 \\ &= 730.99 \text{ 元} \end{aligned}$$

* 若欲應用 a 組公式，則可依題意列成價值方程式，以最初一期末為比較時期。

$$\begin{aligned} 10000 \times 1.06 &= F + 1000a_{\overline{16}|6\%} \\ F &= 10600 - 9712.25 = 887.75 \text{ 元。} \end{aligned}$$

* 若欲應用 b 組公式，則可依題意列成價值方程式，以最後一期末為比較時期。

$$\begin{aligned} 10000 \times 1.06^{16} &= L + 1000(s_{\overline{16}|6\%} - 1) \\ L &= 25403.5168 - 24672.5281 = 730.99 \text{ 元。} \end{aligned}$$

F 與 L 有一定之關係,故其演算可用下式稽核之:

$$R - L = u^{n-1}(R - F)$$

代以本題中數字,則得:

$$R - L = 1000 - 730.99 = 269.01$$

$$u^{n-1}(R - F) = 1.06^{15} \times 112.25$$

$$= 2.39655819 \times 112.25 = 269.01$$

年金問題中關於利率之計算,通常須應用插補法,將詳述於第六編;但若已知年金終值,年金現值與年金額,則應用公式(a44),即可計算利率。

(例十)已知年金終值爲 12577.89 元,年金現值爲 7721.73 元,每期年金額 1000 元,求每計息期內利率!

$$K = 12577.89$$

$$A = 7721.73$$

$$R = 1000$$

$$12577.89 = 1000s_{\overline{n}|i}$$

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1000}{12577.89} = 0.0795047$$

$$7721.73 = 1000a_{\overline{n}|i}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1000}{7721.73} = 0.1295047$$

代入公式(a44),則得:

$$i = 0.1295047 - 0.0795047 = 0.05$$

習 題 十 三

1. 求下列各題中之年金終值!

| 每年金額 | 期 初 付 或 期 末 付 | 年 金 時 期 | 年 利 率 | 每 年 支 付 年 金 次 數 | 每 年 支 付 年 金 次 數 | 年 金 終 值 |
|-----------|------------------|---------|-------|-----------------|-----------------|---------|
| a) \$ 200 | 期 末 付 | 10 年 | 6% | | 1 次 | |
| b) 200 | 期 末 付 | 10 年 | 6% | | 2 次 | |
| c) 200 | 期 末 付 | 10 年 | 6% | | 12 次 | |
| d) 200 | 期 末 付 | 10 年 | 5.4% | | 1 次 | |
| e) 400 | 期 初 付 | 15 年 | 5% | | 1 次 | |
| f) 400 | 期 初 付 | 15 年 | 5% | | 2 次 | |
| g) 380 | 期 末 付 | 20 年 | 3% | | 2 次 | |
| h) 450 | 期 末 付 | 25 年 | 4% | | 1 次 | |
| i) 560 | 期 末 付 | 30 年 | 5% | | 4 次 | |
| j) 640 | 期 末 付 | 35 年 | 12% | | 1 次 | |

2. 求下列各題中之年金現值!

| 每 年 金 額 | 期 初 付 或 期 末 付 | 延 期 年 數 | 年 金 時 期 | 年 利 率 | 每 年 支 付 年 金 次 數 | 每 年 支 付 年 金 次 數 | 年 金 現 值 |
|-----------|------------------|---------|---------|-------|-----------------|-----------------|---------|
| a) \$ 300 | 期 末 付 | 0 年 | 15 年 | 5% | | 1 次 | |
| b) 300 | 期 末 付 | 0 年 | 15 年 | 5.4% | | 1 次 | |
| c) 300 | 期 末 付 | 0 年 | 15 年 | 5% | | 4 次 | |
| d) 300 | 期 末 付 | 0 年 | 15 年 | 5% | | 12 次 | |
| e) 500 | 期 初 付 | 0 年 | 20 年 | 7% | | 1 次 | |
| f) 500 | 期 初 付 | 0 年 | 20 年 | 7% | | 4 次 | |
| g) 600 | 期 末 付 | 5 年 | 25 年 | 8% | | 1 次 | |
| h) 600 | 期 末 付 | 5 年 | 25 年 | 8% | | 2 次 | |
| i) 1000 | 期 末 付 | 0 年 | 永 續 | 4% | | 1 次 | |
| j) 1000 | 期 末 付 | 10 年 | 永 續 | 4% | | 1 次 | |

3. 填寫下表中空白之處:

| 每期 年金額 | 年金時期 | 年利率 | 每年支付年金次 數與複利次數 | 年金終值 | 年金現值 |
|-----------|------|-----|-------------------|----------|---------|
| a) | 10年 | 5% | 1次 | \$ 10000 | |
| b) | 20年 | 6% | 2次 | | \$ 5000 |
| c) | 30年 | 8% | 2次 | 40000 | |
| d) | 15年 | 4% | 2次 | 15000 | |
| e) | 10年 | 5% | 1次 | | 8000 |
| f) | 25年 | 7% | 1次 | | 7500 |
| g) | 18年 | 3% | 1次 | 20000 | |

4. 求證:

$$a'x = \frac{1}{d}$$

$a'x$ 期初付永續年金一元之現值.

d 每運轉期內貼現率.

5. 某甲新購一屋, 言定先付現洋五千元, 以後十年間, 每半年末付洋五百元, 求此屋之購價? (年利率七釐, 每年複利二次)

6. 某甲預計其子滿足二十三歲時, 將赴外國留學, 出國川資及服裝費共需洋一千元, 返國川資需洋五百元, 留學期限四年, 每年學費三千元, 於每年初匯出, 問某甲於其子生後, 每年末須存洋若干元於銀行, 以爲其子留學外國之準備? (某甲存款至第二十三次終止, 以後紙支不存, 銀行規定年利率七釐, 每年複利一次)

7. 某甲新購一地, 價值 25000 元, 約定先付現洋 5000 元, 以後每年末付洋 3000 元, 不及 3000 元之數, 於最後一期付清, 故某甲最後一期付款額, 較以前各期爲少, 求此最後一期付款額? (年利率七釐, 每年複利一次)

8. 某鑛估計開掘五年後始能生產, 以後二十年間每半年末可得純益一萬二千五百元, 設吾人不計五年內開鑛費用與生產停止後鑛之價值, 則此鑛現當共值幾何? (年利率六釐, 每年複利二次)

9. 某城一畝田每年田主可得純益七元五角, 問某城一畝田當值幾何?

a) 實利率八釐;

b) 實利率一分.

10. 某屋售價原定 10000 元, 若屋主允許購主先付現洋 4000 元, 以後六年間, 每年末付洋 1000 元, 不必另付利息, 問屋主共讓去售價若干元?

a) 年利率 6%, 每年複利一次;

b) 年利率 8%, 每年複利一次.

11. 應用價值方程式, 求證:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

12. 某甲以年金額 500 元, 二十年有限年金, 遺給其子, 設其子欲改年金時期為十五年, 則每年末可支取年金額若干元? (年利率六釐, 每年複利一次)

13. 以年金額 500 元之永續年金, 改換繼續支付二十年之期初付年金, 求新年金額 (年利率六釐, 每年複利一次)!

14. 某富翁以年金額 2000 元之永續年金, 平分贈給甲乙二醫院, 規定甲醫院得先支用年金額之全部, 俟甲醫院支盡其應得之部後, 乙醫院始得支用永續年金, 問乙醫院得獨自支用年金額 2000 元時, 距某富翁給與遺產時若干年? (年利率六厘, 每年複利一次)

15. 甲乙二人各以 100 元投資, 甲於十五年間, 每年得純益 6 元, 以後盡喪其本金, 乙則於最初十五年間, 一無餘盈, 但於其後五年間, 每年得純益 6 元, 並於第二十年末, 以其投資事業轉讓於人, 得洋 110 元, 問甲乙兩人投資之結果孰優? (市場利率六釐, 每年複利一次)

16. 求證:

$$m \cdot a_{\overline{n}|i} = v^m a_{\overline{n}|i}$$

$m \cdot a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元延期 m 期以後繼續支付 n 期之現值.

$a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值.

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

17. 求簡單年金一元繼續支付 n 期在 $n+m$ 期末之終值!

18. 第一年至第十年每年年金額為 300 元, 第十一年至第二十年每年年金額為 350 元, 第二十一年至第三十年每年年金額為 400 元, 求第一年初之年金現值與第三十年末之年金終值!(年利率六釐, 每年複利一次)

19. 第一年至第十年每年年金額為 300 元, 第十一年至第十五年不付年金, 第十六年至第二十五年每年年金額為 350 元, 第二十六年至第三十年不付年金, 第三十一年至第四十年每年年金額為 400 元, 求第一年初之年金現值與第四十年末之年金終值!(年利率六釐, 每年複利一次)

20. 某甲以洋三萬元, 購買年金若干年, 年金額 2000 元, 年利率五釐, 每年複利一次, 求零星年金額!

a) 零星年金額於最初一年收受;

b) 零星年金額於最後一年收受.

21. 已知年金現值為 1359.03 元, 年金終值為 2977.81 元, 每期年金額為 100 元, 求每計息期內利率!

22. 某甲以洋一萬元, 購買年金十五年, 後十年每年年金額較前五年每年年金額少 100 元, 年利率六釐, 每年複利一次, 求前五年每年年金額!

23. 某甲以洋 11862.62 元, 購買年金三十年, 第二期(第十一年至第三十年)每年年金額為第一期(第一年至第十年)每年年金額四分之三, 第三期(第二十一年至第三十年)每年年金額為第一期每年年金額二分之一, 年利率 $3\frac{1}{2}\%$, 每年複利一次, 求第一期每年年金額!

24. 某森林之收益估計如下:

第十六年至第二十年每年可得淨利 4700 元.

第三十一年至第三十五年每年可得淨利 4700 元.

第四十六年至第五十年每年可得淨利 4700 元.

第六十一年至第六十五年每年可得淨利 4700 元.

第七十六年至第八十年每年可得淨利 4700 元.

設投資者欲得實利率四釐之收益, 則須以若干元購買此森林?

25. 前題中若森林之收益估計改作如下：

第十六年至第二十年每年可得淨利 4700 元。

第三十一年至第三十五年每年可得淨利 4800 元。

第四十六年至第五十年每年可得淨利 4900 元。

第六十一年至第六十五年每年可得淨利 5000 元。

第七十六年至第八十年每年可得淨利 5100 元。

則森林之購價當爲幾何？

26. 下表爲中國銀行零存整付儲蓄存款，規定到期一次整付額，每六月存入國幣一元，每年計息二次，試覆核到期本息合計數目。

| 年期 | 年 利 率 | 到期本息合計數目 | 年期 | 年 利 率 | 到期本息合計數目 |
|----|-------|----------|-----|-------|----------|
| 二年 | 七厘二五 | \$ 4.37 | 九年 | 八厘二五 | \$27.01 |
| 三年 | 七厘二五 | 6.80 | 十年 | 八 厘 五 | 31.86 |
| 四年 | 七 厘 五 | 9.47 | 十一年 | 八厘七五 | 37.34 |
| 五年 | 七 厘 五 | 12.31 | 十二年 | 八厘七五 | 42.81 |
| 六年 | 七 厘 五 | 15.36 | 十三年 | 九 厘 | 49.71 |
| 七年 | 七厘七五 | 18.83 | 十四年 | 九 厘 | 56.42 |
| 八年 | 八 厘 | 22.69 | 十五年 | 九 厘 | 63.75 |

27. 下表爲中國銀行零存整付儲蓄存款，存款人預計滿期可得本息國幣一萬元，規定每六月應存數目，銀行計息每年二次，試覆核每六月應存數目。

| 年期 | 年 利 率 | 每六月應存數目 | 年期 | 年 利 率 | 每六月應存數目 |
|----|-------|-----------|-----|-------|----------|
| 二年 | 七厘二五 | \$2285.25 | 九年 | 八厘二五 | \$370.21 |
| 三年 | 七厘二五 | 1468.66 | 十年 | 八 厘 五 | 313.86 |
| 四年 | 七 厘 五 | 1059.11 | 十一年 | 八厘七五 | 267.80 |
| 五年 | 七 厘 五 | 812.16 | 十二年 | 八厘七五 | 233.57 |
| 六年 | 七 厘 五 | 650.72 | 十三年 | 九 厘 | 201.16 |
| 七年 | 七厘七五 | 530.83 | 十四年 | 九 厘 | 177.23 |
| 八年 | 八 厘 | 440.58 | 十五年 | 九 厘 | 156.86 |

28. 下表爲中國銀行整存零付儲蓄存款,存款人存入國幣一千元,規定每次應取本息數目,每六月支取一次,每年計息二次,試覆核每六月應取本息數目。

| 年期 | 年 利 率 | 每六月應取 本息數目 | 年期 | 年 利 率 | 每六月應取 本息數目 |
|----|-------|---------------|-----|-------|---------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$273.06 | 九年 | 八厘二五 | \$79.79 |
| 三年 | 七厘二五 | 188.44 | 十年 | 八 厘 五 | 75.22 |
| 四年 | 七 厘 五 | 146.99 | 十一年 | 八厘七五 | 71.70 |
| 五年 | 七 厘 五 | 121.76 | 十二年 | 八厘七五 | 68.12 |
| 六年 | 七 厘 五 | 105.01 | 十三年 | 九 厘 | 66.02 |
| 七年 | 七厘七五 | 93.89 | 十四年 | 九 厘 | 63.52 |
| 八年 | 八 厘 | 85.82 | 十五年 | 九 厘 | 61.39 |

29. 下表爲中國銀行整存零付儲蓄存款,存款人預計每六月取本息國幣十元,規定一次存入本金數目,銀行計息每年二次,試覆核一次存入本金數目。

| 年期 | 年 利 率 | 應存本金數目 | 年期 | 年 利 率 | 應存本金數目 |
|----|-------|---------|-----|-------|----------|
| 二年 | 七厘二五 | \$36.62 | 九年 | 八厘二五 | \$125.32 |
| 三年 | 七厘二五 | 53.07 | 十年 | 八 厘 五 | 132.94 |
| 四年 | 七 厘 五 | 68.03 | 十一年 | 八厘七五 | 139.47 |
| 五年 | 七 厘 五 | 82.13 | 十二年 | 八厘七五 | 146.78 |
| 六年 | 七 厘 五 | 95.23 | 十三年 | 九 厘 | 151.47 |
| 七年 | 七厘七五 | 106.51 | 十四年 | 九 厘 | 157.43 |
| 八年 | 八 厘 | 116.52 | 十五年 | 九 厘 | 162.89 |

30. 某甲有子二人,於民國二十年末,長子方滿足四歲,次子方滿足一歲,某甲預計其子滿足二十四歲時,將赴外國留學,出國川資及服裝費每人需洋一千元,返國川資每人需洋五百元,留學期限四年,每年學費三千元,於每年初匯出,某甲欲自民國二十一年起,每年末存入相等金額於銀行,以爲其二子留學外國之準備,某甲預定民國四十年末爲其最後一次存款,以後祇支不存,銀行規定年利率七厘,每年複利一次,問

a) 某甲於每年末應存洋若干元於銀行;

b) 設某甲之次子於民國二十四年一月一日死亡,某甲自是年起可少存若干元於銀行.

31. 某甲有子四人,於民國二十年末長子方滿足七歲,次子方滿足六歲,三子方滿足四歲,四子方滿足一歲,某甲預計其子滿足二十四歲時,將赴外國留學,出國川資及服裝費,每人需洋一千元,返國川資每人需洋五百元,留學期限四年,每年學費四千元,於每年初匯出,某甲欲自民國二十一年起每年末存入相等金額於銀行,以爲其四子留學外國之準備,某甲預定民國三十七年末爲其最後一次存款,以後祇支不存,銀行規定年利八厘,每年複利一次,問某甲於每年末應存洋若干元於銀行?

32. 上題中,四子於民國二十年末之年齡若改作如下,則某甲於每年末應存若干元於銀行:

長子方滿足七歲

次子方滿足五歲六個月

三子方滿足三歲十個月

四子方滿足一歲九個月.

第二節 複雜年金

設 W 爲每次年金額, R 爲每期年金總額, p 爲每計息期內支付年金次數, k 爲每支付期內計息次數, 則 W , R , p , k 有下列之關係:

$$p = \frac{\text{計息期間}}{\text{支付期間}}$$

$$k = \frac{\text{支付期間}}{\text{計息期間}}$$

$$R = pW$$

$$pk = 1$$

每期年金總額一元,分 p 次支付,繼續支付 n 期之終值,通常以 $s_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 表之,其數值可自下之公式求得:

$$s_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{u^n - 1}{i(u^{1/p} - 1)} \dots\dots\dots (a45)$$

$s_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 每期年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 期之終值,

n 年金時期(單位計息期),

p 每計息期內支付年金次數,

$u = 1 + i$,

i 每計息期內利率.

(證) 每期年金總額一元,分 p 次支付,則每次僅付 $\frac{1}{p}$ 元.

| 年金支付期 | 與最後支付期間之末相隔之期數 | 每後支付期間末之終值 |
|--------------------------|-------------------|---------------------------------------|
| 第 $\frac{1}{p}$ 期末 | $n - \frac{1}{p}$ | $\frac{1}{p} (1+i)^{n - \frac{1}{p}}$ |
| 第 $\frac{2}{p}$ 期末 | $n - \frac{2}{p}$ | $\frac{1}{p} (1+i)^{n - \frac{2}{p}}$ |
| 第 $\frac{3}{p}$ 期末 | $n - \frac{3}{p}$ | $\frac{1}{p} (1+i)^{n - \frac{3}{p}}$ |
| | | |
| 第 $(n - \frac{2}{p})$ 期末 | $\frac{2}{p}$ | $\frac{1}{p} (1+i)^{\frac{2}{p}}$ |
| 第 $(n - \frac{1}{p})$ 期末 | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1}{p} (1+i)^{\frac{1}{p}}$ |
| 第 n 期末 | 0 | $\frac{1}{p}$ |

年金終值即為每次年金額終值之總和，故

$$s_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}} + \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}} \\ + \frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}} + \frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$$

上式之右邊為一等比級數，其首項為 $\frac{1}{p}$ ，公比為 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ ，

項數為 np ，應用公式 (a32)，得：

$$s_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{\frac{1}{p}[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$\therefore s_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{u^n - 1}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)}$$

令

$$j_{(p)} = p(u^{\frac{1}{p}} - 1)$$

則

$$s_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{u^n - 1}{j_{(p)}} = \frac{i}{j_{(p)}} \cdot \frac{u^n - 1}{i}$$

$$\therefore s_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{j_{(p)}} s_{\overline{n}|} \dots \dots \dots (a46)$$

$s_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每期年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 期之終值。

$s_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值。

n 年金時期(單位計息期)

i 每計息期內利率。

$$j_{(p)} = p(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

p 每計息期內支付年金次數。

$s_{\overline{n}|}^{(p)}$ 可查年金終值表， $\frac{i}{j_{(p)}}$ 亦可專製一表(表十一)，以備檢

查之用。

在公式 (a45) 中, 若 $n=1$, 則

$$s_{\overline{1}|j^{(p)}} = \frac{1+i-1}{j^{(p)}} = \frac{i}{j^{(p)}}$$

故 $\frac{i}{j^{(p)}}$ 即為每期年金總額一元, 分 p 次支付, 在一期末之終值。

$s_{\overline{1}|j^{(p)}}$ 為每期年金總額一元之終值, 若每期年金總額為 R 元, 則以 R 乘 $s_{\overline{1}|j^{(p)}}$, 即得每期年金總額 R 元之年金終值。即

$$K = R s_{\overline{1}|j^{(p)}} \dots \dots \dots (a47)$$

R 每期年金總額。

K 每期年金總額 R 元之年金終值。

$s_{\overline{1}|j^{(p)}}$ 每期年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 期之終值。

年金終值 K 亦可自下式求得:

$$K = W \frac{s_{\overline{n}|k}}{s_{\overline{1}|k}} \dots \dots \dots (a48)$$

W 每次支付年金額。

K 每次年金額 W 元之年金終值。

n 年金時期 (單位計息期)

k 每支付期內計息次數。

(證) 設 x 為每計息期末支付之年金額, 則 W 為 k 次年金額 x 元之終值, 即:

$$W = x s_{\overline{1}|k}$$

$$x = W \frac{1}{s_{\overline{1}|k}}$$

每計息期末支付 x 元之年金為簡單年金, 故其年金終值

K 爲

$$K = x s_{\overline{n}|}$$

$$\therefore K = \frac{W \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}}{s_{\overline{k}|}}$$

計算年金終值 K 可依下列標準：

- (I) 若 p 爲整數，則應用公式 (a46) 與 (a47)；
- (II) 若 k 爲整數，則應用公式 (a48)；
- (III) 若不能查年金終值表，則應用公式 (a45) 與 (a47)。

(例一) 每年年金總額 500 元，求十年末之年金終值！

- a) 實利率四釐，每年支付年金二次；
- b) 實利率四釐，每年支付年金二十四次；
- c) 虛利率四釐，每年支付年金二次，複利四次；
- d) 虛利率四釐，每年支付年金四次，複利二次。
- e) 虛利率四釐，每年支付年金一次，複利八次。

a) $i = 4\%$

$$n = 10$$

$$p = 2$$

$$R = 500$$

應用公式 (a46)，得：

$$s_{\overline{10}|}^{(2)} = \frac{0.04}{j_{(2)}} s_{\overline{10}|} = 1.06990195 \times 12.00616712$$

$$\begin{aligned} K &= 500 s_{\overline{20}|i}^{\frac{20}{10}} = 500 \times 1.00990195 \times 12.00610712 \\ &= 504.950975 \times 12.00610712 = 6062.50 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$b) \quad i = 4\%$$

$$n = 10$$

$$p = 24$$

$$R = 500$$

應用公式 (a-5), 得:

$$s_{\overline{10}|i}^{\frac{20}{10}} = \frac{1.04^{10} - 1}{24(1.04^{\frac{1}{24}} - 1)}$$

查複利終值表, 得:

$$1.04^{10} = 1.48024428$$

$$\text{令} \quad x = 1.04^{\frac{1}{24}}$$

$$\log x = \frac{1}{24} \log 1.04 = \frac{1}{24} \times 0.0170333 = 0.000709721$$

$$x = 1.001635532$$

$$\begin{aligned} K &= 500 s_{\overline{20}|i}^{\frac{20}{10}} = 500 \times \frac{0.48024428}{24 \times 0.001635532} = \frac{240.12214}{0.039252768} \\ &= 6117.33 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$c) \quad i = 1\%$$

$$n = 40$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$k = 2$$

$$R = \frac{500}{4} = 125$$

$$W = \frac{500}{2} = 250$$

(第一法) 應用公式 (a46), 得:

$$s_{\overline{40}|}^{(\frac{1}{2})} = \frac{0.01}{j(\frac{1}{2})} s_{\overline{40}|} = 0.99502488 \times 48.88637336$$

$$\begin{aligned} K &= 125 s_{\overline{40}|}^{(\frac{1}{2})} = 125 \times 0.99502488 \times 48.88637336 \\ &= 0.99502488 \times 6110.79667 \\ &= 6080.39 \text{ 元} \end{aligned}$$

(第二法) 應用公式 (a48), 得:

$$\begin{aligned} K &= 250 \frac{s_{\overline{40}|}}{s_{\overline{20}|}} = 250 \times 48.88637336 \times 0.49751244 \\ &= 12221.59334 \times 0.49751244 = 6080.39 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$d: \quad i = 2\%$$

$$n = 20$$

$$p = 2$$

$$R = \frac{500}{2} = 250$$

應用公式 (a46), 得:

$$s_{\overline{20}|}^{(2)} = \frac{0.02}{j(2)} s_{\overline{20}|} = 1.00497525 \times 24.2973698$$

$$\begin{aligned} K &= 250 s_{\overline{20}|}^{(2)} = 250 \times 1.00497525 \times 24.2973698 \\ &= 1.00497525 \times 6074.34245 = 6104.56 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$e) \quad i = \frac{1}{2}\%$$

$$n = 80$$

$$k = 8$$

$$W = 500$$

應用公式(a48), 得:

$$\begin{aligned} K &= 500 \frac{s_{\overline{80}|i}}{s_{\overline{8}|i}} = 500 \times 98.06771357 \times 0.12282886 \\ &= 49033.856785 \times 0.12282886 = 6022.77 \text{ 元} \end{aligned}$$

每期年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 期之現值通常以 $a_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 表之. 年金現值為各次年金在年金時期初之總值, 而年金終值乃其在年金時期末之總值, 故設年金時期為 n 期, 每計息期內利率為 i , 則以 $(1+i)^{-n}$ 乘年金終值, 即得年金現值, 即:

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = (1+i)^{-n} s_{\overline{n}|i}^{(p)} = (1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1 - v^n}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)} \dots\dots\dots(a49)$$

或即
$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{i}{j(p)} a_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots(a50)$$

$a_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 每期年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 期之現值.

$a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元, 繼續支付 n 期之現值.

n 年金時期(單位計息期).

p 每計息期內支付年金次數.

$$u = 1 + i$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

無計息期內利率.

$$j_{(p)} = p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)$$

$a_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 爲每期年金總額一元之現值, 若每期年金總額爲 R 元, 則以 R 乘 $a_{\overline{n}|i}^{(p)}$, 即得每期年金總額 R 元之年金現值, 即

$$A = R a_{\overline{n}|i}^{(p)} \dots\dots\dots (a51)$$

R 每期年金總額.

A 每期年金總額 R 元之年金現值.

$a_{\overline{n}|i}^{(p)}$ 每期年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 期之現值.

年金現值 A 亦可自下式求得:

$$A = W \frac{a_{\overline{n}|i}^{(p)}}{s_{\overline{n}|i}^{(k)}} \dots\dots\dots (a52)$$

W 每次支付年金額.

A 每次年金額 W 元之年金現值.

n 年金時期 (單位計息期).

k 每次支付期內計息次數.

(證) $A = K(1+i)^{-n} = W \frac{s_{\overline{n}|i}^{(p)}}{s_{\overline{n}|i}^{(k)}} (1+i)^{-n} = W \frac{a_{\overline{n}|i}^{(p)}}{s_{\overline{n}|i}^{(k)}}$

計算年金現值 A 可依下列標準:

- (I) 若 p 爲整數, 則應用公式 (a50) 與 (a51);
- (II) 若 k 爲整數, 則應用公式 (a52);
- (III) 若不能查年金現值表, 則應用公式 (a49) 與 (a51).

(例二) 每年年金總額 600 元, 年金時期十二年, 求年金現值.

- a) 實利率五釐, 每年支付年金四次;
 b) 實利率五釐, 每年支付年金二十四次;
 c) 虛利率五釐, 每年支付年金二次, 複利四次;
 d) 虛利率五釐, 每年支付年金四次, 複利二次;
 e) 虛利率五釐, 每年支付年金一次, 複利十二次.

a) $i = 5\%$

$$n = 12$$

$$p = 4$$

$$R = 600$$

應用公式 (a50), 得:

$$a_{\overline{12}|}^{(4)} = \frac{0.05}{j^{(4)}} a_{\overline{12}|} = 1.01855942 \times 8.86325164$$

$$\begin{aligned} A &= 600 a_{\overline{12}|}^{(4)} = 600 \times 1.01855942 \times 8.86325164 \\ &= 611.135652 \times 8.86325164 = 5416.65 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) $i = 5\%$

$$n = 12$$

$$p = 24$$

$$R = 600$$

應用公式 (a49), 得:

$$a_{\overline{12}|}^{(24)} = \frac{1 - 1.05^{-12}}{24(1.05^{\frac{1}{24}} - 1)}$$

查複利現值表, 得:

$$1.05^{-12} = 0.55683742$$

$$\text{令 } x = 1.05^{\frac{1}{24}}$$

$$\log x = \frac{1}{24} \log 1.05 = \frac{1}{24} \times 0.0211893$$

$$= 0.0008828875$$

$$x = 1.002034994$$

$$A = 600a_{\overline{48}|x} = 600 \times \frac{1 - 0.55683742}{24 \times 0.002034994}$$

$$= \frac{25 \times 0.44316258}{0.002034994} = 5444.27 \text{ 元}$$

$$c) \quad i = 1 \frac{1}{4} \%$$

$$n = 48$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$k = 2$$

$$R = \frac{600}{4} = 150$$

$$W = \frac{600}{2} = 300$$

(第一法) 應用公式 (a50), 得:

$$a_{\overline{48}|}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1 \frac{1}{4} \%}{j^{(\frac{1}{2})}} a_{\overline{48}|} = 0.99378882 \times 35.93148091$$

$$A = 150a_{\overline{48}|}^{(\frac{1}{2})} = 150 \times 0.99378882 \times 35.93148091$$

$$= 149.068323 \times 35.93148091 = 5356.25 \text{ 元}$$

(第二法) 應用公式 (a52), 得:

$$\begin{aligned} A &= 300 \frac{a_{\overline{48}|}}{s_{\overline{24}|}} = 300 \times 35.93148091 \times 0.49689441 \\ &= 10779.444273 \times 0.49689441 = 5356.25 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$d) \quad i = 2\frac{1}{2}\%$$

$$n = 24$$

$$p = 2$$

$$R = \frac{600}{2} = 300$$

應用公式 (a50) 得:

$$a_{\overline{24}|}^{(2)} = \frac{0.025}{j_{(2)}} a_{\overline{24}|} = 1.00621142 \times 17.88498583$$

$$\begin{aligned} A &= 300 a_{\overline{24}|}^{(2)} = 300 \times 1.00621142 \times 17.88498583 \\ &= 1.00621142 \times 5365.495749 = 5398.82 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$e) \quad i = \frac{5}{12}\%$$

$$n = 144$$

$$k = 12$$

$$W = 600$$

應用公式 (a52), 得:

$$\begin{aligned} A &= 600 \frac{a_{\overline{144}|}}{s_{\overline{12}|}} = 600 \times 108.12091517 \times 0.08144081 \\ &= 64872.549102 \times 0.08144081 = 5283.27 \text{ 元} \end{aligned}$$

期末付年金每期支付之次數愈多，其終值與現值亦愈大。然年金終值與年金現值之增加非漫無限制，即使每期支付年金次數連續增加不絕，年金終值與年金現值亦有限制。連續支付之年金，名曰連續年金(Continuous Annuity)。每期年金總額一元繼續支付 n 期，連續年金之終值與現值，通常以 $\bar{s}_{\overline{n}|}$ 與 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 表之，其數值可自下列公式求得：

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|} \cdots (c21) \text{ (證明參看附錄甲 15)}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} \cdots (c22) \text{ (證明參看附錄甲 15)}$$

$\bar{s}_{\overline{n}|}$ 每期年金總額一元繼續支付 n 期連續年金之終值。

$\bar{a}_{\overline{n}|}$ 每期年金總額一元繼續支付 n 期連續年金之現值。

$s_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值。

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值。

i 每計息期內利率。

δ 息力。

事實上雖無連續年金之例，然若每期支付年金次數稍多，則欲求年金終值與年金現值之近似值，可應用公式 (c21) 與 (c22)，蓋公式中之 $\frac{i}{\delta}$ 可預製一表，故計算較便，茲就通用利率製 $\frac{i}{\delta}$ 表於下，以便連續年金之計算。

| i | δ | $\frac{i}{\delta}$ |
|-------|-----------|--------------------|
| 0.025 | 0.0246926 | 1.01245 |
| 0.03 | 0.0295588 | 1.01493 |

| | | |
|-------|-----------|---------|
| 0.035 | 0.0344014 | 1.01740 |
| 0.04 | 0.0392207 | 1.01987 |
| 0.045 | 0.0440169 | 1.02233 |
| 0.05 | 0.0487902 | 1.02480 |
| 0.06 | 0.0582689 | 1.02971 |
| 0.07 | 0.0676587 | 1.03460 |
| 0.08 | 0.0769611 | 1.03949 |

(例三)每年年金總額 1000 元, 年金時期五年, 實利率四釐, 求連續年金之現值!

$$i = 4\%$$

$$n = 5$$

$$p = \infty$$

$$R = 1000$$

應用公式 (c22), 得:

$$a_{\overline{5}|} = 1.01987 \times 4.45182233$$

$$A = 1000a_{\overline{5}|} = 1019.87 \times 4.45182233 = 4540.28 \text{ 元}$$

若年金之支付, 不在每期之末而在每期之初, 則每期初支付之年金 $\frac{1}{p}$ 元, 至期末已為 $\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元 (i 為每計息期內利率), 故每期年金總額, 若改為期末付, 當為 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元, 換言之, 期初付每期年金總額一元, 當與期末付每期年金總額

$(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元相等。期初付年金終值與現值，可自下列各公式求得：

$$K^n = W \frac{v^n \cdot \frac{1}{p} - u^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{p}} - 1} \dots\dots\dots (a53)$$

$$A^n = W \frac{u^{\frac{1}{p}} - v^n \cdot \frac{1}{p}}{u^{\frac{1}{p}} - 1} \dots\dots\dots (a54)$$

$$K^n = R s_{\overline{n}|i}^{\frac{1}{p}} \dots\dots\dots (a55)$$

$$A^n = R s_{\overline{n}|i}^{\frac{1}{p}} \dots\dots\dots (a56)$$

$$K^n = W \frac{s_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a57)$$

$$A^n = W \frac{a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a58)$$

- W 每次支付年金額。
- R 每期年金總額。
- Kⁿ 每期年金總額 R 元之期初付年金終值。
- Aⁿ 每期年金總額 R 元之期初付年金現值。
- s_n 期末付簡單年金一元繼續支付 n 期之終值。
- a_n 期末付簡單年金一元繼續支付 n 期之現值。
- n 年金時期(單位計息期)。
- p 每計息期內支付年金次數。
- k 每支付期內計息次數。
- Kⁿ 期初付複雜年金總額一元至第一期末之年金終值。
- i 每計息期內利率。

$$v = 1 + i$$

$$i = \frac{1}{1 + i}$$

$$(證) \quad K = Ku^{\frac{1}{p}} = R s_{\overline{n}|}^{\frac{1}{p}} u^{\frac{1}{p}}$$

$$s_{\overline{n}|}^{\frac{1}{p}} = \frac{u^n - 1}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)}$$

$$\therefore K' = R \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^{\frac{1}{p}}}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)} = W \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$A' = v^n K' = R \frac{u^{\frac{1}{p}} - v^{n-\frac{1}{p}}}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)} = W \frac{u^{\frac{1}{p}} - v^{n-\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$s_{\overline{n}|}^{\frac{1}{p}} = \frac{i}{j(p)} s_{\overline{n}|}$$

$$\therefore K' = R u^{\frac{1}{p}} \frac{i}{j(p)} s_{\overline{n}|}$$

$$但 \quad u^{\frac{1}{p}} \frac{i}{j(p)} = u^{\frac{1}{p}} s_{\overline{1}|}^{\frac{1}{p}} = s_{\overline{1}|}^{\frac{1}{p}}$$

$$\therefore K' = R s_{\overline{1}|}^{\frac{1}{p}} s_{\overline{n}|}$$

$$A' = v^n K' = R s_{\overline{1}|}^{\frac{1}{p}} (s_{\overline{n}|})^n = R s_{\overline{1}|}^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|}$$

設 x 爲每計息期末支付之年金額，則 W 爲 k 次年金額 x 元之現值，即：

$$W = x a_{\overline{k}|}$$

$$x = W \frac{1}{a_{\overline{k}|}}$$

每計息期末支付 x 元之年金爲簡單年金，故

$$K' = x s_{\overline{n}|} = W \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}$$

$$A' = x a_{\overline{n}|} = H \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}$$

計算年金終值 K' 與年金現值 A' 可依下列標準:

- (I) 若 p 爲整數, 則應用公式 (a55) 與 (a56);
- (II) 若 k 爲整數, 則應用公式 (a57) 與 (a58);
- (III) 若不能查年金表, 則應用公式 (a53) 與 (a54).

期初付複雜年金總額一元至第一期末之年金終值 $s_{\overline{n}|}^{\text{雙}}$ 可查表十二.

(例四) 每月初支付年金 100 元, 年金時期七年六月, 年利率 8%, 每年複利二次, 求年金終值與年金現值!

$$i = 4\%$$

$$n = 15$$

$$p = 6$$

$$R = 100 \times 6 = 600$$

應用公式 (a55), 得:

$$\begin{aligned} K' &= 600 s_{\overline{15}|}^{\text{雙}} = 600 \times 1.02320624 \times 20.02358764 \\ &= 12292.96 \text{ 元} \end{aligned}$$

應用公式 (a56), 得:

$$\begin{aligned} A' &= 600 s_{\overline{15}|}^{\text{雙}} = 600 \times 1.02320624 \times 11.11838743 \\ &= 6825.84 \text{ 元} \end{aligned}$$

最初延期 m 期繼續支付 n 期之年金現值可自繼續支付 $n+m$ 期之年金現值減去繼續支付 m 期之年金現值求得, 或

自繼續支付 n 期之年金現值化爲 m 期前之價值, 卽以 v^m 乘之卽得.

(例五) 某甲現年三十五歲, 欲於五十歲至七十歲間, 每月末自銀行取得年金一百元, 問現須以若干元存入銀行? (銀行規定實利率七釐)

$$m = 15$$

$$n = 20$$

$$i = 7\%$$

$$p = 12$$

$$R = 12 \times 100 = 1200$$

$$\begin{aligned} \text{(第一法)} \quad A &= 1200 \frac{0.07}{j_{(12)}} a_{\overline{20}|} - 1200 \frac{0.07}{j_{(12)}} a_{\overline{15}|} \\ &= 1200 \frac{0.07}{j_{(12)}} (a_{\overline{20}|} - a_{\overline{15}|}) \\ &= 1200 \times 1.03169143 (12.94767230 - 9.10791401) \\ &= 1200 \times 1.03169143 \times 3.83975829 = 4753.73 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(第二法)} \quad A &= 1.07^{-15} \times 1200 \times \frac{0.07}{j_{(12)}} a_{\overline{20}|} \\ &= 0.36244602 \times 1200 \times 1.03169143 \\ &\quad \times 10.59401425 \\ &= 4753.73 \text{ 元} \end{aligned}$$

若已知每期年金總額, 每期支付年金次數, 年金終值, 與每計息期內利率, 則年金時期可自下式求得:

$$n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} j_{(p)} + 1 \right]}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b34)$$

n 年金時期(單位計息期)

R 每期年金總額.

K 年金終值.

i 每計息期內利率.

p 每計息期內支付年金次數.

$$j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

(證)
$$K = R \frac{(1+i)^n - 1}{j_{(p)}}$$

$$\frac{K}{R} j_{(p)} = (1+i)^n - 1$$

$$(1+i)^n = \frac{K}{R} j_{(p)} + 1$$

$$n \log (1+i) = \log \left[\frac{K}{R} j_{(p)} + 1 \right]$$

$$\therefore n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} j_{(p)} + 1 \right]}{\log (1+i)}$$

例六) 每年年金總額 500 元, 分四次支付, 問至少若干年後, 方得一萬元以上之終值?(實利率七釐)

$$i = 7\%$$

$$R = 500$$

$$K = 10000$$

$$p = 4$$

代入公式 (b34)*, 得:

$$n = \frac{\log \left[\frac{10000}{500} j_{(4)} + 1 \right]}{\log 1.07} = \frac{\log (20 \times 0.0682341 + 1)}{\log 1.07}$$

$$= \frac{\log 2.364682}{\log 1.07} = \frac{0.373772}{0.0293838} = 12.72 \text{ 年}$$

若已知每期年金總額, 每期支付年金次數, 年金現值與每計息期內利率, 則年金時期可自下式求得:

$$n = \frac{\log R - \log [R - Aj_{(p)}]}{\log (1+i)} \dots \dots \dots (b35)$$

- n 年金時期 (單位計息期).
- R 每期年金總額.
- A 年金現值.
- i 每計息期內利率.
- p 每計息期內支付年金次數.

$$j_{(p)} = p(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

(證) $A = R \frac{1 - v^n}{j_{(p)}}$

* 若欲應用 a 組公式 (a45) 與 (a47), 則得

$$10000 = 500 \times \frac{1.07^n - 1}{j_{(4)}}$$

$$1.07^n - 1 = 20 \times 0.0682341$$

$$1.07^n = 2.364682$$

$$n \log 1.07 = \log 2.364682$$

$$0.0293838 n = 0.373772$$

$$n = 12.72 \text{ 年}$$

$$\frac{A}{R} j_{(p)} = 1 - v^n$$

$$v^n = \frac{R - Aj_{(p)}}{R}$$

$$(1+i)^n = \frac{R}{R - Aj_{(p)}}$$

$$n \log(1+i) = \log R - \log [R - Aj_{(p)}]$$

$$\therefore n = \frac{\log R - \log [R - Aj_{(p)}]}{\log(1+i)}$$

(例七) 每年年金總額 1000 元, 分四次支付, 年金現值 10000 元, 求年金時期! (實利率六釐)

$$i = 6\%$$

$$p = 4$$

$$R = 1000$$

$$A = 10000$$

代入公式 (b35)*, 得:

* 若欲應用 a 組公式 (a49) 與 (a51), 則得

$$10000 = 1000 \times \frac{1 - 1.06^{-n}}{j_{(4)}}$$

$$1 - 1.06^{-n} = 10 \times 0.05869538$$

$$1.06^{-n} = 0.4130462$$

$$-n \log 1.06 = \log 0.4130462$$

$$-0.0253059 n = \bar{1}.6159985$$

$$0.0253059 n = 0.3840015$$

$$n = 15.17 \text{ 年.}$$

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\log 1000 - \log [1000 - 10000j_{(4)}]}{\log 1.06} \\
 &= \frac{3 - \log (1000 - 10000 \times 0.05869538)}{0.0253059} \\
 &= \frac{3 - \log 413.0462}{0.0253059} = \frac{3 - 2.6159985}{0.0253059} = \frac{0.3840015}{0.0253059} \\
 &= 15.17 \text{ 年}
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ 與 $\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$ 有一定之關係，以公式表之如下：

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - j_{(p)} \dots \dots \dots (a54)$$

i 每期年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 期之終值。

$a_{\overline{n}|i}$ 每期年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 期之現值。

i 每計息期內利率。

p 每計息期內支付年金次數。

$$j_{(p)} = p(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{(證)} \quad \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} &= \frac{j_{(p)}}{i} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{j_{(p)}}{i} \cdot \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \\
 &= \frac{j_{(p)}}{i} \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right) = \frac{j_{(p)}}{i} \times i = j_{(p)} \\
 \therefore \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} &= \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - j_{(p)}
 \end{aligned}$$

若欲求每期年金總額，則可應用公式 (a45) 至 (a58)。

(例八) 某銀行零存整付儲蓄存款規定十年期年利率八釐五毫，十五年期年利率九釐，每半年計息一次，滿期得本息國幣一萬元，問每月初應存入若干元？

a) 十年期

$$i = 4.25\%$$

$$n = 20$$

$$p = 6$$

$$K = 10000$$

代入公式 (a53), 得:

$$10000 = W \frac{1.0425^{20\frac{1}{6}} - 1.0425^{\frac{1}{6}}}{1.0425^{\frac{1}{6}} - 1}$$

$$\text{令 } x = 1.0425^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{6} \log 1.0425 = \frac{1}{6} \times 0.0180761 \\ &= 0.0030126833 \end{aligned}$$

$$x = 1.00696107$$

$$\text{令 } y = 1.0425^{20\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \log y &= \frac{121}{6} \log 1.0425 = \frac{121}{6} \times 0.0180761 \\ &= 0.3645346833 \end{aligned}$$

$$y = 2.31491321$$

$$10000 = W \frac{2.31491321 - 1.00696107}{0.00696107}$$

$$W = \frac{10000 \times 0.00696107}{1.30795214}$$

$$W = \frac{69.6107}{1.30795214} = 53.22 \text{ 元}$$

b) 十五年期

$$i = 4\frac{1}{2}\%$$

$$n = 30$$

$$p = 6$$

$$K' = 10000$$

代入公式 (a55), 得:

$$10000 = R s_{\overline{30}|i}^{(6)}$$

$$R = \frac{10000 \frac{1}{s_{\overline{30}|i}^{(6)}}}{s_{\overline{30}|i}^{(6)}} = \frac{163.9154}{1.02608953}$$

$$W = \frac{R}{6} = \frac{163.9154}{6 \times 1.02608953} = 26.62 \text{ 元}$$

(例九) 某銀行整存零付儲蓄存款規定十年期年利率八釐五毫, 十五年期年利率九釐, 每半年計息一次, 存款人一次存入國幣一千元, 問每月末得支取若干元?

a) 十年期

$$i = 4.25\%$$

$$n = 20$$

$$p = 6$$

$$A = 1000$$

應用公式 (a49) 與 (a51) 得:

$$1000 = R \frac{1 - 1.0425^{-20}}{6(1.0425^{\frac{1}{6}} - 1)}$$

令 $x = 1.0425^{\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{6} \log 1.0425 = \frac{1}{6} \times 0.0180761 \\ &= 0.0030126833 \end{aligned}$$

$$x = 1.00696107$$

令 $y = 1.0425^{-20}$

$$\begin{aligned} \log y &= -20 \log 1.0425 = -20 \times 0.0180761 \\ &= -0.361522 = \bar{1}.638478 \end{aligned}$$

$$y = 0.434989$$

$$1000 = R \frac{1 - 0.434989}{6 \times 0.00696107}$$

$$R = \frac{6000 \times 0.00696107}{0.565011}$$

$$W = \frac{R}{6} = \frac{6.96107}{0.565011} = 12.32 \text{ 元}$$

b) 十五年期

$$i = 4\frac{1}{2}\%$$

$$n = 30$$

$$p = 6$$

$$A = 1000$$

應用公式 (a50) 與 (a51) 得:

$$1000 = R \frac{0.045}{j^{(6)}} a_{\overline{30}}$$

$$R = 1000 \times \frac{j^{(6)}}{0.045} \frac{1}{a_{\overline{30}}}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{R}{6} = 1000 \times \frac{j^{(6)}}{0.27} \frac{1}{a_{\overline{30}}} \\ &= \frac{44.17874 \times 0.06139154}{0.27} = 10.05 \text{ 元} \end{aligned}$$

習 題 十 四

1 每年年金總額 500 元, 年金時期二十年, 虛利率六釐, 填寫下表中空白之處!

| 每年支付年金次數 終值與現值 每年複利次數 | 年 金 終 值 | | | 年 金 現 值 | | |
|-----------------------------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | 每年複利一次 | 每年複利二次 | 每年複利四次 | 每年複利一次 | 每年複利二次 | 每年複利四次 |
| 每年支付年金一次 | | | | | | |
| 每年支付年金二次 | | | | | | |
| 每年支付年金四次 | | | | | | |

2. 某銀行創辦零存整付儲蓄存款, 分五年期, 十年期與二十年期三種, 支付方法分按月支付與按季支付兩種, 年利率八釐, 每年複利二次, 到期整付額均以一千元為標準, 填寫下表中空白之處!

| 年金時期 支付方法 | 每 月 零 存 額 | 每 季 零 存 額 |
|--------------|-----------|-----------|
| 五 年 期 | | |
| 十 年 期 | | |
| 二 十 年 期 | | |

3. 某銀行創辦整存零付儲蓄存款，分五年期，十年期與二十年期三種，付款方法分按月與按季兩種，實利率八釐，整存額均以一千元為標準，填寫下表中空白之處：

| 年金時期 | 付款方法 | |
|------|-------|-------|
| | 每季零付額 | 每月零付額 |
| 五年期 | | |
| 十年期 | | |
| 二十年期 | | |

4. 某甲購得某種債券票面金額十萬元，債券利息年利率七釐，每年付息二次，某甲以債券收入利息存入銀行，問十年後某甲在銀行共有存款若干元？（銀行規定年利率六釐，每年複利二次）

5. 某甲新購一汽車，言定先付現洋二百元，以後三年間，每月末付洋三十元，求此汽車之購價：

a) 實利率六釐：

b) 虛利率六釐，每年複利二次。

6. 甲乙兩人每年末各以500元存入儲蓄銀行，甲之銀行規定年利率七釐，每年複利一次，乙之銀行規定年利率七釐，每年複利二次，問二十年後兩人在兩銀行存款相差若干元？

7. 每年初或每年末支付之100元，若改為每月末支付，當為幾何？（實利率六厘）

8. 甲乙兩人每年各以500元存入儲蓄銀行（銀行規定實利率七釐，甲於每年之末存入500元，乙則於每半年末存入250元，問二十年後兩人在銀行存款額相差若干元？

9. 某甲現年三十五歲，欲於四十五歲至六十五歲間，每月末自銀行得洋一百元，問自三十五歲至四十五歲間，某甲須於每月末存洋若干元於銀行？（銀行規定實利率八釐）

10. 某甲現年三十五歲，欲於五十歲至七十歲間，每月末自銀行得洋一百元，問現須一次存入若干元於銀行。（銀行規定實利率八釐）

11. 某校於十週紀念時，籌設百週紀念基金一千萬元，設某校常有學生四百人，則每月末每生須捐助若干元於學校，俾於百週紀念時得積存基金一千萬元？(基金依實利率六釐投資)

12. 每年年金總額 500 元，年金時期十年，實利率七釐，求年金現值！

- a) 每年支付一次；
- b) 每年支付四次；
- c) 每年支付十二次；
- d) 每年支付五十二次；
- e) 每年連續支付。

13. 每年年金總額 300 元，分十二次支付，問至少若干年後，方得 5000 元以上之終值？

- a) 實利率六釐；
- b) 虛利率六釐，每年複利四次。

14. 每年年金總額 300 元，分四次支付，年金現值 5000 元，求年金時期！

- a) 實利率五釐；
- b) 虛利率五釐，每年複利二次。

15. 下表為中國銀行零存整付儲蓄存款，規定到期一次整付額與每次應存數目，每月存入一次，每年計息二次，試覆核表中 (3) (4) 二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 每月存入 國幣一元 到期本息 合計數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每月應 存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 每月存入 國幣一元 到期本息 合計數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每月應 存數目 (4) |
|-----------|------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------|------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$ 25.87 | \$386.55 | 九年 | 八厘二五 | \$159.37 | \$62.75 |
| 三年 | 七厘二五 | 40.25 | 248.42 | 十年 | 八厘五 | 187.89 | 53.22 |
| 四年 | 七厘五 | 55.98 | 178.61 | 十一年 | 八厘七五 | 220.10 | 45.43 |
| 五年 | 七厘五 | 72.75 | 137.45 | 十二年 | 八厘七五 | 252.35 | 39.63 |
| 六年 | 七厘五 | 90.80 | 110.13 | 十三年 | 九厘 | 292.86 | 34.15 |
| 七年 | 七厘七五 | 111.26 | 89.88 | 十四年 | 九厘 | 332.41 | 30.08 |
| 八年 | 八厘 | 133.98 | 74.64 | 十五年 | 九厘 | 375.58 | 26.62 |

16. 下表為中國銀行零存整付儲蓄存款規定到期一次整付額與每次應存數目，每三月存入一次，每年計息二次，試覆核表中(3)(4)二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 每三月存入 國幣一元到 期本息合計 數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每三月 應存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 每三月存入 國幣一元到 期本息合計 數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每三年 應存數目 (4) |
|-----------|------------|--------------------------------------|--|-----------|------------|--------------------------------------|--|
| 二年 | 七厘二五 | \$ 8.67 | \$1152.80 | 九年 | 八厘二五 | \$53.48 | \$186.98 |
| 三年 | 七厘二五 | 13.49 | 740.86 | 十年 | 八厘五 | 63.06 | 158.56 |
| 四年 | 七厘五 | 18.77 | 532.56 | 十一年 | 八厘七五 | 73.89 | 135.33 |
| 五年 | 七厘五 | 24.40 | 409.82 | 十二年 | 八厘七五 | 84.72 | 118.04 |
| 六年 | 七厘五 | 30.45 | 328.35 | 十三年 | 九厘 | 98.34 | 101.69 |
| 七年 | 七厘七五 | 37.32 | 267.94 | 十四年 | 九厘 | 111.61 | 89.59 |
| 八年 | 八厘 | 44.95 | 222.45 | 十五年 | 九厘 | 126.11 | 79.29 |

17. 下表為中國銀行零存整付儲蓄存款，規定到期一次整付額與每次應存數目，每年存入一次，每年計息二次，試覆核表中(3)(4)二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 每年存入 國幣一元到 期本息合 計數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每年應 存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 每年存入 國幣一元到 期本息合 計數目 (3) | 預計滿期取 本息國幣一 萬元每年應 存數目 (4) |
|-----------|------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------|------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$2.22 | \$1490.57 | 九年 | 八厘二五 | \$13.77 | \$725.75 |
| 三年 | 七厘二五 | 3.46 | 2885.93 | 十年 | 八厘五 | 16.26 | 614.92 |
| 四年 | 七厘五 | 4.82 | 2072.67 | 十一年 | 八厘七五 | 19.07 | 524.37 |
| 五年 | 七厘五 | 6.27 | 1594.96 | 十二年 | 八厘七五 | 21.86 | 457.35 |
| 六年 | 七厘五 | 7.82 | 1277.92 | 十三年 | 九厘 | 25.40 | 393.66 |
| 七年 | 七厘七五 | 9.59 | 1041.85 | 十四年 | 九厘 | 28.83 | 346.83 |
| 八年 | 八厘 | 11.57 | 864.21 | 十五年 | 九厘 | 32.57 | 306.96 |

18. 下表爲中國銀行整存零付儲蓄存款，規定每次應取數目與一次整存額，每月支付一次，每年計息二次，試覆核表中(3)(4)二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 月應取數 目 (3) | 預計每月 取國幣十 元一次應 存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 月應取數 目 (3) | 預計每月 取國幣十 元一次應 存數目 (4) |
|-----------|------------|----------------------------------|------------------------------------|-----------|------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$ 44.83 | \$223.03 | 九年 | 八厘二五 | \$13.07 | \$734.73 |
| 三年 | 七厘二五 | 30.94 | 323.20 | 十年 | 八厘五 | 12.32 | 811.67 |
| 四年 | 七厘五 | 24.12 | 414.50 | 十一年 | 八厘七五 | 11.73 | 851.98 |
| 五年 | 七厘五 | 19.98 | 500.41 | 十二年 | 八厘七五 | 11.15 | 896.60 |
| 六年 | 七厘五 | 17.23 | 580.22 | 十三年 | 九厘 | 10.80 | 925.69 |
| 七年 | 七厘七五 | 15.40 | 649.30 | 十四年 | 九厘 | 10.39 | 962.13 |
| 八年 | 八厘 | 14.07 | 710.71 | 十五年 | 九厘 | 10.04 | 995.50 |

19. 下表爲中國銀行整存零付儲蓄存款，規定每次應取數目與一次整存額，每三月支付一次，每年計息二次，試覆核表中(3)(4)二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 三月應取 數目 (3) | 預計每三月 取國幣十 元一次應 存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 三月應取 數目 (3) | 預計每三月 取國幣十 元一次應 存數目 (4) |
|-----------|------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------|------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$135.31 | \$ 73.90 | 九年 | 八厘二五 | \$ 39.49 | \$253.19 |
| 三年 | 七厘二五 | 93.38 | 107.09 | 十年 | 八厘五 | 37.21 | 268.68 |
| 四年 | 七厘五 | 72.82 | 137.32 | 十一年 | 八厘七五 | 35.46 | 281.95 |
| 五年 | 七厘五 | 60.32 | 165.78 | 十二年 | 八厘七五 | 33.70 | 296.74 |
| 六年 | 七厘五 | 52.02 | 192.22 | 十三年 | 九厘 | 32.64 | 306.30 |
| 七年 | 七厘七五 | 46.49 | 215.06 | 十四年 | 九厘 | 31.41 | 318.36 |
| 八年 | 八厘 | 42.48 | 235.35 | 十五年 | 九厘 | 30.35 | 329.40 |

20. 下表為中國銀行整存零付儲蓄存款，規定每次應取數目與一次整存額，每年支付一次，每年計息二次，試覆核表中(3)(4)二行。

| 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 年應取數 目 (3) | 預計每年 取國幣十 元一次應 存數目 (4) | 年期 (1) | 年利率 (2) | 存入國幣 一千元每 年應取數 目 (3) | 預計每年 取國幣十 元一次應 存數目 (4) |
|-----------|------------|----------------------------------|------------------------------------|-----------|------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 二年 | 七厘二五 | \$556.01 | \$ 17.99 | 九年 | 八厘二五 | \$162.88 | \$ 61.39 |
| 三年 | 七厘二五 | 383.71 | 26.06 | 十年 | 八厘五 | 153.63 | 65.09 |
| 四年 | 七厘五 | 299.51 | 33.39 | 十一年 | 八厘七五 | 146.54 | 68.24 |
| 五年 | 七厘五 | 248.08 | 40.31 | 十二年 | 八厘七五 | 139.23 | 71.82 |
| 六年 | 七厘五 | 213.86 | 46.74 | 十三年 | 九厘 | 135.01 | 74.07 |
| 七年 | 七厘七五 | 191.41 | 52.24 | 十四年 | 九厘 | 129.90 | 76.98 |
| 八年 | 八厘 | 175.07 | 57.12 | 十五年 | 九厘 | 125.54 | 79.65 |

21. 交通銀行大學教育儲蓄存款，規定年利率一分，每年複利二次，存儲方法分下列三種：

甲種 每月存入二元八角七分，繼續繳存十八年，可敷大學學費之用：

乙種 每月存入七元九角七分，繼續繳存二十一年半，可敷幼稚園至大學學費之用：

丙種 一次存入八百六十三元零五分，可敷幼稚園至大學學費之用。

支付學費之年次及每次應付金額規定如下：

幼稚園學費二年 自存款第五年上學期起，至第六年下學期止，每半年支付二十元，共四次，計八十元；

初小學費四年 自存款第七年上學期起，至第十年下學期止，每半年支付三十元，共八次，計二百四十元；

高小學費二年 自存款第十一年上學期起，至第十二年下學期止，每半年支付四十元，共四次，計一百六十元；

初中學費三年 自存款第十三年上學期起,至第十五名下學期止,每半年支付一百元,共六次,計六百元;

高中學費三年 自存款第十六年上學期起,至第十八名下學期止,每半年支付一百五十元,共六次,計九百元;

大學學費四年 自存款第十九年上學期起,至第二十二名下學期止,每半年支付二百五十元,共八次,計二千元;

試覆核甲乙兩種每月存入額與丙種一次存入額。

第三章 變額年金

每期支付之年金額，通常相等，然亦有例外者，年金額不相等之年金，名曰變額年金。每期年金額之變更，若不依據一定規律，則須分別計算各期年金之終值及其現值，然後計算其總和，故不能求得一般公式。若每期年金額之變更，有一定規律可循，則年金終值與年金現值之計算，仍可應用一定公式。

(例一) 第一年末付 160 元，第二年末付 210 元，第三年末付 130 元，第四年末付 180 元，第五年末付 220 元，求年金終值與年金現值！(實利率六釐)

$$160 \times 1.06^4 = 160 \times 1.26247696 = 201.9963$$

$$210 \times 1.06^3 = 210 \times 1.191016 = 250.1134$$

$$130 \times 1.06^2 = 130 \times 1.1236 = 146.0680$$

$$180 \times 1.06 = 190.8000$$

$$220 = 220.0000$$

$$1008.9777$$

即求得年金終值為 1008.98 元。

$$160v = 160 \times 0.94339623 = 150.9434$$

$$210v^2 = 210 \times 0.88999644 = 186.8993$$

$$130v^3 = 130 \times 0.83961928 = 109.1505$$

$$180v^4 = 180 \times 0.79209366 = 142.5769$$

$$220v^5 = 220 \times 0.74725817 = 164.3968$$

$$753.9669$$

即求得年金現值為 753.97 元。

若每期末支付之年金額，成一等差級數，則年金終值與年金現值，可自下列二公式求得：

$$(A_s)_{\overline{n}|} = fs_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(s_{\overline{n}|} - n) \dots\dots\dots (b36)$$

$$(A_v)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n) \dots\dots\dots (b37)$$

$(A_s)_{\overline{n}|}$ n 期等差變額年金之終值

$(A_v)_{\overline{n}|}$ n 期等差變額年金之現值

$s_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值

f 第一期年金額

d 每期增加年金額

n 年金時期(單位計息期)

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) $(A_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^{n-1} + (f+d)(1+i)^{n-2} + (f+2d)(1+i)^{n-3}$
 $+ \dots\dots + (f+n-2d)(1+i) + (f+n-1d)$

以 $(1+i)$ 乘上式之兩邊, 得:

$$(1+i)(A_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^n + (f+d)(1+i)^{n-1} + (f+2d)(1+i)^{n-2} \\ + \cdots + (f+\overline{n-2}d)(1+i)^2 + (f+\overline{n-1}d)(1+i)$$

自第二式減第一式, 得:

$$i(A_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^n + d(1+i)^{n-1} + d(1+i)^{n-2} + d(1+i)^{n-3} \\ + \cdots + d(1+i)^2 + d(1+i) - (f+\overline{n-1}d)$$

即 $(A_s)_{\overline{n}|} = \frac{f}{i}(1+i)^n + \frac{d}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3}$

$$+ \cdots + (1+i)] - \frac{f}{i} - \frac{nd}{i} + \frac{d}{i}$$

$$= \frac{f}{i}[(1+i)^n - 1] + \frac{d}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2}$$

$$+ (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1] - \frac{nd}{i}$$

$$= fs_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}s_{\overline{n}|} - \frac{nd}{i}$$

$$\therefore (A_s)_{\overline{n}|} = fs_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(s_{\overline{n}|} - n)$$

$$(A_u)_{\overline{n}|} = v^n(A_s)_{\overline{n}|} = fv^n s_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(v^n s_{\overline{n}|} - nv^n)$$

$$\therefore (A_u)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

(例二) 第一年年金額 500 元, 以後每年減少 10 元, 年金時期為十年, 實利率六釐, 求年金終值與年金現值!

$$i = 6\%$$

$$n=10$$

$$f=500$$

$$d=-10$$

a) 求年金終值:

應用公式 (b36)*, 得:

$$\begin{aligned}(A_s)_{\overline{10}} &= 500 s_{\overline{10}} + \frac{-10}{0.06} (s_{\overline{10}} - 10) \\ &= 500 \times 13.18079494 - \frac{10}{0.06} \times 3.18079494 \\ &= 6590.39747 - 530.13249 = 6060.26 \text{ 元}\end{aligned}$$

b) 求年金現值:

應用公式 (b37)†, 得:

$$\begin{aligned}(A_a)_{\overline{10}} &= 500 a_{\overline{10}} + \frac{-10}{0.06} (a_{\overline{10}} - 10 v^{10}) \\ &= 500 \times 7.36008705 - \frac{10}{0.06} (7.36008705 - 5.5839478) \\ &= 3680.043525 - \frac{1000}{6} \times 1.77613925 \\ &= 3680.043525 - 296.023208 = 3384.02 \text{ 元}\end{aligned}$$

若第一期年金額與每期增加年金額相等, 則年金終值可自下列公式求得:

$$(A_s)_{\overline{10}} = f \sum s_{\overline{10}} \dots\dots\dots (a60)$$

* 參看例四

† 參看例六

$(A_s)_{\overline{n}|i}$ n 期等差變額年金之終值

s_n 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值

f 第一期年金額

Σ 總和之記號

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad \sum s_{\overline{n}|i} &= s_{\overline{1}|i} + s_{\overline{2}|i} + s_{\overline{3}|i} + \cdots + s_{\overline{n}|i} \\ &= \frac{(1+i)-1}{i} + \frac{(1+i)^2-1}{i} + \frac{(1+i)^3-1}{i} + \cdots + \frac{(1+i)^n-1}{i} \\ &= \frac{1}{i} \left[\sum (1+i)^n - n \right] \end{aligned}$$

但 $\sum (1+i)^n$ 爲期初付年金額一元在 n 期末之終值，故：

$$\sum s_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i} [(1+i)s_{\overline{n}|i} - n]$$

應用公式 (b36)，得：

$$\begin{aligned} (A_s)_{\overline{n}|i} &= f s_{\overline{n}|i} + \frac{f}{i} (s_{\overline{n}|i} - n) \\ &= \frac{f}{i} [(1+i)s_{\overline{n}|i} - n] \end{aligned}$$

$$\therefore (A_s)_{\overline{n}|i} = f \sum s_{\overline{n}|i}$$

$\sum s_{\overline{n}|i}$ 爲 $s_{\overline{n}|i}$ 之累積，故可將年金終值表中各期數字依次相加，而成一表，此表名曰等差變額年金終值表。(表十三)

(例三) 第一年年金額 100 元，以後每年增加 100 元，年金時期爲五年，實利率六釐，求年金終值！

$$i = 6\%$$

$$n=5$$

$$f=d=100$$

(第一法) 應用公式 (b36), 得:

$$\begin{aligned}(A_s)_{\overline{5}|} &= 100 s_{\overline{5}|} + \frac{100}{0.06} (s_{\overline{5}|} - 5) \\ &= 563.709 + \frac{10000}{6} \times 0.63709296 \\ &= 563.709 + 1061.822 = 1625.53 \text{ 元}\end{aligned}$$

(第二法) 查等差變額年金終值表, 得:

$$\sum s_{\overline{5}|} = 16.25531$$

$$\therefore (A_s)_{\overline{5}|} = 100 \sum s_{\overline{5}|} = 1625.53 \text{ 元}$$

兩法之結果相等, 但後法較前法更為簡捷。

若第一期年金額與每期增加年金額不相等, 則不能應用公式 (a60) 以求年金終值, 但仍能應用等差變額年金終值表, 其公式如下:

$$(A_s)_{\overline{n}|} = d \sum s_{\overline{n}|} + (f-d) s_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (a61)$$

(A)_s n 期等差變額年金之終值

s_n 簡單年金一元繼續支付 n 期之終值

f 第一期年金額

d 每期增加年金額

Σ 總和之記號

(證) 應用公式 (b36), 得:

$$\begin{aligned}
 (A_s)_{\overline{n}|} &= f s_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (s_{\overline{n}|} - n) \\
 &= f s_{\overline{n}|} - d s_{\overline{n}|} + d s_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (s_{\overline{n}|} - n) \\
 &= (f-d) s_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} [(1+i) s_{\overline{n}|} - n]
 \end{aligned}$$

但 $\sum s_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} [(1+i) s_{\overline{n}|} - n]$

$\therefore (A_s)_{\overline{n}|} = d \sum s_{\overline{n}|} + (f-d) s_{\overline{n}|}$

(別證)

- | | |
|-----------------|-----------------------------|
| 第一期末年金額 | $f = (f-d) + d$ |
| 第二期末年金額 | $f+d = (f-d) + 2d$ |
| 第三期末年金額 | $f+2d = (f-d) + 3d$ |
| | |
| 第 $(n-2)$ 期末年金額 | $f+(n-3)d = (f-d) + (n-2)d$ |
| 第 $(n-1)$ 期末年金額 | $f+(n-2)d = (f-d) + (n-1)d$ |
| 第 n 期末年金額 | $f+(n-1)d = (f-d) + nd$ |

每期年金額可分為二部，一部為定額年金，其終值為 $(f-d) s_{\overline{n}|}$ ，他部為變額年金（第一期年金額等於每期增加額），其終值為 $d \sum s_{\overline{n}|}$ 。

$\therefore (A_s)_{\overline{n}|} = d \sum s_{\overline{n}|} + (f-d) s_{\overline{n}|}$

(例四) 第一年年金額 500 元，以後每年減少 10 元，年金時期十年，實利率六釐，求年金終值！

$$i = 6\%$$

$$n = 10$$

$$f = 500$$

$$d = -10$$

代入公式 (a61), 得:

$$\begin{aligned} (A_s)_{\overline{10}|} &= -10 \sum s_{\overline{10}|} + 510 s_{\overline{10}|} \\ &= -10 \times 66.194044 + 510 \times 13.18079494 \\ &= -661.94044 + 6722.2054194 \\ &= 6060.26 \text{ 元} \end{aligned}$$

與例二求得之結果相同。

若最後一期年金額與每期減少年金額相等, 則年金現值可自下列公式求得:

$$(A_a)_{\overline{n}|} = l \sum a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (a62)$$

$(A_a)_{\overline{n}|}$ n 期等差變額年金之現值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值

l 最後一期年金額

Σ 總和之記號

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad \sum a_{\overline{n}|} &= a_{\overline{1}|} + a_{\overline{2}|} + a_{\overline{3}|} + \dots\dots\dots + a_{\overline{n}|} \\ &= \frac{1-v}{i} + \frac{1-v^2}{i} + \frac{1-v^3}{i} + \dots\dots\dots + \frac{1-v^n}{i} \\ &= \frac{1}{i} (n - \sum v^k) \end{aligned}$$

但 $\sum v^n$ 爲期末付年金額一元之現值，故：

$$\sum a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i}(n - a_{\overline{n}|})$$

應用公式 (b37)，得：

$$(A_a)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

$$\text{但} \quad d = -l$$

$$f = nl$$

以之代入上式，則得：

$$\begin{aligned} (A_a)_{\overline{n}|} &= nla_{\overline{n}|} - \frac{l}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n) \\ &= \frac{l}{i}(nia_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + nv^n) \\ &= \frac{l}{i}(n - nv^n - a_{\overline{n}|} + nv^n) \\ &= \frac{l}{i}(n - a_{\overline{n}|}) \end{aligned}$$

$$\therefore (A_a)_{\overline{n}|} = l \sum a_{\overline{n}|}$$

$\sum a_{\overline{n}|}$ 爲 $a_{\overline{n}|}$ 之累積，故可將年金現值表中各期數字依次相加，而成一表，此表名曰等差變額年金現值表 (表十四)。

(例五) 第一年年金額 500 元，以後每年減少 100 元，年金時期爲五年，實利率六釐，求年金現值！

$$i = 6\%$$

$$n = 5$$

$$f = 500$$

$$d = -100$$

(第一法) 應用公式 (b37), 得:

$$\begin{aligned} (A_d)_{\overline{5}|} &= 500 a_{\overline{5}|} - \frac{100}{0.06} (a_{\overline{5}|} - 5i^5) \\ &= 500 \times 4.21236379 - \frac{10000}{6} (4.21236379 \\ &\quad - 5 \times 0.74725817) \\ &= 2106.181895 - \frac{1740.7211}{6} \\ &= 2106.181895 - 290.120183 \\ &= 1312.73 \text{ 元} \end{aligned}$$

(第二法) $l = 500 - 4 \times 100 = 100$

查等差變額年金現值表, 得:

$$\sum a_{\overline{5}|} = 13.12727$$

$$\therefore (A_d)_{\overline{5}|} = 100 \sum a_{\overline{5}|} = 1312.73 \text{ 元}$$

兩法求得之結果相同, 但後法較前法更為簡捷。

若最後一期年金額與每期減少年金額不相等, 則不能應用公式 (a62) 以求年金現值, 但仍能應用等差變額年金現值表, 其公式如下:

$$(A_d)_{\overline{n}|} = (l+d) a_n - d \sum a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (a63)$$

(A)_n 期等差變額年金之現值

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值

- l 最後一期年金額
 d 等差變額年金之公差
 Σ 總和之記號

(證) 應用公式 (b37), 得:

$$(A_a)_{\overline{n}|} = f a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - n v^n)$$

但 $f = l - (n-1)d = l + d - nd$

以之代入上式, 則得:

$$\begin{aligned} (A_a)_{\overline{n}|} &= (l+d) a_{\overline{n}|} - nd a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - n v^n) \\ &= (l+d) a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (-n i a_{\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} - n v^n) \\ &= (l+d) a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (n v^n - n + a_{\overline{n}|} - n v^n) \\ &= (l+d) a_{\overline{n}|} - \frac{d}{i} (n - a_{\overline{n}|}) \end{aligned}$$

但 $\sum a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} (n - a_{\overline{n}|})$

$$\therefore (A_a)_{\overline{n}|} = (l+d) a_{\overline{n}|} - d \sum a_{\overline{n}|}$$

(別證)

- | | |
|---------|-------------------------------|
| 第一期末年金額 | $l - (n-1)d = (l+d) - nd$ |
| 第二期末年金額 | $l - (n-2)d = (l+d) - (n-1)d$ |
| 第三期末年金額 | $l - (n-3)d = (l+d) - (n-2)d$ |
| | |

第 $(n-2)$ 期末年金額 $l-2d=(l+d)-3d$

第 $(n-1)$ 期末年金額 $l-d=(l+d)-2d$

第 n 期末年金額 $l=(l+d)-d$

每期年金額可化爲二部年金額之差，一部爲定額年金，其現值爲 $(l+d)a_{\overline{n}|}$ ，他部爲變額年金(最後一期年金額等於每期年金減少額)，其現值爲 $d\sum a_{\overline{n}|}$ 。

$$\therefore (A_a)_{\overline{n}|}=(l+d)a_{\overline{n}|}-d\sum a_{\overline{n}|}$$

(例六) 第一年年金額 500 元，以後每年減少 10 元，年金時期爲十年，實利率六釐，求年金現值！

$$i=6\%$$

$$n=10$$

$$d=-10$$

$$l=500-10\times 9=410$$

代入公式 (a63)，得：

$$\begin{aligned} (A_a)_{\overline{10}|} &= 400 a_{\overline{10}|} + 10 \sum a_{\overline{n}|} \\ &= 400 \times 7.36008705 + 10 \times 43.998549 \\ &= 2944.03482 + 439.98549 \\ &= 3384.02 \text{ 元} \end{aligned}$$

與例二求得之結果相同。

等差變額年金在債券上之應用甚大，但債券之償本付息，每計息期內未必一次，故等差變額年金之支付，亦有每

期數次者，是曰複雜等差變額年金。關於複雜等差變額年金，吾人所欲知者，通常為其年金現值，故本書祇舉其年金現值公式。複雜等差變額年金現值，可以 $(A_a)_{\overline{n}|}^{(p)}$ 表之，其公式如下：

$$(A_a)_{\overline{n}|}^{(p)} = v \frac{i}{j_{(p)}} \left[a_{\overline{n}|} \left(f + \frac{d}{j_{(p)}} \right) - \frac{npdi^n}{i} \right] \dots\dots\dots (c23)$$

$(A_a)_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每期支付 p 次繼續支付 n 期複雜等差變額年金之現值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 期之現值

f 第一次年金額

d 每次年金增加額

p 每計息期內支付年金次數

n 年金時期(單位計息期)

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$j_{(p)} = p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)$$

(證) 支付年金時日 每次年金額 在第一期初之現值

| | | |
|------------------------|-------------|--------------------------------|
| 第 $\frac{1}{p}$ 期末 | f | $fv^{\frac{1}{p}}$ |
| 第 $\frac{2}{p}$ 期末 | $f+d$ | $(f+d)v^{\frac{2}{p}}$ |
| 第 $\frac{3}{p}$ 期末 | $f+2d$ | $(f+2d)v^{\frac{3}{p}}$ |
| | | |
| 第 $n - \frac{2}{p}$ 期末 | $f+(np-3)d$ | $[f+(np-3)d]v^{n-\frac{2}{p}}$ |

$$\text{第 } n - \frac{1}{p} \text{ 期 末} \quad f + (np - 2)d \quad [f + (np - 2)d] v^{n - \frac{1}{p}}$$

$$\text{第 } n \text{ 期 末} \quad f + (np - 1)d \quad [f + (np - 1)d] v^n$$

$$(A_a)_{\overline{np}|}^{\frac{1}{p}} = f v^{\frac{1}{p}} + (f + d) v^{\frac{2}{p}} + (f + 2d) v^{\frac{3}{p}} + \cdots + [f + (np - 3)d] v^{n - \frac{3}{p}} \\ + [f + (np - 2)d] v^{n - \frac{1}{p}} + [f + (np - 1)d] v^n$$

以 $v^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊，則得：

$$v^{\frac{1}{p}} (A_a)_{\overline{np}|}^{\frac{1}{p}} = f v^{\frac{2}{p}} + (f + d) v^{\frac{3}{p}} + (f + 2d) v^{\frac{4}{p}} + \cdots + [f + (np - 3)d] v^{n - \frac{1}{p}} \\ + [f + (np - 2)d] v^n + [f + (np - 1)d] v^{n + \frac{1}{p}}$$

自第一式減第二式，得：

$$(1 - v^{\frac{1}{p}}) (A_a)_{\overline{np}|}^{\frac{1}{p}} = f v^{\frac{1}{p}} + d (v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + v^{\frac{4}{p}} + \cdots + v^{n - \frac{2}{p}} + v^{n - \frac{1}{p}} + v^n) \\ - [f + (np - 1)d] v^{n + \frac{1}{p}}$$

以 $(1 + i)^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊，得：

$$[(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1] (A_a)_{\overline{np}|}^{\frac{1}{p}} = d (v^{\frac{1}{p}} + v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + \cdots + v^{n - \frac{3}{p}} + v^{n - \frac{2}{p}} + v^{n - \frac{1}{p}}) \\ + d v^n + f - f v^n - n p d v^n$$

$$\text{但} \quad (1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{j(p)}{p}$$

$$d (v^{\frac{1}{p}} + v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + \cdots + v^{n - \frac{3}{p}} + v^{n - \frac{2}{p}} + v^{n - \frac{1}{p}}) + d v^n \\ = d p a_{\overline{np}|}^{\frac{1}{p}} = d p a_{\overline{n}|} \frac{i}{j(p)}$$

$$f - f v^n = f (1 - v^n) = f i a_{\overline{n}|}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A_a)_{\overline{n}|j(p)} &= \frac{p}{j(p)} \left[dp a_{\overline{n}|j(p)} \frac{i}{j(p)} + f i a_{\overline{n}|i} - n f d v^n \right] \\ &= p \frac{i}{j(p)} \left[\overline{c}_{\overline{n}|i} \left(f + \frac{dp}{j(p)} \right) - \frac{np d v^n}{i} \right] \end{aligned}$$

(例七) 第一次年金額三元, 以後每次增加三元, 每年支付二次, 繼續支付4年, 求年金現值! (實利率六釐)

$$n=4$$

$$p=2$$

$$f=3$$

$$d=3$$

$$i=6\%$$

代入公式 (e23), 得:

$$\begin{aligned} (A_a)_{\overline{4}|j(2)} &= 2 \times 1.01478151 \left[3.46510561 \left(3 + \frac{6}{0.06} \times 1.01478151 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{24}{0.06} \times 0.79209366 \right] \\ &= 2.02956302 (3.46510561 \times 104.478151 - 316.837464) \\ &= 2.02956302 (362.02782715 - 316.837464) \\ &= 2.02956302 \times 45.19036315 \\ &= 91.72 \text{ 元} \end{aligned}$$

若等差變額年金之支付, 永續不絕, 則年金現值可自下列公式求得:

$$(A_a)_{\infty} = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2} \dots\dots\dots (a64)$$

$(A_p)_\infty$ 等差變額永續年金之現值

f 第一期年金額

d 每期增加年金額

i 每計息期內利率

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad (A_a)_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_a)_{\overline{n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - n v^n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f a_{\overline{n}|}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d a_{\overline{n}|}}{i} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d n v^n}{i} \right) \end{aligned}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{i}$ (參看公式 (a12))

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n v^n) = 0$ (證明參看附錄甲 16)

$$\therefore (A_a)_\infty = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2}$$

(例八) 第一年年金額 500 元, 以後每年增加 100 元, 實利率五釐, 求等差變額永續年金之現值!

應用公式 (a64), 得:

$$(A_a)_\infty = \frac{500}{0.05} + \frac{100}{0.05^2} = 10000 + 40000 = 50000 \text{ 元}$$

若每期末支付之年金額, 成一等比級數, 則年金終值與年金現值, 可自下列公式求得:

(甲) r 不等於 $1+i$ 時

$$(S_s)_{\overline{n}|} = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+r-i} \dots\dots\dots (a65)$$

$$(S_a)_{\overline{n}|} = f \frac{1 - r^n i^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (a66)$$

(乙) r 等於 $1+i$ 時

$$(G_s)_{\overline{n}|} = n f q^{n-1} \dots\dots\dots (a67)$$

$$(G_t)_{\overline{n}|} = \frac{nf}{r} \dots\dots\dots (a68)$$

$(G_s)_{\overline{n}|}$ n 期等比變額年金之終值

$(G_t)_{\overline{n}|}$ n 期等比變額年金之現值

f 第一期年金額

r 公比

n 年金時期(單位計息期)

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) (甲) $r = 1+i$

$$\begin{aligned} (G_s)_{\overline{n}|} &= f(1+i)^{n-1} + fq(1+i)^{n-2} + fq^2(1+i)^{n-3} \\ &\quad + \dots\dots\dots + fq^{n-3}(1+i)^2 + fq^{n-2}(1+i) + fq^{n-1} \\ &= f(1+i)^n \frac{1-r^n v^n}{1-rv} \end{aligned}$$

$$\therefore (G_s)_{\overline{n}|} = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

$$(G_t)_{\overline{n}|} = v^n (G_s)_{\overline{n}|} = v^n f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

$$\therefore (G_t)_{\overline{n}|} = f \frac{1-r^n v^n}{1+i-r}$$

(乙) $r = 1-i$

$$\begin{aligned} (G_s)_{\overline{n}|} &= f(1+i)^{n-1} + fq(1+i)^{n-2} + fq^2(1+i)^{n-3} \\ &\quad + \dots\dots\dots + fq^{n-3}(1+i)^2 + fq^{n-2}(1+i) + fq^{n-1} \\ &= fq^{n-1} + fq^{n-1} + fq^{n-1} + \dots\dots\dots + fq^{n-1} + fq^{n-1} + fq^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore (G_s)_{\overline{n}|} = nfr^{n-1}$$

$$(G_a)_{\overline{n}|} = v^n (G_s)_{\overline{n}|} = v^n nfr^{n-1} = \frac{nfr^{n-1}}{r^n}$$

$$\therefore (G_a)_{\overline{n}|} = \frac{nf}{r}$$

(例九) 第一年年金額 100 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之八, 年金時期為十年, 實利率五釐, 求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式 (a65), 得:

$$\begin{aligned} (G_s)_{\overline{10}|} &= 100 \cdot \frac{1.05^{10} - 1.08^{10}}{1.05 - 1.08} = 100 \cdot \frac{2.15892500 - 1.62889463}{0.03} \\ &= \frac{53.003037}{0.03} = 1766.77 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 求年金現值:

應用公式 (a66), 得:

$$\begin{aligned} (G_a)_{\overline{10}|} &= 100 \cdot \frac{1 - 1.08^{10} \cdot 1.05^{-10}}{1.05 - 1.08} \\ &= \frac{100}{0.03} (2.158925 \times 0.61391325 - 1) \\ &= \frac{32.53927}{0.03} = 1084.64 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例十) 第一年年金額 100 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之五, 年金時期為十年, 實利率五釐, 求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式 (a57), 得:

$$(G)_{\overline{10}|i} = 10 \times 100 \times 1.05^9 = 1551.33 \text{ 元}$$

b) 求年金現值:

應用公式 (a68), 得:

$$(G)_{\overline{10}|i} = \frac{10 \times 100}{1.05} = 1000 \times 0.95238095 = 952.38 \text{ 元}$$

若等比變額年金之支付, 永續不絕, 則年金現值之有無極限, 須視 r 與 $1+i$ 之關係而定。若 $1+i$ 小於 r 或等於 r , 則年金現值將大至無窮大; 反之, 若 $1+i$ 大於 r , 則年金現值之極限, 可自下列公式求得。

$$(G)_{\infty} = \frac{f}{1+i-r} \dots \dots \dots (a69)$$

$(G)_{\infty}$ 等比變額永續年金之現值

f 第一期年金額

r 公比

i 每計息期內利率

(證) $(G)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f \frac{1 - \left(\frac{r}{1+i} \right)^n}{1+i-r} \right]$

若 $1+i > r$

則 $\frac{r}{1+i} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{1+i} \right)^n = 0$$

$$\therefore (G_a)_\infty = \frac{r}{1+i-r}$$

(例十一) 第一年年金額 100 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之四, 實利率五釐, 求永續年金之現值!

應用公式 (a69), 得:

$$(G_a)_\infty = \frac{100}{1.05-1.04} = \frac{100}{0.01} = 10000 \text{ 元}$$

習 題 十 五

1. 年金時期十五年, 實利率五釐, 求年金終值與年金現值!

- 每年年年金額均為 300 元;
- 第一年年金額 300 元, 以後每年增加 10 元;
- 第一年年金額 300 元, 以後每年減少 10 元;
- 第一年年金額 300 元, 以後每年增加百分之六;
- 第一年年金額 300 元, 以後每年增加百分之五。

2. 第一年年金額 1000 元, 以後每年增加 100 元, 實利率六釐, 求等差變額永續年金之現值!

3. 第一年年金額 200 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之四, 求永續年金之現值!

- 實利率三釐;
- 實利率四釐;
- 實利率五釐;
- 實利率八釐;
- 實利率一分。

4. 第一年年金額 1000 元, 以後每年增加 100 元, 實利率五釐, 年金時期十五年, 求年金終值!

a) 應用公式 (b36);

b) 應用公式 (a61).

5. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 100 元, 實利率五釐, 年金時期十年, 求年金終值!

a) 應用公式 (b36);

b) 應用公式 (a61).

6. 第一年年金額 100 元, 以後每年增加 100 元, 實利率五釐, 年金時期十年, 求年金終值!

a) 應用公式 (b36);

b) 應用公式 (a60).

7. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 50 元, 實利率五釐, 年金時期二十年, 求年金現值!

a) 應用公式 (b37);

b) 應用公式 (a62).

8. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 50 元, 實利率五釐, 年金時期十五年, 求年金現值!

a) 應用公式 (b37);

b) 應用公式 (a63).

9. 第一年年金額 100 元, 以後每年增加 20 元, 實利率五釐, 年金時期十年, 求年金現值!

a) 應用公式 (b37);

b) 應用公式 (a63).

10. 第一次年年金額 100 元, 以後每次減少 5 元, 每年支付 4 次, 繼續支付 5 年, 實利率 5%, 求年金現值!

11. 某工廠擬購汽鍋一隻, 英德二廠索價如下:

英廠: 汽鍋價 11500 鎊, 於訂約日先付定洋十分之一, 訂約後八個月汽鍋運到, 再將貨款餘額一次付清;

德廠：汽鍋價 12000 鎊，於訂約日先付定洋十分之一，訂約後八個月汽鍋運到，再付十分之一，以後每四個月付款十分之一，利息自汽鍋運到日起算，年利率 6%，結欠利息於每次付款時付清；

設英德二廠之汽鍋無優劣之別，而某工廠在銀行借款之利率 12%，每年複利三次，則英德二廠之估價，孰較利於某工廠？

本編應用公式

公式 (a35) - (a69)

(b30) - (b37)

(c21) - (c23)

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} \dots\dots\dots (a35)$$

$$K = Rs_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a36)$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} \dots\dots\dots (a37)$$

$$A = Ra_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a38)$$

$$s'_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} - 1 \dots\dots\dots (a39)$$

$$a'_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} + 1 \dots\dots\dots (a40)$$

$$m|a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{nm}|i} - v^n \dots\dots\dots (a41)$$

$$a_{\infty} = \frac{1}{i} \dots\dots\dots (a42)$$

$$m|a_{\infty} = \frac{1 - v^m}{i} \dots\dots\dots (a43)$$

$$n = \frac{\log(Ki + R) - \log R}{\log(1 + i)} \dots\dots\dots (b30)$$

$$n = \frac{\log R - \log(R - Ai)}{\log(1 + i)} \dots\dots\dots (b31)$$

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i \dots\dots\dots (a44)$$

$$L = Au^n - R(s_{\overline{n}|i} - 1) \dots\dots\dots (b32)$$

$$E = Au - Ra_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (b33)$$

$$s_{\overline{n}|i}^p = \frac{u^n - 1}{i(u^{\frac{1}{p}} - 1)} \dots\dots\dots (a45)$$

$$s_{\overline{n}|i}^p = \frac{i}{j(i;p)} s_{\overline{n}|j} \dots\dots\dots (a46)$$

$$K = R s_{\overline{n}|i}^p \dots\dots\dots (a47)$$

$$K = W \frac{s_{\overline{n}|j}}{s_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a48)$$

$$a_{\overline{n}|i}^p = \frac{1 - v^n}{i(u^{\frac{1}{p}} - 1)} \dots\dots\dots (a49)$$

$$a_{\overline{n}|i}^p = \frac{i}{j(i;p)} a_{\overline{n}|j} \dots\dots\dots (a50)$$

$$A = R a_{\overline{n}|i}^p \dots\dots\dots (a51)$$

$$A = W \frac{a_{\overline{n}|j}}{s_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a52)$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (c21)$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (c22)$$

$$K' = W \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^{\frac{1}{p}}}{i^{\frac{1}{p}} - 1} \dots\dots\dots (a53)$$

$$A' = W \frac{u^{\frac{1}{p}} - v^{n-\frac{1}{p}}}{i^{\frac{1}{p}} - 1} \dots\dots\dots (a54)$$

$$K = R s_{\overline{n}|i}^p s_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a55)$$

$$A' = R s_{\overline{n}|i}^p a_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a56)$$

$$K' = W \frac{s_{\overline{n}|j}}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a57)$$

$$A' = W \frac{a_{\overline{n}|j}}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a58)$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} j(i;p) + 1 \right]}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b34)$$

$$n = \frac{\log R - \log (R - A j(i;p))}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (b35)$$

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - j_{(p)} \dots\dots\dots (a59)$$

$$(A_2)_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}(s_{\overline{n}|i} - n) \dots\dots\dots (b36)$$

$$(A_3)_{\overline{n}|i} = f a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|i} - n v^n) \dots\dots\dots (b37)$$

$$(A_4)_{\overline{n}|i} = f \Sigma s_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a60)$$

$$(A_5)_{\overline{n}|i} = d \Sigma s_{\overline{n}|i} + (f - d) s_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a61)$$

$$(A_6)_{\overline{n}|i} = l \Sigma a_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a62)$$

$$(A_7)_{\overline{n}|i} = (l + d) a_{\overline{n}|i} - d \Sigma a_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a63)$$

$$(A_8)_{\overline{n}|i} = p \frac{i}{j_{(p)}} \left[a_{\overline{n}|i} \left(f + \frac{dp}{j_{(p)}} \right) - \frac{npdv^n}{i} \right] \dots\dots\dots (a23)$$

$$(A_9)_{\infty} = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2} \dots\dots\dots (a64)$$

$$(G_3)_{\overline{n}|i} = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (a65) \quad (r \neq 1+i)$$

$$(G_4)_{\overline{n}|i} = f \frac{1 - r^n v^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (a36) \quad (r \neq 1+i)$$

$$(G_5)_{\overline{n}|i} = nfr^{n-1} \dots\dots\dots (a67) \quad (r = 1+i)$$

$$(G_6)_{\overline{n}|i} = \frac{nf}{r} \dots\dots\dots (a38) \quad (r = 1+i)$$

$$(G_7)_{\infty} = \frac{f}{1+i-r} \dots\dots\dots (a69) \quad (1+i > r)$$

第五編 年賦償還

第一章 年賦償還之意義及其種類

償還方法有一次償還與分期償還之別，前者債務人於一定時日清償負債之全部，後者債務人每年，或每半年，或按其他任何預定期間，支付一定金額，漸次清償其債務，故此法名曰年賦償還 (Annual Instalment)。年賦償還對於債務人甚為便利，蓋債務人所借資金，常不能於短期內與其所經營之事業脫離，若借款期限僅有一二年，則借款到期時，債務人仍無還債之能力；反之，若借款期限延長至一二十年，則債務人得直接或間接利用年賦償還法，漸次清償其借款，而此年賦償還額即可取之於其所經營事業之每年純益。

年賦償還有均等分償與變額年金分償之別，前者債務人於一定時期內，按一定期間，支付均等金額，漸次清償其債務，後者則債務人以變額年金，為其年賦償還之額也。

均等分償又可分為全均等分償與本金均等分償二種，每期支付均等金額，以漸次清償本利之全部，是曰全均等分償；若每期支付之均等金額，僅為清償全部本金之用，則名

曰本金均等分償。有時本金之全部，雖規定一次償還，然債務人仍得間接應用年賦償還法，每期提出一定金額運用於極穩健之投資，以積成與本金相等之金額，是曰償本基金。

變額年金分償亦可分為等差變額年金分償與等比變額年金分償兩種。年賦償還之額若可列成等差級數，則為等差變額年金分償。若可列成等比級數，則為等比變額年金分償。

年賦償還中每次支付之額名曰每次年賦金額 (Periodic Instalment)，每計息期內支付年賦金額之總數，名曰每期年賦金總額 (Instalment per Conversion Period)。

第二章 均等分償

第一節 本金均等分償

本金均等分償，細別之，又可分爲下列三法：

(甲) 全部利息於最後一期支付，此一次支付之利息可自下列公式求得：

$$I = P(u^n - \frac{1}{u}) \frac{i}{u} \dots\dots\dots(a70)$$

I = 一次支付之利息

P = 負債額

i = 每計息期內利率

n = 償債時期(單位計息期)

$u = 1+i$

(乙) 每期支付未償債額之利息，第 m 期末支付之年賦金額，可自下列公式求得：

$$R_m = \frac{P}{u} [1 + (n - m + 1)i] \dots\dots\dots(a71)$$

R_m = 第 m 期末支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期(單位計息期)

i = 每計息期內利率

(丙) 每期累積利息，按未經過各期平均分償，第 m 期末

支付之年賦金額，可自下列公式求得：

$$R_m = \frac{P}{n} u^m \dots\dots\dots (a72)$$

R_m = 第 m 期末支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期(單位計息期)

i = 每計息期內利率

$u = 1+i$

(證)(甲) 每期末償還負債額之 $\frac{1}{n}$ ，即 $\frac{P}{n}$ ，故每期初之負債餘額，當為 $P, \frac{n-1}{n}P, \frac{n-2}{n}P, \dots, \frac{3}{n}P, \frac{2}{n}P, \frac{1}{n}P$ ，而每期末應償利息，當為 $Pi, \frac{n-1}{n}Pi, \frac{n-2}{n}Pi, \dots, \frac{3}{n}Pi, \frac{2}{n}Pi, \frac{1}{n}Pi$ ，若每期末祇償本金而不付利息，則此遲延不付之利息，至 n 期末之終值，當為 $Pi(1+i)^{n-1}, \frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2}, \frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3}, \dots, \frac{3}{n}Pi(1+i)^2, \frac{2}{n}Pi(1+i), \frac{1}{n}Pi$ ，故得：

$$\begin{aligned} I &= Pi(1+i)^{n-1} + \frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2} + \frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3} \\ &+ \dots + \frac{3}{n}Pi(1+i)^2 + \frac{2}{n}Pi(1+i) + \frac{1}{n}Pi \\ I &= \frac{Pi}{n} [n(1+i)^{n-1} + (n-1)(1+i)^{n-2} + (n-2)(1+i)^{n-3} \\ &+ \dots + 3(1+i)^2 + 2(1+i) + 1] \end{aligned}$$

上式之兩邊，若以 $(1+i)-1$ 乘之，則右邊大括弧內之數，將依次乘得如下：

$$\frac{n(1+i)^n + (n-1)(1+i)^{n-1} + (n-2)(1+i)^{n-2} \dots + 3(1+i)^3 + 2(1+i)^2 + (1+i) - n(1+i)^{n-1} - (n-1)(1+i)^{n-2} \dots - 4(1+i)^3 - 3(1+i)^2 - 2(1+i) - 1}{n(1+i)^n - (1+i)^{n-1} - (1+i)^{n-2} \dots - (1+i)^3 - (1+i)^2 - (1+i) - 1}$$

即
$$Ii = \frac{Pi}{n} n(1+i)^n - \frac{Pi}{n} [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i) + 1]$$

$$Ii = Pi(1+i)^n - \frac{Pi}{n} s_{\overline{n}|i}$$

$$\therefore I = P(u^n - \frac{1}{n} s_{\overline{n}|i})$$

(別證) 若於 n 期間本息均未支付, 則負債額 P 至 n 期末積成終值 Pu^n , 但債務人於每期末償還本金 $\frac{P}{n}$, 而此年賦金額 $\frac{i}{n}$ 至 n 期末之終值為 $\frac{P}{n} s_{\overline{n}|i}$, 故至第 n 期末債務人尚須支付

$$I = Pu^n - \frac{P}{n} s_{\overline{n}|i} = P(u^n - \frac{1}{n} s_{\overline{n}|i})$$

(乙) 每期末償還負債額之 $\frac{1}{n}$, 即 $\frac{P}{n}$, 故第 m 期初之負債餘額當為 $\frac{n-m+1}{n}P$, 而第 m 期末應付之利息當為 $\frac{n-m+1}{n}Pi$, 故得:

$$R_m = \frac{P}{n} + \frac{n-m+1}{n} Pi = \frac{P}{n} [1 + (n-m+1)i]$$

(丙) 每期累積利息, 按未經過各期平均分償, 而每期償本之額相等, 故每期末年賦金額, 即將每期累積利息與負債餘額之總數按未經過各期平均分配而得: 即:

$$R_1 = \frac{P(1+i)}{n}$$

$$R_2 = \frac{\frac{P(1+i)}{n} - (n-1)(1+i)}{n-1} = \frac{P}{n}(1+i)^2$$

$$R_3 = \frac{\frac{P}{n}(1+i)^2(n-2)(1+i)}{n-2} = \frac{P}{n}(1+i)^3$$

$$R_4 = \frac{\frac{P}{n}(1+i)^3(n-3)(1+i)}{n-3} = \frac{P}{n}(1+i)^4$$

同理

$$R_m = \frac{P}{n}(1+i)^m$$

$$\therefore R_m = \frac{P}{n} a^m$$

第二法中每期末支付之年賦金額，成一等差級數，其公差爲 $-\frac{Pi}{n}$ ，故債務人前期之負擔較重於後期；第三法中每年末支付之年賦金額，成一等比級數，其公比爲 $1+i$ ，故債務人後期之負擔較重於前期；至於第一法中之利息，則盡歸最後一期負擔，故最後一期之負擔獨重。

(例一) 某甲負債一萬元，言定本金分五年均等償還，全部利息於五年末一次支付，實利率六釐，問某甲於五年末應共付本息若干元？

$$i = 6\%$$

$$n = 5$$

應用公式 (a70), 得:

$$\begin{aligned} I &= 10000(1.06^5 - \frac{1}{5}s_{\overline{5}|}) \\ &= 10000(1.33822558 - \frac{1}{5} \times 5.63709296) \\ &= 10000(1.33822558 - 1.12741859) \\ &= 2108.07 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$\frac{10000}{5} + 2108.07 = 4108.07 \text{ 元}$$

(例二)某甲負債一萬元,言定本金分十年均等償還,實利率六釐,求第五年末之年賦金額!

a) 每年支付未償債額之利息:

b) 每年累積利息按未經過各年平均分償.

$$i = 6\%$$

$$n = 10$$

$$m = 5$$

應用公式 (a71), 得:

$$R_5 = \frac{10000}{10} [1 + (10 - 5 + 1) \times 0.06] = 1000 \times 1.36 = 1360 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (a72), 得:

$$R_5 = \frac{10000}{10} \times 1.06^5 = 1338.23 \text{ 元}$$

某甲可預製一年賦償還表,以明每年負債餘額與償本付息之狀況.

年 賦 償 還 表

(每年支付未償債額之利息)

| 年 次 | 年初負債額 | 償 本 額 | 付 息 額 | 年賦金額 |
|-------|-----------|---------|-------|----------|
| 第 一 年 | \$ 10,000 | \$1,000 | \$600 | \$ 1,600 |
| 第 二 年 | 9,000 | 1,000 | 540 | 1,540 |
| 第 三 年 | 8,000 | 1,000 | 480 | 1,480 |
| 第 四 年 | 7,000 | 1,000 | 420 | 1,420 |
| 第 五 年 | 6,000 | 1,000 | 360 | 1,360 |
| 第 六 年 | 5,000 | 1,000 | 300 | 1,300 |
| 第 七 年 | 4,000 | 1,000 | 240 | 1,240 |
| 第 八 年 | 3,000 | 1,000 | 180 | 1,180 |
| 第 九 年 | 2,000 | 1,000 | 120 | 1,120 |
| 第 十 年 | 1,000 | 1,000 | 60 | 1,060 |
| 合 計 | 55,000 | 10,000 | 3,300 | 13,300 |

年 賦 償 還 表

(每年累積利息按未經過各年平均分償)

| 年 次 | 年初本金餘額 | 年末償本額 | 年末累積利息 | 年末支付利息 | 年賦金額 |
|-----|----------|---------|-----------|----------|-------------|
| 第一年 | \$10,000 | \$1,000 | \$ 600.00 | \$ 60.00 | \$ 1,660.00 |
| 第二年 | 9,000 | 1,000 | 1,112.40 | 123.69 | 1,123.69 |
| 第三年 | 8,000 | 1,000 | 1,528.13 | 191.02 | 1,191.02 |
| 第四年 | 7,000 | 1,000 | 1,837.34 | 262.48 | 1,262.48 |
| 第五年 | 6,000 | 1,000 | 2,029.35 | 338.23 | 1,338.23 |
| 第六年 | 5,000 | 1,000 | 2,092.59 | 418.52 | 1,418.52 |
| 第七年 | 4,000 | 1,000 | 2,014.51 | 503.63 | 1,503.63 |
| 第八年 | 3,000 | 1,000 | 1,781.53 | 593.84 | 1,593.84 |
| 第九年 | 2,000 | 1,000 | 1,378.95 | 689.48 | 1,689.48 |
| 第十年 | 1,000 | 1,000 | 790.84 | 790.84 | 1,790.84 |
| 合 計 | | 10,000 | | 3,971.64 | 13,971.64 |

第二節 全均等分償

全均等分償中每期支付均等金額，而此均等金額即組成一定額年金，故年賦償還中之年賦金額即為年金中之年金額，而最初之負債額即與年金現值相等，故年賦金額可自下之公式求得：

$$R = P \frac{1}{a_n} \dots\dots\dots(a73)$$

R 年賦金額

P 負債額

a_n 單簡年金一元繼續支付 n 期之現值

$\frac{1}{a_n}$ 為負債額一元分 n 期均等償還之年賦金額，故 $\frac{1}{a_n}$ 表

名曰年賦金表。

每期支付之年賦金額可分為二部，一部為對於負債餘額應付之利息，一部所以償債，每期付息額隨負債餘額而漸次減少，故每期償債額得漸次增加，第 m 期末負債餘額與年賦金額 R 之中，包含付息與償債之部，可自下列三公式求得：

$$L_m = R a_{\overline{n-m}|i} \dots\dots\dots(a74)$$

$$P_m = R t^{n-m+1} \dots\dots\dots(a75)$$

$$I_m = L_m (1 - t^{n-m+1}) \dots\dots\dots(a76)$$

R 年賦金額

L_m 第 m 期末負債餘額

P_m 第 m 期末償本額

L_m 第 m 期末付息額

$a_{\overline{n-m}|i}$ 單簡年金一元繼續支付 $(n-m)$ 期之現值

i 每計息期內利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) 第 m 期末尚有 $n-m$ 次年賦金未付, 故第 m 期末負債餘額, 即為 $n-m$ 次年賦金額 R 元之現值, 即:

$$L_m = Ra_{\overline{n-m}|i}$$

而第 $m-1$ 期末之負債餘額當為:

$$L_{m-1} = Ra_{\overline{n-m+1}|i}$$

故第 m 期末應支付利息

$$\begin{aligned} I_m &= iRa_{\overline{n-m+1}|i} = Ri \frac{1-v^{n-m+1}}{i} \\ &= R(1-v^{n-m+1}) \end{aligned}$$

但第 m 期末債務人共付年賦金額 R 元, 除去應付利息之外, 即為償還本金之部, 故得:

$$P_m = R - R(1-v^{n-m+1}) = Rv^{n-m+1}$$

(例三) 某甲負債一萬元, 實利率六釐, 約定於十年間全均等分償, 求:

a) 年賦金額;

b) 第四年末負債餘額;

c) 第六年末償本額;

d) 第八年末付息額.

$$i = 6\%$$

$$n = 10$$

a) 應用公式 (a73), 得:

$$R = 10000 \frac{1}{a_{\overline{10}|i}} = 1358.68 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (a74), 得:

$$\begin{aligned} L_4 &= 1358.68 a_{\overline{6}|i} = 1358.68 \times 4.91732433 \\ &= 6681.97 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 應用公式 (a75), 得:

$$\begin{aligned} L_6 &= 1358.68 v^6 = 1358.68 \times 0.74725817 \\ &= 1015.28 \text{ 元} \end{aligned}$$

d) 應用公式 (a76), 得:

$$\begin{aligned} L_8 &= 1358.68(1 - v^8) = 1358.68 \times 0.16938972 \\ &= 217.91 \text{ 元} \end{aligned}$$

茲據各年負債餘額、償本額、與付息額、製年賦償還表於下.

年 賦 償 還 表
(年賦金額 1,358.68 元)

| 年 次 | 年初負債額 | 年末付息額 | 年末償本額 |
|-------|-------------|----------|-----------|
| 第 一 年 | \$10,000.00 | \$600.00 | \$ 758.68 |
| 第 二 年 | 9,241.32 | 554.48 | 804.20 |
| 第 三 年 | 8,437.12 | 506.23 | 852.45 |
| 第 四 年 | 7,584.87 | 455.08 | 903.60 |
| 第 五 年 | 6,681.07 | 400.86 | 957.82 |
| 第 六 年 | 5,723.25 | 343.40 | 1,015.28 |
| 第 七 年 | 4,707.97 | 282.48 | 1,076.00 |
| 第 八 年 | 3,631.77 | 217.91 | 1,140.77 |
| 第 九 年 | 2,491.00 | 149.46 | 1,209.22 |
| 第 十 年 | 1,281.78 | 76.91 | 1,281.77 |
| 合 計 | 59,779.95 | 3,586.81 | 9,939.99 |

若年賦金延期 m 期始支付，即最初 m 期不付年賦金，至第 $m+1$ 期末開始支付年賦金，則年賦金額之計算，隨延期中每期利息是否照付而異。若延期中每期照付利息，則年賦金額之計算，與前無異。若延期中併此利息而亦延期，則最初負債額 P 至第 m 期末將變為 $P(1+i)^m$ ，故在應用公式 (a73) 以前，須以 $P(1+i)^m$ 代公式中之 P 。

(例四) 某甲負債一萬元，年利率一分二釐，每年複利二次，約定延期償還二年半，以後五年間全均等分償，每半年償還一次，延期中利息亦延遲支付，求年賦金額，並製年賦償還表！

$$i = 6\%$$

$$n = 10$$

$$R = 10,000 \times 1.06^5 \times \frac{1}{a_{\overline{5}|0.06}} = 13382.2558$$

$$\times 0.13586796 = 1,818.22 \text{ 元}$$

年賦償還表

(第六期至第十五期年賦金額 1,818.22 元)

| 期次 | 期初負債額 | 期末應付利息額 | 期末償本額 |
|-------|-------------|----------|------------|
| 第一 期 | \$10,900.00 | \$609.00 | 0 |
| 第二 期 | 10,600.00 | 636.00 | 0 |
| 第三 期 | 11,236.00 | 674.16 | 0 |
| 第四 期 | 11,910.16 | 714.61 | 0 |
| 第五 期 | 12,624.77 | 757.49 | 0 |
| 第六 期 | 13,382.26 | 802.94 | \$1,015.28 |
| 第七 期 | 12,366.98 | 742.02 | 1,076.20 |
| 第八 期 | 11,290.78 | 677.45 | 1,149.77 |
| 第九 期 | 10,150.01 | 609.00 | 1,209.22 |
| 第十 期 | 8,940.79 | 536.45 | 1,281.77 |
| 第十一 期 | 7,659.62 | 459.54 | 1,358.68 |
| 第十二 期 | 6,300.34 | 378.02 | 1,440.20 |
| 第十三 期 | 4,860.14 | 291.61 | 1,526.61 |
| 第十四 期 | 3,333.53 | 200.01 | 1,618.21 |
| 第十五 期 | 1,715.32 | 102.92 | 1,715.30 |
| 合 計 | 136,370.10 | 8,182.22 | 13,382.24 |

第三節 償本基金

償本基金 (Sinking Fund) 者，債務人於每期提出一定金額，運用於極穩健之投資，以積成與最初負債額相等之金額，以備借款到期時償本之需。故債務人除按期付息外，並須支出一定金額，提撥償本基金，而此每期支出之一定金額，通

常相等,故組成一種定額年金。基金投資利率未必等於借款利率,兩者相等時,債務人每期支出總額,即為全均等分償中之年賦金額;若投資利率小於借款利率,則債務人每期支出總額,大於全均等分償中之年賦金額,反之,則小於全均等分償中之年賦金額。凡按期支付一定金額,欲於若干年後積成相當金額者,均可適用償本基金法。償本基金法簡稱曰基金法。

到期償本之額,即為每期提撥基金額之年金終值。故若於每期末提出相等金額 R , 撥充償本基金,而能依每期利率 i' 投資,以備於 n 期末清償全部本金 P , 則 P 即等於 $(R s_{\overline{n}|i'})$, 故得:

$$R = P \left(\frac{1}{s_{\overline{n}|i'}} \right) \dots\dots\dots (a77)$$

P 負債額

R 每期末提撥基金額

s_n 簡單年金額一元繼續支付 n 期之終值

i' 基金投資利率(每計息期內利率)

n 基金積聚時期(單位計息期)

設 T 為債務人每期支出總額, i 為借款利率, 則:

$$T = Pi - P \left(\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right) (i')$$

但

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} (i') = \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \right) - i'$$

$$\therefore T = P(i - i') + P \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \right) (i') \dots\dots\dots (b38)$$

P 負債額

T 每期末債務人支出總額

i 每計息期內借款利率

i' 每計息期內基金投資利率

a_n 簡單年金額一元繼續支付 n 期之現值

試以公式 (b38) 與公式 (a77) 比較:

若 $i = i'$, 則 $T = P\left(\frac{1}{a_n} @ i\right)$, 與公式 (a77) 中之 R 相等;

若 $i > i'$, 則 $\frac{1}{s_n} @ i' > \frac{1}{s_n} @ i$,

$$Pi + P\left(\frac{1}{s_n} @ i'\right) > Pi + P\left(\frac{1}{s_n} @ i\right),$$

故 T 大於公式 (a77) 中之 R ;

若 $i < i'$, 則 $\frac{1}{s_n} @ i' < \frac{1}{s_n} @ i$,

$$Pi + P\left(\frac{1}{s_n} @ i'\right) < Pi + P\left(\frac{1}{s_n} @ i\right),$$

故 T 小於公式 (a77) 中之 R .

第 m 期末基金總額, 爲 m 期間年金額 R 元之終值, 故得:

$$s_m = P \frac{s_m}{s_n} \dots \dots \dots (a78)$$

P 負債額

s_m 第 m 期末基金總額

s_n 簡單年金額一元繼續支付 n 期之終值

s_n 簡單年金額一元繼續支付 n 期之終值

(例五) 某甲負債一萬元, 年利率一分二釐, 每年複利二次, 期限五年, 問每半年末某甲須共支付若干元?

a) 全均等分償

b) 償本基金法, 基金按年利率一分二釐投資 (每年複利二次);

c) 償本基金法, 基金按年利率一分投資 (每年複利二次);

d) 償本基金法, 基金按年利率一分四釐投資 (每年複利二次).

a) $i = 6\%$

$n = 10$

應用公式 (a73), 得:

$$R = 10,000 \frac{1}{a_{\overline{10}|6\%}} = 1358.68 \text{ 元}$$

b) $i = 6\%$

$i' = 6\%$

$n = 10$

應用公式 (a77), 得:

$$R = 10,000 \frac{1}{s_{\overline{10}|6\%}} = 10,000 \times 0.075868 = 758.68 \text{ 元}$$

$$T = 10,000 \times 0.06 + 758.68 = 1358.68 \text{ 元}$$

c) $i = 6\%$

$i' = 5\%$

$n = 10$

應用公式 (b38*), 得:

$$T = 10,000 \times 0.06 + 10,000 \left(\frac{1}{a_{\overline{10}|5\%}} \right) = 1395.05 \text{ 元}$$

$$d) \quad i = 5\%$$

$$i' = 7\%$$

$$n = 10$$

應用公式 (b38*) 得:

$$\begin{aligned} T &= 10,000(-0.01) + 10,000\left(\frac{1}{a_{\overline{10}|7\%}}\right) \\ &= 1323.78 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例六) 某甲負債一萬元, 期限二十年, 用基金法預備償本, 基金投資利率五釐, 問第五年末共有基金若干元?

$$i = 5\%$$

$$n = 20$$

$$m = 5$$

應用公式 (a78), 得:

$$s_5 = 10,000 \frac{s_{\overline{5}|5\%}}{s_{\overline{20}|5\%}} = 55,256.3125 \times 0.03024259 = 1671.09 \text{ 元}$$

習 題 十 六

1. 某甲負債二萬元, 言定本金在七年半間均等償還, 每半年償還一次, 年利率一分, 每年複利二次, 求第五年末之年賦金額, 並製年賦償還表:

a) 每期支付未償債額之利息;

b) 每期累積利息按未經過各期平均分償。

2. 某乙負債二萬五千元, 言定本金分五年均等償還, 全部利息於五年末一次支付, 實利率七釐, 問某乙於五年末應共付本息若干元?

3. 某丙負債三萬元, 實利率六釐, 約定於二十年間全均等分償, 求:

* 此二題亦可應用公式 (a77) 計算。

- a) 年賦金額;
- b) 第五年末負債餘額;
- c) 本十年末償本額;
- d) 第十五年末付息額.

4. 某丁負債二萬元,年利率一分,每年複利二次,約定於五年間全均等分償,每半年償付一次,求年賦金額,並製年賦償還表.

5. 某戊負債一萬元,實利率六釐,約定於第六年至第十年全均等分償,延期中利息亦延遲支付,求年賦金額,並製年賦償還表!

6. 某己負債一萬元,實利率五釐,期限十五年,問每年末某己須共支付若干元?

- a) 全均等分償;
- b) 償本基金法,基本投資利率五釐;
- c) 償本基金法,基金投資利率四釐;
- d) 償本基金法,基金投資利率六釐.

7. 某庚負債二萬元,期限十年,用基金法預備償本,基金投資利率六釐,問第八年末共有基金若干元?

8. 負債額一萬元,實利率六釐,約定於二十年間全均等分償,設債務人於最初三年未能履行契約,問第四年末債務人須共支付若干元,方與契約規定相合?

9. 某屋價值五萬元,購主與售主約定,得先付現洋一萬元,餘額於以後十年間每三月末支付相等金額,虛利率六釐,每年複利二次,設債務人於第十次支付年賦金後,欲以現洋付清餘額,問尚共須付洋若干元?

10. 某屋價值二萬元,購主與售主約定分期付款,實利率六釐,購主先付現洋五千元,於三年末再付洋三千元,自第四年至第八年每年末付洋 R 元,求 R !

11. 負債額十萬元,約定於十年間全均等分償,前五年實利率五釐,後五年實利率六釐,求年賦金額,並製年賦償還表!

12. 負債額二萬元,每年付息一次,本金於八年末一次償還,債務人於

每年末提存基金，依實利率五釐投資，設每年末支付利息與提存基金之總額為四千三百五十元，求借款利率！

13. 某城負債五十萬元，擬於下列兩法選擇一種：

a) 用全均等分償法，實利率 6%，分二十年償清；

b) 每年依實利率六釐付息，本金於二十年末一次償還，另設償本基金，以備到期償本之需，基金依 4% 投資；

問何者有利於某城？

14. 求證：

$$L_m = P(1+i)^m - R s_{\overline{m}|i}$$

L 負債額

L_m 第 m 期末負債餘額

P 全均等分償中之年賦金額

i 每計息期內借款利率

$s_{\overline{m}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 m 期之終值

15. 某公司規定每半年末提出相等金額，依年利率一分二釐每年複利二次投資，欲於五年末積成基金五萬元，試作一表，以示各期基金之累積：

第三章 變額年金分償

變額年金分償有等差變額年金分償與等比變額年金分償之別，吾人在第四編中已論及等差變額年金與等比變額年金之演算，借款本金爲各變額年金之現值，故計算第一期年賦金之公式，可自第四編中之年金現值公式化出。

應用公式 (b37)，得：

$$(A_a)_{\overline{n}|} = f a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - n v^n)$$

$$f a_{\overline{n}|} = (A_a)_{\overline{n}|} - \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - n v^n)$$

$$f = \frac{(A_a)_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i} + \frac{d n v^n}{i a_{\overline{n}|}}$$

但 $(A_a)_{\overline{n}|} = P$

$$\frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{(1+i)^n a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}}$$

$$\therefore f = \frac{P}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i} \left(1 - \frac{n}{s_{\overline{n}|}} \right) \dots\dots\dots (b39)$$

P 價付額

f 第一期年賦金額

d 公差

i 每計息期內利率

n 借款時期(單位計息期)

$a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 期之現值

$s_{\overline{n}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 期之終值

(例一)負債額一萬元,實利率五釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減二十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

$$i = 5\%$$

$$n = 10$$

應用公式 (b39*), 得:

$$\begin{aligned} f &= \frac{10,000}{a_{\overline{10}|5\%}} + \frac{20}{0.05} \left(1 - \frac{10}{s_{\overline{10}|5\%}} \right) \\ &= 10,000 \times 0.12950458 + 400(1 - 10 \times 0.07950458) \\ &= 1295.0458 + 400 \times 0.2049542 = 1,377.03 \text{ 元} \end{aligned}$$

* 若欲應用 (a) 組公式 (a63), 則得:

$$10000 = (l - 20)a_{\overline{10}|i} + 20 \Sigma a_{\overline{k}|i}$$

$$l - 20 = \frac{1}{a_{\overline{10}|i}} (10000 - 20 \Sigma a_{\overline{k}|i})$$

$$l = 20 + 0.12950458 (10000 - 20 \times 45.1653014)$$

$$= 20 + 0.12950458 (10000 - 911.306028)$$

$$= 20 + 0.12950458 \times 9088.693972$$

$$= 1197.03 \text{ 元}$$

$$f = l - (n-1)d = 1197.03 + 9 \times 20$$

$$= 1377.03 \text{ 元}$$

年 賦 償 還 表

(每年遞減二十元)

| 年 次 | 年初負債餘額 | 年末年賦金額 | 年末付息額 | 年末償本額 |
|-------|-------------|------------|----------|-----------|
| 第 一 年 | \$10,000.00 | \$1,377.03 | \$500.00 | \$ 877.03 |
| 第 二 年 | 9,122.97 | 1,357.03 | 456.15 | 900.88 |
| 第 三 年 | 8,222.09 | 1,337.03 | 411.10 | 925.93 |
| 第 四 年 | 7,296.16 | 1,317.03 | 364.81 | 952.22 |
| 第 五 年 | 6,343.14 | 1,297.03 | 317.20 | 979.83 |
| 第 六 年 | 5,364.11 | 1,277.03 | 268.21 | 1,008.82 |
| 第 七 年 | 4,355.29 | 1,257.03 | 217.76 | 1,039.27 |
| 第 八 年 | 3,316.02 | 1,237.03 | 165.80 | 1,071.23 |
| 第 九 年 | 2,244.79 | 1,217.03 | 112.24 | 1,104.79 |
| 第 十 年 | 1,140.00 | 1,197.03 | 57.00 | 1,140.03 |
| | 57,465.37 | 12,870.30 | 2,870.27 | 10,000.03 |

(例二)前題中每年年賦金額,若改爲遞增二十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

應用公式(b39*),得:

* 若欲應用(a)組公式(a63),則得:

$$10000 = (l+20)a_{\overline{10}|i} - 20 \sum a_{\overline{10}|i}$$

$$l+20 = \frac{1}{d_{\overline{10}|i}} (10000 + 20 \sum a_{\overline{10}|i})$$

$$l = 0.12950458(10000 + 20 \times 45.5653014) - 20$$

$$= 0.12950458 \times 10911.306028 - 20$$

$$= 1393.06 \text{ 元}$$

$$f = l - (n-1)d = 1393.06 - 9 \times 20$$

$$= 1213.06 \text{ 元}$$

$$f = \frac{10000}{a_{\overline{10}|i}} - \frac{20}{0.05} \left(1 - \frac{10}{s_{\overline{10}|i}} \right)$$

$$= 1295.0458 - 400 \times 0.2049542$$

$$= 1,213.06 \text{ 元}$$

年 賦 償 還 表

(每年遞增二十元)

| 年 次 | 年初負債額 | 年末年賦金額 | 年末付息額 | 年末償本額 |
|-------|-------------|------------|----------|-----------|
| 第 一 年 | \$10,000.00 | \$1,213.06 | \$500.00 | \$ 713.06 |
| 第 二 年 | 9,286.94 | 1,233.06 | 464.35 | 768.71 |
| 第 三 年 | 8,518.23 | 1,253.06 | 425.91 | 827.15 |
| 第 四 年 | 7,691.08 | 1,273.06 | 384.55 | 888.51 |
| 第 五 年 | 6,802.57 | 1,293.06 | 340.13 | 952.93 |
| 第 六 年 | 5,849.64 | 1,313.06 | 294.48 | 1,020.58 |
| 第 七 年 | 4,829.06 | 1,333.06 | 241.45 | 1,091.61 |
| 第 八 年 | 3,737.45 | 1,353.06 | 185.85 | 1,166.19 |
| 第 九 年 | 2,571.26 | 1,373.06 | 128.56 | 1,244.50 |
| 第 十 年 | 1,326.76 | 1,393.06 | 66.4 | 1,326.72 |
| | 60,612.99 | 13,030.60 | 3,030.64 | 9,999.96 |

應用公式 (a66) 與 (a68), 而以 P 代 $(G_a)_{\overline{n}}$, 得:

$$f = \frac{Pw^n(1+i-r)}{w^n - r^n} \dots\dots\dots (b40) (r \neq 1+i)$$

$$f = \frac{Pr}{n} \dots\dots\dots (b41) (r = 1+i)$$

P 負債額

f 第一期年賦金額

n 借款時期 (單位計息期)

r 公比

i 每計息期內利率

$$u = 1 + i$$

(例三) 負債額一萬元, 約定於五年間用等比變額年金分償法償還, 公比 1.05, 求第一年年賦金額, 並製年賦償還表!

a) 實利率四釐:

b) 實利率五釐.

a) 應用公式 (b40*), 得:

$$\begin{aligned} f &= \frac{10,000 \times 1.04^5 (1.04 - 1.05)}{1.04^5 - 1.05^5} = \frac{100 \times 1.2166529}{1.27628156 - 1.2166529} \\ &= \frac{121.66529}{0.05962866} = 2,040.38 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (b41*), 得:

$$f = \frac{10,000 \times 1.05}{5} = 2,100 \text{ 元}$$

* 若欲應用 (2) 組公式 (a66) 與 (a68), 則得:

$$a) \quad 10000 = f \frac{1 - 1.05^5 \times 1.04^{-5}}{1.04 - 1.05}$$

$$10000 = f \frac{1.05^5 - 1.04^5}{0.01 \times 1.04^5}$$

$$10000 = f \frac{1.27628156 - 1.21665290}{0.012166529}$$

$$f = \frac{121.66529}{0.05962866} = 2040.38 \text{ 元}$$

$$b) \quad 10000 = \frac{5f}{1.05}$$

$$f = 2100 \text{ 元}$$

年賦償還表
(實利率四釐)

| 年次 | 年初負債餘額 | 年末年賦金額 | 年末付息額 | 年末償本額 |
|-----|-------------|------------|-----------|------------|
| 第一年 | \$10,000.00 | \$2,040.38 | \$ 400.00 | \$1,640.38 |
| 第二年 | 8,359.62 | 2,142.40 | 334.38 | 1,808.02 |
| 第三年 | 6,551.60 | 2,249.52 | 262.06 | 1,987.46 |
| 第四年 | 4,564.14 | 2,362.00 | 182.57 | 2,179.43 |
| 第五年 | 2,384.71 | 2,480.10 | 95.39 | 2,384.71 |
| | 31,600.07 | 11,274.40 | 1,274.40 | 10,000.00 |

年賦償還表
(實利率五釐)

| 年次 | 年初負債餘額 | 年末年賦金額 | 年末付息額 | 年末償本額 |
|-----|-------------|------------|-----------|------------|
| 第一年 | \$10,000.00 | \$2,100.00 | \$ 500.00 | \$1,600.00 |
| 第二年 | 8,400.00 | 2,205.00 | 410.00 | 1,785.00 |
| 第三年 | 6,615.00 | 2,315.25 | 330.75 | 1,984.50 |
| 第四年 | 4,630.50 | 2,431.01 | 231.53 | 2,199.48 |
| 第五年 | 2,431.02 | 2,552.56 | 121.55 | 2,431.01 |
| | 32,076.52 | 11,603.82 | 1,603.83 | 9,999.99 |

習題十七

1. 負債額二萬元，實利率六釐，約定於五年間用等差變額年金分償法償還，每年年賦金額遞增一百元，求第一年年賦金額，並製年賦償還表！

2. 負債額五千元,實利率七釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減三十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

3. 負債額二萬五千元,約定於五年間用等比變額年金分償法償還,公比1.04,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

a) 實利率四釐;

b) 實利率五釐.

4. 求證:
$$L^m = P \left(u^m - \frac{s_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} \right) + \frac{d}{i} \left(m - \frac{ns_{\overline{m}|i}}{s_{\overline{m}|i}} \right)$$

P 最初負債額

L_m 第 m 期末支付年賦金後之負債餘額

i 每計息期內利率

d 等差變額年金分償中之公差

$s_{\overline{m}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 m 期之終值

$s_{\overline{n}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 期之終值

$a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 期之現值

$u = 1 + i$

5. 負債額一萬元,年利率一分二釐,每年複利二次,約定於五年間用等差變額年金分償法償還,每半年償還一次,每次年賦金額遞增二十元,求第一年年賦金額與第六期初之負債餘額!

本編應用公式

公式 (a70)–(a78)

(b38)–(b41)

$$I = P \left(u^n - \frac{1}{u^n} \right) \dots \dots \dots (a70)$$

$$R_m = \frac{P}{n} (1 + (n - m + 1)i) \dots \dots \dots (a71)$$

$$R_m = \frac{P}{n} u^m \dots \dots \dots (a72)$$

$$R = P \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (a73)$$

$$I_{\text{tot}} = R s_{\overline{n}|i} \dots\dots\dots (a74)$$

$$P_{\text{m}} = R t^{n-1} + 1 \dots\dots\dots (a75)$$

$$I_{\text{m}} = R(1 - t^{n-1}) \dots\dots\dots (a76)$$

$$K = P \left(\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} @ i \right) \dots\dots\dots (a77)$$

$$T = P(i - i') + P \left(\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} @ i' \right) \dots\dots\dots (b38)$$

$$e_{\text{m}} = P \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i'}} \dots\dots\dots (a78)$$

$$f = \frac{P}{s_{\overline{n}|i}} - \frac{d}{i} \left(1 - \frac{n}{s_{\overline{n}|i}} \right) \dots\dots\dots (b39)$$

$$f = \frac{P i^2 (1 + i - r)}{i^2 r - r^2} \dots\dots\dots (b40) (r \neq 1 + i)$$

$$f = \frac{Pr}{n} \dots\dots\dots (b41) (r = 1 + i)$$

第六編 插補

第一章 插補之意義及其種類

若甲變數隨乙變數而變，則甲變數爲乙變數之函數，乙變數爲自變數，甲變數爲因變數，例如 $y = \log x$, y 爲 x 之函數， x 爲自變數， y 爲因變數。有時一因變數隨若干自變數而變，例如本金一元 n 期末之複利終值 S ，隨每期利率 i 與複利時期 n 而變，則 S 爲 i 與 n 之函數， i 與 n 爲自變數， S 爲因變數。計算表之用以表示一因變數與一自變數之關係者，名曰單項表 (Table of Single Entry)，其用以表示一因變數與二自變數之關係者，則名曰雙項表 (Table of Double Entry)，例如對數表爲單項表，而複利終值表與年金終值表等則爲雙項表。

有時表示甲乙兩變數間關係之函數，猶未確定，或雖已確定，而計算甚繁，則須應用甲乙兩變數間已知之關係，由一自變數之數值，計算因變數之數值，或由一因變數之數值，計算自變數之數值，是曰插補 (Interpolation)。

由一自變數之數值，應用自變數與因變數間已知之關

係，計算因變數之數值，名曰因變數之插補：由一因變數之數值，應用自變數與因變數間已知之關係，計算自變數之數值，名曰自變數之插補。

單項表與雙項表中所載自變數與因變數之數值，有一定限制，有時題中之自變數或因變數，為表中所無，而其鄰近數值，詳載於表上，則可應用插補法，計算其近似之數值。

第二章 因變數之插補

(例一) 已知: $x=3$ 時, $y=116$;

$x=4$ 時, $y=245$;

$x=5$ 時, $y=450$;

$x=6$ 時, $y=749$;

問 $x=4\frac{1}{2}$ 時, y 之數值幾何?

(解) 令 $y=ax^3+bx^2+cx+d$

以 x 與 y 間已知之相對數值, 依次代入, 則得方程式四, 而此四方程式中各有 a, b, c, d 四係數, 此四係數之數值猶未確定, 故在此四方程式中, a, b, c, d 爲四未知數, 此爲四元聯立方程式, 故可計算 a, b, c, d 之數值, 而 x 與 y 間之函數亦可確定. 故以 $4\frac{1}{2}$ 代入函數中之 x , 即得 y 之數值. x 與 y 間假定函數中之係數, 初未確定, 故此法名曰不定係數法 (Method of Undetermined Coefficients).

以 x 與 y 已知之相對數值, 代入

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

得下列四方程式:

$$27a + 9b + 3c + d = 116$$

$$64a + 16b + 4c + d = 245$$

$$125a + 25b + 5c + d = 450$$

$$216a + 36b + 6c + d = 749$$

應用消去法或行列式法以解上之聯立方程式，則得：

$$a = 3$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

$$d = 5$$

$$\therefore y = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$$

以 $4\frac{1}{2}$ 代入上式中之 x ，得：

$$\begin{aligned} y &= 3 \times \frac{9^3}{2^3} + 2 \times \frac{9^2}{2^2} + 4 \times \frac{9}{2} + 5 \\ &= \frac{1}{8} (2187 + 324 + 144 + 40) = \frac{1}{8} \times 2695 \\ &= 336\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

若各自變數組成公差爲一之一次等差級數，則由函數

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

求得之因變數，組成三次等差級數，蓋若以 x_1, x_1+1 (即 x_2), x_1+2 (即 x_3), x_1+3 (即 x_4), x_1+4 (即 x_5) 等代入上式中之 x ，則得：

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

$$y_2 = a(x_1+1)^3 + b(x_1+1)^2 + c(x_1+1) + d$$

$$y_3 = a(x_1+2)^3 + b(x_1+2)^2 + c(x_1+2) + d$$

$$y_4 = a(x_1+3)^3 + b(x_1+3)^2 + c(x_1+3) + d$$

$$y_5 = a(x_1+4)^3 + b(x_1+4)^2 + c(x_1+4) + d$$

.....

依次求 y 之一次差, 二次差, 三次差, 則得:

$$\begin{array}{l} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ a(x_1+1)^3 + b(x_1+1)^2 + c(x_1+1) + d \\ a(x_1+2)^3 + b(x_1+2)^2 + c(x_1+2) + d \\ a(x_1+3)^3 + b(x_1+3)^2 + c(x_1+3) + d \\ a(x_1+4)^3 + b(x_1+4)^2 + c(x_1+4) + d \end{array} \begin{array}{l} \\ \left. \begin{array}{l} a(3x_1^2 + 3x_1 + 1) + b(2x_1 + 1) + c \\ a(3x_1^2 + 9x_1 + 7) + b(2x_1 + 3) + c \\ a(3x_1^2 + 15x_1 + 19) + b(2x_1 + 5) + c \\ a(3x_1^2 + 21x_1 + 37) + b(2x_1 + 7) + c \end{array} \right\} 6a \\ \left. \begin{array}{l} a(6x_1 + 6) + 2b \\ a(6x_1 + 12) + 2b \\ a(6x_1 + 18) + 2b \end{array} \right\} 6a \end{array}$$

故表示 x 與 y 間關係之函數, 可應用公式 (c16) 求得, 惟公式 (c16) 中之 n , 須以 1, 2, 3, 4 等依次代入, 而此處之 x , 則須以 x_1, x_2, x_3, x_4 依次代入, 故得:

$$y = y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2} d_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_3$$

若表示 x 與 y 間關係之函數, 爲一 r 次函數, 則得 y 之插補公式如下:

$$\begin{aligned} y = & y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots \dots (c24) \end{aligned}$$

x 自變數

y 因變數

d_1 因變數一次差之首項

d_2 因變數二次差之首項

.....

d_r 因變數 r 次差之首項

表示 x 與 y 間關係之函數，由各次差額求得，故此法名曰差額法 (Method of Differences)。

應用差額法計算(例一)中之 y ，則得：

$$\begin{array}{r} 116 \\ 245 \\ 450 \\ 749 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 129 \\ 205 \\ 299 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 76 \\ 94 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 18$$

$$\begin{aligned} y &= 116 + \frac{3}{2} \times 129 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \times 76 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{6} \times 18 \\ &= \frac{1}{8} (928 + 12 \times 129 + 3 \times 76 - 9) \\ &= \frac{1}{8} \times 2695 = 336 \frac{7}{8} \end{aligned}$$

此外 Lagrange 發明一插補公式，亦可用以計算因變數之數值，此插補公式名曰拉氏公式 (Lagrange's Formula)。

$$\begin{aligned} y &= y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})} \\ &+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})} \\ &+ \cdots + y_{r+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)} \quad \cdots \cdots (c25) \end{aligned}$$

x 自變數

y 因變數

公式 (c25) 中若 $x = x_1$ ，則右邊第二項起均化爲 0，而第一

項即化爲 y_1 , 故得 $y=y_1$. 若 $x=x_2$, 則右邊除第二項外均化爲零. 而第二項即化爲 y_2 , 故得 $y=y_2$. 餘類推.

應用拉氏公式計算(例一)中之 y , 則得:

$$\begin{aligned}
 y &= 116 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(3-4)(3-5)(3-6)} + 245 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(4-3)(4-5)(4-6)} \\
 &+ 450 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(5-3)(5-4)(5-6)} + 749 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)}{(6-3)(6-4)(6-5)} \\
 &= \frac{1}{8} \left(116 \times \frac{3}{-6} + 245 \times \frac{9}{2} + 450 \times \frac{-9}{-2} + 749 \times \frac{-3}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{8} \times 2695 = 336 \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

(例二) 已知: $\sqrt{33} = 5.7446$;

$$\sqrt{34} = 5.8310;$$

$$\sqrt{35} = 5.9161;$$

$$\sqrt{36} = 6.0000;$$

求 $\sqrt{34.6}$;

應用差額法. 得:

$$\begin{array}{r}
 5.7446 \\
 5.8310 \\
 5.9161 \\
 6.0000
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.0864 \\ 0.0851 \\ 0.0839 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0.0013 \\ -0.0012 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 0.0001$$

令 $y = \sqrt{34.6}$

代入公式 (c24), 得:

$$\begin{aligned} y &= 5.7446 + 1.6 \times 0.0864 + \frac{1.6 \times 0.6}{1.2} (-0.0013) \\ &\quad + \frac{1.6 \times 0.6 (-0.4)}{1.2 \cdot 3} \times 0.0001 \\ &= 5.7446 + 0.13824 - 0.000624 - 0.0000064 \\ &= 5.8822 \end{aligned}$$

(例三) 求 $\log 1853.4!$

吾人在第一編中, 已論及 $\log 1853.4$ 之計算, 即先查 $\log 1854$ 與 $\log 1853$, 然後用比例計算, 此即插補法之一種, 蓋若以之代入公式 (c24), 則得:

$$\begin{aligned} \log 1853.4 &= \log 1853 + (1853.4 - 1853)(\log 1854 - \log 1853) \\ \text{即 } \log 1853.4 &= \log 1853 + \frac{4}{10} (\log 1854 - \log 1853) \end{aligned}$$

此即第一編中所用之比例計算法, 此法僅用二數插補, 故名曰二數插補法, 換言之, 即假定對數表中之對數, 組成一次等差級數, 但各對數之一次差, 並不相等, 故由是求得之對數, 僅爲其近似值, 若欲求得之數值, 更與其實際數值近似, 則可用三數插補法或四數插補法, 前者假定其二次差相等, 而後者則假定其三次差相等, 茲應用三數插補法計算 $\log 1853.4$ 於下.

$$\begin{array}{l} \log 1853 = 3.267875 \\ \log 1854 = 3.268110 \\ \log 1855 = 3.268344 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.000235 \\ 0.000234 \end{array} \right) - 0.000001$$

令 $y = \log 1853.4$

代入公式 (c24), 得:

$$y = 3.267875 + 0.4 \times 0.000235 + \frac{0.4(-0.6)}{1 \cdot 2} (-0.000001) \\ = 3.267875 + 0.000094 + 0.0000012 = 3.26796912$$

若各自變數組成公差為 h 之一次等差級數, 例如 $x_1, x_1+h, x_1+2h, x_1+3h$ 等, 則將自變數之單位化為 h , 即得 $\frac{x_1}{h}, \frac{x_1}{h}+1, \frac{x_1}{h}+2, \frac{x_1}{h}+3$ 等, 其公差為一, 故可應用公式 (c24) 而得:

$$y = y_1 + \frac{x-x_1}{h} d_1 + \frac{\frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_2}{h}}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{\frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_2}{h} \dots \frac{x-x_r}{h}}{1 \cdot 2 \dots r} d_r$$

令 $p = \frac{x-x_1}{h}$

則 $\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_1-h}{h} = p-1$

$\frac{x-x_3}{h} = \frac{x-x_1-2h}{h} = p-2$

.....

$\frac{x-x_r}{h} = \frac{x-x_1-(r-1)h}{h} = p-r+1$

$\therefore y = y_1 + p d_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots \dots (a79)$

x 自變數

y 因變數

h 自變數之公差

a_1 因變數一次差之首項

a_2 因變數二次差之首項

.....

a_r 因變數 r 次差之首項

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

檢查雙項表時，若自變數之一為表上所有，則其因變數之插補，與單項表同。

(例四) 求 1.0375^{30} !

a) 應用三數插補法;

b) 應用四數插補法.

$$\begin{array}{l}
 a) \quad 3\frac{1}{2}\% \quad 2.80679370 \\
 \quad \quad 4\% \quad 3.24339751 \\
 \quad \quad 4\frac{1}{2}\% \quad 3.74531813
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.43660381 \\ 0.50192062 \end{array} \right) 0.06531681$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

代入公式 (a79), 得:

$$\begin{aligned}
 y &= 2.80679370 + \frac{1}{2} \times 0.43660381 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \times 0.06531681 \\
 &= 2.80679370 + 0.218301905 - 0.008164601 \\
 &= 3.01693100
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 b) \quad 3\% \quad 2.42726247 \\
 \quad 3\frac{3}{4}\% \quad 2.80679370 \\
 \quad 4\% \quad 3.24339751 \\
 \quad 4\frac{1}{2}\% \quad 3.74531813
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 0.37953123 \\
 0.43660381 \\
 0.50192062
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 0.05707258 \\
 0.06531681
 \end{array}
 \end{array} \right\} 0.00824423$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{3}{2}$$

代入公式 (a79), 得:

$$\begin{aligned}
 y &= 2.42726247 + \frac{3}{2} \times 0.37953123 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \\
 &\quad \times 0.05707258 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \times 3} \times 0.00824423 \\
 &= 2.42726247 + 0.569296845 + 0.0214022175 \\
 &\quad - 0.000515264375 = 3.01744627
 \end{aligned}$$

查此題之準確答數爲 3.01747139, 故應用四數插補法求得之結果, 較用三數插補法求得之結果更爲近似。

(例五) 求 $a_{\overline{10}|} @ 3\frac{3}{4}\%$!

a) 應用三數插補法:

b) 應用四數插補法:

$$\begin{array}{l}
 a) \quad 3\% \quad 19.60044135 \\
 \quad 3\frac{3}{4}\% \quad 18.39204541 \\
 \quad 4\% \quad 17.29203330
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 -1.20839594 \\
 -1.10001211
 \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} 0.10838383$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{3}{2}$$

代入公式 (a79), 得:

$$\begin{aligned} y &= 19.60044135 + \frac{3}{2}(-1.20839594) + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \times 0.10838383 \\ &= 19.60044135 - 1.81259391 + 0.04064393625 \\ &= 17.82849138 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad 3\% \quad 19.60044135 \\ \quad 3\frac{1}{2}\% \quad 18.39204541 \\ \quad 4\% \quad 17.29203330 \\ \quad 4\frac{1}{2}\% \quad 16.28888854 \end{array} \left. \begin{array}{l} -1.20839594 \\ -1.10061211 \\ -1.00314476 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.10838383 \\ 0.09686735 \end{array} \left. \right) -0.01151648$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{3}{2}$$

代入公式 (a79), 得:

$$\begin{aligned} y &= 19.60044135 + \frac{3}{2}(-1.20839594) + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \times 0.10838383 \\ &\quad + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \times 3} (-0.01151648) \\ &= 19.60044135 - 1.81259391 + 0.04064393625 \\ &\quad + 0.00071978 = 17.82921116 \end{aligned}$$

查此題之準確答數為 17.82924507, 故應用四數插補法

求得之結果，較用三數插補法求得之結果更為近似。

檢查雙項表時，若二自變數俱為表上所無，則須依次插補，故計算較繁。

(例六) 求 $\frac{1}{1.0375^{30\frac{1}{2}}}$!

a) 應用二數插補法;

b) 應用三數插補法.

a) 先求 $\frac{1}{1.0375^{30}}$ 與 $\frac{1}{1.0375^{31}}$

$$\left. \begin{array}{l} 1.035^{-30} = 0.35627841 \\ 1.04^{-30} = 0.30831867 \end{array} \right) - 0.04795974$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1.0375^{-30} = 0.35627841 - \frac{1}{2} \times 0.04795974$$

$$= 0.35627841 - 0.02397987$$

$$= 0.33229854$$

$$\left. \begin{array}{l} 1.035^{-31} = 0.34423035 \\ 1.04^{-31} = 0.29646026 \end{array} \right) - 0.04777009$$

$$\therefore 1.0375^{-31} = 0.34423035 - \frac{1}{2} \times 0.04777009$$

$$= 0.34423035 - 0.023885045$$

$$= 0.320345305$$

次由 1.0375^{-30} 與 1.0375^{-31} , 應用插補法,

求 $1.0375^{-30\frac{1}{2}}$

$$\left. \begin{array}{l} 1.0375^{-30} = 0.332298540 \\ 1.0375^{-31} = 0.320345305 \end{array} \right\} - 0.011953235$$

$$p = \frac{30\frac{1}{2} - 30}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-30\frac{1}{2}} &= 0.33229854 - \frac{1}{2} \times 0.011953235 \\ &= 0.33229854 - 0.0059766175 \\ &= 0.32632192 \end{aligned}$$

b) 先求 1.0375^{-30} , 1.0375^{-31} 與 1.0375^{-32} .

$$\left. \begin{array}{l} 1.035^{-30} = 0.35627841 \\ 1.04^{-30} = 0.30831867 \\ 1.045^{-30} = 0.26700002 \end{array} \right\} \begin{array}{l} - 0.04795974 \\ - 0.04131865 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1.035^{-30} \\ 1.04^{-30} \\ 1.045^{-30} \end{array}} \right\} 0.00664109$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-30} &= 0.35627841 + \frac{1}{2}(-0.04795974) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00664109 \\ &= 0.35627841 - 0.02397987 - 0.00083014 \\ &= 0.33146840 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1.035^{-31} &= 0.34423035 \\ 1.04^{-31} &= 0.29646026 \\ 1.045^{-31} &= 0.25550241 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.04777009 \\ &-0.04095785 \end{aligned} \Bigg) 0.00681224$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-31} &= 0.34423035 + \frac{1}{2}(-0.04777009) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00681224 \\ &= 0.34423035 - 0.023885045 - 0.00085153 \\ &= 0.31949378 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1.035^{-32} &= 0.33258971 \\ 1.04^{-32} &= 0.28505794 \\ 1.045^{-32} &= 0.24449991 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.04753177 \\ &-0.04055803 \end{aligned} \Bigg) 0.00697374$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-32} &= 0.33258971 + \frac{1}{2}(-0.04753177) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00697374 \\ &= 0.33258971 - 0.023765885 - 0.000871718 \\ &= 0.30795211 \end{aligned}$$

次由 1.0375^{-30} , 1.0375^{-31} 與 1.0375^{-32} , 應用插補法,

求 $1.0375^{-30\frac{1}{2}}$

$$\left. \begin{aligned} 1.0375^{-30} &= 0.33146840 \\ 1.0375^{-31} &= 0.31949378 \\ 1.0375^{-32} &= 0.30795211 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.01197462 \\ &-0.01154167 \end{aligned} \Bigg) 0.00043295$$

$$p = \frac{30 \frac{1}{2} - 30}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1.0375^{-30} = 0.33146840 + \frac{1}{2}(-0.01197462)$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)}{2} \times 0.00043295$$

$$= 0.33146840 - 0.00598731 + 0.000054119$$

$$= 0.32542697$$

較二數插補法求得之近似數，更為近似，(查此題之準確答數為 0.3253897)。

習 題 十 八

1. 已知:
- | | |
|----------|------------|
| $x=4$ 時, | $y=245$; |
| $x=5$ 時, | $y=450$; |
| $x=6$ 時, | $y=749$; |
| $x=7$ 時, | $y=1150$; |

問 $x=5.3$ 時, y 之數值幾何?

- a) 應用不定係數法;
 b) 應用差額法;
 c) 應用拉氏公式.
2. 已知:
- | |
|-----------------------|
| $\sqrt{51}=7.14143$, |
| $\sqrt{52}=7.21110$, |
| $\sqrt{53}=7.28011$, |
| $\sqrt{54}=7.34847$, |

應用差額法求 $\sqrt{52.1}$.

3. 求 $\log 1354.6!$
- 應用二數插補法;
 - 應用三數插補法.
4. 應用三數插補法與四數插補法求下列各數之近似值!
- 1.0325^{20}
 - 1.0475^{-15}
 - $\frac{1.0425^{18} - 1}{0.0425}$
 - $\frac{1 - 1.0325^{-30}}{0.0325}$
5. 求 $1.03^{20.1}$
- 應用 $(1+i)^n$ 表與 $(1+i)^{\frac{1}{5}}$ 表;
 - 應用對數表;
 - 由 1.03^{20} , 1.03^{21} , 1.03^{22} 與 1.03^{23} 插補.
6. 求 $1.021 \cdot 5^{\frac{1}{12}}$
- 應用二項級數展開法;
 - 應用對數表;
 - 應用三數插補法;
 - 應用四數插補法.
7. 求 $\frac{0.0525}{1 - 1.0525^{-30}} - 1$
- 應用對數表;
 - 應用二數插補法;
 - 應用三數插補法.
8. 應用五數插補法, 求 $1.03^{-20.1}$

第三章 自變數之插補

若截取公式 (a79) 右邊之前二項, 則得:

$$y = y_1 + p d_1$$

即
$$p = \frac{y - y_1}{d_1} \dots\dots\dots (a80)$$

x 自變數

y 因變數

h 自變數之公差

d_1 因變數一次差之首項

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

上式爲自變數之二數插補公式, 蓋 p 之數值求得後, 即可計算 x 之數值故也.

(例一) 由

$$(1+i)^{12} = 1.00091268,$$

應用二數插補法, 求 i

$$\begin{array}{r} 1.01^{12} = 1.00982954 \\ 1.01125^{12} = 1.00693270 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1.01^{12} \\ 1.01125^{12} \end{array}} \right) 0.00010316$$

$$y = 1.00091268$$

$$y_1 = 1.00982954$$

$$d_1 = 0.00010316$$

代入公式 (a80), 得:

$$p = \frac{0.00008254}{0.00010316} = 0.8001$$

$$h = 0.00125$$

$$x_1 = 0.01$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.01 + 0.8001 \times 0.00125 = 0.011000125$$

即
$$i = 0.011000125$$

若截取公式 (a79) 右邊之前三項, 則得:

$$y = y_1 + pd_1 + \frac{p(p-1)}{12} d_2$$

即
$$p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p-1}{2} d_2}$$

若以公式 (a80) 求得之近似值, 代入上式中右邊之 p , 則可求得 p 之第二近似值, 第二近似值通常較準確於第一近似值, 茲列自變數之三數插補公式於下:

$$p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p_1 - 1}{2} d_2} \dots\dots\dots (a81)$$

x 自變數

y 因變數

h 自變數之公差

a_1 因變數一次差之首項

d_2 因變數二次差之首項

p_1 公式 (a80) 求得之結果

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

(例二) 由

$$(1+i)^{\frac{1}{2}} = 1.00091208,$$

應用三數插補法, 求 i

$$\left. \begin{array}{l} 1.01^{\frac{1}{2}} = 1.00082954 \\ 1.01125^{\frac{1}{2}} = 1.00093270 \\ 1.0125^{\frac{1}{2}} = 1.00103575 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.00010316 \\ 0.00010305 \end{array} \right) - 0.00000011$$

$$y = 1.00091208$$

$$y_1 = 1.00082954$$

$$d_1 = 0.00010316$$

$$d_2 = -0.00000011$$

$$p_1 = 0.8001$$

代入公式 (a81), 得:

$$p = \frac{0.00008254}{0.00010316 + \frac{0.1999}{2} \times 0.00000011} = \frac{8254}{10317.09945} = 0.80003$$

$$h = 0.00125$$

$$x_1 = 0.01$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.01 + 0.80003 \times 0.00125 = 0.011000375$$

$$\text{即 } i = 0.011000375$$

此題準確答數為 0.011, 故第二近似值較第一近似值為更準確。

若欲用四數或五數插補, 則可截取公式 (a79) 右邊之前四項或前五項, 其理與三數插補相同。

(例三) 求 $\text{antilog } 0.0169916$

a) 應用二數插補法;

b) 應用三數插補法.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \log 1.039 = 0.0166155 \\
 & \log 1.040 = 0.0170333 \quad \left. \vphantom{\log 1.040} \right) 0.0004178 \\
 & y = 0.0169916 \\
 & y_1 = 0.0166155 \\
 & d_1 = 0.0004178
 \end{aligned}$$

代入公式 (a80), 得:

$$p = \frac{0.0003761}{0.0004178} = 0.9002$$

$$x_1 = 1.039$$

$$h = 0.001$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 1.039 + 0.9002 \times 0.001 = 1.0399002$$

即 $\text{antilog } 0.0169916 = 1.0399002$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \log 1.039 = 0.0166155 \\
 & \log 1.040 = 0.0170333 \quad \left. \vphantom{\log 1.040} \right) 0.0004178 \\
 & \log 1.041 = 0.0174507 \quad \left. \vphantom{\log 1.041} \right) 0.0004174 \quad \left. \vphantom{\log 1.041} \right) -0.0000004 \\
 & y = 0.0169916 \\
 & y_1 = 0.0166155 \\
 & d_1 = 0.0004178 \\
 & d_2 = -0.0000004 \\
 & p_1 = 0.9002
 \end{aligned}$$

代入公式 (a81), 得:

$$p = \frac{0.0003761}{0.0004178 + \frac{0.0998}{2} \times 0.0000004}$$

$$= \frac{3761}{4178.1996} = 0.90015$$

$$x_1 = 1.039$$

$$h = 0.001$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 1.039 + 0.90015 \times 0.001 = 1.03990015$$

即 $\text{antilog } 0.0169916 = 1.03990015$

此題準確答數為 1.0399, 故第二近似值較第一近似值為更準確.

由公式 (a80) 求得第一近似值後, 尚可用他法求其第二近似值.

(例四) 每年年金額 100 元, 五年末之年金終值為 533 元, 求實利率!

$$533 = 100 s_{\overline{5}|i}$$

$$s_{\overline{5}|i} = 5.33$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 3\% \quad 5.3091 \\ i = 3\frac{1}{3}\% \quad 5.3625 \end{array} \right\} 0.0534$$

$$y = 5.33$$

$$y_1 = 5.3091$$

$$d_1 = 0.0534$$

代入公式 (a80), 得:

$$p = \frac{0.0209}{0.0534} = 0.391$$

$$x_1 = 0.03$$

$$h = 0.005$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.03 + 0.005 \times 0.391 = 0.03196$$

但
$$s_{\bar{5}} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

即
$$5.33 i = (1+i)^5 - 1$$

令
$$i = 0.03196 + l$$

以之代入上式，則得：

$$(1.03196 + l)^5 - 5.33(0.03196 + l) - 1 = 0$$

$$1.03196^5 + \frac{5}{1} \times 1.03196^4 l + \left(\frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times 1.03196^3 l^2 + l^5 \right) - 0.1703468 - 5.33 l - 1 = 0$$

0.03196 爲 i 之近似值，故 l 之數值甚小，其二次方以上各項之數值更爲微小，故可略而不計，則得：

$$1.03196^5 + 5 \times 1.03196^4 l - 1.1703468 - 5.33 l = 0$$

$$1.170346119 + 5.67050137 l - 1.1703468 - 5.33 l = 0$$

$$0.34050137 l = 0.00000661$$

$$l = \frac{0.000661}{340.50137} = 0.000002$$

即得 i 之第二近似值爲 0.031962，若欲求更準確之近似值，則令

$$i = 0.031962 + l$$

而依前法求得 i 之第三近似值。

習 題 十 九

1. 本金一千元，十年後可得本利合計洋二千五百元，求實利率！
2. 本金五百元，五年後可得本利合計洋七百五十元，求虛利率！(每年複利二次)
3. 每年年金額 300 元，六年末之年金終值為 2055 元，求實利率！
4. 某甲以一萬元存入銀行，得於以後十年間每年末自銀行支取年金一千三百元，求銀行計算年金時所用之實利率！
5. 求 $\text{antilog } 0.387549!$
6. 本金一千元，十年後可得本利合計洋二千元，求實利率！
 - a) 由複利終值表，應用二數插補法；
 - b) 由複利現值表，應用二數插補法；
 - c) 由 (a) 與 (b) 求得之結果，求其平均數；
 - d) 應用對數表；
 - e) 應用公式 (c8)。
7. 某甲負債一萬元，約定於以後二十個月間，每月末償付本息五百二十五元，至第二十個月末全部清償，求每月利率，並作年賦償還表。
8. 求上題中第二年初某甲之負債餘額。(假定某甲未製年賦償還表)
9. 某銀行零存整付儲蓄存款，規定每月初存入五元，二十五個月末一次整付一百四十元，求銀行計算利息時所用之每月利率與實利率，並作存款累積表，以示各月末之存款額。
10. 設上題中之存款人，於一年末死亡，而某銀行允其繼承人依原定利率提出存款，則某銀行應即支出若干元？(假定某銀行未製每月存款總額計算表)

本編應用公式:

公式 (a79)–(a81)

(c24)–(c25)

$$y = y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots (c24)$$

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{r+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{r+1})} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_{r+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{r+1})} + \dots$$

$$+ y_{r+1} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)}{(x_{r+1} - x_1)(x_{r+1} - x_2) \dots (x_{r+1} - x_r)} \dots \dots (c25)$$

$$y = y_1 + p d_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots (a79)$$

$$p = \frac{y - y_1}{d_1} \dots \dots (a80)$$

$$p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p_1 - 1}{2} d_2} \dots \dots (a81)$$

