לוגריתם Logarithm / צחי אבנור

חומר הכנה

חוקי חזקות: יהי $a>0$, אזי מגדירים $a^0:=1,\ a^1=a,\ a^2=a\cdot a,....,\ a^n=a\cdot a^{n-1}$. במילים אחרות, a בחזקת n זה לכפול את a בעצמו n פעמים. כמו כן, מגדירים: $a^{\frac{1}{n}}:=\sqrt[n]{a}$, $a^{-n}:=\frac{1}{a^n}$.

לכל $a,b>0$ ולכל $m,n\in\mathbb{Z}$ שלמים מתקיימים החוקים הבאים:

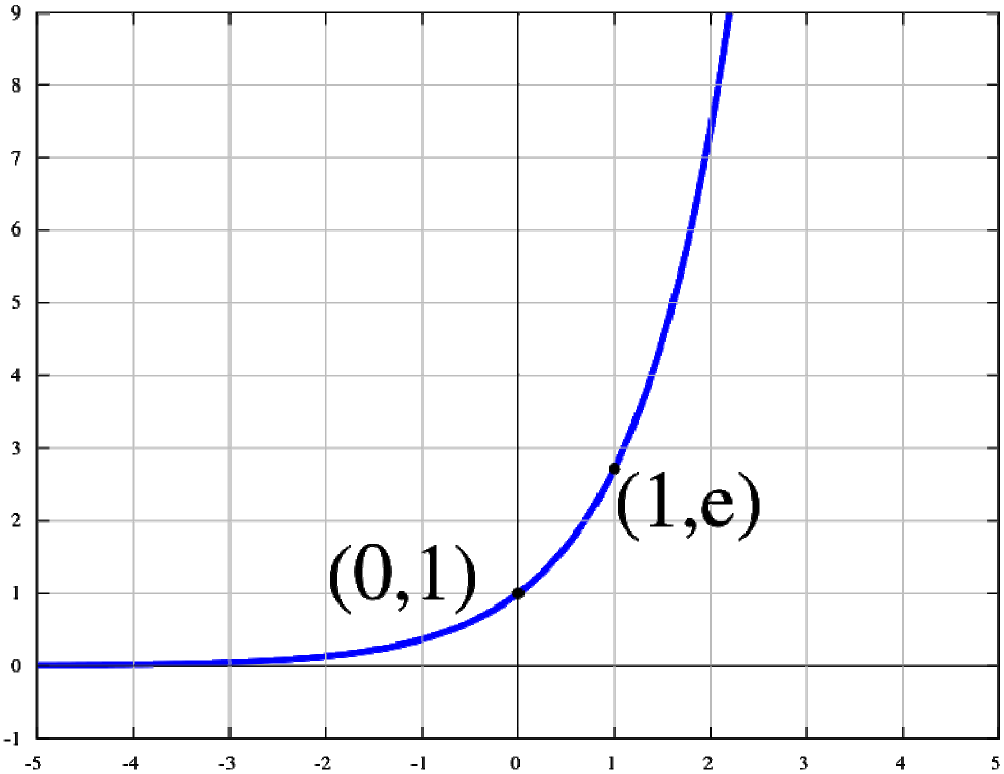
$$a^{m+n}=a^m a^n,\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad \left(a^m\right)^n=a^{mn},\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad (ab)^n=a^n b^n$$

הגדרה: הבסיס הטבעי $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2.718281828$ ו- $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

הגדרה: פונקציית האקספוננט

$$\exp:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & (0,\infty)\\ x & \mapsto & e^x\end{array}$$

כלומר, זוהי הפונקציה $\exp(x)=e^x$. נשים לב ש- $e^x>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.



נגזרת: $\frac{d}{dx}e^x=e^x$.

לוגריתמים – הגדרה ותכונות יסודיות

הגדרה: יהי $0<a\in\mathbb{R}$. הלוגריתם מוגדר על ידי הקשר $x=\log_a b \Leftrightarrow a^x=b$.

דוגמה 1: $x=\log_{10}1000=3$ כי $10^3=1000$.

הגדרה: הלוגריתם הטבעי $\ln(x):=\log_e x$.

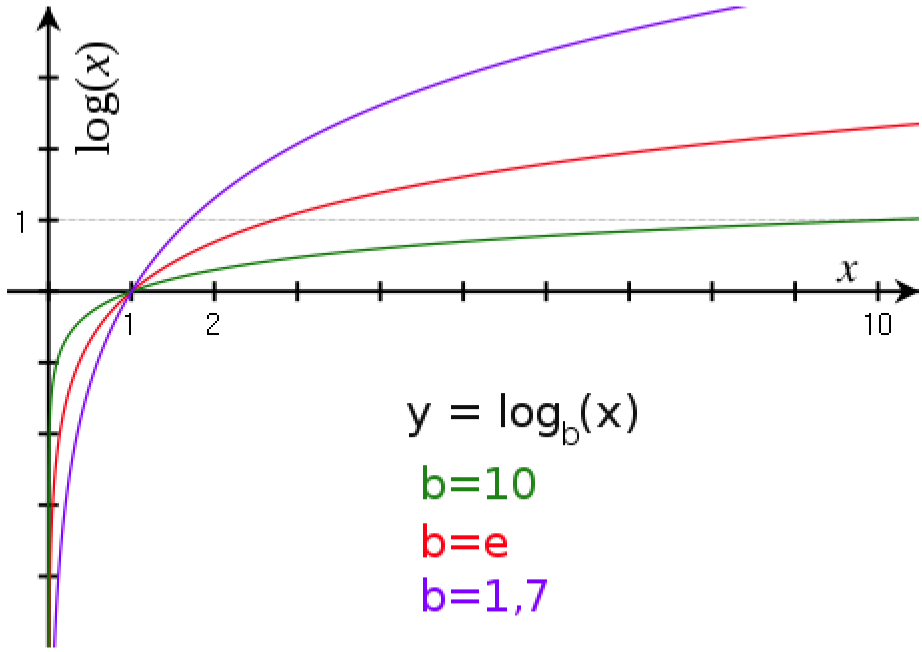
דוגמה 2: $e^{\ln 5}=e^{\log_e 5}=5$ (נובע מההגדרה).

תכונות: $\log_a a=1,\quad \log_a 1=0,\quad a^{\log_a b}=b,\quad b^{\frac{1}{\log_a b}}=a,\quad \log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c,\quad \log_a\left(b^n\right)=n\log_a b,\qquad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{\ln b}{\ln a}$$

פונקציית הלוגריתם: יהי $0<a\in\mathbb{R}$, אזי מגדירים

$$\log_a:\begin{array}{ccc}(0,\infty) & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \log_a x\end{array}$$



גבולות: עבור $1<a$, $\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$ ו-$\lim_{x\to 0+}\log_a x=-\infty$.

עבור $1>a>0$: $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$ ו-$\lim_{x\to 0+}\log_a x=\infty$.

נגזרת: $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$.

פונקציה קדומה (אינטגרל לא מסוים): $\int\log_a(x)dx=x\log_a(x)-\frac{x}{\ln(a)}+C$.

לוגריתמים – הוכחת התכונות היסודיות

תכונה 1: $\log_a a=1,\quad \log_a 1=0$.

הוכחה 1: $\log_a 1=0\Leftrightarrow a^0=1$ ו- $\log_a a=1\Leftrightarrow a^1=a$. ■

תכונה 2: $a^{\log_a b}=b,\quad b^{\frac{1}{\log_a b}}=a$.

הוכחה 2: $a^{\log_a b}=b$ נובע מההגדרה $s=\log_a b\Leftrightarrow a^s=b$. כעת, נעלה בחזקת $\frac{1}{\log_a b}$ את שני אגפי המשוואה, נקבל: $b^{\frac{1}{\log_a b}}=a\Leftarrow a=a^1=a^{\frac{\log_a b}{\log_a b}}=\left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a b}}=b^{\frac{1}{\log_a b}}\Leftarrow a^{\log_a b}=b$. ■

למה (משפט עזר): הפונקציה $x\mapsto a^x$ היא חד-חד-ערכית.

מסקנה: כדי להוכיח את התכונות הבאות של לוגריתם, ניקח את אחד האגפים בהם, נקרא לו s_1, נחשב את a^{s_1} ונראה ש- $a^{s_1}=a^{s_2}$. מאחר ש- $x\mapsto a^x$ חח"ע נקבל ש- $s_1=s_2$.

תכונה 3: $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$.

הוכחה 3: נחשב $a^{\log_a b+\log_a c}$. אזי: $a^{\log_a b+\log_a c}=a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c}=b\cdot c=a^{\log_a(bc)}$ ומאחר שזו פונקצייה חח"ע נובע ש-$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$. ■

תכונה 4: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$.

הוכחה 4: באופן דומה $a^{\log_a b-\log_a c}=a^{\log_a b}\cdot a^{-\log_a c}=a^{\log_a b}\cdot\left(a^{\log_a c}\right)^{-1}=b\cdot c^{-1}=\frac{b}{c}=a^{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)}$
ומאחר שזו פונקצייה חח"ע נובע ש-$\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$. ■

תכונה 5: $\log_a\left(b^r\right)=r\log_a b$.

הוכחה 5: באופן דומה, $a^{r\log_a b}=\left(a^{\log_a b}\right)^r=b^r=a^{\log_a\left(b^r\right)}$ ולכן $r\log_a b=\log_a\left(b^r\right)$.

תכונה 6: נוסחת שינוי הבסיס $\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$.

הוכחה 6: $b=a^{\log_a b}$ וכן $a^{\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)}=\left(a^{\frac{1}{\ln a}}\right)^{\ln b}=e^{\ln b}=b$. מאחר שהפונקציה $x\mapsto a^x$ היא חד-חד-ערכית נובע ש- $\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}\Leftarrow a^{\log_a b}=b=a^{\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)}$. מש"ל, או בסימון מתמטי מקובל: ■.

תכונה 7: נגזרת $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$.

הוכחה: ראשית נראה ש- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. ואכן,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+x)-\ln(x)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+x}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$
$$\overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \overset{(3)}{=} \lim_{\lambda\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\lambda x}\right)^{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{(1/x)}{\lambda}\right)^{\lambda}\right) =$$
$$\overset{(4)}{=} \ln\left(\lim_{\lambda\to\infty}\left(1+\frac{(1/x)}{\lambda}\right)^{\lambda}\right) \overset{(5)}{=} \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}$$

כאשר המעברים (1) ו-(2) נובעים מתכונות לוגריתם, מעבר (3) הוא החלפת משתנים $\lambda = \frac{1}{h}$ ואז $\lambda\to\infty$ כאשר $h\to 0+$, מעבר (4) נעשה כי לוגריתם היא פונקציה רציפה ומעבר (5) הוא לפי הגדרת הגבול של e.

במקרה הכללי, נשתמש בנוסחת שינוי הבסיס:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

והוכחנו את המבוקש. ■

תכונה 8: פונקציה קדומה (אינטגרל לא מסוים) $\int \log_a(x)dx = x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$.

הוכחה: אפשר לחשב באמצעות אינטגרציה בחלקים, אבל הנה טריק נחמד, נגזור את אגף שמאל, ונקבל:

$$\frac{d}{dx}\left(x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C\right) = \frac{d}{dx}\left(x\log_a x\right) - \frac{d}{dx}\frac{x}{\ln a} + \frac{d}{dx}C =$$
$$= \log_a x + \frac{x}{x\ln a} - \frac{1}{\ln a} + 0 =$$
$$= \log_a x + \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} = \log_a x$$

ולכן $x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$ פונקציה קדומה של $\log_a x$. ■

ראו גם: [ויקיפדיה העברית] ו- [ויקיפדיה באנגלית]