נגזרת חומרית/מלווה

במכניקת הרצף הנגזרת החומרית/ המלווה מתארת את קצב ההשתנות בזמן של גודל פיזיקאלי (כמו טמפרטורה/ תנע) עבור חומר נזיל הנתון לשדה מהירות תלוי זמן ומרחב. הנגזרת החומרית יכולה להוות קשר בין התיאורים של אוילריאן ולגראנז'יאן לעיוות המרחב. לדוגמא: בדינמיקת נוזלים ,ניקח מקרה בו שדה המהירות הוא מהירות הזרימה עצמה והתכונה הנבדקת היא טמפרטורת הנוזל,אז הנגזרת המלווה מתארת את השתנות הטמפרטורה בזמן , של כמות נוזל הנעה לאורך קו מסלול.

הגדרה:

הנגזרות החומריות של שדה סקלרי $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ושל שדה וקטורי $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ מוגדרות בהתאמה:

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi,$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

כאשר מדובר במקרה של נגזרת חומרית הפועלת על שדה וקטורי, ניתן לפרש את הביטוי $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}$ כ- $\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u})$ או $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ כאשר בשני המקרים נגיע לאותה תוצאה.

לדוגמה:

במערכת צירים קרטזית תלת מימדית (x_1,x_2,x_3) , הביטוי $\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi$ *שווה* ל- $v_1\, \partial\varphi/\partial x_1 + v_2\, \partial\varphi/\partial x_2 + v_3\, \partial\varphi/\partial x_3$.

באופן מטעה משתמשים בביטוי נגזרת מלווה עבור הביטויים $v\cdot\nabla\varphi$ או $v\cdot\nabla u$ כשלמעשה השימוש נכון רק במקרים בהם D/Dt הזרימה אינה תלויה בזמן .

פיתוח :

ניקח פונקציה סקלרי $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ כאשר x הינו המיקום ו- t הינו זמן . הפונקציה מתארת גודל פיזיקאלי כלשהו כגון טמפרטורה, גובה וכו'.

הגודל הפיזיקאלי קיים בתוך נוזל שאת מהירותו ניתן לייצג ע"י שדה וקטורי $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

נשתמש בכלל שרשרת על מנת לגזור את הפונקציה $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi(\mathbf{x},t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}.$$

נגזרת הפונקציה $\varphi(\mathbf{x}, t)$ תלויה בוקטור :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^T$$

המתאר קו מסלול נבחר במרחב .

לדוגמא, אם המסלול הנבחר הינו $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = 0$ נגזרת הפונקציה תהיה שווה לנגזרת החלקית לפי זמן .במקרה הזה הזמן הוא המשתנה והמרחב הינו קבוע.

המצב הנ"ל ,בו המיקום הינו קבוע (סטטי) מוגדר כנגזרת אוילריאן.

דוגמא הממחישה מצב זה , הוא אדם העומד במיקום קבוע בתוך אגם, ומרגיש שינוים בטמפרטורה הנגרמים כתוצאה מהתחממות המים ע"י השמש.

לחילופין אם המסלול של השחיין $\mathbf{x}(t)$ אינו קבוע , הנגזרת בזמן של φ עשויה להשתנות בהתאם למסלול.

למשל, נתונה בריכה מקורה עם מים עומדים . שני הקצוות של הבריכה מוחזקות בטמפרטורות קבועות כאשר הקצה האחד חם והשני קר.

שחיין השוחה מצידה האחת לצידה השני של הבריכה ירגיש עם הזמן שינוי בטמפרטורה וזאת למרות שהטמפרטורה נשארת קבועה בכל נקודה במרחב .

הסיבה לשינוי בטמפרטורה היא ביצוע המדידות במיקומים שונים.

הנגזרת החומרית מתקבלת , כאשר המסלול $\mathbf{x}(t)$ נבחר כמסלול בעל מהירות השווה למהירות הנוזל:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}.$$

מסלול זה עוקב אחר זרם הנוזל ומתואר ע"י שדה מהירות של הנוזל $\mathbf{v}$.

כך שהנגזרת המלווה של הסקלר φ היא:

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{v}.$$

דוגמה למקרה זה הינו גוף קל משקל הצף באופן טבעי ונסחף בנהר זורם שהטמפרטורה בו משתנה (חלק מהנהר מוצל וחלקו חשוף לשמש) ובנוסף טמפרטורת המים עולה עם התקדמות בזמן. השינויים בעקבות תנועת החלקיק (הנגרמת מתנועת הזורם) נקראים אדבקציה או קונבקציה במקרה של הזזת הווקטור dx/dt.

ההגדרה הנ"ל מניחה את הטבע הפיזיקאלי של זרם הנוזל ,אם זאת אין הסתמכות על חוקי הפיסיקה (למשל, אין כל הוכחה שחלקיק קל משקל הנע בזרם נהר, ינוע במהירות המים). יחד עם זאת מסתבר כי ניתן להיעזר בנגזרת החומרית לתיאור תופעות פיסיקליות שונות. המקרה הכללי של אדבקציה מסתמך על חוקי שימור מסה בזרם הנוזל, אך כאשר מדובר בתווך לא משמר המצב שונה.

עד כה התייחסנו לגודל הפיזיקאלי כסקלר. במקרה בו מדובר בווקטור, הגרדיאנט יהפוך לנגזרת של טנזור. עבור השדה הטנזורי בנוסף לתזוזה של מערכת הקואורדינטות בעקבות תנועת הנוזל יש גם לקחת בחשבון את הרוטציה והמתיחה.

קואורדינאטות אורתוגונאלית

הרכיב ה- j של הנגזרת בקואורדינאטות האורתוגונאלית :

$$[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}]_j = \sum_i \frac{v_i}{h_i}\frac{\partial u_j}{\partial q^i} + \frac{u_i}{h_i h_j}\left(v_j\frac{\partial h_j}{\partial q^i} - v_i\frac{\partial h_i}{\partial q^j}\right),$$

כאשר ה- h_i מוגדרים ע"י מטריצה טנזורית:

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}.$$

במערכת קואורדינאטות קרטזיות (x,y,z) :

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$