حساب المثلثات

المستوية

الجزء الاول

تأليف

محمد خالد حسنين بك

مساعد المفتش بوزارة المعارف العمومية

(قررت وزارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب بمدارسها)

« الطبعة الرابعة »

مطبعة المعارف بشارع الفجالة بمصر

١٩١٧

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين (وبعد) فان علم حساب المثلثات علم يتوصل به الانسان لمعرفة كثير من الرياضيات اذ هو من أنفع العلوم لمعرفة علم الفلك والمزاول والمساحات

وقد قررت وزارة المعارف تدريس هذا العلم باللغة العربية كغيره من العلوم الرياضية فرأيت أن الضرورة داعية الى وضع كتاب يكون شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب ففمت بتأليف هذا المختصر وجعلته على أحدث الطرق ورتبته ترتيباً موافقاً لما سنته المعارف المصرية فى هذه النهضة العصرية واجتهدت فى تسهيل عبارته وتقريب أشارته وأكثرت فيه من التمارين وجعلت لكل نوع خاص منها نموذجاً من المسائل المحلولة

وأضفت اليه ملحقاً خاصاً بأجوبة التمارين ليرجع اليها الطالب من حين الى حين

ولما كانت أعمال هذا العلم الحسابية متوقفة على معرفة القواعد اللوغاريتمية جعلت فيه باباً خاصاً باللوغاريتمات وجعلت له ملحقاً خاصاً بالجداول الرياضية وشرحت كيفية استعمالها ليكون تام الفائدة عظيم العائدة ورجوت الله أن يجعله خالصاً لوجهه الكريم وان ينفع به النفع العميم انه على ما يشاء قدير وبالاجابة جدير

محمد خالد حسنين

مواد الجزء الأول

الرموز المستعملة فى هذا الكتاب

الرمز	المدلول	الرمز	المدلول
ط	النسبة التقريبية	ل	اللوغاريتم الجدولى
°	الدرجة الستينية	ا	الزاوية ا فى المثلث ا ب حـ
^{g}	الدرجة المئوية	ب	» » ب »
′	الدقيقة الستينية	حـ	» » حـ »
‵	الدقيقة المئوية	ا′	الضلع الذى يقابل ا فى المثلث ا ب حـ
″	الثانية الستينية	ب′	» » » ب » »
‶	الثانية المئوية	حـ′	» » » حـ » »
ى	الزاوية النصف القطرية	ع	مقدار نصف محيط المثلث ا ب حـ
جا	الجيب	س	√ ع (ع − ا′) (ع − ب′) (ع − حـ′)
جتا	جيب التمام	△	مساحة المثلث
ظا	الظل	نق	نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث
ظتا	ظل التمام	نع	» » » » داخل المثلث
قا	القاطع	نع$_{١}$	» » » التى تمس ا′ وامتداد الضلعين
قتا	قاطع التمام		ب′ ، حـ′
عكا	معكوس الجيب	نع$_{٢}$	نصف قطر الدائرة التى تمس ب′ وامتداد الضلعين
عكتا	متمم معكوس الجيب		حـ′ ، ا′
∞	الى ما لا نهاية له	نع$_{٣}$	نصف قطر الدائرة التى تمس حـ′ وامتداد الضلعين
لو	لوغاريتم		ا′ ، ب′

حساب المثلثات المستوية

الباب الأول

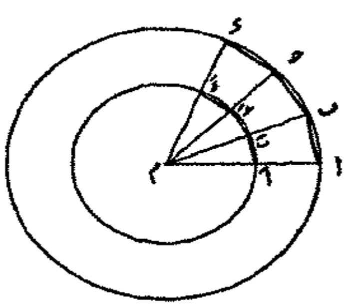
فى ايجاد نسبة محيط الدائرة الى قطرها

بند ١ — محيط الدائرة خط له طول

اذا فرضنا محيط دائرة مكوناً من سلك لين وقطعنا هذا السلك فى احدى نقطه وقومناه بعد ذلك حدث خط مستقيم مساو لمحيط الدائرة فى الطول

بند ٢ — (نظرية) النسبة بين محيط الدائرة وقطرها ثابتة لا تتغير

نفرض دائرتين غير متساويتين نصف قطر الكبرى نق والصغرى نق' ثم نضع الدائرة الصغرى داخل الكبرى بشرط أن يتحدا فى المركز (م) ونقسم الدائرتين الى أقطعة متساوية عددها ن بالمستقيمات م ا' ا ، م ب' ب ، م ح' ح .... الخ ثم نصل ا' ب' ، ب' ح' ، ح' ء' .... الخ ونصل كذلك ا ب ، ب ح ، ح ء .... الخ فيحدث مضلعان منتظمان داخل الدائرتين (كل مضلع فى دائرة وعدد اضلاع كل منهما ن)



(شكل ١)

ويكون
$$\frac{\text{محيط المضلع الخارج}}{\text{محيط المضلع الداخل}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ن}}{\text{ا' ب'} \times \text{ن}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}}$$

ومن حيث ان ا ب يوازى ا' ب'

يكون
$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}} = \frac{\text{م ا}}{\text{م ا'}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق'}}$$

أى ان
$$\frac{\text{محيط المضلع الخارج}}{\text{محيط المضلع الداخل}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق'}} = \frac{\text{قطر الدائرة الخارجة}}{\text{قطر الدائرة الداخلة}}$$

ولكن بازدياد عدد اضلاع المضلعين تدريجاً يصغر طول الضلع ويكثر عدد الاضلاع فى كل منهما وفى النهاية يقرب محيط كل مضلع من محيط دائرته ويكون الفرق بينهما صغيراً جداً الى درجة انه يمكن اعتبار محيط كل منهما محيطاً لدائرته

ويكون $\frac{\text{محيط الدائرة الخارجة}}{\text{محيط الدائرة الداخلة}} = \frac{\text{قطر الدائرة الخارجة}}{\text{قطر الدائرة الداخلة}}$

أى ان $\frac{\text{محيط الدائرة الخارجة}}{\text{قطر الدائرة الخارجة}} = \frac{\text{محيط الدائرة الداخلة}}{\text{قطر الدائرة الداخلة}}$

ومن ذلك نعلم ان نسبة محيط أى دائرة الى قطرها ثابتة وهو المطلوب

بند ٣ ــ المقدار الرقمى للنسبة بين محيط أى دائرة وقطرها لا يمكن حسابه بالتحقيق وانما يمكن حسابه بالتقريب وهو يساوى $\frac{٢٢}{٧}$ تقريباً او يساوى $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ بتقريب أدق من الاول

ومقدار هذه النسبة مقرباً من ثمانية أرقام عشرية هو ٣٫١٤١٥٩٢٦٥ ويرمز عادة الى هذا المقدار بحرف (ط) ويكفى الطالب معرفة المقدارين الآتيين لهذه النسبة وهما ٣٫١٤١٦ ، $\frac{٢٢}{٧}$

بند ٤ ــ اذا رمزنا الى نصف قطر دائرة بالرمز نق نعلم مما ذكر

ان $\frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{٢ نق}} = \text{ط}$

ومن ذلك يكون محيط الدائرة = ٢ ط نق

، ٢ نق = $\frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{ط}}$

بند ٥ ــ أمثلة محلولة للتطبيق على محيط الدائرة والنسبة ط

(مثال ١) عجلة قاطرة ارتفاعها $\frac{٣}{٤}$ ١ من الامتار فما طول محيطها

(الحل) هنا قطر الدائرة = $\frac{٣}{٤}$ ١ من الامتار

ولذلك محيطها = ط × $\frac{٣}{٤}$ ١ من الامتار

= $\frac{٢٢}{٧} \times \frac{٧}{٤}$ «

= $\frac{٢٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ٥ «

اذن محيط العجلة = $\frac{١}{٢}$ ٥ من الامتار

(مثال ٢) اذا فرض ان طول محيط القطعة ذات عشرة القروش يساوى ١١ سنتيمترا فما طول قطرها

(الحل) هنا محيط الدائرة = ١١ سنتيمتراً

ولذلك القطر = $\frac{١١}{ط}$ من السنتيمترات

= ١١ ÷ $\frac{٢٢}{٧}$ »

= $\frac{١١ \times ٧}{٢٢}$ »

= $\frac{٧}{٢}$ = ٣½ »

ادن قطر القطعة ذات عشرة القروش = ٣½ من السنتيمترات

(تمـــارين ١)

(تنبيه) احسب المقدار الرقمى فى الامثلة الآتية للنسبة ط $\frac{٢٢}{٧}$ ما لم يبين مقدار آخر برأس المسألة

(١) اوجد محيط الدائرة التى قطرها يساوى ١٤ متراً

(٢) » » » » نصف قطرها يساوى ٥ أقدام و ٣ بوصات

(٣) » » عجلة دراجة قطرها يساوى ١½ من الامتار

(٤) » قطر الدائرة التى محيطها يساوى ١٠ ياردات

(٥) عجلة قاطرة تدور ١١٣ دورة فى كل كيلومتر ونصف فما طول قطر هذه العجلة (ط = $\frac{٣٥٥}{١١٣}$)

(٦) ما عدد الدورات التى تدورها عجلة دراجة قطرها ٥٠ بوصة فى مسافة قدرها ١٣٠٩ ياردات (ط = ٣٫١٤١٦)

(٧) دراجة مركبة من عجلتين نصف قطر الاولى ٢٤½ من السنتيمترات ونصف قطر الثانية ١٤ سنتيمتراً فما مقدار الدورات التى تزيدها العجلة الثانية على العجلة الاولى فى كل ٩٢٤ متراً

(٨) ساعة حائط طول دُوّارة (عقرب) دقائقها ٢١ سنتيمتراً فما طول المسافة التى يقطعها طرف هذه الدوارة فى كل يوم (٢٤ ساعة)

(٩) قاطرة طول قطر عجلتها ٥ أقدام فما سرعة القاطرة فى الساعة بالاميال مع العلم بأن العجلة تدور ثلاث مرات فى كل ثانية

(١٠) ما نصف قطر عجلة قاطرة تسير بسرعة ٦٠ ميلاً فى الساعة مع العلم بأن العجلة تدور ٤ مرات فى كل ثانية

الباب الثانى

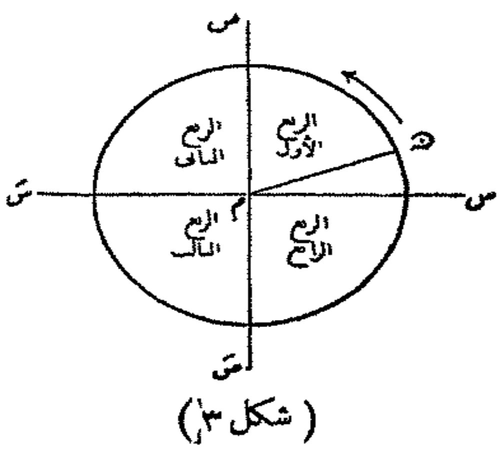
فى قياس الزوايا

بند ٦ — كان الاصل فى وضع علم حساب المثلثات معرفة طريقة قياس المثلثات وحسابها وكان يسمى حساب مثلثات مستوية اوكروية حسبما يكون المثلث مرسوماً فى مستو او على سطح كرة ولكن الآن لفظة حساب مثلثات مستوية صار لها معنى أوسع لانها تشمل جميع المباحث الجبرية الخاصة بالزاوية المستوية سواء كونت مثلثاً أم لم تكونه

بند ٧ — وقد عرّف اقليدس الزاوية فى الهندسة المستوية بأنها مقدار ميل أحد مستقيمين متلاقيين فى نقطة على الآخر ومن هذا التعريف يعلم أن الزوايا التى يبحث عنها فى علم الهندسة كلها أقل من قائمتين فعند الكلام على الزاوية ا م ب مثلا (شكل ٢) يقصد الميل المبين بالقوس ومقداره أقل من قائمتين لا الميل المقابل له فان مقداره اكبر من قائمتين

(شكل ٢)

بند ٨ — أما فى حساب المثلثات فلزاوية ا م ب السابقة ليس لبيان مقدارها حد معين اذ هى مقدار ما فى الدورات التى يدورها م ب حول نقطة م اذا ابتدأ وهو منطبق على م ا حتى يقف ويأخذ الوضع م ب



(شكل ٣)

بند ٩ — ولبيان معنى الزاوية فى حساب المثلثات بطريقة اوضح تفرض مستقيمين متقاطعين ومتعامدين مثل س م سَ ، ص م صَ ثم نتخيل مستقيما آخر مثل م هـ منطبقاً على م س ثم اخذ يدور حول نقطة م فى الجهة المبينة بالسهم (شكل ٣) راسماً دائرة بطرفه هـ

فعند ما ينطبق م هـ على م ص يكون مقدار الزاوية الحادثة قائمة

وعند ما » » » » م سَ » » » » قائمتين

» » » » » م صَ » » » » ثلاث قوائم

» » » » » م س ثانياً » » » » اربع قوائم

وفى الوضع الاخير يكون الضلع م ﻫ فى نفس الوضع الذى كان فيه قبل البدء بالدوران (وان كان مقدار الزاوية الآن اربع قوائم)

وباستمرار م ﻫ على الدوران يأخذ الاوضاع الاولى ثانية
فعندما ينطبق م ﻫ على م ص يكون مقدار الزاوية الحادثة ٥ قوائم
وعندما » » » م س´ » » » » ٦ »
» » » » م ص´ » » » » ٧ »
» » » » م س » » » » ٨ »

وهكذا فباستمرار م ﻫ على الدوران يزيد مقدار الزاوية الحادثة ٤ قوائم فى كل دورة كاملة

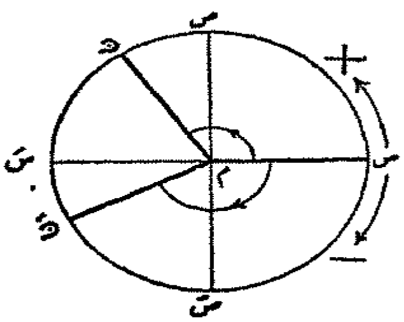
بند ١٠ — المستقيان س م س´ ، ص م ص´ (شكل ٣) يقسمان الدائرة الى اربعة اقسام متساوية ويسمى القسم س م ص بالربع الاول والقسم ص م س´ بالربع الثانى والقسم س´ م ص´ بالربع الثالث والقسم ص´ م س بالربع الرابع

واذا وقف الخط الدائر م ﻫ بين م س ، م ص يقال ان الزاوية س م ﻫ فى الربع الاول
واذا وقف بين م ص ، م س´ يقال ان الزاوية الحادثة فى الربع الثانى
واذا وقف بين م س´ ، م ص´ يقال ان الزاوية الحادثة فى الربع الثالث
واذا وقف بين م ص´ ، م س يقال ان الزاوية الحادثة فى الربع الرابع

بند ١١ — اذا كان اتجاه دوران الخط مضاداً اتجاه تحرك دُوارتى الساعة (عقربيها) كان مقدار الزاوية الحادثة موجباً وسميت جهة الدوران بالجهة الموجبة

واذا كان دورانه موافقا اتجاه تحركهما كان مقدار الزاوية الحادثة سالباً وسميت جهة الدوران بالجهة السالبة

ففى (شكل٤) الزاوية س م ﻫ موجبة والزاوية س م ﻫ´ سالبة



(شكل ٤)

(تمارين ٢)

ارسم اشكالاً هندسية تدل على الزوايا الاتية

(١) + ٥ قوائم	(٥) + ٦ ١/٤ من القوائم	(٩) + ٨ ١/٣ من القوائم
(٢) — ٩ ٢/٣ من القوائم	(٦) — ١٠ ١/٤ من القوائم	(١٠) — ٧ ١/٣ من القوائم
(٣) — ١ قائمة	(٧) — ٤ قوائم	(١١) + ٣ ١/٤ من القوائم
(٤) + ٣ قوائم	(٨) + ٢ ١/٥ من القوائم	(١٢) — ١٢ ١/٥ من القوائم

بند ١٢ — ولقياس الزوايا طريقتان

(الاولى) بواسطة الدرجات

(الثانية) بواسطة الاقواس

بند ١٣ — طريقة قياس الزوايا بواسطة الدرجات

اذا انتخبت زاوية وحدة للزوايا فمقدار أى زاوية تقاس بهذه الوحدة هو عدد مرات احتواء هذه الزاوية على الوحدة ويمكن اتخاذ الزاوية القائمة وحدة كما هو المتبع فى قياس الزوايا فى الاعمال الهندسية الا ان الاوفق اتخاذ الوحدة أصغر من القائمة وعلى ذلك قسمت الزاوية القائمة الى اجزاء متساوية واعتبر كل جزء من اجزائها وحدة وقد نشأ عن هذا التقسيم طريقتان وهما

(١) الطريقة الستينية (٢) والطريقة المئوية

البـــاب الثالث

فى الطريقة الستينية

بند ١٤ — تسمى هذه الطريقة بالطريقة القديمة لانها معروفة قبل الطريقة المئوية وفيها تنقسم الزاوية القائمة الى ٩٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى درجة واعتبرت الدرجة وحدة وتنقسم الدرجة الى ٦٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى دقيقة والدقيقة الى ٦٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى ثانية

والالات المستعملة لقياس الزوايا بهذه الطريقة مقسمة هذا التقسيم

ولسهولة الاستدلال على هذه المقادير المختلفة يرمز الى الدرجة بالرمز (°) والى الدقيقة بالرمز (´) والى الثانية بالرمز (˝) فالزاوية التى قدرها ٦٩ درجة + ١٧ دقيقة + ٥٧ ثانية تكتب هكذا

٦٩° ١٧´ ٥٧˝

وسميت هذه الطريقة بالطريقة الستينية بسبب تقسيم الدرجة الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهذه هى الطريقة الانجليزية وهى التى سنسلكها فى اعمالنا لكثرة استعمال جداولها اللوغاريتمية

بند ١٥ — اذا علم مقدار زاوية مقدراً بالقوائم واريد ايجاد مقدارها بالتقدير الستينى تتبع فى ذلك القواعد الحسابية العادية واذا علم مقدارها بالتقدير الستينى واريد معرفة عدد القوائم التى تشتمل عليها هذه الزاوية تتبع القواعد الحسابية ايضاً وللتطبيق على ذلك نمثل بالامثلة الآتية فنقول

(مثال ١) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{١}{٧}$ ١ قائمة بالتقدير الستينى

(الحل) — اولاً — نحول $\frac{١}{٧}$ ١ قائمة الى درجات بضربها فى ٩٠ فينتج $\frac{٦}{٧}$ ١٠٢°

— ثانياً — نحول $\frac{٦}{٧}$ درجة الى دقائق بضربها فى ٦٠ فينتج $\frac{٣}{٧}$ ٥١´

— ثالثاً — نحول $\frac{٣}{٧}$ دقيقة الى ثوان بضربها فى ٦٠ فينتج $\frac{٥}{٧}$ ٢٥˝

وعلى ذلك فالزاوية التى مقدارها $\frac{١}{٧}$ ١ قائمة = $\frac{٥}{٧}$ ٢٥˝ ٥١´ ١٠٢°

(مثال ٢) مامقدار الزاوية التى مقدارها ٩˝ ٦´ ١٣٦° بالقوائم

(الحل) — اولاً — نحول ٩˝ الى دقائق بقسمتها على ٦٠ فينتج ٠,١٥´

— ثانياً — نضيف ٠,١٥´ الى ٦´ ونحول المجموع الى درجات بقسمته على ٦٠ فينتج ٠,١٠٢٥°

— ثالثاً — نضيف ٠,١٠٢٥° الى ١٣٦° ونحول المجموع الى قوائم بقسمته على ٩٠ فينتج ١,٥١٢٢٥ من القوائم

وعلى ذلك فالزاوية التى مقدارها ٩″ ٦′ ١٣٦° = ١,٥١٢٢٥ من القوائم

(مثال ٢) ما مقدار زاوية المسبع المنتظم بالتقدير الستينى

(الحل) — اولاً — نبحث عن مقدار الزاوية بالقوائم فنجد انها = $\frac{٢\times٧-٤}{٧}$ من القوائم
او = ١ $\frac{٣}{٧}$ قائمة

— ثانياً — نحول ١ $\frac{٣}{٧}$ قائمة الى درجات ودقائق وثوان كما عملنا فى مثال (١)
فينتج ان زاوية المسبع المنتظم = ١٧ $\frac{١}{٧}$″ ٣٤′ ١٢٨°

(تمارين ٣)

(١) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{١}{٣٣}$ من القائمة بالتقدير الستينى
(٢) » » » » » ٤٩ر٢٦° » »
(٣) » » » » » ٩٦٧ر٢ من القوائم » »
(٤) » » » » » ٦٤٨٥ر١ من القوائم » »
(٥) ما مقدار الزاوية التى مقدارها ١٨″ ١٥′ ١٣٢° بالقوائم
(٦) » » » » » ١٧″ ١٩′ ٦٣° »
(٧) » » » » » ٥٩″ ٥٩′ ٩٤° »
(٨) مثلث متساوى الساقين مقدار زاوية قاعدته يساوى ٩″ ٩′ ٤٩° فما مقدار زاوية رأسه بالقوائم
(٩) مثلث نصف مجموع زاويتين من زواياه يساوى ٨٠° ونصف فرق هاتين الزاويتين يساوى ١٠° فما مقدار زواياه الثلاث بالقوائم
(١٠) أوجد مقدار الزوايا الآتية بالتقدير الستينى
(١) زاوية المسدس المنتظم (٢) زاوية المعشر المنتظم (٣) زاوية ذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم

الباب الرابع

فى الطريقة المئوية

بند ١٦ — تسمى هذه الطريقة بالطريقة الجديدة لحداثة استعمالها وفيها تنقسم الزاوية القائمة الى ١٠٠ جزء متساوية كل جزء منها يسمى درجة واعتبرت الدرجة وحدة وتنقسم الدرجة الى ١٠٠ جزء متساوية كل جزء منها يسمى دقيقة والدقيقة الى ١٠٠ جزء متساوية كل جزء منها يسمى ثانية والآلات المستعملة لقياس الزوايا بهذه الطريقة مقسمة هذا التقسيم

واسهولة الاستدلال على هذه المقادير المختلفة يرمز الى الدرجة بالرمز (°) والى الدقيقة بالرمز (`) والى الثانية بالرمز (") فالزاوية التى قدرها ٣٦ درجة + ١٥ دقيقة + ٣٤ ثانية تكتب هكذا

٣٤" ١٥` ٣٦°

وسميت هذه الطريقة بالطريقة المئوية لتقسيم أجزاء القائمة على التوالى الى ١٠٠ جزء وهذه هى الطريقة الفرنسية

(ملاحظة) يراعى ان رموز التقسيم المئوى تخالف رموز التقسيم الستينى وذلك لسهولة التميز بينهما عند الكتابة

بند ١٧ — اذا علم مقياس زاوية مقدراً بالقوائم وأريد ايجاد مقياسها بالتقدير المئوى نتبع فى ذلك القواعد الحسابية العادية واذا علم مقياسها بالتقدير المئوى وأريد معرفة عدد القوائم التى تشتمل عليها هذه الزاوية نتبع القواعد الحسابية أيضاً وللتطبيق على ذلك نمثل بالامثلة الآتية فنقول

(مثال ١) ما مقياس الزاوية التى تساوى ١ $\frac{1}{7}$ قائمة بالتقدير المئوى

(الحل) — اولاً — نحول ١ $\frac{1}{7}$ قائمة الى درجات بضربها فى ١٠٠ فينتج ١١٤ $\frac{2}{7}$°

— ثانياً — نحول $\frac{2}{7}$ درجة الى دقائق بضربها فى ١٠٠ فينتج ٢٨ $\frac{4}{7}$`

— ثالثاً — نحول $\frac{4}{7}$ دقيقة الى ثوان بضربها فى ١٠٠ فينتج ٥٧ $\frac{1}{7}$"

وعلى ذلك فالزاوية التى مقدارها ١ $\frac{1}{7}$ قائمة = ٥٧ $\frac{1}{7}$" ٢٨` ١١٤°

(مثال ٢) ما مقدار الزاوية التى تساوى ٩" ٦٥` ٣٦° بالقوائم

(الحل) — اولاً — نحول الثوانى الى دقائق بقسمتها على ١٠٠ فينتج ٠٫٠٩`

— ثانياً — نضيف ٠٫٠٩` الى ٦٥` ونحول المجموع الى درجات بقسمته على ١٠٠ فينتج ٠٫٦٥٠٩°

— ثالثاً — نضيف ٠٫٦٥٠٩° الى ٣٦° ونحول المجموع الى قوائم بقسمته على ١٠٠ فينتج ٠٫٣٦٦٥٠٩ من القائمة

وعلى ذلك فالزاوية التى مقدارها ٩" ٦٥' ٣٦° = ٠ر٣٦٦٥٠٩ من القائمة

(ملاحظة) يراعى فى الجواب (٠ر٣٦٦٥٠٩) الموضوع على صورة كسر عشرى ان العدد المكون من الرقم الاول والثانى بعد الشرطة عبارة عن عدد الدرجات والعدد المكون من الثالث والرابع عبارة عن عدد الدقائق والعدد المكون من الخامس والسادس عبارة عن عدد الثوانى

وعلى ذلك فالزاوية التى قدرها ٠ر٢٥٠٧٣٤ من القائمة تساوى ٣٤" ٧' ٢٥°

(مثال ٣) ما مقدار زاوية المسبع المنتظم بالتقدير المئوى

(الحل) — أولاً — نبحث عن مقدار الزاوية بالقوائم فنجد انها تساوى $\frac{١٠}{٧}$ قائمة

— ثانياً — نحول $\frac{١٠}{٧}$ قائمة الى درجات ودقائق وثوان كما فعلنا فى مثال (١)

فينتج ان زاوية المسبع المنتظم = $\frac{٣}{٧}$٧١" ٨٥' ١٤٢°

(تمارين ٤)

(١) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{١}{٣٢}$ من القائمة بالتقدير المئوى

(٢) » » » » » ٤٩ر٢٦٤٠° » »

(٣) » » » » » ٢ر٩٦٧٠٣٤ من القوائم » »

(٤) » » » » » ١ر٠٧٠٦٠٥ من القوائم » »

(٥) » » » » » ١٨" ١٥' ١٣٢° بالقوائم

(٦) » » » » » ١٧" ١٩' ٦٣° »

(٧) » » » » » ٩٥" ٥٩' ٩٤° »

(٨) مثلث متساوى الساقين مقدار زاوية رأسه ١٨" ٩' ٤٩° فما مقدار زاوية قاعدته بالقوائم

(٩) مثلث ا ب حـ فيه ∠ ا = ١٧" ١٣' ٤٥° و∠ ب ضعف ∠ ا فما مقدار ∠ حـ بالقوائم

(١٠) أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير المئوى

(١) زاوية المسدس المنتظم (٢) زاوية المعشر المنتظم (٣) زاوية ذى الخمسة عشر ضلعاً المنتظم

البـــاب الخامس

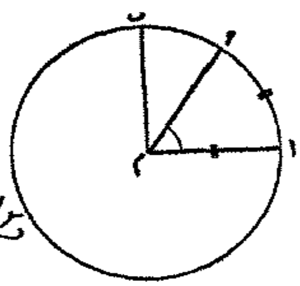
فى طريقة قياس الزوايا بواسطة الأقواس

وتسمى

بالتقدير الدائرى

بند ١٨ — علمنا فى الهندسة المستوية ان الزاوية المركزية تقاس بطول القوس المحصورة بين ضلعيها منسوباً هذا الطول الى طول محيط الدائرة المرسومة فيها الزاوية او الى طول جزء من ثلثمائة وستين جزءاً من المحيط (الدرجة) كذلك فى حساب المثلثات قياس اى زاوية بواسطة التقدير الدائرى (بالاقواس) هو ايجاد النسبة بين طول القوس المحصورة بين ضلعى هذه الزاوية على أنها زاوية مركزية وبين طول قوس آخرى متخذة وحدة وبعبارة أخرى هو ايجاد عدد مرات احتواء هذه الزاوية على زاوية اخرى مركزية طول قوسها يساوى طول القوس المتخذة وحدة وقبل تعيين القوس المتخذة وحدة فى هذا التقدير يجب معرفة النظرية الاساسية الآتية

بند ١٩ — (نظرية) مقدار الزاوية المركزية التى طول قوسها المحصورة بين ضلعيها يساوى طول نصف قطر دائرتها ثابت لا يتغير



(شكل ٥)

(البرهان) نجعل نقطة مثل م مركزاً ونرسم دائرة بنصف قطر = م ا ثم نجعل القوس ا حـ = طول نصف القطر ونرسم م ب عموداً على م ا

فمن حيث ان نسبة الزوايا المركزية بعضها الى بعض كنسبة أقواسها المقابلة لها

$$\text{يكون}\quad \frac{\angle\, ا\,م\,حـ}{\angle\, ا\,م\,ب} = \frac{\text{القوس ا حـ}}{\text{القوس ا ب}} = \frac{\text{نصف القطر م ا}}{\text{ربع محيط الدائرة}} = \frac{ں}{\frac{٢\ ط\ ں}{٤}} = \frac{٢}{ط}$$

واذا رمزنا الى الزاوية القائمة ا م ب بحرف ں

$$\text{يكون}\quad \frac{\angle\, ا\,م\,حـ}{ں} = \frac{٢}{ط}$$

$$\therefore\quad \angle\, ا\,م\,حـ = \frac{٢}{ط} \times ں = \text{مقداراً ثابتاً}$$

وهو المطلوب

هذه الزاوية الثابتة تسمى الزاوية النصف القطرية

فالزاوية النصف القطرية اذا تساوى $\frac{٢}{ط} \times ٩٠ = ٥٧\ ١٧\ ٤٤$

بند ٢٠ — (تعريف) الزاوية المركزية التى طول قوسها المحصورة بين ضلعيها يساوى نصف القطر تسمى الزاوية النصف القطرية

بند ٢١ — تقدم ان مقدار الزاوية النصف القطرية ثابت ولذا قد اتخذت وحده لقياس الزوايا فى التقدير الدائرى

بند ٢٢ — (تعريف) التقدير الدائرى لزاوية معلومة هو عدد الزوايا النصف القطرية التى تحتوى عليها هذه الزاوية المعلومة

بند ٢٣ — ولسهولة الاستدلال على هذا التقدير يرمز اليه عادة بالرمز (ى) فالزاوية التى قدرها ١٤ زاوية نصف قطرية تكتب هكذا

١٤ى

ويجوز فى هذا التقدير حذف الرمز (ى) عند ما يكون المقدار مبيناً بالحروف بدل الارقام فاذا قيل ان زاوية مقدارها ح يستدل من حذف الرمز انها تساوى زوايا نصف قطرية عددها ح

واذا قيل ان زواية مقدارها ط يستدل من ذلك انها تساوى ..... ٣٫١٤١٥٩ى او تساوى زوايا نصف قطرية عددها ..... ٣٫١٤١٥٩

بند ٢٤ — ولعدم الالتباس يكتب الرمز أحياناً وان كان التقدير معيناً بالحروف ما دام حرف التقدير غير ط

وأما اذا كان ط أو مضاعفه فلا يكتب الرمز عادة فالزاوية التى مقدارها ٢ ط مثلا عبارة عن الزاوية التى تساوى زوايا نصف قطرية عددها ٢ ط

بند ٢٥ — ايجاد مقدار الزاوية النصف القطرية بالدرجات السينية والمئوية

تقدم فى بند ١٩ ان الزاوية النصف القطرية = ٢/ط من القائمة

فبالدرجات الستينية « » » = ٢/٣٫١٤١٦ × ٩٠° = ٤٤″ ١٧′ ٥٧° تقريباً

وبالدرجات المئوية « » » = ٢/٣٫١٤١٦ × ١٠٠ᵍ = ١٩‶ ٦٦‵ ٦٣ᵍ تقريباً

(ملاحظة) يراعى ان هذه الزاوية اصغر قليلاً من زاوية المثلث المتساوى الاضلاع

بند ٢٦ — التقدير الدائرى للزاوية القائمة ومضاعفاتها

تقدم فى بند ١٩ ان الزاوية النصف القطرية = ٢/ط من القائمة = ٢ق/ط

ومن ذلك يكون ط من الزوايا النصف القطرية = ٢ ق

اى ان قائمتين = ط من الزوايا النصف القطرية

و قائمة = ط/٢ » » » »

و ن قوائم = ن × ط/٢ » » » » (سواء كان ن عدداً صحيحاً أم كسراً)

بند ٢٧ — اذا علم مقياس زاوية مقدراً بالقوائم وأريد ايجاد مقياسها بالتقدير الدائرى نتبع فى ذلك القواعد الحسابية العادية واذا علم مقياسها بالتقدير الدائرى وأريد معرفة عدد القوائم التى تشتمل عليها هذه الزاوية نتبع القواعد الحسابية ايضاً وللتطبيق على ذلك نمثل بالامثلة الآتية فنقول

(مثال ١) ما مقياس الزاوية التى تساوى $\frac{١}{٧}$ ٢ من القوائم بالتقدير الدائرى

(الحل) تقدم فى بند ٢٦ ان الزاوية القائمة $=\frac{ط}{٢}$ من الزوايا النصف القطرية

فتكون الزاوية التى قدرها $\frac{١}{٧}$ ٢ من القوائم $=\frac{١٥}{٧}\times\frac{ط}{٢}=\frac{١٥}{١٤}\times$ ط » » » » » »

واذا أريد حساب الناتج بالارقام يضرب $\frac{١٥}{١٤}$ فى ٣٫١٤١٦

ولكن يكتفى بوضع الجواب هكذا ($\frac{١٥ط}{١٤}$)

(مثال ٢) ما مقدار الزاوية التى تساوى ٣ء بالقوائم

(الحل) تقدم فى بند ١٩ ان ١ء $=\frac{٢ق}{ط}$

فتكون الزاوية التى مقدارها ٣ء $=٣\times\frac{٢ق}{ط}=\frac{٦ق}{ط}$

(مثال) ما مقدار زاوية المسبع المنتظم بالتقدير الدائرى

(الحل) — أولا — نبحث عن مقدار هذه الزاوية بالقوائم فنجد انها $=\frac{١٠ق}{٧}$

— ثانياً — نحول $\frac{١٠ق}{٧}$ الى زوايا نصف قطرية بضربها فى $\frac{ط}{٢}$ كما تقدم فى المثال الاول

فينتج ان زاوية المسبع المنتظم $=\frac{٥ط}{٧}$ زوايا نصف قطرية

(تمارين ٥)

(١) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{١}{٣٢}$ من القائمة بالتقدير الدائرى

(٢) » » » » » ١٫٨ من القوائم » »

(٣) » » » » » ٢٫٤٥ » » » »

(٤) » » » » » $١\frac{٣}{٤}$ » » » »

(٥) » » » » » $\frac{١}{ط}$ » » » »

(٦) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{٣ط}{٤}$ من القوائم

(٧) » » » » » $\frac{٢ء}{ط}$ »

(٨) » » » » » ٥ء »

(٩) » » » » » ٣٫١٤١٥٩٢٦٥..... ء بالقوائم

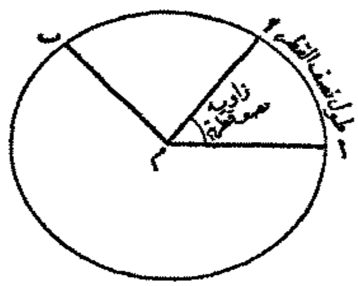
(١٠) » » » » » ٠٫٠٠٣١٤١٥٩..... ء »

(١١) أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير الدائرى

(١) زاوية المسدس المنتظم (٢) زاوية المعشر المنتظم (٣) زاوية ذى الخمسة عشر ضلعاً المنتظم

بند ٢٨ — (نظرية) عدد الزوايا النصف القطرية التى فى زاوية مركزية

$$= \frac{\text{القوس المحصورة بين ضلعى الزاوية}}{\text{نصف قطر الدائرة}}$$



(شكل ٦)

(البرهان) نفرض ان ا م ب زاوية مركزية قوسها ا ب وان الزاوية ا م حـ زاوية نصف قطرية قوسها ا حـ

فبما ان نسبة الزوايا المركزية بعضها الى بعض كنسبة الاقواس المقابلة لها

$$\text{يكون } \frac{\angle\,\text{ا م ب}}{\angle\,\text{ا م حـ}} = \frac{\text{القوس ا ب}}{\text{القوس ا حـ}} = \frac{\text{القوس ا ب}}{\text{نصف القطر}}$$

ومن هذا نعلم ان التقدير الدائرى لزاوية مركزية هو النسبة بين القوس المحصورة بين ضلعيها و بين نصف قطر الدائرة وهو المطلوب

بند ٢٩ — أمثلة محلوله للتطبيق على النظرية السابقة

(مثال ١) أوجد عدد الزوايا النصف القطرية التى تحتوى عليها زاوية مركزية طول نصف قطر دائرتها ٤ سنتيمترات وطول قوسها ١٠ سنتيمترات

(الحل) مما تقدم نعلم ان التقدير الدائرى للزاوية المفروضة $= \dfrac{\text{طول قوسها}}{\text{نصف القطر}}$

أى ان الزاوية المفروضة $= \frac{\text{١٠}}{\text{٤}}$ من الزوايا النصف القطرية

$= \text{٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ من الزوايا النصف القطرية

(مثال ٢) زاوية مركزية طول قوسها $\text{٤٦}\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ من السنتيمترات وطول نصف قطرها ٢٥ سنتيمتراً فما طول قوسها بالدرجات المئوية

(الحل) مما تقدم فى المثال الاول نعلم ان الزاوية المفروضة $= \dfrac{\text{٤٦}\frac{\text{٣}}{\text{٤}}}{\text{٢٥}}$ من الزوايا النصف القطرية

$= \frac{\text{١٨٧}}{\text{١٠٠}} \times \frac{\text{٢}}{\text{ط}}$ من القوائم

$= \frac{\text{١٨٧}}{\text{١٠٠}} \times \dfrac{\text{٢}}{\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}} \times \text{١٠٠}$ من الدرجات المئوية

$= \frac{\text{١٨٧} \times \text{٢} \times \text{٧} \times \text{١٠٠}}{\text{١٠٠} \times \text{٢٢}}$ « « «

$= \text{١٧} \times \text{٧} = \underline{\text{١١٩}}^{\text{د}}$ تقريباً

(تمــارين ٦)

(تنبيه) احسب المقدار الرقمى فى الامثلة الآتية للنسبة ط $\frac{٢٢}{٧}$

(١) ما هو التقدير الدائرى لزاوية مركزية طول نصف قطر دائرتها ٢٥ ديسيمتراً وطول قوسها ٣٧٥ سنتيمتراً

(٢) زاوية مركزية طول قوسها ٣ ط من الاقدام وطول نصف قطر دائرتها ٦ أقدام فما مقدارها بالدرجات الستينية

(٣) ما عدد الزوايا القوائم التى تشتمل على زاوية مركزية طول نصف قطر دائرتها ٣ $\frac{٢}{٢٢}$ من السنتيمترات وطول قوسها ٢٤ سنتيمتراً

(٤) زاوية مركزية طول نصف قطر دائرتها ٥٠ سنتيمتراً وطول قوسها $\frac{١}{٢}$ سنتيمتر فما مقدارها بالدقائق المئوية

(٥) ما طول قوس الزاوية المركزية التى تساوى ٢ $\frac{١}{٤}$ من الزوايا النصف القطرية مع العلم بأن طول نصف قطر دائرتها يساوى ٢٥ سنتيمتراً

(٦) زاوية مركزية قوسها يساوى ٦٠° فما طول هذه القوس اذا علم ان نصف قطر دائرتها يساوى ٧ سنتيمترات

(٧) زاوية مركزية قوسها يساوى ٨٠° فما طول هذه القوس اذا علم ان طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٤ سنتيمتراً

(٨) زاوية مركزية طول قوسها $\frac{ط}{٣}$ وطول نصف قطر دائرتها $\frac{٣}{ط}$ فما مقدارها بالتقدير الستينى

(٩) قطار يسير بسرعة ٢٠ كيلومترا فى الساعة فى دائرة نصف قطرها يساوى $\frac{١}{٢}$ كيلومتر فما مقدار الزاوية التى يقطع قوسها القطار بعد مضى ٢٠ ثانية (المقدار بالتقدير الستينى)

(١٠) ما طول قوس الزاوية المركزية التى تساوى ٢″ مع العلم بأن نصف قطر دائرتها = ٢٠٠٠ ميل

(١١) زاوية مركزية طول قوسها $\frac{١}{٢}$ متر وطول نصف قطر دائرتها ٢٠٠٠ متر فما مقدارها بالقياس الستينى

(١٢) ما الفرق بين خطى عرض مدينتين احداهما شمال الاخرى وعلى بعد ٣٠ ميلاً منها بفرض ان نصف قطر الكرة الارضية يساوى ٤٠٠٠ ميل (الجواب بالتقدير الستينى)

الباب السادس

فى كيفية تحويل مقاييس الزوايا المختلفة بعضها الى بعض

بند ٣٠ — علمنا مما تقدم أنه يوجد ثلاث طرق مختلفة لقياس الزوايا والآن نبحث فى طريقة تحويل أى نوع منها الى الآخر

وقبل الكلام على كيفية التحويل يجب معرفة النظرية الاساسية الآتية

بند ٣١ — (نظرية) اذا فرض ان ب ، ح ، ء تدل على مقادير الدرجات الستينية والدرجات المئوية والتقدير الدائرى لزاوية ما فبرهن على أن

$$\frac{ب}{١٨٠} = \frac{ح}{٢٠٠} = \frac{ء}{ط}$$

(البرهان) نعلم مما تقدم فى الابواب الثلاثة السابقة لهذا الباب

ان ١٨٠ يدل على مقدار زاويتين قائمتين بالدرجات الستينية

وان ٢٠٠ « « « « « بالدرجات المئوية

« ط « « « « « بالتقدير الدائرى أو بالزوايا النصف القطرية

اذن فكل كسر من الكسور الثلاثة السابقة عبارة عن النسبة بين الزاوية المفروضة وزاويتين قائمتين وتكون حينئذ كلها متساوية وهو المطلوب

بند ٣٢ — ويشتمل تحويل مقاييس الزوايا المختلفة بعضها الى بعض على ست حالات. ويمكن استخدام النظرية السابقة فى حل كل من الحالات الست المختلفة وذلك كما سنبينه بعد

بند ٣٣ — (الحالة الاولى) لايجاد الدرجات المئوية لزاوية علم مقدارها بالدرجات الستينية

(مثال) ما مقدار الزاوية ٤٥″ ٥١′ ٢٤° بالدرجات المئوية

(الحل) — أولاً — نحول الدقائق والثوانى الى كسر عشرى من الدرجات بالطريقة المتبعة فى المثال الثانى من بند ١٥ فينتج ان ٤٥″ ٥١′ ٢٤° = ٢٤,٨٦٢٥°

— ثانياً — نفرض ان مقدار هذه الزاوية بالدرجات المئوية هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{س}{٢٠٠} = \frac{٢٤,٨٦٢٥}{١٨٠}$$

ومنه س = ٢٤,٨٦٢٥ × $\frac{٢٠٠}{١٨٠}$ من الدرجات المئوية

= ٢٤,٨٦٢٥ × $\frac{١٠}{٩}$ « « «

= $\frac{٢٤٨,٦٢٥}{٩}$ « « «

= ٢٧,٦٢٥° « « «

وعلى ذلك يكون مقدار الزاوية المفروضة بالدرجات المئوية هو ٥٠″ ٦٢` ٢٧°

(تمـــارين ٧)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير المئوى

(١) ٢٨°	(٥) ١٨″ ٢٤′	(٩) ١٨″ ٠′ ١٩°
(٢) ٢٧″ ١٥′ ٨°	(٦) ١٥″ ٥′ ٩٧°	(١٠) ٤٩°
(٣) ٤٦″ ١٥′ ٢٧°	(٧) ٩′ ١٤٣°	(١١) ٢٥″ ٧′ ٥٦°
(٤) ٣٠″ ٤′ ٦°	(٨) ٦′ ١٣٢°	(١٢) ٣٦″ ٣٦′

بند ٣٤ — (الحالة الثانية) لايجاد الدرجات الستينية لزاوية علم مقدارها بالدرجات المئوية

(مثال) ما مقدار الزاوية ٥٦″ ٣٤′ ٤٢° بالدرجات الستينية

(الحل) — أولاً — نحول الدقائق والثوانى الى كسر عشرى من الدرجات بالطريقة المتبعة فى المثال الثانى من بند ١٧ فينتج ان ٥٦″ ٣٤′ ٤٢° = ٤٢,٣٤٥٦°

— ثانياً — نفرض ان مقدار هذه الزاوية بالدرجات الستينية هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{س}{١٨٠} = \frac{٤٢,٣٤٥٦}{٢٠٠}$$

ومنه س = ٤٢,٣٤٥٦ × $\frac{١٨٠}{٢٠٠}$ من الدرجات الستينية

= ٤٢,٣٤٥٦ × $\frac{٩}{١٠}$ » » »

= $\frac{٣٨١,١١٠٤}{١٠}$ » » »

= ٣٨,١١١٠٤°

— ثالثاً — نحول ٠,١١١٠٤° الى دقائق وثوان بالطريقة المتبعة فى المثال الاول من بند ١٥ فينتج ان ٠,١١١٠٤° = ٣٩,٧٤٤″ ٦′

وعلى ذلك يكون مقدار الزاوية المعروضة بالدرجات الستينية هو ٣٩,٧٤٤″ ٦′ ٣٨°

(تمـــارين ٨)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير الستينى

(١) ٥٠″ ٣٧′ ١°	(٥) ٣٥°	(٩) ٢٥″ ٠′ ٢٤°
(٢) ٣٥″ ٤٥′ ١٧٠°	(٦) ٧٥′ ٢٩°	(١٠) ٤٣°
(٣) ٧٥′ ٨°	(٧) ١٥″ ١′ ١٨°	(١١) ٢٥″ ٧′ ٢٥°
(٤) ٩٥″ ٤٥′ ١٩°	(٨) ٨″ ٥′ ١٢٤°	(١٢) ٣٦″ ٣٦′

بند ٣٥ — (الحالة الثالثة) لايجاد الزوايا النصف القطرية لزاوية علم مقدارها بالدرجات الستينية

(مثال) ما مقدار الزاوية ١٥″ ٥′ ٤٣° بالتقدير الدائرى

(الحل) — أولاً — نحول الدقائق والثوانى الى كسر عشرى من الدرجات بالطريقة المتبعة فى المثال الثانى من بند ١٥ فينتج ان ١٥″ ٥′ ٤٣° = ٤٣٫٠٨٧٥°

— ثانياً — نفرض ان مقدار الزاوية بالزوايا النصف القطرية هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{٤٣٫٠٨٧٥}{١٨٠} = \frac{س}{ط}$$

ومنه س = ٤٣٫٠٨٧٥ × $\frac{ط}{١٨٠}$ من الزوايا النصف القطرية

وعلى ذلك يكون مقدار الزاوية المفروضة بالتقدير الدائرى هو

$\frac{٤٣٫٠٨٧٥}{١٨٠}$ ط = $\frac{٤٣٠٨٧٥}{١٨٠٠٠٠٠}$ ط = $\frac{٤٧٨٧٥}{٢٠٠٠٠٠}$ ط = ٠٫٢٣٩٣٧٥ ط من الزوايا النصف القطرية

(تمارين ٩)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير الدائرى

(١) ١٨٠°

(٢) ٣٠′ ٢٢°

(٣) ١٥′ ١١°

(٤) ١°

(٥) ١٣′ ٢٤°

(٦) ٢٠′ ٩٥°

(٧) ٤″ ٥′ ١٢°

(٨) $\frac{٩٠°}{ط}$

(٩) زوايا المثلث المتساوى الاضلاع

(١٠) زوايا المثلث القائم الزاوية ذى الساقين المتساويتين

بند ٣٦ — (الحالة الرابعة) لايجاد الدرجات الستينية لزاوية علم مقدارها بالتقدير الدائرى

(مثال) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{٣ط}{٥}$ من الزوايا النصف القطرية بالدرجات الستينية

(الحل) نفرض ان مقدار هذه الزاوية بالدرجات الستينية هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{س}{١٨٠} = \frac{\frac{٣ط}{٥}}{ط}$$

ومنه س = $\frac{٣ط}{٥}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ من الدرجات الستينية

وعلى ذلك فمقدار الزاوية المفروضة بالدرجات الستينية هو $\frac{٣ط × ١٨٠}{٥ × ط}$ = $\frac{٣ × ١٨٠}{٥}$ = ١٠٨°

(تمارين ١٠)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالدرجات الستينية

(١) ط

(٢) ١ د

(٣) $\frac{٣ط}{٤}$

(٤) $\frac{ط}{٦}$

(٥) ٣ د

(٦) $\frac{٢ط}{٣}$

(٧) ٥ ط

(٨) $\frac{\overline{٢}}{٣}$ د

(٩) ٠٫٣١٤١٥٩ ..... د

(١٠) ٣١٫٤١٥٩ ..... د

بند ٣٧ — (الحالة الخامسة) لايجاد الزوايا النصف القطرية لزاوية علم مقدارها بالدرجات المئوية

(مثال) ما مقدار الزاوية ٤٠" ٢٣` ١٥° بالتقدير الدائرى

(الحل) — أولا — نحول الدقائق والثوانى الى كسر عشرى من الدرجات بالطريقة المتبعة فى المثال الثانى من بند ١٧ فينتج ان ٤٠" ٢٣` ١٥° = ١٥٫٢٣٤٠°

— ثانياً — نفرض ان مقدار هذه الزاوية بالتقدير الدائرى هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{١٥٫٢٣٤٠}{٢٠٠} = \frac{س}{ط}$$

ومنه س = ١٥٫٢٣٤٠ × $\frac{ط}{٢٠٠}$ من الزوايا النصف القطرية

وعلى ذلك يكون مقدار الزاوية المفروضة بالتقدير الدائرى هو $\frac{١٥٫٢٣٤٠ ط}{٢٠٠}$

= ٧٦١٧ و٠ ط من الزوايا النصف القطرية

(تمارين ١١)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالتقدير الدائرى

(١)	٥٠°	(٥)	١٠"	(٩)	٢٥` ٦°
(٢)	٣٣٫٣" ٣٣` ٣٣°	(٦)	$\frac{٢٠٠}{ط}$	(١٠)	١٣" ٠` ١٢٥°
(٣)	١	(٧)	٥٠٠°	(١١)	٣٣٫٣` ١٣٣°
(٤)	١°	(٨)	٥" ٥` ١٣°	(١٢)	٦٦٫٦"

بند ٣٨ — (الحالة السادسة) لايجاد الدرجات المئوية لزاوية علم مقدارها بالتقدير الدائرى

(مثال) ما مقدار الزاوية التى تساوى $\frac{٣ط}{٤}$ من الزوايا النصف القطرية بالدرجات المئوية

(الحل) نفرض ان مقدار هذه الزاوية بالدرجات المئوية هو س

فمن النظرية الاساسية يكون

$$\frac{س}{٢٠٠} = \frac{\frac{٣ط}{٤}}{ط}$$

ومنه س = $\frac{٣ط}{٤} \times \frac{٢٠٠}{ط}$ من الدرجات المئوية

وعلى ذلك يكون مقدار الزاوية المفروضة بالدرجات المئوية هو $\frac{٣ط \times ٢٠٠}{٤ط} = \frac{٣ \times ٢٠٠}{٤} = ١٥٠°$

(تمارين ١٢)

أوجد مقادير الزوايا الآتية بالدرجات المئوية

(١)	$\frac{ط}{٣}$	(٣)	$\frac{٣ط}{٥}$	(٥)	٣ء	(٧)	...٣٫١٤١٥٩ء	(٩)	٥ ط
(٢)	١ء	(٤)	$\frac{ط}{٦}$	(٦)	$\frac{٢ط}{٣}$	(٨)	$\frac{٣ء}{٥}$	(١٠)	$٢\frac{٣}{١٠}$ء

بند ٣٩ — مسائل عامة على مقاييس الزوايا

يسهل حل المسائل العامة التى تشتمل على زوايا معلومة مقاديرها بمقاييس مختلفة بتحويل كل زاوية الى قوائم وللتطبيق على ذلك نمثل بالمثالين الآتيين فنقول

(مثال ١) مجموع مقدار زاوية بالدرجات الستينية وأربعة أمثال مقدارها بالتقدير الدائرى يساوى $٢٤\frac{١}{١٤}$ فما مقدار هذه الزاوية بالدرجات الستينية ($ط = \frac{٢٢}{٧}$)

(الحل) نفرض ان الزاوية = س من القوائم

فقدارها بالدرجات الستينية اذن = ٩٠ س

ومقدارها بالتقدير الدائرى = $\frac{ط}{٢}$ س

وعلى ذلك يكون $٩٠ س + ٤ \times \frac{ط}{٢} س = ٢٤\frac{١}{١٤}$

أى ان $٩٠ س + ٢ \times \frac{٢٢}{٧} س = ٢٤\frac{١}{١٤}$

، $٩٠ س + \frac{٤٤}{٧} س = \frac{٣٣٧}{١٤}$

ويكون $١٢٦٠ س + ٨٨ س = ٣٣٧$

، $١٣٤٨ س = ٣٣٧$

، $س = \frac{١}{٤}$

ومن ذلك نعلم ان الزاوية المطلوبة = $\frac{١}{٤}$ قائمة أو $٢٢\frac{١}{٢}°$ تقريباً

(مثال ٢) زاويتان مختلفتان نسبة الكبرى الى الصغرى كنسبة ٥ : ٤ واذا طرح مقدار الصغرى بالدرجات المئوية من مقدار الكبرى بالدرجات الستينية كان الباقى $٢\frac{١}{٢}$ فما مقدارهما بين الزاويتين بالتقدير الستينى

(الحل) نفرض ان الزاوية الصغرى = س من القوائم

تكون الزاوية الكبرى = $\frac{٥ س}{٤}$ من القوائم

ويكون مقدار الزاوية الصغرى بالدرجات المئوية = ١٠٠ س

ومقدار الزاوية الكبرى بالدرجات الستينية = $٩٠ \times \frac{٥ س}{٤}$

وعلى ذلك يكون $٩٠ \times \frac{٥ س}{٤} - ١٠٠ س = ٢\frac{١}{٢}$

أى ان $\frac{٢٢٥ س}{٢} - ١٠٠ س = \frac{٥}{٢}$

ويكون $٢٢٥ س - ٢٠٠ س = ٥$

، $٢٥ س = ٥$

، $س = \frac{١}{٥}$

ومن ذلك نعلم ان الزاوية الصغرى = $\frac{١}{٥}$ قائمة أو $١٨°$

وتساوى الزاوية الكبرى اذن $١٨° \times \frac{٥}{٤} = ٢٢\frac{١}{٢}°$

(تمارين ١٣)

(تنبيــه) احسب المقدار الرقمى فى الأمثلة الآتية للنسبة ط $\frac{٢٢}{٧}$

(١) مجموع مقدارى زاوية بالدرجات الستينية والمئوية يساوى $\frac{٢}{٣}$٣١ فما مقدارها بالتقدير الدائرى

(٢) الفرق بين زاويتين يساوى ٢٥ ْ ومجموعهما يساوى $\frac{١}{٢}$٥٦° فما مقدار هاتين الزاويتين بالدرجات الستينية

(٣) زاوية تساوى ثلاثة امثال زاوية اخرى واذا أضفنا مقدار الكبرى بالدرجات الستينية الى مقدار الصغرى بالدرجات المئوية كان الناتج $\frac{١}{٢}$٩٢ فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الدائرى

(٤) زاويتان مجموعهما يساوى $\frac{ط}{٤}$ وفرقهما يساوى ٩° فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستينى

(٥) اذا كانت زوايا المثلث فى توال عددى فبرهن على أن الزاوية الوسطى = $\frac{٢}{٣}$٦٦°

(٦) مثلث زواياه الثلاث فى توال عددى ونسبة مقدار الصغرى بالدرجات الستينية الى مقدار الكبرى بالتقدير الدائرى كنسبة ١٠٨ : ط فما مقدار زوايا المثلث بالدرجات المئوية

(٧) مثلث زواياه الثلاث فى توال عددى ونسبة مقدار الصغرى بالدرجات المئوية الى مقدار الوسطى بالدرجات الستينية كنسبة ٥ : ١٢ فما مقدار زوايا المثلث بالدرجات الستينية

(٨) أوجد مقدار زاوية المثمن المنتظم بالتقدير الستينى والمئوى والدائرى

(٩) ما هو التقدير الدائرى لزاوية مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

(١٠) اذا فرض ان ب ، ح يدلان على المقدار الستينى والمئوى لزاوية ما فبرهن على ان

$$ح - ب = \frac{١}{٩} ب$$

(١١) اذا فرض ان ب ، ح ، ى تدل على مقادير الدرجات الستينية والدرجات المئوية والزوايا النصف القطرية لزاوية ما فبرهن على أن

$$ح - ب = \frac{٢٠ ى}{ط}$$

(١٢) اذا فرض ان ل هو مقدار زاوية بالدقائق الستينية وان م هو مقدارها بالدقائق المئوية فبرهن على ان

$$٢ ل - م = \frac{٤}{٢٧} ل$$

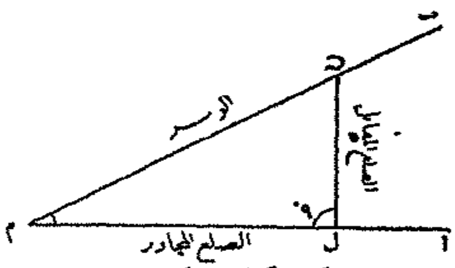
(١٣) اذا علم مقدار زاوية بالدقائق المئوية وأريد ايجاد مقدارها بالدقائق الستينية فبرهن على انه يجب ضرب مقدارها بالدقائق المئوية فى ٥٤,٠

(١٤) اذا علم مقدار زاوية بالتقدير الدائرى وأريد ايجاد مقدارها بالثوانى الستينية فبرهن على انه يجب ضرب مقدارها الدائرى فى ٢٠٦٦١٨١,٨

(١٥) اذا علم مقدار زاوية بالدقائق الستينية وأريد ايجاد مقدارها بالتقدير الدائرى فبرهن على انه يجب ضرب مقدارها بالدقائق الستينية فى ٠,٠٠٠٢٩١

البـــاب السابع

فى النسب المثلثية



(شكل ٧)

بند ٤٠ — اذا فرضت زاوية مثل ا م ب (شكل ٧) وأخذ على أحد ضلعيها نقطة مثل ه وأنزل من هذه النقطة المستقيم ه ل عموداً على م ا يحدث مثلث قائم الزاوية ولكل ضلع من اضلاع هذا المثلث اسم خاص به فيسمى الضلع ه ل (وهو الذى يقابل الزاوية المفروضة) الضلع المقابل؛

ويسمى الضلع ه م (وهو الذى يقابل الزاوية القائمة) الوتر

ويسمى الضلع ل م (وهو الذى يجاور الزاوية القائمة والزاوية المفروضة) الضلع المجاور

بند ٤١ — بواسطة اضلاع المثلث ه م ل يمكن ايجاد النسب المثلثية للزاوية المفروضة وهذه النسب المثلثية هى نسب بين اضلاع هذا المثلث القائم الزاوية وتكون عادة مبينة بكسور

فالنسبة	ه ل / م ه	اى	الضلع المقابل / الوتر	يقال لها	جيب	∠ ا م ب
»	م ل / م ه	»	الضلع المجاور / الوتر	» »	جيب تمام	» »
»	ه ل / م ل	»	الضلع المقابل / الضلع المجاور	» »	ظل	» »
»	م ل / ه ل	»	الضلع المجاور / الضلع المقابل	» »	ظل تمام	» »
»	م ه / م ل	»	الوتر / الضلع المجاور	» »	قاطع	» »
»	م ه / ه ل	»	الوتر / الضلع المقابل	» »	قاطع تمام	» »

بند ٤٢ — لاسماء النسب المثلثية رموز مصطلح عليها وذلك لسهولة كتابتها

فيرمز الى الجيب بالرمز جا | ويرمز الى جيب التمام بالرمز جتا

ويرمز الى الظل بالرمز ظا	ويرمز الى ظل التمام بالرمز ظتا
« « القاطع « قا	« « قاطع التمام « قتا

فمثلاً جيب وجيب تمام زاوية حـ يكتبان جا حـ ، جتا حـ

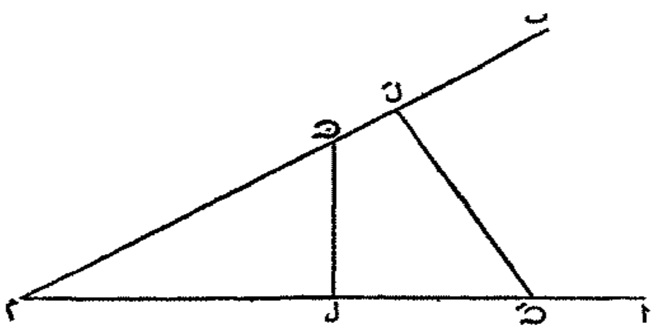
(تنبيـه) اذا أريد كتابة أى قوة لنسبة من النسب المثلثية فان الأس يكتب فوق رمز النسبة ولا يكتب على اسم الزاوية اصلا فمثلاً مربع جيب الزاوية حـ يكتب جا^{٢} حـ ومكعب جيب تمام الزاوية ء يكتب جتا^{٣} ء

بند ٤٣ — اذا فرضت زاوية مثل حـ وطرح جيب تمامها من الواحد يقال لباقى الطرح معكوس جيب زاوية حـ ويكتب عكا حـ

واذا طرح جيبها من الواحد يقال لباقى الطرح متمم معكوس جيب زاوية حـ ويكتب عكتا حـ ويندر استعمال هاتين النسبتين فى الاعمال العادية

بند ٤٤ — مقادير النسب المثلثية ثابتة متى كانت الزاوية ثابتة المقدار

نفرض زاوية مثل الزاوية ا م ب (شكل ٨) ونأخذ على ضلعيها النقطتين هـ ، هـ´ ونزل المستقيم هـ ل عموداً على ا م والمستقيم هـ´ ل´ عموداً على م ب ثم نبرهن على ان النسب المثلثية للزاوية المفروضة ثابتة بالرغم من اختلاف موقع النقطتين هـ ، هـ´ أ ـ



(شكل ٨)

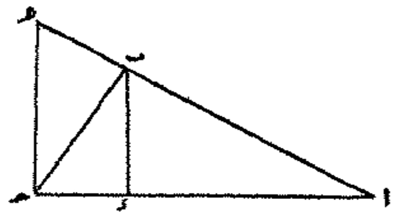
(البرهان) فى كل من المثلثين هـ م ل ، هـ´ م ل´ الزاوية م مشتركة والزاوية هـ ل م = الزاوية هـ´ ل´ م بالقيام فتكون الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية نظيرتها من المثلث الثانى و بذلك يتشابه المثلثان وينتج من تشابههما ان

$$\frac{\text{هـ ل}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{هـ´ ل´}}{\text{م هـ´}}$$

$$\frac{\text{م ل}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{م ل´}}{\text{م هـ´}} \quad ،$$

$$\frac{\text{هـ ل}}{\text{م ل}} = \frac{\text{هـ´ ل´}}{\text{م ل´}} \quad ،$$

وبوضع الاسماء الخاصة لكل من النسب السابقة نرى ان جيب الزاوية م = نفسه وان جيب تمامها = نفسه وان . . . . . . الخ بالرغم من اختلاف موقع النقطتين المفروضتين هـ ، هـ´



بند ٤٥ — أمثلة محلولة للتطبيق على النسب المثلثية

(مثال ١) فى المثلث ا ب حـ (شكل ٩) رسم ب ى عموداً على ا حـ والمطلوب ايجاد الجيب وجيب التمام والقاطع للزاوية ب ا حـ

(شكل ٩)

(الحل) المثلث القائم الزاوية الذى يحتوى على الزاوية ب ا حـ هو المثلث ب ى ا وزاويته القائمة هى ∠ ب ى ا فبمقتضى ما تقدم ببند ٤٠ يكون ب ى الضلع المقابل ، ى ا الضلع المجاور ، ا ب الوتر

اذن جا ب ا ى = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ا ب}}$

، جتا ب ا ى = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}}$

، قا ب ا ى = $\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ى}}$

(مثال ٢) فى المثلث ب حـ ى القائم الزاوية فى ى (شكل ٩) الضلع ب ى = ٤ سنتيمترات والضلع حـ ى = ٣ سنتيمترات والمطلوب ايجاد مقدار الظل وقاطع التمام للزاوية ب حـ ى

(الحل) — أولاً — نبحث عن طول الوتر ب حـ بواسطة نظرية فيثاغورث فنجد انه = ٥ سنتيمترات

— ثانياً — ظا ب حـ ى = $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى حـ}} = \frac{٤}{٣} = ١٫\dot{٣}$

، قتا ب حـ ى = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ى}} = \frac{٥}{٤} = ١٫٢٥$

(تمارين ١٤)

(١) اذا كان ب ى هو ارتفاع المثلث ا ب حـ (شكل ٩) فأى الاضلاع يعتبر الضلع المقابل وأيها يعتبر الضلع المجاور لكل من الزوايا الآتية

∠ ب حـ ى ، ∠ حـ ب ى ، ∠ ا ب ى ، ∠ ب ا ى

(٢) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب (شكل ٩) ، ب ى الارتفاع النازل من رأسه ب والمطلوب ايجاد كافة المقادير التى تدل على النسب الآتية

ظا ب ا ى ، جتا ب حـ ى ، ظتا ى ب حـ ، قا ا ب ى

، قتا ب ا ى ، قا ب حـ ى ، جا ى ب حـ ، ظا ا ب ى

(٣) ا حـ هـ مثلث قائم الزاوية فى حـ (شكل ٩) طول الوتر ا هـ = $\sqrt{١٣}$ وطول الضلع هـ حـ = ٢ سنتيمتراً والمطلوب ايجاد ظا ا ، جتا هـ

(٤) ا حـ ب مثلث قائم الزاوية فى حـ طول ضلعه ب حـ = ٥ سنتيمترات وضلعه ا حـ = ١٢ سنتيمتراً والمطلوب ايجاد مقدار ظا ب ، ظتا ا ، قا ب ، جتا ا

(٥) مثلث قائم الزاوية نسبة أضلاعه الثلاثة بعضها الى بعض كنسبة ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ والمطلوب ايجاد مقدار الجيب وجيب التمام والظل لكل من زاويتيه الحادتين

(٦) ا ب حـ ى منحرف ضلعه ا ب عمودى على ب حـ وقطره ا حـ عمودى على ا ى والمطلوب ايجاد مقدار جا ب ا حـ ، ظا ب حـ ا ، ظتا ا حـ ى ، قا ا ى حـ اذا علم ان ا ب = ٣ سنتيمترات ، ب حـ = ٤ سنتيمترات ، ا ى = ٧ سنتيمترات

(٧) ا حـ ب مثلث قائم الزاوية فى حـ طول ضلعه ب حـ = ٣ سنتيمترات وطول ضلعه حـ ا = ٧ سنتيمترات والمطلوب ايجاد مقدار ظا ا ، قا ب ، جا ا ، $\sqrt{١ + ظا^٢ ا}$ مع البحث عن النسبة التى قيمتها تساوى قيمة المقدار الأخير

(٨) ا حـ ب مثلث قائم الزاوية فى حـ والمطلوب البرهنة على ان

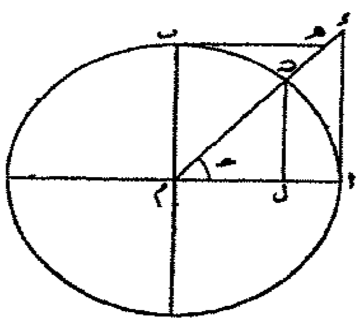
(١) جا^٢ ا + جتا^٢ ا = ١   (٢) جا^٢ ب + جتا^٢ ب = ١

(٩) ا حـ ب مثلث قائم الزاوية فى حـ والمطلوب البرهنة على ان

(١) جا ا = جتا ب ، ظا ا = ظتا ب ، قا ا = قتا ب

(٢) جا ا = ١ / قتا ا ، جتا ب = ١ / قا ب

(٣) ظا ا = ١ / ظتا ا ، ظا ب = جا ب / جتا ب



(شكل ١٠)

* (١٠) اذا فرضت الزاوية حـ (شكل ١٠) وركز فى رأسها وبنصف قطر يساوى وحدة معلومة ولتكن البوصة ورسم محيط دائرة يقطع ضلعيها فى ا ، ه ثم رسم م ب ، ه ل عمودين على ا م ورسم ا ى ، ب ھ المماسان للدائرة فى نقطتى ا ، ب وقابلا امتداد م ه فى ى ، ھ

فبرهن على ان

جا حـ = طول ه ل بالبوصة	جتا حـ = طول م ل بالبوصة
ظا حـ = « ا ى «	ظتا حـ = « ب ھ «
قا حـ = « م ى «	قتا حـ = « م ھ «

بند ٤٦ — اذا علم مقدار احدى النسب المثلثية لزاوية أقل من قائمة أمكن ايجاد مقادير باقى النسب المثلثية لهذه الزاوية

* (تنبيه) هذا التمرين عبارة عن الطريقة الهندسية القديمة التى بواسطتها كان يبحث بطريقة عملية عن مقادير النسب المثلثية لزاوية معلومة بوحدة مفروضة

وذلك بأن نبحث عن النسبة بين أضلاع المثلث القائم الزاوية الذى يحتوى على الزاوية المفروضة فمتى علمت هذه النسبة امكن ايجاد جميع النسب المثلثية المطلوبة وللتطبيق على ذلك نمثل بالمثالين الآتيين فنقول

(مثال ١) اذا فرض ان $\text{جتا ح} = \frac{١٢}{١٣}$ فأوجد مقدار جا ح ، ظتا ح

(الحل) — أولاً — من النسبة $\frac{١٢}{١٣}$ نعلم ان فى المثلث القائم الزاوية الذى يحتوى على الزاوية ح المفروضة ان نسبة الضلع المجاور : الوتر كنسبة ١٢ : ١٣

— ثانياً — نبحث عن مقدار الضلع المقابل بواسطة نظرية فيثاغورث فنجد انه ٥ ويكون نسبة الضلع المجاور : الوتر : الضلع المقابل كنسبة ١٢ : ١٣ : ٥ ومن نسبة الثلاثة الاضلاع بعضها الى بعض يكون $\text{جا ح} = \frac{٥}{١٣}$ ، $\text{ظتا ح} = \frac{١٢}{٥}$.

(مثال ٢) اذا فرض ان $\text{جا ح} = \text{س}$ فأوجد مقادير باقى النسب المثلثية للزاوية ح

(الحل) — أولاً — من النسبة س نعلم ان نسبة الضلع المقابل : الوتر كنسبة س : ١

— ثانياً — نبحث عن مقدار الضلع المجاور بواسطة نظرية فيثاغورث فنجد انه $= \sqrt{١ - \text{س}^٢}$ ويكون نسبة الضلع المقابل : الوتر : الضلع المجاور كنسبة س : ١ : $\sqrt{١ - \text{س}^٢}$

ومن نسبة الثلاثة الاضلاع بعضها الى بعض يكون $\text{جتا ح} = \sqrt{١ - \text{س}^٢}$ ، $\text{ظا ح} = \frac{\text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}$

، $\text{ظتا ح} = \frac{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}{\text{س}}$ ، $\text{قا ح} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}$ ، $\text{قتا ح} = \frac{١}{\text{س}}$

(تمارين ١٥)

(١) اذا كان $\text{ظا ح} = \frac{٢}{٥}$ فأوجد مقدار جا ح ، جتا ح

(٢) » » $\text{جا ح} = \frac{٣}{١٠}$ » » ظتا ح ، قتا ح

(٣) » » $\text{ظتا ح} = \frac{\text{س}}{\text{ى}}$ » » قتا ح ، قا ح

(٤) » » $\text{جتا ح} = \frac{٢\,\text{ل}\,\text{م}}{\text{ل}^٢ + \text{م}^٢}$ » » ظا ح ، قتا ح

(٥) » » $\text{ظا ب} = \text{ص}$ » » باقى النسب المثلثية للزاوية ب بدلالة ص

(٦) اذا كان $\text{قا ح} = \frac{٥}{٣}$ فأوجد مقدار $\frac{\text{ظتا}^٢\,\text{ح} - \text{ظا}^٢\,\text{ح}}{\text{ظتا}^٢\,\text{ح} + \text{ظا}^٢\,\text{ح}}$

(٧) اذا كان $(١ + \text{س}^٢)\ \text{ظتا ب} = (١ - \text{س}^٢)$ فأوجد مقدار جا ب ، قا ب

(٨) اذا كان $\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ل}\,\text{م}}\ \text{ظا ى} = \sqrt{\text{م}^٢ + \text{ل}\,\text{م}}$ فأوجد مقدار قتا ى ، جتا ب

(٩) اذا كان $\text{جتا ح} = \frac{١٥}{١٧}$ فأوجد مقدار $\frac{\text{قا ح} - \text{ظا ح}}{\text{قا ح} + \text{ظا ح}}$

(١٠) اذا كان جا ى $=\frac{١٢}{١٣}$ فأوجد مقدار $\frac{\text{قتا ى} - \text{ظتا ى}}{\text{قتا ى} + \text{ظتا ى}}$

(١١) اذا كان ظا ﻫ $= \frac{س}{\sqrt{ص^{٢} - س^{٢}}}$ فأوجد مقدار قا^{٢} ﻫ + جتا^{٢} ﻫ − ١

(١٢) اذا كان مجموع الزاويتين ح ، ى $=$ ٩٠° وكان جا ح $= \frac{ل}{م}$ فأوجد مقدار

جا ح جتا ى + جتا ح جا ى

(١٣) اذا كان مجموع الزاويتين ى ، ﻫ $=$ ٩٠° وكان جتا ى $= \frac{س}{ص}$ فأوجد مقدار

جتا ى جتا ﻫ − جا ى جا ﻫ

(١٤) اذا كان ∠ ح + ∠ ى $=$ ٩٠° وكان جا ح $= \frac{١}{٢}$ فأوجد مقدار $\frac{\text{ظتا ح ظتا ى} - ١}{\text{ظتا ح} + \text{ظتا ى}}$

(١٥) اذا كان ظا ى $= \sqrt{٣}$ وظا ﻫ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$ فأوجد مقدار $\frac{\text{ظا ى} - \text{ظا ﻫ}}{١ + \text{ظا ى ظا ﻫ}}$

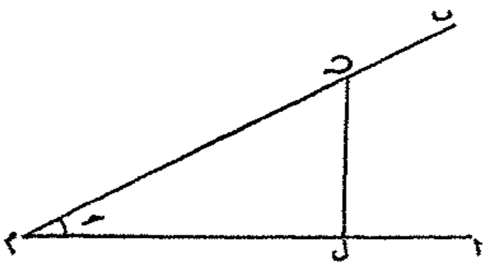
البـــاب الثامن

فى العلاقات الأساسية التى بين النسب المثلثية

بند ٤٧ — برهن على ان

$$\text{جا حـ} = \frac{1}{\text{قتا حـ}} \text{ ، } \text{جتا حـ} = \frac{1}{\text{قا حـ}} \text{ ، } \text{ظا حـ} = \frac{1}{\text{ظتا حـ}}$$

(البرهان) نفرض ان الزاوية ا م ب (شكل ١١) زاوية مقدارها حـ ونأخذ على أحد ضلعيهـا النقطة ﻫ ونرسم ﻫ ل عموداً على ا م فبناء على ما تقدم ببند ٤١ يكون



(شكل ١١)

$$\text{جا حـ} = \frac{\text{ﻫ ل}}{\text{ﻫ م}} \text{ ، } \text{قتا حـ} = \frac{\text{ﻫ م}}{\text{ﻫ ل}}$$

ومن حيث أن $\frac{\text{ﻫ ل}}{\text{ﻫ م}} = 1 \div \frac{\text{ﻫ م}}{\text{ﻫ ل}}$ يكون $\text{جا حـ} = \frac{1}{\text{قتا حـ}}$

وبالعكس $\text{قتا حـ} = \frac{1}{\text{جا حـ}}$

وكذا نبرهن على أن $\text{جتا حـ} = \frac{1}{\text{قا حـ}}$ ، $\text{قا حـ} = \frac{1}{\text{جتا حـ}}$

وان $\text{ظا حـ} = \frac{1}{\text{ظتا حـ}}$ ، $\text{ظتا حـ} = \frac{1}{\text{ظا حـ}}$ وهو المطلوب

بند ٤٨ — برهن على أن

$$\text{ظا حـ} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}}$$

(البرهان) تقدم ان $\text{جا حـ} = \frac{\text{ﻫ ل}}{\text{ﻫ م}}$ وأن $\text{جتا حـ} = \frac{\text{ل م}}{\text{ﻫ م}}$

فيكون $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}} = \frac{\text{ﻫ ل}}{\text{ﻫ م}} \div \frac{\text{ل م}}{\text{ﻫ م}} = \text{ظا حـ}$ وهو المطلوب

بند ٤٩ — (نتيجة) من حيث أن $\text{ظتا حـ} = \frac{١}{\text{ظا حـ}}$

يكون $\text{ظتا حـ} = ١ \div \frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}} = \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جا حـ}}$

بند ٥٠ — برهن على أن

$$\text{جا}^{٢}\,\text{حـ} + \text{جتا}^{٢}\,\text{حـ} = ١$$

(البرهان) نفرض الزاوية حـ احدى زوايا المثلث القائم الزاوية ه م ل (شكل ١١) فبناء على ما تقدم فى نظرية فيثاغورث يكون

$$\overline{\text{ل ه}}^{٢} + \overline{\text{م ل}}^{٢} = \overline{\text{م ه}}^{٢}$$

وبقسمة طرفى هذه المتساوية على $\overline{\text{م ه}}^{٢}$ ينتج أن

$$\frac{\overline{\text{ل ه}}^{٢}}{\overline{\text{م ه}}^{٢}} + \frac{\overline{\text{م ل}}^{٢}}{\overline{\text{م ه}}^{٢}} = \frac{\overline{\text{م ه}}^{٢}}{\overline{\text{م ه}}^{٢}}$$

أى أن $\text{جا}^{٢}\,\text{حـ} + \text{جتا}^{٢}\,\text{حـ} = ١$ وهو المطلوب

بند ٥١ — برهن على أن

$$\text{ظا}^{٢}\,\text{حـ} + ١ = \text{قا}^{٢}\,\text{حـ}$$

(البرهان) تقدم فى المثلث القائم الزاوية ه م ل (شكل ١١) ان

$$\overline{\text{ل ه}}^{٢} + \overline{\text{م ل}}^{٢} = \overline{\text{م ه}}^{٢}$$

وبقسمة طرفى هذه المتساوية على $\overline{\text{م ل}}^{٢}$ ينتج أن

$$\frac{\overline{\text{ل ه}}^{٢}}{\overline{\text{م ل}}^{٢}} + \frac{\overline{\text{م ل}}^{٢}}{\overline{\text{م ل}}^{٢}} = \frac{\overline{\text{م ه}}^{٢}}{\overline{\text{م ل}}^{٢}}$$

أى أن $\text{ظا}^{٢}\,\text{حـ} + ١ = \text{قا}^{٢}\,\text{حـ}$ وهو المطلوب

بند ٥٢ — برهن على أن

$$١ + \text{ظتا}^{٢}\,\text{حـ} = \text{قتا}^{٢}\,\text{حـ}$$

(البرهان) تقدم فى المثلث القائم الزاوية ه م ل (شكل ١١) ان

$$\overline{\text{ل ه}}^{٢} + \overline{\text{م ل}}^{٢} = \overline{\text{م ه}}^{٢}$$

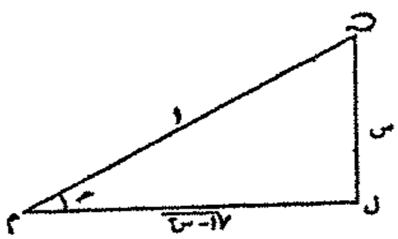
وبقسمة طرفي هذه المتساوية على $\overline{\text{ل ه}}^{\,2}$ ينتج ان

$$\frac{\overline{\text{ل ه}}^{\,2}}{\overline{\text{ل ه}}^{\,2}} + \frac{\overline{\text{م ل}}^{\,2}}{\overline{\text{ل ه}}^{\,2}} = \frac{\overline{\text{م ه}}^{\,2}}{\overline{\text{ل ه}}^{\,2}}$$

أي ان $1 + \text{ظتا}^2\,\text{ح} = \text{قتا}^2\,\text{ح}$ وهو المطلوب

بند **٥٣** — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية أقل من قائمة بدلالة احدى نسبها المثلثية يسهل ذلك بتطبيق القوانين والعلاقات السابقة للنسب المثلثية وللتمثيل نقول

(مثال ١) أوجد النسب المثلثية للزاوية ح بدلالة الجيب



(شكل ١٢)

(الحل) نفرض ان الزاوية ه م ل (شكل ١٢) زاوية مقدارها ح ونفرض ان جيبها يساوي س فبما ان الجيب $= \frac{\text{ضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ يكون $\text{جا ح} = \frac{\text{ل ه}}{\text{م ه}} = \text{س}$ فاذا فرض ان المقام م ه $= 1$ يكون البسط ل ه $=$ س ومن نظرية فيثاغورث يكون م ل $= \sqrt{(1 - \text{س}^2)}$

اذن توفرت المقادير اللازمة لايجاد جميع النسب المثلثية للزاوية ه م ل

ويكون $\text{جتا ح} = \frac{\sqrt{(1-\text{س}^2)}}{1} = \sqrt{(1 - \text{جا}^2\,\text{ح})}$

، $\text{ظا ح} = \frac{\text{س}}{\sqrt{(1-\text{س}^2)}} = \frac{\text{جا ح}}{\sqrt{(1-\text{جا}^2\,\text{ح})}}$

، $\text{قتا ح} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{جا ح}}$

، $\text{قا ح} = \frac{1}{\sqrt{(1-\text{س}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\text{جا}^2\,\text{ح})}}$

، $\text{ظتا ح} = \frac{\sqrt{(1-\text{س}^2)}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{(1-\text{جا}^2\,\text{ح})}}{\text{جا ح}}$

(ملاحظة) يمكن ايجاد مقادير النسب المثلثية السابقة بواسطة القانون $\text{جا}^2\,\text{ح} + \text{جتا}^2\,\text{ح} = 1$

(الطريقة) بما أن $\text{جا}^2\,\text{ح} + \text{جتا}^2\,\text{ح} = 1$

يكون $\text{جتا}^2\,\text{ح} = 1 - \text{جا}^2\,\text{ح}$

ويكون $\text{جتا } \text{ح} = \sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}$

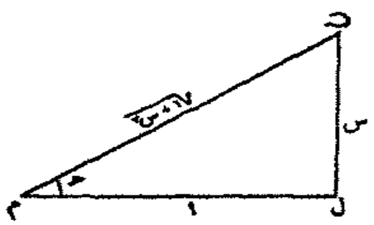
، $\text{ظا } \text{ح} = \dfrac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}} = \dfrac{\text{جا ح}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}$

، $\text{قتا } \text{ح} = \dfrac{\text{١}}{\text{جا ح}}$

، $\text{قا } \text{ح} = \dfrac{\text{١}}{\text{جتا ح}} = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}$

، $\text{ظتا } \text{ح} = \dfrac{\text{١}}{\text{ظا ح}} = \dfrac{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}{\text{جا ح}}$

(مثال ٢) أوجد النسب المثلثية للزاوية ح بدلالة الظل



(شكل ١٣)

(الحل) نفرض ان الزاوية ه م ل (شكل ١٣) مقدارها ح ونفرض ان ظلها = س فبما أن الظل = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

يكون $\text{ظا ح} = \dfrac{\text{ه ل}}{\text{م ل}} = \text{س}$

فاذا فرض ان المقام م ل = ١ يكون البسط ه ل = س ومن نظرية فيثاغورث يكون م ه $= \sqrt{(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}$

اذن توفرت المقادير اللازمة لايجاد جميع النسب المثلثية للزاوية ه م ل

ويكون $\text{جا ح} = \dfrac{\text{س}}{\sqrt{(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}} = \dfrac{\text{ظا ح}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}$

، $\text{جتا ح} = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}} = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}$

، $\text{قتا ح} = \dfrac{\sqrt{(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}}{\text{س}} = \dfrac{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}}{\text{ظا ح}}$

، $\text{قا ح} = \dfrac{\sqrt{(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}}{\text{١}} = \sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\, \text{ح})}$

، $\text{ظتا ح} = \dfrac{\text{١}}{\text{س}} = \dfrac{\text{١}}{\text{ظا ح}}$

(ملاحظة) يمكن ايجاد مقادير النسب المثلثية السابقة بواسطة القانون $قا^2 حـ = ١ + ظا^2 حـ$

(الطريقة) بما أن $قا^2 حـ = ١ + ظا^2 حـ$

يكون $قا حـ = \sqrt{(١ + ظا^2 حـ)}$

، $جتا حـ = \frac{١}{قا حـ} = \frac{١}{\sqrt{(١ + ظا^2 حـ)}}$

، $جا حـ = جتا حـ \times ظا حـ = \frac{ظا حـ}{\sqrt{(١ + ظا^2 حـ)}}$

، $قتا حـ = \frac{١}{جا حـ} = \frac{\sqrt{(١ + ظا^2 حـ)}}{ظا حـ}$

، $ظتا حـ = \frac{١}{ظا حـ}$

(تمارين ١٦)

(تنبيه) حل كل تمرين من الاربعة الاولى بطريقتين

أولاً — بواسطة ايجاد النسبة بين أضلاع المثلث القائم الزاوية الذى يحتوى على الزاوية المفروضة

ثانياً — بواسطة العلاقات والقوانين المدونة من بند ٤٧ لغاية ٥٢

(١) أوجد مقادير النسب المثلثية للزاوية حـ بدلاله قتا حـ

(٢) » » » » » حـ » ظتا حـ

(٣) » » » » » حـ » جتا حـ

(٤) » » » » » حـ » قا حـ

(٥) اذا كان $جتا حـ = \frac{١}{ص}$ فأوجد مقدار جا حـ ، ظتا حـ من القانون

($جا^2 حـ + جتا^2 حـ = ١$)

(٦) اذا كان $ظتا حـ = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ فأوجد مقدار قتا حـ ، جتا حـ من القانون

($١ + ظتا^2 حـ = قتا^2 حـ$)

(٧) اذا كان $ظا حـ = \frac{س}{ص}$ فأوجد مقدار جا حـ ، جتا حـ من القانون

($١ + ظا^2 حـ = قا^2 حـ$)

(٨) أوجد مقدار $(قا ى - ظا ى)^2$ بدلاله جا ى

	الجيب	جيب التمام	الظل	ظل التمام	القاطع	قاطع التمام
$\text{جا ح} =$	جا ح	$\sqrt{(\text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}$	$\frac{\text{ظا ح}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\sqrt{(\text{قا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}{\text{قا ح}}$	$\frac{\text{١}}{\text{قتا ح}}$
$\text{جتا ح} =$	$\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\text{ح})}$	جتا ح	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\text{ظتا ح}}{\sqrt{(\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\text{١}}{\text{قا ح}}$	$\frac{\sqrt{(\text{قتا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}{\text{قتا ح}}$
$\text{ظا ح} =$	$\frac{\text{جا ح}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\sqrt{(\text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}}{\text{جتا ح}}$	ظا ح	$\frac{\text{١}}{\text{ظتا ح}}$	$\sqrt{(\text{قا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{قتا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}$
$\text{ظتا ح} =$	$\frac{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\text{ح})}}{\text{جا ح}}$	$\frac{\text{جتا ح}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\text{١}}{\text{ظا ح}}$	ظتا ح	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{قا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}$	$\sqrt{(\text{قتا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}$
$\text{قا ح} =$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\text{١}}{\text{جتا ح}}$	$\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح})}$	$\frac{\sqrt{(\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\,\text{ح})}}{\text{ظتا ح}}$	قا ح	$\frac{\text{قتا ح}}{\sqrt{(\text{قتا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}$
$\text{قتا ح} =$	$\frac{\text{١}}{\text{جا ح}}$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{(\text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}}$	$\frac{\sqrt{(\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح})}}{\text{ظا ح}}$	$\sqrt{(\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\,\text{ح})}$	$\frac{\text{قا ح}}{\sqrt{(\text{قا}^{٢}\,\text{ح} - \text{١})}}$	قتا ح

(٩) أوجد مقدار (قتا ى — ظتا ى)^{٢} بدلالة جتا ى

(١٠) أوحد مقدار (جا ى — جتا ى)^{٢} بدلالة ظتا ى

بند ٥٤ — المتطابقات

القوانين السابقة ذات أهمية كبرى اذ بتوفيقها بعضها مع بعض يمكن انشاء المتطابقات التى تفوق الاحصاء و بواسطتها يمكن البرهنة على صحة هـذه المتطابقات ان وجدت وللتطبيق على ذلك نمثل بالامثلة الآتية

(مثال ١) برهن على أن

جا^{٢} حـ قتا حـ + جتا^{٢} حـ قا حـ = جا حـ + جتا حـ

(البرهان) جا^{٢} حـ قا حـ + حتا^{٢} حـ قا حـ = جا^{٢} حـ × $\frac{\text{١}}{\text{جا حـ}}$ + جتا^{٢} حـ × $\frac{\text{١}}{\text{جتا حـ}}$

= جا حـ + جتا حـ وهو المطلوب

(مثال ٢) برهن على أن

ظا ى ظتا ى قا ى = $\frac{\text{١}}{\text{جتا ى}}$

(البرهان) ظا ى ظتا ى قا ى = $\frac{\text{جا ى}}{\text{حتا ى}}$ × $\frac{\text{حتا ى}}{\text{جا ى}}$ × $\frac{\text{١}}{\text{جتا ى}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{جتا ى}}$ وهو المطلوب

(مثال ٣) برهن على أن

جا^{٦} حـ + جتا^{٦} حـ = ١ — ٣ جا^{٢} حـ جتا^{٢} حـ

(البرهان) جا^{٦} حـ + حتا^{٦} حـ

= (جا^{٢} حـ + جتا^{٢} حـ) (جا^{٤} حـ + جتا^{٤} حـ — جا^{٢} حـ جتا^{٢} حـ)

= ١ × { (جا^{٢} حـ + جتا^{٢} حـ)^{٢} — ٣ جا^{٢} حـ جتا^{٢} حـ }

= ١ × { ١ — ٣ جا^{٢} حـ جتا^{٢} حـ }

= ١ — ٣ جا^{٢} حـ جتا^{٢} حـ وهو المطلوب

(تمارين ١٧)

برهن على أن المتطابقات الآتية صحيحة

(١) جا ب ظا ب = $\frac{\text{١ — جتا}^{٢}\text{ ب}}{\text{جتا ب}}$

(٢) ظا حـ + ظتا حـ = قا حـ قتا حـ

(٣) (ظا ب + ظتا ب) جا ب جتا ب = ١

(٤) (ظا ى − ظتا ى) جا ى جتا ى = جا^{٢} ى − جتا^{٢} ى

(٥) (جا ب + جتا ب)^{٢} = ١ + ٢ جا ب جتا ب

(٦) (جا ب − جتا ب)^{٢} = ١ − ٢ جا ب جتا ب

(٧) (ظا ب + ظتا ب)^{٢} = قا^{٢} ب + قتا^{٢} ب

(٨) $\frac{\text{١}}{\text{ظا}^{٢}\text{ ى}}$ + ١ = قتا^{٢} ى

(٩) ١ − ٤ جا^{٢} حـ = ٤ جتا^{٢} حـ − ٣

(١٠) ١ − ظا^{٤} حـ = ٢ قا^{٢} حـ − قا^{٤} حـ

(١١) ظا^{٢} حـ − جا^{٢} حـ = $\frac{\text{جا}^{٤}\text{ حـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ حـ}}$

(١٢) جتا^{٤} ب − جا^{٤} ب = ٢ جتا^{٢} ب − ١ = ١ − ٢ جا^{٢} ب

(١٣) $\frac{\text{جا}^{٣}\text{ ب + جتا}^{٣}\text{ ب}}{\text{جا ب + جتا ب}}$ + $\frac{\text{جا}^{٣}\text{ ب − جتا}^{٣}\text{ ب}}{\text{جا ب − جتا ب}}$ = ٢

(١٤) جا^{٦} ب + جتا^{٦} ب = ١ − ٣ جتا^{٢} ب + ٣ جتا^{٤} ب

(١٥) $\frac{\text{١}}{\text{قا هـ + ظا هـ}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{١ + جا هـ}}$

(١٦) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{١ + جا هـ}}$ = ١ − جا هـ

(١٧) ١ − جتا^{٤} هـ = جا^{٢} هـ (١ + جتا^{٢} هـ) .

(١٨) ظا ى جا ى + جتا ى = قا ى

(١٩) (ظتا ى + قتا ى)^{٢} = $\frac{\text{١ + جتا ى}}{\text{١ − جتا ى}}$

(٢٠) (قا ى − ظا ى)^{٢} = $\frac{\text{١ − جا ى}}{\text{١ + جا ى}}$

(٢١) $\frac{\text{ظا ب + ظا حـ}}{\text{ظتا ب + ظتا حـ}}$ = ظا ب ظا حـ

(٢٢) $\dfrac{\text{ظتا ى} + \text{ظا هـ}}{\text{ظا ى} + \text{ظتا هـ}} = \text{ظتا ى ظا هـ}$

(٢٣) $\dfrac{\text{جا حـ} - \text{جا ى}}{\text{جتا حـ} + \text{جتا ى}} + \dfrac{\text{جتا حـ} - \text{جتا ى}}{\text{جا حـ} + \text{جا ى}} = \text{صفراً}$

(٢٤) $(\text{قا}^{٢}\ \text{حـ} - ١)\ \text{جتا}^{٢}\ \text{حـ} = \text{جا}^{٢}\ \text{حـ}$

(٢٥) $(١ + \text{ظتا}^{٢}\ \text{حـ})\ (١ + \text{ظا}^{٢}\ \text{حـ})\ \text{جا}^{٢}\ \text{حـ} = \dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\ \text{حـ}}$

(٢٦) $\sqrt{(١ - \text{حا}^{٢}\ \text{ى})}\ \text{ظا ى} = \text{جا ى}$

(٢٧) $\dfrac{١}{١ + \text{جتا ى}} = \dfrac{١}{١ - \text{جتا ى}} = ٢\ \text{قتا}^{٢}\ \text{ى}$

(٢٨) $\text{قتا}^{٤}\ \text{ى} - \text{قا}^{٢}\ \text{ى} = \text{ظتا}^{٤}\ \text{ى} + \text{ظتا}^{٢}\ \text{ى}$

(٢٩) $\text{قا}^{٤}\ \text{ى} - \text{قا}^{٢}\ \text{ى} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\ \text{ى}}{\text{جتا}^{٤}\ \text{ى}}$

(٣٠) $\text{جا}^{٢}\ \text{ى} + \text{جتا}^{٤}\ \text{ى} = \text{جتا}^{٢}\ \text{ى} + \text{جا}^{٤}\ \text{ى}$

(٣١) $\text{قا}^{٤}\ \text{ب} + \text{ظا}^{٤}\ \text{ب} = ١ + ٢\ \text{قا}^{٢}\ \text{ب ظا}^{٢}\ \text{ب}$

(٣٢) $\text{قا}^{٢}\ \text{ب} - \text{جتا}^{٢}\ \text{ب} = \text{جا}^{٢}\ \text{ب} + \text{ظا}^{٢}\ \text{ب}$

(٣٣) $\text{جتا}^{٤}\ \text{ب} + \text{جتا}^{٢}\ \text{ب} = ٢ - ٣\ \text{جا}^{٢}\ \text{ب} + \text{جا}^{٤}\ \text{ب}$

(٣٤) $(١ - \text{ظا هـ})^{٢} + (١ - \text{ظتا هـ})^{٢} = (\text{قا هـ} - \text{قتا هـ})^{٢}$

(٣٥) $\text{ظا هـ} - \text{ظا هـ} = (\text{ظا هـ} - ١)(\text{ظتا هـ} + ١)$

(٣٦) $\left\{\sqrt{(\text{قا هـ} + \text{ظا هـ})} + \sqrt{(\text{قا هـ} - \text{ظا هـ})}\right\}^{٢} = ٢\ (١ + \text{قا هـ})$

(٣٧) $\left\{\sqrt{(\text{قتا هـ} + \text{ظتا هـ})} - \sqrt{(\text{قتا هـ} - \text{ظا هـ})}\right\}^{٢} = ٢\ (\text{قتا هـ} - ١)$

(٣٨) $\dfrac{\text{جا حـ} - ٢\ \text{جا}^{٣}\ \text{حـ}}{٢\ \text{جتا}^{٣}\ \text{حـ} - \text{جتا حـ}} = \text{ظا حـ}$

(٣٩) $\dfrac{٢\ \text{ظا حـ}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{حـ}} = ٢\ \text{جا حـ جتا حـ}$

(٤٠) $\dfrac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{حـ}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{حـ}} = ٢\ \text{جتا}^{٢}\ \text{حـ} - ١$

(٤١) (قتا حـ + ظتا حـ) عكتا حـ − (قا حـ + ظا حـ) عكا حـ

= (قتا حـ − قا حـ) (٢ عكا حـ عكتا حـ)

(٤٢) ٢ عكا حـ + جتا^{٢} حـ = ١ + عكا^{٢} حـ

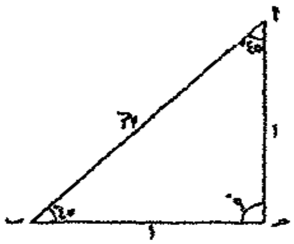
(٤٣) عكا حـ (١ + جتا حـ) = جا^{٢} حـ

(٤٤) $$\frac{(\text{١ − عكا حـ})^{٢} + \text{جا}^{٢}\text{ حـ}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{ حـ}} = \text{جا}^{٢}\text{ حـ}$$

(٤٥) (قتا^{٢} حـ − ١) (٢ عكا حـ − عكا^{٢} حـ) = جتا^{٢} حـ

الباب التاسع

النسب المثلثية لبعض زوايا خاصة


(شكل ١٤)

بند ٥٥ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية قدرها ٤٥° ($\frac{ط}{٤}$) نفرض مثلثاً قائم الزاوية مثل ا حـ ب (شكل ١٤) تكون زاويته ا حـ ب قائمة ويكون ضلعاه ا حـ ، حـ ب متساويين فمن تساوى ساقى المثلث تكون ∠ حـ ا ب = ∠ ا ب حـ = ٤٥°
واذا فرض ان كلاً من الساقين ا حـ ، حـ ب = ١ فبمقتضى نظرية فيثاغورث يكون ا حـ = $\sqrt{٢}$

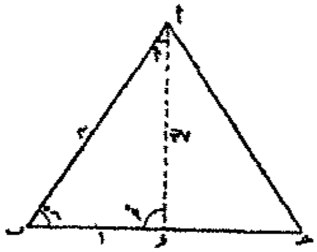
وعليه يكون جا ٤٥° = جا ا ب حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، جتا ٤٥° = جتا ا ب حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، ظا ٤٥° = ظا ا ب حـ = $\frac{١}{١}$ = ١

وكذا نبرهن على ان قتا ٤٥° = $\sqrt{٢}$ ، قا ٤٥° = $\sqrt{٢}$ ، ظتا ٤٥° = ١

بند ٥٦ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية قدرها ٣٠° ($\frac{ط}{٦}$) ولزاوية قدرها ٦٠° ($\frac{ط}{٣}$)


(شكل ١٥)

نفرض مثلثاً متساوى الأضلاع مثل ا ب حـ (شكل ١٥) وننزل العمود ا ى على حـ ب فبما ان الساق ا حـ = ا ب يكون العمود ا ى منصفاً للقاعدة حـ ب وللزاوية حـ ا ب وتكون ∠ ى ا ب = ٣٠° ، ى ب = $\frac{حـ ب}{٢}$
واذا فرض ان ى ب = ١ يكون ا ب = ٢ ويكون ا ى = $\sqrt{٤-١}$ = $\sqrt{٣}$

وعليه يكون جا ٣٠° = جا ب ا ى = $\frac{١}{٢}$

، جتا ٣٠° = جتا ب ا ى = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ظا ٣٠° = ظا ب ا ى = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

وكذا برهن على ان قا ٣٠° = ٢ ، قا ٣٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ظتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

وفى المثلث ا ى ب (شكل ١٥) الزاوية ا ب ى = ٦٠°

وعليه يكون جا ٦٠° = جا ا ب ى = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

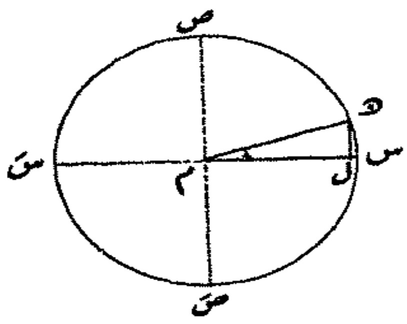
، جتا ٦٠° = جتا ا ب ى = $\frac{١}{٢}$

، ظا ٦٠° = ظا ا ب ى = $\sqrt{٣}$

وكذا برهن على أن قتا ٦٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، قا ٦٠° = ٢ ، ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(تنبيه) يرى من مقادير النسب المثلثية لزاويتى ٣٠° ، ٦٠° أن جا ٦٠° = جتا ٣٠° ، جتا ٦٠° = جا ٣٠° ، ظا ٦٠° = ظتا ٣٠° وهكذا ...

بند ٥٧ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية قدرها ٠°



(شكل ١٦)

نفرض الزاوية الصغيرة س م ه (شكل ١٦) وننزل من نقطة ه الضلع ه ل عموداً على س م ثم نفرض ان ه م يتحرك اتجاه م س فعند ما ينطبق عليه يكون مقدار الزاوية س م ه صفراً ويعدم مقدار العمود ه ل فاذا فرض فى الحالة الاخيرة ان س م = ١ يكون ه م = ١ ، ه ل = ٠

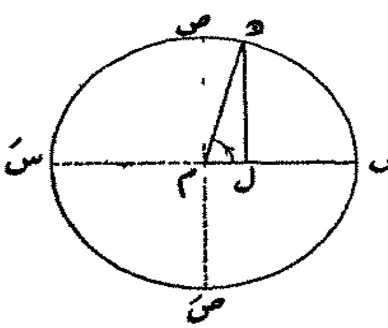
وعليه يكون جا ٠° = جا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

، جتا ٠° = جتا س م ه = $\frac{١}{١}$ = ١

، ظا ٠° = ظا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

وكذا نبرهن على أن قتا ٠° = ∞ ، قا ٠° = ١ ، ظتا ٠° = ∞

بند ٥٨ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية قدرها ٩٠° ($\frac{ط}{٢}$)



(شكل ١٧)

نفرض الزاوية س م ه (شكل ١٧) التى تقرب من الزاوية القائمة س م ص وننزل من نقطة ه الضلع ه ل عموداً على س م ثم نفرض ان ه م يتحرك اتجاه م ص فعند ما ينطبق عليه يكون مقدار الزاوية س م ه = ٩٠° ويعدم مقدار القاعدة ل م ويكون العمود ه ل منطبقاً على ه م فاذا فرض

فى الحالة الاخيرة ان ه م = ١ يكون ه ل = ١ ، ل م = ٠

وعليه يكون جا ٩٠° = جا س م ه = $\frac{١}{١}$ = ١

، جتا ٩٠° = جتا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

، ظا ٩٠° = ظا س م ه = $\frac{١}{٠}$ = ∞

وكذا نبرهن على أن قتا ٩٠° = ١ ، قا ٩٠° = ∞ ، ظتا ٩٠° = ٠ .

والجدول الآتى يحتوى على مقادير النسب المثلثية للزوايا السابقة

الزاوية	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°
جا =	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١
جتا =	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	٠
ظا =	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	∞
ظتا =	∞	$\sqrt{٣}$	١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٠
قا =	١	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٢}$	٢	∞
قتا =	∞	٢	$\sqrt{٢}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	١
التقدير الدائرى =	٠	$\frac{ط}{٦}$	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{ط}{٢}$

بند ٥٩ (ملاحظة) يرى من الجدول السابق الخواص الآتية

(١) ان مقادير الجيوب تزداد بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٢) ان مقادير جيوب التمام تنقص بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٣) ان مقادير الظلال تزداد بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٤) ان مقادير ظلال التمام تنقص بزياده الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٥) ان مقادير القواطع تزداد بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٦) ان مقادير قواطع التمام تنقص بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

(٧) ان جيوب وجيوب تمام الزوايا التى بين ٠° ، ٩٠° وظلال الزوايا التى بين ٠° ، ٤٥° أقل من الواحد أى انها كلها كسرية

بند ٦٠ — أمثلة محلولة للتطبيق على النسب المثلثية للزوايا السابقة

(مثال ١) أوجد مقدار جا^{٢} ٣٠° + جا^{٢} ٦٠° + ظا^{٢} ٤٥°

(الحل) جا^{٢} ٣٠° = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

، جا^{٢} ٦٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = $\frac{٣}{٤}$

، ظا^{٢} ٤٥° = ١

وبالجمع يكون جا^{٢} ٣٠° + جا^{٢} ٦٠° + ظا^{٢} ٤٥° = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ + ١ = ٢

(مثال ٢) برهن على أن ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° = جا ٩٠°

(البرهان) ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

ونعلم أن جا ٩٠° = ١

اذن ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° = جا ٩٠° وهو المطلوب

(تمارين ١٨)

أوجد المقدار الرقمى للمقادير الآتية

(١) ٢ جتا ٣٠° جتا ٤٥° جا ٣٠° جا ٤٥°

(٢) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

(٣) $\dfrac{\text{ظا ٣٠° ظا ٤٥° + ظا ٤٥° ظا ٦٠° + ظا ٩٠° ظتا ٦٠°}}{\text{ظا ٣٠° + ظا ٤٥° + ظا ٦٠°}}$

(٤) ظا^{٢} ٣٠° + ٤ جا^{٢} ٤٥° + $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} ٣٠°

(٥) $\dfrac{\text{جا ٣٠° جتا ٤٥° + جتا ٣٠° جا ٤٥°}}{\text{جا ٤٥° جتا ٦٠° − جتا ٤٥° جا ٦٠°}}$

(٦) $\dfrac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ − ظا ٦٠°

(٧) جا ٠° جا ٣٠° جا ٤٥° + جتا   جتا ٣٠° جتا ٤٥°

(٨) ظتا ٩٠° ظتا ٤٥° + جتا ٦٠° جتا ٠

(٩) جتا٤ ٤٥° + جتا٢ ٦٠° + جتا٢ ٩٠° − ٢ جتا ٤٥° جتا٣ ٦٠° جتا ٩٠°

(١٠) (جا ٩٠°)/(جتا ٦٠°) + (ظا ٤٥°)/(ظتا ٣٠°) + (قا ٠)/(قتا ٩٠)

(١١) (جتا ٦٠° جتا ٩٠° − جا ٦٠° جا ٩٠°) × (جتا ٦٠° جتا ٩٠° + جا ٦٠° جا ٩٠°)

(١٢) جا (٦٠° + ٣٠°) − [جا ٦٠° + جا ٣٠°]

(١٣) جتا (٦٠° − ٣٠°)   جتا ٦٠° + جتا ٣٠°

(١٤) جتا ٠° جا ط/٤ جتا ط/٣

(١٥) ٢ جا ط/٤ + ١/٢ قتا ط/٤

(١٦) جا ط/٣ جتا ط/٤ قتا ط/٣

(١٧) جتا٢ ط/٣ + جا٢ ط/٤ + جا٢ ط/٣

(١٨) (جا ط/٣ − جا ط/٤) (جتا ط/٦ + جتا ط/٤)

(١٩) ظا٢ ط/٣ + ٤ جتا٢ ط/٤ + ٣ قتا٢ ط/٣

(٢٠) (جا٢ ط/٣)/(جتا٢ ط/٣)   (جا٢ ط/٣)/(جتا٢ ط/٣)

برهن على أن المتساويات الآتية

(٢١) جا ٦٠° جتا ٣٠° + جا ٣٠° جتا ٦٠°   جا ٩٠°

(٢٢) جا ٦٠° جتا ٣٠° − جا ٣٠° جتا ٦٠° = جا ٣٠°

(٢٣) جا ٦٠° جا ٠° + جتا ٦٠° جتا ٠° = جتا ٦٠°

(٢٤) جتا ٤٥° (جا ٦٠° + جا ٣٠°) = جا ٤٥° (جتا ٦٠° + جتا ٣٠°)

(٢٥) جتا ٤٥° (جتا ٦٠° − جتا ٣٠°) = جا ٤٥° (جا ٣٠° − جا ٦٠°)

(٢٦) (ظا ٦٠° + ظا ٣٠°)/(١ − ظا ٦٠° ظا ٣٠°) : ظا ٠

(٢٧) (ظا ٦٠° ظا ٠)/(١ + ظا ٦٠° ظا ٠)   ظا ٠

(٢٨) جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠°   جتا ٦٠° جتا ٤٥ + جا ٦٠° جا ٤٥°

(٢٩) جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠° = جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

(٣٠) ٢ جا ٣٠° = √(١ + جا ٦٠°) − √(١ − جا ٦٠°)

(٣١) ٢ جتا² ط/٦ − ١ = ١ − ٢ جا² ط/٦ = جتا ط/٣

(٣٢) ٢ جا ط/٦ جتا ط/٦ = جا ط/٣

(٣٣) ٣ جا ط/٦ − ٤ جا³ ط/٦ = جا ط/٢

(٣٤) ٤ جتا³ ط/٦ − ٣ جتا ط/٦ = جتا ط/٢

(٣٥) جتا² ط/٤ − جا² ط/٤ = جتا ط/٢

(٣٦) جتا² ط/٦ − جا² ط/٦ = جتا ط/٣

(٣٧) جتا ط/٤ جا ط/٤ − جا² ط/٦ = جتا² ط/٣

(٣٨) قتا ط/٣ ظتا ط/٦ ظا ط/٣ = ٢ قا² ط/٤ جتا ط/٦

(٣٩) ١/٤ قا² ط/٦ + ٣ جتا² ط/٤ = قا ط/٣ − ١/٢ ظا² ط/٦

(٤٠) ظتا² ط/٦ − ظا² ط/٦ = (جا² ط/٣ − جتا² ط/٣) / (جتا² ط/٣ جتا² ط/٦)

الباب العاشر

فى المعادلات السهلة

بند ٦١ — المعادلة فى حساب المثلثات هى متساوية بها حرف مثل ح يدل على زاوية قيمتها مجهولة ولا يتحقق تساويها الا بتغيير الحرف الداخل فيها بمقادير خاصة

فالمتساوية (جا ح = ½) معادلة لان بها الحرف ح يدل على زاوية قيمتها مجهولة ولا يتحقق تساويها الا بتغيير الحرف ح بمقادير خاصة منها (٣٠°) وذلك لان جا ٣٠° = ½

بند ٦٢ — أمثلة محلولة للتطبيق على حل المعادلات

(مثال ١) المطلوب حل المعادلة ٣ قتا ح = ٤ جا ح

(الحل) نغير النسب المثلثية المختلفة التى بالمعادلة بما تساويه بدلالة احداها فتصير المعادلة الاصلية

$$٣ \times \frac{١}{\text{جا ح}} = ٤ \text{ جا ح}$$

ومن ذلك يكون $٣ = ٤ \text{ جا}^٢ \text{ ح}$

، $\text{جا}^٢ \text{ ح} = \frac{٣}{٤}$

، $\text{جا ح} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

اذن يكون المقدار الرقمى للنسبة جا ح هو $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ بقطع النظر عن الاشارتين + ، —

وبما أن $\text{جا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فيكون مقدار الزاوية المطلوبة هو ٦٠°

(تنبيه) هناك زوايا أخرى جيوبها تساوى جيب ٦٠° ولكنا سنقتصر على المقدار ٦٠° لان ايجاد مقادير الزوايا الاخرى ليس من مباحثنا الآن

(مثال ٢) المطلوب حل المعادلة جتا ح + قا ح = ٢

(الحل) من حيث ان $\text{قا ح} = \frac{١}{\text{جتا}}$

ففى المعادلة الاصلية يكون $\text{جتا ح} + \frac{١}{\text{جتا}}$

ويكون $$٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} + ٢ = ٥\,\text{جتا}\,\text{ح}$$

، $$٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} - ٥\,\text{جتا}\,\text{ح} + ٢ = ٠$$

أى أن $$(٢\,\text{جتا}\,\text{ح} - ١)(\text{جتا}\,\text{ح} - ٢) = ٠$$

، $$\text{جتا}\,\text{ح} = \tfrac{١}{٢}\ \text{أو}\ ٢$$

المقدار ٢ غير مقبول لان جيب تمام أى زاوية لا يمكن أن يكون أكبر من الواحد

والمقدار $\tfrac{١}{٢}$ هو مقدار جتا ٦٠°

فيكون أحد مقادير الزاوية المطلوبة هو ٦٠°

(مثال ٣) المطلوب حل المعادلة

$$\text{جتا}\,\text{ح} \,.\, \text{قتا}\,\text{ح} + \text{جا}\,\text{ح} \,.\, \text{قا}\,\text{ح} = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$$

(الحل) نغير النسب المثلثية المختلفة التى بالمعادلة بدلالة احداها فتصير المعادلة الاصلية

$$\text{جتا}\,\text{ح} \times \frac{١}{\sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}} + \sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})} \times \frac{١}{\text{جتا}\,\text{ح}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}}$$

ويكون $$\frac{\text{جتا}\,\text{ح}}{\sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}} + \frac{\sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}}{\text{جتا}\,\text{ح}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$$

، $$\frac{\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} + ١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح}}{\text{جتا}\,\text{ح}\sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$$

، $$\frac{}{\text{جتا}\,\text{ح}\sqrt{(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})}} = \frac{٤}{\sqrt{٠}}$$

$$\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\text{ح}(١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{ح})} = \frac{١٦}{٣}$$

، $$١٦\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} - ١٦\,\text{جتا}^{٤}\,\text{ح} = ٣$$

، $$١٦\,\text{جتا}^{٤}\,\text{ح} - ١٦\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} + ٣ = ٠$$

، $$(٤\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} - ٣)(٤\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ح} - ١) = ٠$$

فيكون $$\text{جتا} \quad \frac{\sqrt{٣}}{} \quad \text{او}\ \tfrac{١}{٢}$$

اذن الزاوية المطلوبة هى ٣٠° أو ٦٠°

(تمارين ١٩)

حل المعادلات الآتية

(١) جا حـ − جتا حـ = ٠

(٢) جا حـ = ظا حـ

(٣) جتا حـ = ظتا حـ

(٤) ٢ جا حـ = ظا حـ

(٥) ٢ جا حـ = قتا حـ

(٦) ٣ ظتا حـ = ظا حـ

(٧) ٢ جتا حـ = قا حـ

(٨) $\sqrt{٢}$ جا حـ = ظا حـ

(٩) $\sqrt{٣}$ قا حـ = ٢ ظا حـ

(١٠) قتا حـ = ٢ ظتا حـ

(١١) ٣ قا حـ = ٤ جتا حـ

(١٢) ٢ جتا حـ = $\sqrt{٣}$ ظتا حـ

(١٣) ظا حـ + ٣ ظتا حـ = ٤

(١٤) ٣ جا حـ − ٢ جتا^{٢} حـ = ٠

(١٥) جا حـ + جتا^{٢} حـ . قتا حـ = ٢

(١٦) ٢ جا^{٢} حـ + $\sqrt{٢}$ جتا حـ = ٢

(١٧) ٣ ظا^{٢} حـ − ٤ جا^{٢} حـ = ١

(١٨) ٤ قا^{٢} حـ − ٧ ظا^{٢} حـ = ٣

(١٩) جتا^{٢} حـ + ٢ جا^{٢} حـ = $\frac{٥}{٢}$ جا حـ

(٢٠) ظا حـ + ظتا حـ = $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

(٢١) قا حـ + ٢ ظا حـ = ٢ جا^{٢} حـ . قا حـ + ٢ جتا حـ

(٢٢) جا^{٢} حـ + ٢ جا حـ = ٢ − جتا^{٢} حـ

(٢٣) ٧ جتا^{٢} حـ − ١٧ جتا حـ + ٢٢ = ١٦ − جا^{٢} حـ

(٢٤) ٣ جا^{٢} حـ − جتا^{٢} حـ + ($\sqrt{٣}$ + ١) (١ − ٢ جا حـ) = ٠

(٢٥) ظتا^{٢} حـ + ٤ جتا^{٢} حـ = ٦

(٢٦) ظا^{٢} حـ + ٤ جا^{٢} حـ = ٣

(٢٧) ٣ ظا^{٢} حـ = ١ + قا^{٢} حـ

(٢٨) ٣ جا حـ − ٣ جا^{٢} حـ = جتا^{٢} حـ

(٢٩) قا حـ . قتا حـ + ٢ ظتا حـ = ٤

(٣٠) جا حـ + جتا حـ = ٢ $\sqrt{٢}$ جا حـ جتا حـ

(٣١) قتا^{٢} حـ + ظتا^{٢} حـ = $\frac{٥}{٣}$

(٣٢) ٣ جتا^{٢} حـ − جا^{٢} حـ + ($\sqrt{٣}$ + ١) (١ − ٢ جتا حـ) = ٠

(٣٣) ظا حـ + ٣ ظتا حـ = ٥ قا حـ

(٣٤) ١٥ جا ح + ٢ جتا² ح = ٩

(٣٥) (٤ − جا ح) / جا ح ٣/٤ قا² ح + ٢ / (١ + جا ح)

(٣٦) √٣ جا ح = √٣ − جتا ح

(٣٧) ظا² ح (٣ − ٢ قا ح) = ٣ (قا ح − ١)

(٣٨) جتا² ح + ١/٤ = ٢ جا ح

(٣٩) جا ح / (١ + جتا ح) = ٢ − ظتا ح

(٤٠) ظتا⁴ ح − ٤ ظتا² ح + ٣

الباب الحادى عشر

فى كيفية ايجاد النسب المثلثية بواسطة الجداول

بند ٦٣ — علمنا من الباب التاسع مقادير النسب المثلثية للزوايا ٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠° والآن نشرع فى كيفية البحث عن مقادير النسب المثلثية لاى زاوية أخرى بين ٠° ، ٩٠°

بند ٦٤ — يبحث عن النسب المثلثية لهذه الزوايا بواسطة جداول مرتبة فيها الزوايا بحيث تزيد كل زاوية على سابقتها ٦ دقائق وبها أعمدة الفروق للزوايا التى مقاديرها دقيقة ودقيقتان وثلاث وأربع وخمس دقائق حتى يتيسر ايجاد النسب المثلثية لكافة الزوايا التى بين ٠° ، ٩٠° سواء علم مقدارها بالدرجات او بالدرجات والدقائق

بند ٦٥ — ولكل نسبة من النسب المثلثية جدول خاص بها وسنقتصر على شرح جداول الجيوب وجيوب التمام والظلال لكثرة استعمالها فى المسائل العملية

وقبل الشروع فى شرح كيفية استعمال هذه الجداول يجب مراعاة الخواص التى سبق الكلام عليها فى بند ٥٩ وخلاصة هذه الخواص أن مقادير الجيوب والظلال والقواطع تزداد بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠° وان مقادير جيوب التمام وظلال التمام وقواطع التمام تنقص بزيادة الزاوية من ٠° الى ٩٠°

بند ٦٦ — ففى جداول الجيوب والظلال والقواطع تضاف الاعداد المقابلة للفروق نظراً لازدياد مقادير هذه النسب بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠° وفى جداول جيوب التمام وظلال التمام وقواطع التمام تطرح الاعداد المقابلة للفروق نظراً لنقصان مقادير هذه النسب بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠°

بند ٦٧ — فى كيفية استعمال الجداول

(مثال ١) المطلوب ايجاد مقدار جا ٣٨′ ٤١°

(الطريقة) لذلك نبحث فى جدول الجيوب عن العدد ٤١ فى الصف الرأسى الاول ونبحث عن أول عدد يلى ٣٨ فى الصغر فى صف الدقائق (وهو الصف الاول من الصفحة) فنجد أنه ٣٦

	٠′	٦′	١٢′	١٨′	٢٤′	٣٠′	٣٦′	٤٢′	٤٨′	٥٤′	فروق الدقائق				
											١	٢	٣	٤	٥
٤١	٦٥٦١	٦٥٧٤	٦٥٨٧	٦٦٠٠	٦٦١٣	٦٦٢٦	٦٦٣٩	٦٦٥٢	٦٦٦٥	٦٦٧٨	٢	٤	٧	٩	١١

ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٤١ والصف الرأسى المبدوء بالعدد ٣٦ فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٦٦٣٩ ثم نأتى بالفرق بين ٣٨ و ٣٦ فنجد أنه ٢ ونبحث عن هذا العدد فى أعمدة الفروق من

الصفحة عينها ونتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٤١ والصف الرأسى المبدوء بالفرق ٢ فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٤ فيكون هو العدد الذى يلزم اضافته الى ٦٦٣٩ لينتج جيب الزاوية ٣٨َ ٤١°

وعلى ذلك يكون ٦٦٣٩ + ٤ (أى ٠٫٦٦٤٣) = جا ٣٨َ ٤١°

(ملاحظة) تقدم فى بند ٥٩ أن جيوب الزوايا التى بين ٠° ، ٩٠° كلها كسرية ولذا قد استغنى عن وضع العلامة العشرية لجميع النسب فى جدول الجيوب

(مثال ٢) المطلوب ايجاد مقدار جتا ٣٧َ ٥٩°

(الطريقة) لذلك نبحث عنه فى جدول جيوب التمام بالطريقة المتقدمة فى المثال الاول غير اننا نطرح العدد المقابل لفرق الدقائق بدل أن نضيفه

	٠َ	٦َ	١٢َ	١٨َ	٢٤َ	٣٠َ	٣٦َ	٤٢َ	٤٨َ	٥٤َ	فروق الدقائق				
											١	٢	٣	٤	٥
٥٩	٥١٥٠	٥١٣٥	٥١٢٠	٥١٠٥	٥٠٩٠	٥٠٧٥	٥٠٦٠	٥٠٤٥	٥٠٣٠	٥٠١٥	٣	٥	٨	١٠	١٣

فمن الجداول جتا ٣٦َ ٥٩° = ٠٫٥٠٦٠

والعدد المقابل للفرق ١َ = ٣

وبالطرح يكون جتا ٣٧َ ٥٩° = ٠٫٥٠٥٧

(ملاحظة) تقدم فى بند ٥٩ ان جيوب تمام الزوايا التى بين ٠° ، ٩٠° كلها كسرية ولذا قد ستغنى عن وضع العلامة العشرية لجميع النسب فى جدول جيوب التمام

(مثال ٣) المطلوب ايجاد مقدار ظا ١٦َ ٩°

(الطريقة) لذلك نبحث عنه فى جدول الظلال بالطريقة المتقدمة فى البحث عن الجيب

	٠َ	٦َ	١٢َ	١٨َ	٢٤َ	٣٠َ	٣٦َ	٤٢َ	٤٨َ	٥٤َ	فروق الدقائق				
											١	٢	٣	٤	٥
٩	٠٫١٥٨٤	١٦٠٢	١٦٢٠	١٦٣٨	١٦٥٥	١٦٧٣	١٦٩١	١٧٠٩	١٧٢٧	١٧٤٥	٣	٦	٩	١٢	١٥

فمن الجداول ظا ١٢َ ٩° = ٠٫١٦٢٠

والعدد المقابل للفرق ٤َ = ١٢

وبالجمع يكون ظا ١٦َ ٩° = ٠٫١٦٣٢

(ملاحظة) لم توضع العلامة العشرية فى جدول الظلال ولم يذكر العدد الصحيح لجميع النسب الا فى الصف الرأسى المعنون (٠َ) وذلك خلافاً لبعض نسب عند الانتهاء قد تبين عددها الصحيح من جزئها الكسرى

ولم تكتب الفروق فى بعض الاحيان وذلك لسرعة تغير مقادير الظلال فانه يتعذر استعمال طريقة الفروق للبحث عنها

ووضع الشرطة (ـ) فوق العدد مثل $\bar{٦}$ دلالة على ان العدد الصحيح المذكور فى الصف المعنون (٠′) قد تغير وانه يلزم أخذ العدد الصحيح للصف الافقى الذى يليه عوضاً عنه

(مثال ٤) المطلوب ايجاد مقدار الزاوية حـ اذا كان جا حـ = ٠٫٢٢٢٤

(الطريقة) لذلك نبحث فى جدول الجيوب عن الجيب الذى يلى ٠٫٢٢٢٤ فى الصغر فنجد أنه ٠٫٢٢١٥

	٠′	٦′	١٢′	١٨′	٢٤′	٣٠′	٣٦′	٤٢′	٤٨′	٥٤′	فروق الدقائق ١	٢	٣	٤	٥
١٢	٢٠٧٩	٢٠٩٦	٢١١٣	٢١٣٠	٢١٤٧	٢١٦٤	٢١٨١	٢١٩٨	٢٢١٥	٢٢٣٢	٣	٦	٩	١١	١٤

ولكن جا حـ = ٠٫٢٢٢٤

ومن الجداول جا ٤٨′ ١٢° = ٠٫٢٢١٥

وبالطرح يكون حـ ــ (٤٨′ ١٢°) يقابل ٩

ولكن من الجداول العدد ٩ يقابل الفرق ٣′

اذن الزاوية حـ المطلوبة = ٤٨′ ١٢° + ٣′ = ٥١′ ١٢°

(تمارين ٢٠)

أوجد بواسطة الجداول مقادير النسب المثلثية الآتية

(١) جا ٤٢′ ٢٤° (٤) جتا ٥٠′ ٤٣° (٧) ظا ٥٣′ ٦٣°

(٢) جا ٧′ ٣٥° (٥) جتا ١٦′ ٥٦° (٨) ظا ١٣′ ١٢°

(٣) جا ٢١′ ٧٧° (٦) جتا ٩′ ٦° (٩) ظا ٢٤′ ٨٤°

أوجد لأقرب دقيقة صحيحة مقادير الزوايا من المعادلات الآتية

(١٠) جا حـ = ٠٫٤٩٤٢ (١٢) جتا حـ = ٠٫٩٨٣٠ (١٤) ظا حـ = ٠٫٢٠٩٥

(١١) جا ى = ٠٫٩٦٧٥ (١٣) جتا ى = ٠٫٣١٠١ (١٥) ظا ى = ٥٫٠٠٤٥

بند ٦٨ ــ مسائل عامة للتطبيق على ايجاد النسب المثلثية بواسطة الجداول

(مثال ١) أوجد مقدار ظا ١٦′ ٣٥° + جتا ٢١′ ٤٢°

(الحل) من الجداول ظا ١٦′ ٣٥° = ٠٫٧٠٧٢

6 جتا ٢١′ ٤٢° = ٠٫٧٣٩٠

وبالجمع يكون ظا ١٦′ ٣٥° + جتا ٢١′ ٤٢° = ١٫٤٤٦٢

(مثال ٢) أوجد مقدار الزاوية ﺣ من المعادلة

قا٢ ﺣ + ٥ − ٣ √٣ ظا ﺣ = ٠

(الحل) تقدم ان قا٢ ﺣ = ١ + ظا٢ ﺣ

ففى المعادلة الأصلية يكون ظا٢ ﺣ + ١ + ٥ − ٣ √٣ ظا ﺣ = ٠

أى أن ظا٢ ﺣ + ٦ − ٣ √٣ ظا ﺣ = ٠

، (ظا ﺣ − √٣) (ظا ﺣ − ٢ √٣) = ٠

ويكون ظا ﺣ = √٣ أو ٢ √٣

= √٣ أو ٣٫٤٦٤١

فاذا كان ظا ﺣ = √٣ تكون ﺣ = ٦٠°

واذا كان ظا ﺣ = ٣٫٤٦٤١ « ﺣ = ٧٣° ٥٤′ تقريباً

وذلك لأنه من الجداول ظا ٧٣° ٥٤′ = ٣٫٤٦٤٦

تمارين ٢١

أوجد مقادير الكميات الآتية

(١) جا٢ ٦٧° ٣٠′ + جتا٢ ٦٧° ٣٠′

(٢) جا ٢٥° ١٢′ جتا ٦٤° ٤٨′ + جا ٦٤° ٤٨′ جتا ٢٥° ١٢′

(٣) (ظا ٤٧° − ظا ٢°) ÷ (١ + ظا ٤٧° ظا ٢°)

حل المعادلات الآتية

(٤) قا٢ ﺣ + ١ − ٣ ظا ﺣ = ٠ (٧) ٢ جا٢ ﺣ + ٣ جا ﺣ − ٤ = ٠

(٥) ٩ (جتا٢ ﺣ + جا ﺣ) = ١١ (٨) ٣ جا٢ ﺣ − ٤ جا ﺣ + ١ = ٠

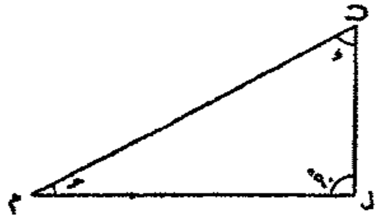
(٦) ٩ جا٢ ﺣ + ٢٧ جا ﺣ = ١٠ (٩) جتا٢ ﺣ + ٥ جا ﺣ جتا ﺣ = ٣

(١٠) ٣ ظا٢ ﺣ − ظا ﺣ قا ﺣ + ١٦ ظا ﺣ − ٦ قا ﺣ + ٣ = ٠

بند ٦٩ — الزوايا المتتامة

يقال ان الزاويتين متتامتان متى كان مجموعهما يساوى قائمة واحدة وتسمى احداهما متممة الاخرى

بند ٧٠ — (نظرية) اذا فرضت زاويتان متتامتان مثل ﺣ ، ى يكون جا ﺣ = جتا ى ، ظا ﺣ = ظتا ى ، قا ﺣ = قتا ى


(شكل ١٨)

(البرهان) نفرض المثلث القائم الزاوية ن ل م (شكل ١٨) ونفرض ان الزاوية الحادة ن م ل مقدارها حـ وان الزاوية الحادة م ن ل مقدارها ء فيكون

حـ + ء = ٩٠° اى انهما متتامتان

ويكون حا ن ل جتا ء

، ظا (ن ل / ل م) ظتا ء

، (م ن / م ل) قتا ء

وبالعكس يكون جتا حـ (م ل / م ن) جا ء

، ظتا (م ل / ن ل) = ظا ء

، قتا (ن م / ن ل) قا

ويمكن كتابة هذه العلاقات على الوضع الآتى

جا حـ = جتا (٩٠° — حـ) ، جتا حـ = جا (٩٠° — حـ)

، ظا حـ = ظتا (٩٠° — حـ) وهكذا ......

بند ٧١ — مسائل تطبيقية على الزوايا المتتامة

(مثال ١) اذا كان جا ١٥° = ٠,٢٥٨٨ ، جا ٧٥° = ٠,٩٦٥٩ فأوجد مقدار ظا ١٥°

(الحل) من حيث ان جتا ١٥° = جا (٩٠° — ١٥°) = جا ٧٥°

يكون جتا ١٥° = ٠,٩٦٥٩

ولكن ظا ١٥° (جا ١٥° / جتا ١٥) (٠,٢٥٨٨ / ٠,٩٦٥٩) = ٠,٢٨٧٩

(مثال ٢) برهن على أن

جا (٩٠° — حـ) ظتا (٩٠° — حـ) ظتا حـ قا حـ = ١

(البرهان) جا (٩٠° — حـ) = جتا حـ ، ظتا (٩٠° — حـ) = ظا حـ وبتغيير هذه المقادير فى المتساوية الأصلية

يكون جا (٩٠° — حـ) ظتا (٩٠° — حـ) ظتا حـ قا حـ = جتا حـ ظا حـ ظتا حـ قا حـ

$$= \text{جتا حـ ظا حـ} \times \frac{\text{١}}{\text{ظا حـ}} \cdot \frac{\text{١}}{\text{جتا حـ}}$$

$$= \frac{\text{جتا حـ ظا حـ}}{\text{جتا حـ ظا حـ}} = \text{١}$$ وهو المطلوب

تمارين ٢٢)

(١) اذا كان جا ١٢′ ٢١° = ٠٫٣٦١٦ فأوجد مقدار جتا ٤٨′ ٦٨°

(٢) اذا كان جا ٤٣° = ٠٫٦٨٢٠ ، جا ٤٧° = ٠٫٧٣١٤ فأوجد ظا ٤٣°

(٣) اذا كان جا ١٧° = ٠٫٢٩٢٤ ، جا ٧٣° = ٠٫٩٥٦٣ فأوجد ظتا ١٧° ، ظتا ٧٣°

(٤) اذا كان جتا ٢٢° = ٠٫٩٢٧٢ ، جتا ٦٨° = ٠٫٣٧٤٦ فأوجد ظا ٢٢° ، ظا ٦٨°

(٥) اذا كان ظا ٣٥° = ٠٫٧٠٠٢ ، جتا ٣٥° = ٠٫٨١٩٢ فأوجد جتا ٥٥° ، ظا ٥٥°

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(٦) جتا (٩٠° — حـ) ظا (٩٠° — حـ) = جتا حـ

(٧) ظا حـ + ظتا حـ = قتا (٩٠° — حـ) قتا حـ

(٨) ظا (٩٠° — حـ) جا (٩٠° — حـ) = جتا² حـ قتا حـ

(٩) ظا حـ قا (٩٠° — حـ) — جا² حـ قتا (٩٠° — حـ) = جتا حـ

(١٠) جا² حـ قتا ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ — حـ) — ظتا² ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ — حـ) جتا حـ = ٠

(١١) ظتا ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ — حـ) + ظتا حـ = ظا حـ قتا² حـ

(١٢) $\frac{\text{جا ٦٢°}}{\text{قا ٦٢°}} \cdot \frac{\text{ظتا ٢٨°}}{\text{جتا ٢٨°}}$ = جتا ٢٨°

(١٣) $\frac{\text{ظا² ٤٣°} \times \text{جا² ٤٣°}}{\text{ظتا ٤٧°} + \text{جتا ٤٧°}}$ = ظا ٤٣° — جتا ٤٧°

(١٤) ظتا ٦٧° ظتا ٢٣° جتا ٦٧° ظا ٦٧° = جتا ٢٣°

(١٥) جتا ١٣° ظا ١٣° ظا ٧٧° قتا ٧٧° = ١

الباب الثانى عشر

فى المسائل العملية

بند ٧٢ — يمكن بواسطة علم حساب المثلثات ايجاد أطوال ارتفاعات ومسافات يصعب أو يستحيل ايجادها بالقياس العملى وللوصول الى ذلك يجب معرفة شيئين احدهما تعيين اتجاه البعد بين نقطتين وقياسه والثانى قياس الزاوية الواقعة بين مستقيمين واصلين من نقطة واحدة الى نقطتين معينتين

بند ٧٣ — ويستعمل فى تعيين اتجاه المستقيم المار بنقطتين معينتين على الارض الشواخص وفى قياس البعد بين نقطتين السلسلة (الجنزير) وفى قياس الزوايا الثيودوليت (Theodolite) والسكستانت (Sextant)

بند ٧٤ — وتستعمل الثيودوليت كثيراً فى مساحة الاراضى لقياس الزوايا التى فى مستو افقى ولقياس زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

بند ٧٥ — وتستعمل السكستانت لقياس الزاوية الواقعة بين مستقيمين واصلين من نقطة واحدة الى نقطتين معينتين مهما كان موقع مستوى الزاوية المراد قياسها

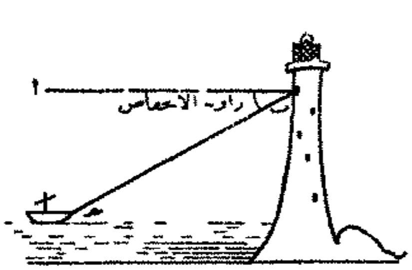
بند ٧٦ — ولا داعى الى الخوض فى وصف هذه الآلات وشرح كيفية استعمالها لأن ذلك خاص بالمساحة العملية للاراضى لا بعلم حساب المثلثات

بند ٧٧ — زوايا الارتفاع والانخفاض

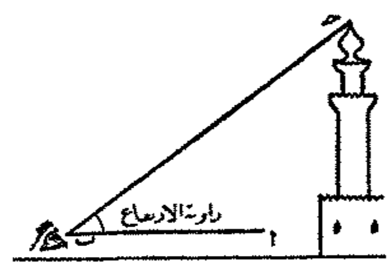
اذا نظر شخص الى جسم معين فالزاوية التى بين الشعاع الواصل الى العين والجسم المنظور لها ارتباط عظيم بحل المسائل العملية ويمكن قياسها بواسطة الثيودوليت

وتسمى هذه الزاوية زاوية الارتفاع متى كان الجسم المنظور فوق عين الناظر

وتسمى زاوية الانخفاض متى كان الجسم المنظور تحت عين الناظر



(شكل ٢٠)



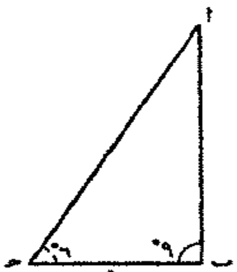
(شكل ١٩)

فاذا فرض ان رجلاً على سطح الارض ينظر الى أعلى مئذنة (شكل ١٩) فالزاوية ا ب حـ التى بين الشعاع الافقى ب ا والشعاع الواصل بين العين وأعلى المئذنة تسمى زاوية الارتفاع

واذا فرض ان رجلاً داخل مناراً ينظر الى سفينة فى البحر من احدى نوافذه (شكل ٢٠) فالزاوية ا ب حـ التى بين الشعـاع الافقى ب ا والشعاع الواصل بين العين والسفينة تسمى زاوية الانخفاض

بند ٧٨ أمثلة محلوله للتطبيق على حل المسائل العملية بواسطة علم حساب المثلثات

(مثال ١) اذا كانت زاوية ارتفاع قمة منزل من نقطة على بعد ١٠٠ ذراع من موقعه هى ٦٠° فما ارتفاع هذا المنزل لأقرب ذراع صحيح



(شكل ٢١)

(الحل) نفرض ان نقطة ا (شكل ٢١) قمة المنزل وأن ب موقعه وان حـ نقطة على بعد ١٠٠ ذراع من ب فيكون ب حـ = ١٠٠ ذراع والزاوية ا حـ ب = ٦٠°

وحينئذ يكون ب ا / حـ ب = ظا ا حـ ب = ظا ٦٠° = √٣

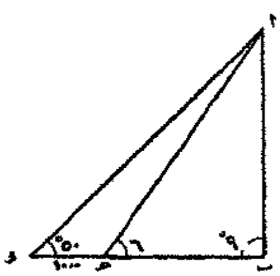
أى أن ب ا / ١٠٠ = √٣

ويكون ب ا = ١٠٠ × √٣ = ١٠٠ × ١,٧٣٢

= ١٧٣,٢ ذراعاً

اذن ارتفاع المنزل = ١٧٣ ذراعاً صحيحاً

(مثال ٢) وجد رجل وهو واقف على سطح الأرض ان زاوية ارتفاع قمة جبل ٥٠° ثم مشى الرجل جهة الجبل مسافة قدرها ١٠٠٠ متر فوجد ان زاوية الارتفاع فى هذه الحالة هى ٦٠° فما ارتفاع هذا الجبل لأقرب متر صحيح



(شكل ٢٢)

(الحل) نفرض ان نقطة ا (شكل ٢٢) قمة الجبل وان ب موقعه وان ء المحل الذى كان به الرجل أولا وان حـ المحل الذى كان به ثانياً فيكون ء حـ = ١٠٠٠ متر ، ∠ ا ء ب = ٥٠° ، ∠ ا حـ ب = ٦٠°

وحينئذ يكون حـ ب = ا ب ظتا ا حـ ب = ا ب ظتا ٦٠°

= ا ب × ٠,٥٧٧٤

، ء ب = ا ب ظتا ا ء ب = ا ب ظتا ٥٠°

= ا ب × ٠,٨٣٩١

ولكن ء حـ = ء ب − حـ ب

وبالتعويض يكون ء حـ = ا ب × ٠,٨٣٩١ − ا ب × ٠,٥٧٧٤

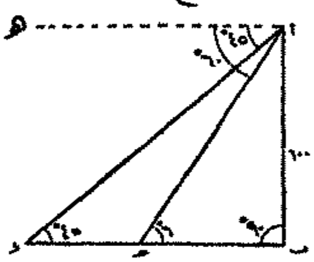
= ا ب (٠,٨٣٩١ − ٠,٥٧٧٤)

أى ان ١٠٠٠ = ا ب × ٠,٢٦١٧

ويكون ا ب = ١٠٠٠ / ٠,٢٦١٧ = ٣٨٢١ متراً تقريباً

اذن ارتفاع الجبل = ٣٨٢١ متراً صحيحاً

(مثال ٣) شخص فوق مئذنة أبصر رجلين واقفين فى الطريق ووجد ان زاوية انخفاض الأول ٦٠° وزاوية انخفاض الثانى ٤٥° فما هى المسافة التى بين الرجلين (لأقرب ذراع صحيح) مع العلم بأن ارتفاع المئذنة ١٠٠ ذراع عن سطح الأرض وأن الرجلين على استقامة موقع المئذنة



(شكل ٢٣)

(الحل) نفرض ان نقطة ا (شكل ٢٣) المحل الذى به الرجل فوق المئذنة وان ب موقع المئذنة وان حـ الرجل الأول ، ى الرجل الثانى

فيكون ب ا = ١٠٠ ذراع

، ∠ ى ا هـ = ∠ ا ى ب = ٤٥°

، ∠ حـ ا هـ = ∠ ا حـ ب = ٦٠°

وحينئذ يكون حـ ب = ١٠٠ ظتا ا حـ ب = ١٠٠ ظتا ٦٠° = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

، ى ب = ١٠٠ ظتا ا ى ب = ١٠٠ ظتا ٤٥° = ١٠٠

ولكن حـ ى = ى ب − حـ ب

وبالتعويض يكون حـ ى = ١٠٠ − $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ = ٤٢ ذراعاً تقريباً

اذن المسافة التى بين الرجلين = ٤٢ ذراعاً صحيحاً

(تمارين ٢٣)

(تنبيه) فى المسائل المسبوقة بعلامة (*) يؤتى بالجواب مقرباً الى الجزء الصحيح

*(١) اذا كانت زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على بعد ٢٠٠ قدم من موقعه هى ٦٠° فما ارتفاع هذا البرج

*(٢) رجل نظر الى مسلة وهو واقف على بعد ٧٥ متراً منها فوجد ان زاوية ارتفاعها ٤٥° فما طول هذه المسلة مع العلم بأن عين الرجل تبعد عن سطح الارض بمقدار متر واحد

*(٣) من قمة جرف وجد ان زاوية انخفاض سفينة على سطح البحر هى ٣٠° فما ارتفاع هذا الجرف مع العلم بأن السفينة تبعد بمقدار ١٥٠ متراً عن موقعه

*(٤) رجل فوق مئذنة أبصر علماً فوق سطح منزل فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٠° فما بعد العلم عن المئذنة مع العلم بأن ارتفاع المئذنة = ٧٥ متراً وان ارتفاع المنزل = ٣٥ متراً

*(٥) ما زاوية ارتفاع الشمس عند ما يكون نسبة طول عصا رأسية الى طول ظلها كنسبة $\sqrt{٣}$: ١

*(٦) نخلة طول ظلها = ٣٠٠ قدم عند ما يكون ارتفاع الشمس ٣٠° فما ارتفاع هذه النخلة

(٧) اذا كانت زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة شماله هى ٦٠° ومن نقطة جنوبه هى ٤٥° فما ارتفاع ذلك البرج وما بعد كل نقطة عنه مع العلم بأن المسافة التى بين النقطتين هى ١٠٠ متر

*(٨) سارية علم فوق سطح منزل طولها ٢٥ قدماً ومن نقطة فى مستوى قاعدة المنزل وجد أن زاويتى ارتفاع قمة السارية وأسفلها هما ٦٠° ، ٤٥° فما ارتفاع ذلك المنزل

(٩) رجل على بعد ٣٥ قدماً من قاعدة برج وجد ان زاوية ارتفاع قمة سارية علم فوق البرج هى ٦٠° وان زاوية ارتفاع قمة البرج نفسه هى ٤٥° فما طول السارية

*(١٠) من قمة جرف ارتفاعه ١٠٠ متر وجد ان زاويتى انخفاض سفينتين فى البحر هما ٤٥° ، ٣٠° فما طول المسافة التى بين السفينتين مع العلم بأنهما على استقامة قاعدة الجرف

(١١) رجل فوق نخلة أبصر ولداً فى الطريق ووجد أن زاوية انخفاضه حـ ثم أبصر ولداً آخر يبعد عن الاول بمقدار ٥٠ متراً ووجد أن زاوية انخفاضه ء فما ارتفاع تلك النخلة مع العلم بأن جا حـ = ١ر٠ ، ظتا ء = ٣ وان الولدين وموقع النخلة على استقامة واحدة

(١٢) رجل أبصر منطاداً وهو واقف على سطح الارض ووجد ان زاوية ارتفاعه ٣٠° ثم مشى ميلاً جهة المنطاد فوجد ان زاوية ارتفاعه ٦٠° فما طول المسافة التى يمشيها حتى يصير تحت المنطاد (بفرض ان المنطاد ثابت لا يتحرك)

(١٣) وجد شخص من نقطة على سطح الارض ان زاوية ارتفاع قمة برج هى ٦٠° ومن نقطة أبعد من الاولى بمقدار ١٠٠ متر وجد ان زاوية الارتفاع ٣٠° فما ارتفاع ذلك البرج

*(١٤) أبصر رجل قمة برج من نقطتى ا ، ب اللتين فى مستوى قاعدة البرج فوجد ان زاوية الارتفاع من نقطة ب هى س وان زاوية الارتفاع من نقطة ا هى ٣٠° والمطلوب ايجاد ارتفاع ذلك البرج مع العلم بأن ا ، ب على استقامة قاعدة البرج وان ا ب = ١٠٢ متر وان جتا س = $\frac{٨}{١٧}$

(١٥) من قمة تل ارتفاعه ١٠٨ أمتار وجد ان زاويتى انخفاض قمة مسلة وقاعدتها هما ٣٠° ، ٦٠° فما ارتفاع تلك المسلة مع العلم بأنها على قاعدة التل

*(١٦) وجد رجل فى منطاد ان زاويتى انخفاض قمة جرف عمودى وقاعدته هما ٣٠° ، ٤٥° فما ارتفاع ذلك المنطاد عن سطح البحر مع العلم بأن ارتفاع الجرف ١٠٠ متر

(١٧) رجل طوله متران واقف على سطح الارض على بعد ٤٫٧٥ أمتار من مصباح ووجد أن طول ظله ١٩ متراً فما ارتفاع ذلك المصباح

(١٨) رجل وقف فى نقطة ا ينظر الى قلعتى ب ، حـ فوجد أن الزاوية ب ا حـ = ٤٥° مع علمه ان الزاوية حـ ب ا = ٩٠° ثم مشى ميلين جهة ب حتى وصل نقطة ء فوجد ان الزاوية ب ء حـ = ٦٠° فما طول المسافة التى بين القلعتين

(١٩) رجل وقف فى نقطة ب على ضفة نهر مستقيم ينظر الى شجرة ا على الضفة الثانية للنهر (امامه مباشرة) ثم مشى ١٠٠ متر على الضفة حتى وصل نقطة حـ فما عرض هذا النهر مع العلم بأن الزاوية ب حـ ا = ٣٠°

(٢٠) ا ، ب نقطتان على ضفة واحدة من نهر مستقيم ، حـ نقطة اخرى على الضفة المقابلة فاذا كانت الزاوية حـ ا ب = ٣٠° والزاوية حـ ب ا = ٦٠° فأوجد عرض ذلك النهر مع العلم بأن طول ا ب = ٩٦ متراً

(تنبيه) فى الامثلة الآتية يبحث عن النسب المثلثية اللازمة من الجداول

*(٢١) اذا كانت زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة شماله هى ٥٠° ومن نقطة جنوبه هى ٤٠° فما إرتفاع ذلك البرج مع العلم بأن طول المسافة التى بين النقطتين ١٥٠ متراً

*(٢٢) من قمة قلع سفينة يرتفع ٥٠ قدماً على سطح الماء وجد ان زاوية انخفاض جسم يعوم على سطح الماء هى ٢٠° فما بعد هذا الجسم عن السفينة

*(٢٣) وجد رجل واقف على سطح الارض ان زاوية ارتفاع قمة جرف هى ٦٠° ثم ارتفع الرجل من موضعه فى منطاد مسافة قدرها ١٠٠ متر فوجد ان زاوية الارتفاع ٥٠° فما ارتفاع ذلك الجرف

(٢٤) رجل وقف فى نقطة ا ينظر الى قلعتى ب ، حـ فوجد ان الزاوية حـ ا ب = ٥٠° مع علمه ان الزاوية ب حـ ا = ٩٠° ثم مشى نصف ميل جهة حـ حتى وصل نقطة ى فوجد ان الزاوية حـ ى ب = ٥٥° فما طول المسافة التى بين القلعتين لاقرب عشر ميل

*(٢٥) اذا كانت زاوية ارتفاع الشمس ٣٠′ ٣٦° فما طول ظل رجل قامته ٦ أقدام

(٢٦) عصا طولها ١٢ ديسيمتراً وضعت عمودية على سطح الارض وكان طول ظلها ٧ ديسيمترات فما زاوية ارتفاع الشمس

*(٢٧) برج على ضفة نهر ارتفاعه ١٢٠ قدماً فاذا كانت زاوية ارتفاع قمته من الضفة المقابلة هى ٢٠° فأوجد عرض ذلك النهر

*(٢٨) رجل وقف على ضفة نهر ينظر الى برج امامه على الضفة المقابلة فوجد ان زاوية ارتفاع قمته ٥٧° ثم رجع الرجل ١٠٠ متر الى الوراء فوجد ان زاوية الارتفاع ٣٥° فما عرض ذلك النهر

*(٢٩) ا ، ب نقطتان على ضفة واحدة من نهر مستقيم ، حـ نقطة اخرى على الضفة المقابلة امام نقطة ا مباشرة والمطلوب ايجاد عرض ذلك النهر مع العلم بأن الزاوية حـ ب ا = ١٧′ ٣٢° وان طول ا ب = ١٠٠ متر

(٣٠) سفينة فى البحر تبعد عن الشاطىء بمقدار كيلومترين وجد منها ان زاوية ارتفاع قمة جرف تساوى ٢٠° وان زاوية ارتفاع قمة منزل فوق ذلك الجرف = ٢١° فما ارتفاع المنزل لاقرب ديسيمتر صحيح

الباب الثالث عشر

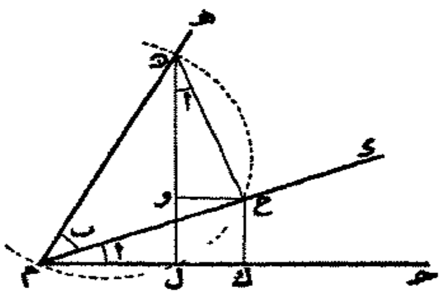
فى النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

بند ٧٩ — نشرع فى هذا الباب فى ايجاد ما تساويه النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما مثل ا ، ب بدلالة النسب المثلثية لهاتين الزاويتين المفروضتين

وسنتخذ الطرق الهندسية برهاناً لقوانين هذه النسب فارضين ان كلاً من ∠ ا ، ∠ ب ، ∠ (ا + ب) ، ∠ (ا − ب) أقل من قائمة وسنبرهن فيما بعد على ان هذه القوانين عامة لجميع الزوايا مهما كان مقدارها

بند ٨٠ — برهن على ان

$$\text{جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب}$$



(شكل ٢٤)

(البرهان) نفرض ان الزاوية حـ م ء (شكل ٢٤) مقدارها ا وان الزاوية ء م هـ مقدارها ب ففى الشكل الزاوية حـ م هـ عبارة عن الزاوية (ا + ب)

ثم نأخذ نقطة ن على الضلع م هـ ونرسم منها ن ل عموداً على م حـ ، ن ح عموداً على م ء وبعد ذلك نرسم ح و عموداً على ل ن ، ح ك عموداً على م حـ

فبما ان كلاً من زاويتى ن ح م ، ن ل م قائمة يمكن رسم دائرة حول أربع النقط ن ، ح ، ل ، م وبذلك تكون ∠ ل ن ح = ∠ ل م ح = ا

من الشكل $\text{جا (ا + ب) = جا حـ م هـ} = \frac{\text{ل ن}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ل و + و ن}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ك ح}}{\text{م ن}} + \frac{\text{و ن}}{\text{م ن}}$

وبضرب حدى الكسر الاول فى م ح وحدى الكسر الثانى فى ح ن يحدث ان

$$\text{جا (ا + ب)} = \frac{\text{ك ح . م ح}}{\text{م ح . م ن}} + \frac{\text{و ن . ح ن}}{\text{ح ن . م ن}}$$

$$= \frac{\text{ك ح}}{\text{م ح}} \cdot \frac{\text{م ح}}{\text{م ن}} + \frac{\text{و ن}}{\text{ح ن}} \cdot \frac{\text{ح ن}}{\text{م ن}}$$

$$= \text{جا حـ م ء جتا ء م هـ + جتا و ن ح جا ء م هـ}$$

$$= \text{جا ا جتا ب + جتا ا جا ب}$$ وهو المطلوب

بند ٨١ — برهن على أن

جتا (ا + ب) = جتا ا جتا ب — جا ا جا ب

(البرهان) من (شكل ٢٤) ∠ حـ م هـ = (ا + ب)

فيكون جتا (ا + ب) = جتا حـ م هـ = $\frac{\text{م ل}}{\text{م ن}}$

$= \frac{\text{م ك} - \text{ل ك}}{\text{م ن}} = \frac{\text{م ك}}{\text{م ن}} - \frac{\text{و ح}}{\text{م ن}}$

و بضرب حدى الكسر الاول فى م ح وحدى الكسر الثانى فى ح ن يحدث أن

جتا (ا + ب) $= \frac{\text{م ك} \cdot \text{م ح}}{\text{م ح} \cdot \text{م ن}} - \frac{\text{و ح} \cdot \text{ح ن}}{\text{ح ن} \cdot \text{م ن}}$

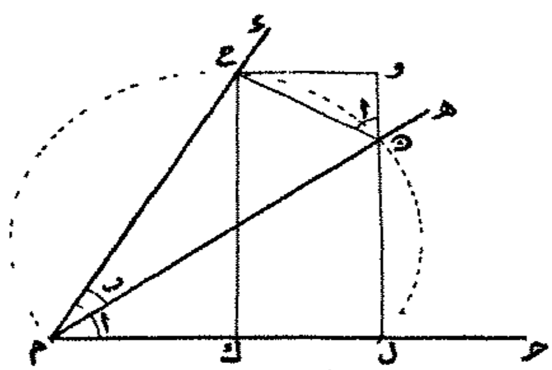
$= \frac{\text{م ك}}{\text{م ح}} \cdot \frac{\text{م ح}}{\text{م ن}} - \frac{\text{و ح}}{\text{ح ن}} \cdot \frac{\text{ح ن}}{\text{م ن}}$

= جتا حـ م ى جتا ى م هـ — جا و ن ح جا ى م هـ

= جتا ا جتا ب — جا ا جا ب وهو المطلوب

بند ٨٢ — برهن على أن

جا (ا — ب) = جا ا جتا ب — جتا ا جا ب



(شكل ٢٥)

(البرهان) نفرض ان الزاوية حـ م ى (شكل ٢٥) مقـدارها ا وان الزاوية ى م هـ مقدارها ب ففى الشكل الزاوية حـ م هـ عبارة عن الزاوية (ا — ب)

ثم نأخذ نقطة ن على الضلع م هـ ونرسم منها ن ل عموداً على م حـ ، ن ح عموداً على م ى و بعد ذلك نرسم ح و عموداً على ل ن ، ح ك عموداً على م حـ و بما أن فى الشكل الرباعى م ح ن ل الزاوية م ل ن قائمة والزاوية م ح ن قائمة كذلك يمكن رسم دائره حول رءوسه الاربعة و بذلك تكون ∠ و ن ح = ∠ ل م ح = ا

من الشكل جا (ا — ب) = جا حـ م هـ = $\frac{\text{ل ن}}{\text{م ن}}$

$= \frac{\text{ل و} - \text{ن و}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ك ح}}{\text{م ن}} - \frac{\text{ن و}}{\text{م ن}}$

و بضرب حدى الكسر الاول فى م ح وحدى الكسر الثانى فى ح ه يحدث أن

$$\text{جا}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{ك ح}\cdot\text{م ح}}{\text{م ح}\cdot\text{م ه}}-\frac{\text{ه و}\cdot\text{ح ه}}{\text{ح ه}\cdot\text{م ه}}$$

$$=\frac{\text{ك ح}}{\text{م ح}}\cdot\frac{\text{م ح}}{\text{م ه}}-\frac{\text{ه و}}{\text{ح ه}}\cdot\frac{\text{ح ه}}{\text{م ه}}$$

$$=\text{جا حـ م ى جتا ه م ى}-\text{جتا و ه ح جا ه م ى}$$

$$=\text{جا ا جتا ب}-\text{جتا ا جا ب}$$ وهو المطلوب

بند ٨٣ — برهن على أن

$$\text{جتا}(\text{ا}-\text{ب})=\text{جتا ا جتا ب}+\text{جا ا جا ب}$$

(البرهان) من (شكل ٢٥) $\angle\ \text{حـ م ه}=(\text{ا}-\text{ب})$

ويكون $\text{جتا}(\text{ا}-\text{ب})=\text{جتا حـ م ه}=\dfrac{\text{م ل}}{\text{م ه}}$

$$=\frac{\text{م ك}+\text{ك ل}}{\text{م ه}}=\frac{\text{م ك}}{\text{م ه}}+\frac{\text{ح و}}{\text{م ه}}$$

و بضرب حدى الكسر الاول فى م ح وحدى الكسر الثانى فى ه ح يحدث أن

$$\text{جتا}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{م ك}\cdot\text{م ح}}{\text{م ح}\cdot\text{م ه}}+\frac{\text{ح و}\cdot\text{ه ح}}{\text{ه ح}\cdot\text{م ه}}$$

$$=\frac{\text{م ك}}{\text{م ح}}\cdot\frac{\text{م ح}}{\text{م ه}}+\frac{\text{ح و}}{\text{ه ح}}\cdot\frac{\text{ه ح}}{\text{م ه}}$$

$$=\text{جتا حـ م ى جتا ه م ى}+\text{جا و ه ح جا ه م ى}$$

$$=\text{جتا ا جتا ب}+\text{جا ا جا ب}$$ وهو المطلوب

بند ٨٤ — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) المطلوب ايجاد مقدار جا ١٥°

(الحل) $\text{جا } ١٥^\circ=\text{جا}(٤٥^\circ-٣٠^\circ)$

$$=\text{جا } ٤٥^\circ\ \text{جتا } ٣٠^\circ-\text{جتا } ٤٥^\circ\ \text{جا } ٣٠^\circ$$

$$=\frac{١}{\sqrt{٢}}\cdot\frac{\sqrt{٣}}{٢}-\frac{١}{\sqrt{٢}}\cdot\frac{١}{٢}$$

$$=\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}-\frac{١}{٢\sqrt{٢}}=\frac{\sqrt{٣}-١}{٢\sqrt{٢}}$$

(مثال ٢) برهن على ان

جتا ٢٥´ ١٦° جتا ٢٥´ ٦° + جتا ٣٥´ ٨٣° جتا ٣٥´ ٢٣° = $\frac{١}{٢}$

(البرهان) بما أن الزاويتين ٢٥´ ٦٦° ، ٣٥´ ٢٣° متتامتان والزاويتين ٢٥´ ٦° ، ٣٥´ ٨٣° متتامتان كذلك وبما أن جيب اى زاوية = جيب تمام متممتها يكون

جتا ٢٥´ ٦٦° جتا ٢٥´ ٦° + جتا ٣٥´ ٨٣° جتا ٣٥´ ٢٣°

= جا ٣٥´ ٢٣° جتا ٢٥´ ٦° + جا ٢٥´ ٦° جتا ٣٥´ ٢٣°

= جا (٣٥´ ٢٣° + ٢٥´ ٦°)

= جا ٣٠°

= $\frac{١}{٢}$ وهو المطلوب

(تمارين ٢٤)

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(١) جا ٧٥° = جتا ١٥° = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$

(٢) جا ٢١° جتا ٩° + جتا ٢١° جا ٩° = $\frac{١}{٢}$

(٣) جا ٥´ ١٣° جتا ٥´ ٧٣° — جتا ٥´ ١٣° جا ٥´ ٧٣° = — $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) جا (حـ + ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جا حـ + جتا حـ)

(٥) جا (حـ — ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جا حـ — جتا حـ)

(٦) جتا (حـ + ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا حـ — جا حـ)

(٧) جتا (حـ — ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا حـ + جا حـ)

(٨) جا (حـ + ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا حـ + جتا حـ)

(٩) جتا (حـ — ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا حـ + جا حـ)

(١٠) جا (حـ + ى) + جتا (حـ — ى) = (جا حـ + جتا حـ) (جا ى + جتا ى)

(١١) جا (حـ — ى) + جتا (حـ + ى) = (جا حـ + جتا حـ) (جتا ى — جا ى)

(١٢) ٢ جا (٤٥° + حـ) جتا (٤٥° + ى) = جتا (حـ + ى) + جا (حـ − ى)

(١٣) ٢ جتا (٤٥° + حـ) جتا (٤٥° − ى) = جتا (حـ + ى) − جا (حـ − ى)

(١٤) جتا (حـ + ى) − جا (حـ − ى) = ٢ جا (٤٥° − حـ) جتا (٤٥° − ى)

بند ٨٥ — أمثلة أخرى محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) برهن على أن

جا (ا + ب) + جا (ا − ب) = ٢ جا ا جتا ب

(البرهان) جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب

، جا (ا − ب) = جا ا جتا ب − جتا ا جا ب

وبالجمع يكون جا (ا + ب) + جا (ا − ب) = ٢ جا ا جتا ب وهو المطلوب

(مثال ٢) برهن على أن

$$\text{ظا ا} + \text{ظا ب} = \frac{\text{جا (ا + ب)}}{\text{جتا ا جتا ب}}$$

(البرهان)

$$\text{ظا ا} + \text{ظا ب} = \frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}} + \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}$$

$$= \frac{\text{جا ا جتا ب + جا ب جتا ا}}{\text{جتا ا جتا ب}}$$

$$= \frac{\text{جا (ا + ب)}}{\text{جتا ا جتا ب}}$$ وهو المطلوب

(تمارين ٢٥)

برهن على المتساويات الآتية صحيحة

(١) جا (ا + ب) − جا (ا − ب) = ٢ جتا ا جا ب

(٢) جتا (ا + ب) + جتا (ا − ب) = ٢ جتا ا جتا ب

(٣) جتا (ا − ب) − جتا (ا + ب) = ٢ جا ا جا ب

(٤) $$\frac{\text{جتا (ا + ب) + جتا (ا − ب)}}{\text{جا (ا + ب) + جا (ا − ب)}} = \text{ظتا ا}$$

(٥) $$\frac{\text{جتا (ا − ب) − جتا (ا + ب)}}{\text{جا (ا + ب) − جا (ا − ب)}} = \text{ظا ا}$$

(٦) $\text{ظا ا} - \text{ظا ب} = \dfrac{\text{جا}(\text{ا} - \text{ب})}{\text{جتا ا جتا ب}}$

(٧) $\text{جا}(\text{ا} + \text{ب})\,\text{جا}(\text{ا} - \text{ب}) = \text{جا}^{2}\,\text{ا} - \text{جا}^{2}\,\text{ب} = \text{جتا}^{2}\,\text{ب} - \text{جتا}^{2}\,\text{ا}$

(٨) $\text{جتا}(\text{ا} + \text{ب})\,\text{جتا}(\text{ا} - \text{ب}) = \text{جتا}^{2}\,\text{ا} - \text{جا}^{2}\,\text{ب} = \text{جتا}^{2}\,\text{ب} - \text{جا}^{2}\,\text{ا}$

(٩) $\text{ظتا ى} + \text{ظا هـ} = \dfrac{\text{جتا}(\text{ى} - \text{هـ})}{\text{جا ى جتا هـ}}$

(١٠) $\text{ظتا ى} - \text{ظا هـ} = \dfrac{\text{جتا}(\text{ى} + \text{هـ})}{\text{جا ى جتا هـ}}$

(١١) $\dfrac{\text{ظا ب} + \text{ظا حـ}}{\text{ظا ب} - \text{ظا حـ}} = \dfrac{\text{جا}(\text{ب} + \text{حـ})}{\text{جا}(\text{ب} - \text{حـ})}$

(١٢) $\dfrac{\text{ظا ب} + \text{ظتا حـ}}{\text{ظتا حـ} - \text{ظا ب}} = \text{جتا}(\text{ب} - \text{حـ})\,\text{قا}(\text{ب} + \text{حـ})$

(١٣) $\dfrac{\text{ظتا ب} + \text{ظتا حـ}}{\text{ظتا ب} - \text{ظتا حـ}} = -\,\text{جا}(\text{ب} + \text{حـ})\,\text{قتا}(\text{ب} - \text{حـ})$

(١٤) $\dfrac{\text{ظا حـ ظا ى} + ١}{١ - \text{ظا حـ ظا ى}} = \dfrac{\text{جتا}(\text{حـ} - \text{ى})}{\text{جتا}(\text{حـ} + \text{ى})}$

(١٥) $\dfrac{\text{ظا حـ ظتا ى} + ١}{\text{ظا حـ ظتا ى} - ١} = \dfrac{\text{جا}(\text{حـ} + \text{ى})}{\text{جا}(\text{حـ} - \text{ى})}$

(١٦) $\dfrac{١ + \text{ظتا ى ظا هـ}}{\text{ظتا ى} - \text{ظا هـ}} = \text{ظا}(\text{ى} + \text{هـ})$

(١٧) $\dfrac{١ - \text{ظتا ى ظا هـ}}{\text{ظتا ى} + \text{ظا هـ}} = \text{ظا}(\text{ى} - \text{هـ})$

(١٨) $\dfrac{\text{ظتا ى} - \text{ظتا هـ}}{\text{ظتا ى ظتا هـ} + ١} = -\,\text{ظا}(\text{ى} - \text{هـ})$

(١٩) $\dfrac{\text{ظا}(\text{ى} - \text{هـ}) + \text{ظا هـ}}{١ - \text{ظا}(\text{ى} - \text{هـ})\,\text{ظا هـ}} = \text{ظا ى}$

(٢٠) $\dfrac{\text{ظا}(\text{ى} + \text{هـ}) - \text{ظا ى}}{١ + \text{ظا}(\text{ى} + \text{هـ})\,\text{ظا ى}} = \text{ظا هـ}$

بند ٨٦ — برهن على أن

$$\text{ظا}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{ظا ا}+\text{ظا ب}}{1-\text{ظا ا ظا ب}}$$

(البرهان) $\text{ظا}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{جا}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جتا}(\text{ا}+\text{ب})}=\frac{\text{جا ا جتا ب}+\text{جتا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}-\text{جا ا جا ب}}$

و بقسمة حدى الكسر الاخير على جتا ا جتا ب ينتج أن

$$\text{ظا}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\dfrac{\text{جا ا جتا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}+\dfrac{\text{جتا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}}{\dfrac{\text{جتا ا جتا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}-\dfrac{\text{جا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}+\dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}{1-\dfrac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}\cdot\dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}=\frac{\text{ظا ا}+\text{ظا ب}}{1-\text{ظا ا ظا ب}}$$ وهو المطلوب

بند ٨٧ — برهن على أن

$$\text{ظا}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{ظا ا}-\text{ظا ب}}{1+\text{ظا ا ظا ب}}$$

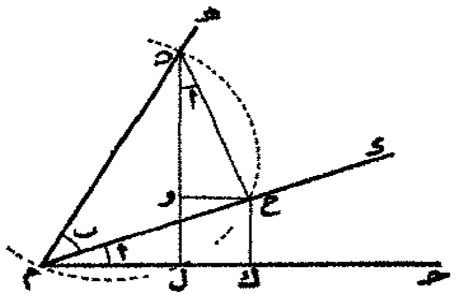
(البرهان) $\text{ظا}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{جا}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جتا}(\text{ا}-\text{ب})}=\frac{\text{جا ا جتا ب}-\text{جتا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}+\text{جا ا جا ب}}$

و بقسمة حدى الكسر الاخير على جتا ا جتا ب ينتج أن

$$\text{ظا}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\dfrac{\text{جا ا جتا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}-\dfrac{\text{جتا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}}{\dfrac{\text{جتا ا جتا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}+\dfrac{\text{جا ا جا ب}}{\text{جتا ا جتا ب}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}-\dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}{1+\dfrac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}\cdot\dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}=\frac{\text{ظا ا}-\text{ظا ب}}{1+\text{ظا ا ظا ب}}$$ وهو المطلوب

بند ٨٨ — ويمكن البرهنة على القانونين السابقين بالطريقتين الهندسيتين الآتيتين



(شكل ٢٦)

(برهان القانون الاول) نرسم شكلاً كالشكل المرسوم ببند ٨٠

في هذا الشكل $\angle\,\text{ح م ه} = (\text{ا} + \text{ب})$

ويكون $\text{ظا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \text{ظا ح م ه} = \dfrac{\text{ل ه}}{\text{م ل}}$

$$= \frac{\text{ل و} + \text{و ه}}{\text{م ك} - \text{ل ك}} = \frac{\text{ك ع} + \text{و ه}}{\text{م ك} - \text{و ع}}$$

وبقسمة حدى الكسر الاخير على م ك ينتج أن

$$\text{ظا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\dfrac{\text{ك ع}}{\text{م ك}} + \dfrac{\text{و ه}}{\text{م ك}}}{\dfrac{\text{م ك}}{\text{م ك}} - \dfrac{\text{و ع}}{\text{م ك}}}$$

وبضرب حدى الكسر $\dfrac{\text{و ع}}{\text{م ك}}$ في و ه ينتج أن

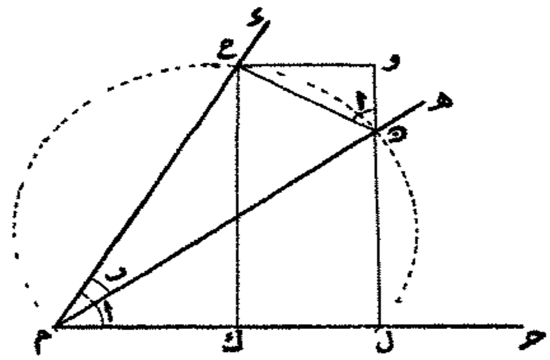
$$\text{ظا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\dfrac{\text{ك ع}}{\text{م ك}} + \dfrac{\text{و ه}}{\text{م ك}}}{١ - \dfrac{\text{و ع . و ه}}{\text{و ه . م ك}}} = \frac{\text{ظا ا} + \dfrac{\text{و ه}}{\text{م ك}}}{١ - \text{ظا ا} \cdot \dfrac{\text{و ه}}{\text{م ك}}}$$

وبما ان المثلثين ع م ك ، ع ه و متشابهان لتساوى زواياهما ينتج من تشابههما أن

$$\frac{\text{و ه}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ع ه}}{\text{م ع}} = \text{ظا ب}$$

وبذلك يكون $\text{ظا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \dfrac{\text{ظا ا} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا ا ظا ب}}$ وهو المطلوب

(برهان القانون الثانى) نرسم شكلاً كالشكل المرسوم ببند ٨٢



(شكل ٢٧)

في هذا الشكل $\angle$ حـ م هـ $= (\text{ا} - \text{ب})$

و يكون $\text{ظا}(\text{ا} - \text{ب}) = \text{ظا حـ م هـ} = \dfrac{\text{ل ن}}{\text{م ل}}$

$$= \frac{\text{ل و} - \text{و ن}}{\text{م ك} + \text{ل ك}} = \frac{\text{ك ح} - \text{و ن}}{\text{م ك} + \text{و ح}}$$

وبقسمة حدى الكسر الأخير على م ك ينتج أن

$$\text{ظا}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\dfrac{\text{ك ح}}{\text{م ك}} - \dfrac{\text{و ن}}{\text{م ك}}}{\dfrac{\text{م ك}}{\text{م ك}} + \dfrac{\text{و ح}}{\text{م ك}}}$$

وبضرب حدى الكسر $\dfrac{\text{و ح}}{\text{م ك}}$ في و ن ينتج أن

$$\text{ظا}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\dfrac{\text{ك ح}}{\text{م ك}} - \dfrac{\text{و ن}}{\text{م ك}}}{1 + \dfrac{\text{و ح . و ن}}{\text{و ن . م ك}}} = \frac{\text{ظا ا} - \dfrac{\text{و ن}}{\text{م ك}}}{1 + \text{ظا ا} \cdot \dfrac{\text{و ن}}{\text{م ك}}}$$

وبما أن المثلثين ح م ك ، ح ن و متشابهان لتساوى زواياهما ينتج من تشابههما أن

$$\frac{\text{و ن}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ح ن}}{\text{م ح}} = \text{ظا ب}$$

و بذلك يكون $\text{ظا}(\text{ا} - \text{ب}) = \dfrac{\text{ظا ا} - \text{ظا ب}}{1 + \text{ظا ا ظا ب}}$ وهو المطلوب

بند ٨٩ — أمثلة محلولة للتطبيق على القانونين السابقين

(مثال ١) أوجد مقدار ظا ٧٥°

(الحل) $\text{ظا } ٧٥° = \text{ظا } (٤٥° + ٣٠°)$

$$= \frac{\text{ظا } ٤٥° + \text{ظا } ٣٠°}{١ - \text{ظا } ٤٥° \text{ ظا } ٣٠°}$$

$$= \frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - ١ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣}} \div \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١} = \frac{(\sqrt{٣} + ١)(\sqrt{٣} + ١)}{(\sqrt{٣} - ١)(\sqrt{٣} + ١)}$$

$$= \frac{٣ + ١ + ٢\sqrt{٣}}{٣ - ١} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$$

$= ٢ + \sqrt{٣}$ وهو المطلوب

(مثال ٢) برهن على ان

$$\text{ظا } (\text{حـ} - ٣٠°) = \frac{\sqrt{٣}\text{ ظا حـ} - ١}{\sqrt{٣} + \text{ظا حـ}}$$

(البرهان) $\text{ظا } (\text{حـ} - ٣٠°) = \frac{\text{ظا حـ} - \text{ظا } ٣٠°}{١ + \text{ظا حـ ظا } ٣٠°} = \frac{\text{ظا حـ} - \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ + \frac{\text{ظا حـ}}{\sqrt{٣}}}$

$= \frac{\sqrt{٣}\text{ ظا حـ} - ١}{\sqrt{٣}} \div \frac{\sqrt{٣} + \text{ظا حـ}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}\text{ ظا حـ} - ١}{\sqrt{٣} + \text{ظا حـ}}$ وهو المطلوب.

(تمارين ٢٦)

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(١) $\text{ظا } ١٥° = \text{ظتا } ٧٥° = ٢ - \sqrt{٣}$

(٢) $\text{ظتا } ١٥° = \text{ظا } ٧٥° = ٢ + \sqrt{٣}$

(٣) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 45^\circ) = \dfrac{\text{ظا حـ} + 1}{1 - \text{ظا حـ}}$

(٤) $\text{ظا}\,(\text{حـ} - 45^\circ) = \dfrac{\text{ظا حـ} - 1}{1 + \text{ظا حـ}}$

(٥) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}\,\text{ظا حـ} + 1}{\sqrt{3} - \text{ظا حـ}}$

(٦) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 60^\circ) = \dfrac{\text{ظا حـ} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\,\text{ظا حـ}}$

(٧) $\text{ظا}\,(\text{حـ} - 60^\circ) = \dfrac{\text{ظا حـ} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,\text{ظا حـ}}$

(٨) $\text{ظا}\,15^\circ + \text{ظا}\,30^\circ + \text{ظا}\,15^\circ\ \text{ظا}\,30^\circ = 1$

(٩) $\text{ظا}\,75^\circ - \text{ظا}\,30^\circ - \text{ظا}\,75^\circ\ \text{ظا}\,30^\circ = 1$

(١٠) $\text{ظتا}\,(\text{حـ} + \text{ء}) = \dfrac{\text{ظتا حـ ظتا ء} - 1}{\text{ظتا حـ} + \text{ظتا ء}}$

(١١) $\text{ظتا}\,(\text{حـ} - \text{ء}) = \dfrac{\text{ظتا حـ ظتا ء} + 1}{\text{ظتا ء} - \text{ظتا حـ}}$

(١٢) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 45^\circ) = \dfrac{\text{ظتا حـ} - 1}{\text{ظتا حـ} + 1}$

(١٣) $\text{ظتا}\,(\text{حـ} - 45^\circ) = \dfrac{\text{ظتا حـ} + 1}{1 - \text{ظتا حـ}}$

(١٤) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 45^\circ) + \text{ظا}\,(\text{حـ} - 45^\circ) = 0$

(١٥) $\text{ظا}\,(\text{حـ} + 45^\circ) + \text{ظتا}\,(\text{حـ} - 45^\circ) = 0$

(١٦) $\dfrac{\text{ظا}\,(\text{هـ} + 1)\,\text{ء} - \text{ظا هـ ء}}{1 + \text{ظا}\,(\text{هـ} + 1)\,\text{ء} \cdot \text{ظا هـ ء}} = \text{ظا ء}$

(١٧) اذا كان $\text{ظا حـ} = (\text{س} + 1)$ ، $\text{ظا ء} = (\text{س} - 1)$ فبرهن على ان

$2\,\text{ظتا}\,(\text{حـ} - \text{ء}) = \text{س}^2$

(١٨) اذا كان $(\text{حـ} + \text{ء} + \text{هـ}) = 90^\circ$ فبرهن على ان

$$\text{ظا هـ} = \frac{1 - \text{ظا حـ ظا ء}}{\text{ظا حـ} + \text{ظا ء}}$$

بند ٩٠ – لايجاد مقادير الجيب وجيب التمام والظل للزاوية ٧٥°

(أولاً) نعلم أن ٧٥° = (٤٥° + ٣٠°)

فيكون جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠°)

= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$$

(ثانياً) جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° – جا ٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

(ثالثاً) ظا ٧٥° = ظا (٤٥° + ٣٠°)

$= ٢ + \sqrt{٣}$ راجع مثال (١) بند ٨٩

بند ٩١ – لايجاد مقادير الجيب وجيب التمام والظل للزاوية ١٥°

(أولاً) نعلم أن ١٥° = (٦٠° – ٤٥°)

فيكون جا ١٥° = جا (٦٠° – ٤٥°)

= جا ٦٠° جتا ٤٥° – جتا ٦٠° جا ٤٥°

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٣} \cdot \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

(ثانياً) جتا ١٥° = جتا (٦٠° – ٤٥°)

= جتا ٦٠° جتا ٤٥° + جا ٦° جا ٤٥°

$$= \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \cdot \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$$

(ثالثا) $ظا ١٥^\circ = ظا(٦٠^\circ - ٤٥^\circ)$

$$= \frac{ظا ٦٠^\circ - ظا ٤٥^\circ}{١ + ظا ٦٠^\circ \, ظا ٤٥^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{١ + \sqrt{٣}} = \frac{(\sqrt{٣} - ١)(\sqrt{٣} - ١)}{(\sqrt{٣} - ١)(١ + \sqrt{٣})}$$

$$= \frac{٣ + ١ - ٢\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٢}$$

$$= ٢ - \sqrt{٣}$$

بند ٩٢ ويمكن الآن وضع النسب المثلثية للزاويتين ٧٥° ، ١٥° على صورة جدول كالآتي

الزاوية	الجيب	جيب التمام	الظل	ظل التمام
١٥°	$\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$	$٢ - \sqrt{٣}$	$٢ + \sqrt{٣}$
٧٥°	$\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$	$٢ + \sqrt{٣}$	$٢ - \sqrt{٣}$

بند ٩٣ — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين الواردة بهذا الباب

(مثال ١) أوجد بواسطة قانون ظل مجموع زاويتين ما يساويه ظا (ا + ب) اذا كانت ا = ٣٠° ، ب = ١٥°

(العمل) $ظا(ا + ب) = ظا(٣٠^\circ + ١٥^\circ)$

$$= \frac{ظا ٣٠^\circ + ظا ١٥^\circ}{١ - ظا ٣٠^\circ \, ظا ١٥^\circ}$$

$$= \frac{\frac{١}{\sqrt{٣}} + ٢ - \sqrt{٣}}{١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}(٢ - \sqrt{٣})}$$

[ونضرب طرفي الكسر في $\sqrt{٣}$]

$$= \frac{١ + ٢\sqrt{٣} - ٣}{\sqrt{٣} - ٢ + \sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣} - ٢}{٢\sqrt{٣} - ٢} = ١$$

(مثال ٢) اذا كان جتا ا = $\frac{٩}{٤١}$ ، جا ب = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد مقدار جا (ا − ب)

(العمل) — أولا — نبحث عن جا ا ، جتا ب بالطريقة المدونة بند ٤٦ فنجد أن جا ا = $\frac{٤٠}{٤١}$ وجتا ب = $\frac{٤}{٥}$.

(ثانياً) جتا (ا − ب) = جا ا جتا ب − جتا ا جا ب

$$= \frac{٤٠}{٤١} \cdot \frac{٤}{٥} - \frac{٩}{٤١} \cdot \frac{٣}{٥}$$

$$= \frac{١٦٠ - ٢٧}{٢٠٥}$$

$$= \frac{١٣٣}{٢٠٥}$$

(تمارين ٢٧)

أوجد بواسطة استعمال القوانين الواردة بهذا الباب ما يساويه

جا (ا + ب) ، جا (ا − ب) ، جتا (ا + ب) ، جتا (ا − ب) ، ظا (ا + ب) ، ظا (ا − ب) عند ما تساوى ا ، ب المقادير الآتية

(١) ا = ٣٠° ، ب = ١٥° (٢) ا = ٤٥° ، ب = ٣٠°

(٣) ا = ٤٥° ، ب = ١٥° (٤) ا = ٦٠° ، ب = ١٥°

(٥) اذا كان جا ا = $\frac{٥}{٣}$ ، جا ب = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد مقادير جا (ا − ب) ، جتا (ا − ب) ، ظا (ا − ب)

(٦) اذا كان ظا ا = ٥ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فأوجد مقادير جا (ا − ب) ، جتا (ا − ب) ، ظا (ا − ب)

الباب الرابع عشر

فى مجموع جيبين أو جيبي تمام وحاصل ضرب كل منهما فى الآخر

بند ٩٤ — لايجاد مقادير حواصل ضرب جيبين او جيبي تمام يقال
تقدم فى الباب الثالث عشر أن

(١) جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب
(٢) جا (ا — ب) = جا ا جتا ب — جتا ا جا ب
(٣) جتا (ا + ب) = جتا ا جتا ب — جا ا جا ب
(٤) جتا (ا — ب) = جتا ا جتا ب + جا ا جا ب

وباضافة القانون الثانى الى الاول والرابع الى الثالث ثم طرح الثانى من الاول والثالث من الرابع تنتج الأربعة الأوضاع الآتية

(١) جا (ا + ب) + جا (ا — ب) = ٢ جا ا جتا ب
(٢) جا (ا + ب) — جا (ا — ب) = ٢ جتا ا جا ب
(٣) جتا (ا — ب) + جتا (ا + ب) = ٢ جتا ا جتا ب
(٤) جتا (ا — ب) — جتا (ا + ب) = ٢ جا ا جا ب

وبجعل أطراف هذه الأربعة المتساويات الاخيرة بعضها مكان بعض تنتج الأوضاع الآتية

(١) ٢ جا ا جتا ب = جا (ا + ب) + جا (ا — ب)
(٢) ٢ جتا ا جا ب = جا (ا + ب) — جا (ا — ب)
(٣) ٢ جتا ا جتا ب = جتا (ا — ب) + جتا (ا + ب)
(٤) ٢ جا ا جا ب = جتا (ا — ب) — جتا (ا + ب)

بند ٩٥ — لايجاد مقادير مجموع جيبين أو جيبي تمام والفرق بينهما يقال
تقدم فى بند ٩٤ أن

(١) جا (ا + ب) + جا (ا — ب) = ٢ جا ا جتا ب
(٢) جا (ا + ب) — جا (ا — ب) = ٢ جتا ا جا ب
(٣) جتا (ا — ب) + جتا (ا + ب) = ٢ جتا ا جتا ب
(٤) جتا (ا — ب) — جتا (ا + ب) = ٢ جا ا جا ب

فاذا فرضنا أن ح = (ا + ب) ، ى = (ا — ب)

يكون (ح + ى) = ٢ ا ، (ح — ى) = ٢ ب

ويكون $ا = \frac{ح + ى}{٢}$ ، $ب = \frac{ح - ى}{٢}$

واذا استعضنا عن ا ، ب فى الاربعة القوانين السابقة هذه المقادير ينتج أن

(١) جا ح + جا ى = ٢ جا $\frac{ح + ى}{٢}$ جتا $\frac{ح - ى}{٢}$

(٢) جا ح — جا ى = ٢ جتا $\frac{ح + ى}{٢}$ جا $\frac{ح - ى}{٢}$

(٣) جتا ى + جتا ح = ٢ جتا $\frac{ح + ى}{٢}$ جتا $\frac{ح - ى}{٢}$

(٤) جتا ى — جتا ح = ٢ جا $\frac{ح + ى}{٢}$ جا $\frac{ح - ى}{٢}$

بند ٩٦ — ولاهمية هذه القوانين نضعها بالالفاظ فنقول

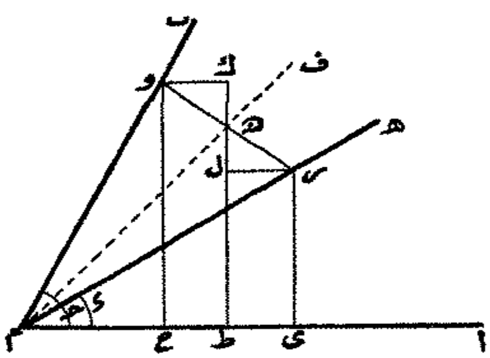
(١) ان مجموع جيبي زاويتين يساوى ضعف حاصل ضرب جيب نصف مجموع الزاويتين فى جيب تمام نصف الفرق بين الزاويتين

(٢) ان باقى طرح جيبي زاويتين يساوى ضعف حاصل ضرب جيب تمام نصف مجموع الزاويتين فى جيب نصف الفرق بين الزاويتين

(٣) ان مجموع جيبي تمام زاويتين يساوى ضعف حاصل ضرب جيب تمام نصف مجموع الزاويتين فى جيب تمام نصف الفرق بين الزاويتين

(٤) ان باقى طرح جيبي تمام زاويتين يساوى ضعف حاصل ضرب جيب نصف مجموع الزاويتين فى جيب نصف الفرق بين الزاويتين

بند ٩٧ — ويمكن البرهنة على القوانين السابقة بطرق هندسية وذلك بأن نفرض ان الزاوية ا م ب (شكل ٢٨) مقدارها ح وان الزاوية ا م هـ مقدارها ى ففى الشكل الزاوية هـ م ب عبارة عن الزاوية (ح — ى) ثم ننصف الزاوية هـ م ب بالمستقيم م ف



(شكل ٢٨)

فتكون $$\angle\,\text{ه م ف} = \frac{\angle\,\text{ه م ب}}{٢} = \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{٢}$$

وتكون $$\angle\,\text{ا م ف} = \angle\,\text{ا م ه} + \angle\,\text{ه م ف}$$

$$= \text{ى} + \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{٢} = \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{٢}$$

وبعد ذلك نفرض نقطة مثل و على م ب ونأخذ البعد م ن = م و ثم نصل و ن فيقطع م ف في ه ويكون م ف المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين م و ن عموداً على القاعدة و ن ومنصفاً لها وأخيراً نرسم و ح ، ه ط ، ن ى عمودية على م ا ونرسم و ك ، ن ل عمودين على ه ط فيحدث المثلثان القائما الزاوية ه ك و ، ه ل ن

وهذان المثلثان متساويان لتساوى وتريهما ه و ، ه ن ولتساوى الزاويتين الحادتين ن ه ل ، و ه ك

وينتج من تساوى المثلثين أن و ك = ن ل ، ل ه = ك ه وبواسطة هذا الشكل يتيسر الآن اثبات الأربعة القوانين المطلوبة

(١) لاثبات أن

$$\text{جا حـ} + \text{جا ى} = ٢\,\text{جا}\,\frac{\text{حـ} + \text{ى}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{حـ} - \text{ى}}{٢}$$

(البرهان) يرى من شكل ٢٨ ان

$$\text{جا حـ} + \text{جا ى} = \frac{\text{ح و}}{\text{م و}} + \frac{\text{ى ن}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ح و} + \text{ى ن}}{\text{م ن}}$$

$$= \frac{(\text{ط ه} + \text{ه ك}) + (\text{ط ه} - \text{ل ه})}{\text{م ن}} = \frac{٢\,\text{ط ه}}{\text{م ن}}$$

وبضرب حدى الكسر الأخير فى م ه ينتج أن

$$\text{جا حـ} + \text{جا ى} = \frac{٢\,\text{ط ه} \cdot \text{م ه}}{\text{م ه} \cdot \text{م ن}} = ٢ \times \frac{\text{ط ه}}{\text{م ه}} \cdot \frac{\text{م ه}}{\text{م ن}}$$

$$= ٢\,\text{جا ا م ه جتا ن م ه}$$

$$= ٢\,\text{جا}\,\frac{\text{حـ} + \text{ى}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{حـ} - \text{ى}}{٢}$$ وهو المطلوب

(٢) لاثبات أن

$$\text{جتا حـ} + \text{جتا ى} = ٢\,\text{جتا}\,\frac{\text{حـ} + \text{ى}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{حـ} - \text{ى}}{٢}$$

(البرهان) يرى من شكل ٢٨ أن

$$\text{جتا حـ} + \text{جتا ى} = \frac{\text{م ع}}{\text{م و}} + \frac{\text{م ى}}{\text{م ن}} = \frac{\text{م ع} + \text{م ى}}{\text{م ن}}$$

$$= \frac{(\text{م ط} - \text{ع ط}) + (\text{م ط} + \text{ط ى})}{\text{م ن}} = \frac{\text{٢ م ط}}{\text{م ن}}$$

و بضرب حدى الكسر الأخير فى م هـ ينتج أن

$$\text{جتا حـ} + \text{جتا ى} = \frac{\text{٢ م ط . م هـ}}{\text{م هـ . م ن}} = \text{٢} \times \frac{\text{م ط}}{\text{م هـ}} \cdot \frac{\text{م هـ}}{\text{م ن}}$$

$$= \text{٢ جتا ا م هـ جتا ن م هـ}$$

$$= \text{٢ جا } \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{\text{٢}} \text{ جتا } \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{\text{٢}}$$ وهو المطلوب

(٣) لاثبات أن

$$\text{جا حـ} - \text{جا ى} = \text{٢ جتا } \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{\text{٢}} \text{ جا } \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{\text{٢}}$$

(البرهان) يرى فى شكل ٢٨ ان $\angle$ ل هـ ن $=$ $\angle$ ا م هـ لأن كلا منهما متممة للزاوية ط هـ م

و بذلك تكون $\angle \text{ ل هـ ن} = \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{\text{٢}}$

ويكون $\text{جا حـ} - \text{جا ى} = \frac{\text{ع و}}{\text{م و}} - \frac{\text{ى ن}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ع و} - \text{ى ن}}{\text{م ن}}$

$$= \frac{(\text{ط هـ} + \text{هـ ك}) - (\text{ط هـ} - \text{ل هـ})}{\text{م ن}} = \frac{\text{٢ ل هـ}}{\text{م ن}}$$

و بضرب حدى الكسر الأخير فى هـ ن ينتج أن

$$\text{جا حـ} - \text{جا ى} = \frac{\text{٢ ل هـ . هـ ن}}{\text{هـ ن . م ن}} = \text{٢} \times \frac{\text{ل هـ}}{\text{هـ ن}} \cdot \frac{\text{هـ ن}}{\text{م ن}}$$

$$= \text{٢ جتا ل هـ ن جا ن م هـ}$$

$$= \text{٢ جتا } \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{\text{٢}} \text{ جا } \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{\text{٢}}$$ وهو المطلوب

(٤) لاثبات أن

$$\text{جتا ى} - \text{جتا حـ} = \text{٢ جا } \frac{\text{حـ} + \text{ى}}{\text{٢}} \text{ جا } \frac{\text{حـ} - \text{ى}}{\text{٢}}$$

(البرهان) يرى من شكل ٢٨ أن

$$\text{جتا ى} - \text{جتا ح} = \frac{\text{م ى}}{\text{م س}} - \frac{\text{م ح}}{\text{م و}} = \frac{\text{م ى} - \text{م ح}}{\text{م س}}$$

$$= \frac{(\text{م ط} + \text{ط ى}) - (\text{م ط} - \text{ح ط})}{\text{م س}}$$

$$= \frac{\text{٢ ط ى}}{\text{م س}} = \frac{\text{٢ ل س}}{\text{م س}}$$

وبضرب حدى الكسر الاخير فى ه س ينتج أن

$$\text{جتا ى} - \text{جتا ح} = \frac{\text{٢ ل س . ه س}}{\text{ه س . م س}} = ٢ \times \frac{\text{ل س}}{\text{ه س}} \cdot \frac{\text{ه س}}{\text{م س}}$$

$$= \text{٢ جا ل ه س جا س م ه}$$

$$= \text{٢ جا} \frac{\text{ح} + \text{ى}}{٢} \text{ جا} \frac{\text{ح} - \text{ى}}{٢} \qquad \text{وهو المطلوب}$$

بند ٩٨ — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) حول المقدار (جا ٢ ح + جا ح) الى حاصل ضرب نسبتين

(العمل)
$$\text{جا ٢ ح} + \text{جا ح} = \text{٢ جا} \frac{\text{٢ ح} + \text{ح}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{٢ ح} - \text{ح}}{٢}$$

$$= \text{٢ جا} \frac{\text{٣ ح}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{ح}}{٢}$$

(مثال ٢) حول المقدار (٢ جا ٢ ح جتا ح) الى مجموع نسبتين أو الفرق بين نسبتين

(العمل)
$$\text{٢ جا ٢ ح جتا ح} = \text{جا} (\text{٢ ح} + \text{ح}) + \text{جا} (\text{٢ ح} - \text{ح})$$

$$= \text{جا ٣ ح} + \text{جا ح}$$

(مثال ٣) حول المقدار (جا ٣٨° جا ٥٠°) الى مجموع نسبتين او الفرق بين نسبتين ثم استخرج مقدار هاتين النسبتين من الجداول

(العمل)
$$\text{جا ٣٨° جا ٥٠°} = \tfrac{١}{٢} \text{ جتا} (٥٠° - ٣٨°) - \tfrac{١}{٢} \text{ جتا} (٥٠° + ٣٨°)$$

$$= \tfrac{١}{٢} \text{ جتا ١٢°} - \tfrac{١}{٢} \text{ جتا ٨٨°}$$

$$= \frac{٠٫٩٧٨١ - ٠٫٠٣٤٩}{٢} = \frac{٠٫٩٤٣٢}{٢}$$

$$= \underline{\underline{٠٫٤٧١٦}}$$

(مثال ٤) برهن على أن

$$\frac{\text{جا ٢ حـ} + \text{جا حـ}}{\text{جتا ٢ حـ} + \text{جتا حـ}} = \text{ظا} \frac{\text{٣ حـ}}{\text{٢}}$$

(البرهان)

$$\frac{\text{جا ٢ حـ} + \text{جا حـ}}{\text{جتا ٢ حـ} + \text{جتا حـ}} = \frac{\text{٢ جا } \tfrac{1}{2}(\text{٢ حـ} + \text{حـ}) \text{ جتا } \tfrac{1}{2}(\text{٢ حـ} \quad \text{حـ})}{\text{٢ جتا } \tfrac{1}{2}(\text{٢ حـ} + \text{حـ}) \text{ جتا } \tfrac{1}{2}(\text{٢ حـ} \quad \text{حـ})}$$

$$= \frac{\text{جا } \frac{\text{٣ حـ}}{\text{٢}}}{\text{جتا } \frac{\text{٣ حـ}}{\text{٢}}} = \text{ظا } \frac{\text{٣ حـ}}{\text{٢}}$$

(تمارين ٢٨)

حول كلاً من المقادير الآتية الى حاصل ضرب نسبتين

(١) جا ٣ ى + جا ٥ ى

(٢) جتا ٢ ى + جتا ٣ ى

(٣) جتا ٥ ى — جتا ٧ ى

(٤) جا ٥ ى — جا ٣ ى

(٥) جا ١١ ى + جا ٥ ى

(٦) جتا ٣ ى + جتا ٥ ى

(٧) جتا ى — جتا ٥ ى

(٨) جا ٣ ى — جا ٧ ى

(٩) جتا ٥٢° — جتا ٤٢°

(١٠) جا ٢٣° - جا ٤٩°

(١١) جا ١٥° + جا ٢١°

(١٢) جتا ٥١° + جتا ٢٣°

(١٣) جا ٥٢° — جا ٣٢°

(١٤) جتا ٤٢° + جتا ٣٦°

(١٥) جتا ٣٥° — جتا ٥٥°

(١٦) جا ٣٠° + جا ٦٢°

حول كلاً من المقادير الآتية الى مجموع نسبتين أو الفرق بين نسبتين

(١٧) ٢ جا ٣ هـ جا ٥ هـ

(١٨) ٢ جتا ٥ هـ جا ٣ هـ

(١٩) ٢ جتا ٥ هـ جتا ٧ هـ

(٢٠) ٢ جا ٤ هـ جتا ٨ هـ

(٢١) ٢ جا هـ جا ٣ هـ

(٢٢) ٢ جا هـ جتا ٤ هـ

(٢٣) جتا $\frac{\text{٥ هـ}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{٣ هـ}}{\text{٢}}$

(٢٤) جا ٤ هـ جا هـ

(٢٥) ٢ جتا ٢ هـ جتا هـ

(٢٦) ٢ جا ٢ هـ جتا هـ

(٢٧) ٢ جتا (٢ س + ص) جتا (س - ص)

(٢٨) ٢ جا (س + ٣ ص) جا (٢ س + ٥ ص)

(٢٩) ٢ حتا (ح + ٢ ى) جا (٣ ح + ٤ ى)

(٣٠) ٢ حتا (٣ ح + ٥ ى) جا (ح − ى)

حول كلاً من المقادير الآتية الى مجموع نسبتين أو الفرق بين نسبتين مع استخراج مقادير هذه النسب من الجداول

(٣١) ٢ جتا ٥٥° جا ٣٠°

(٣٢) ٢ جتا ٤٦° جتا ١٨°

(٣٣) جا ٣٥° جا ٤٥°

(٣٤) جتا ٤٥° جا ١٥°

(٣٥) ٢ جتا ١٠° جا ٥٠°

(٣٦) ٢ جا ٢٧° جتا ٦°

(٣٧) جتا ٢٥° جتا ٢٤°

(٣٨) جا ٤٣° جا ٤٠°

(٣٩) ٢ جا ٥٠° حتا ١٧°

(٤٠) ٢ جتا ٧١° جا ١٤°

(٤١) ٢ جتا ٤٩° جتا ٣٦°

(٤٢) ٢ جا ٦° جا ٢°

برهن على أن المتساويات الآتية صحيحة

(٤٣) $\frac{\text{جا ٢ ى − جا ى}}{\text{جتا ى − جتا ٢ ى}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{٣ ى}}{\text{٢}}$

(٤٤) $\frac{\text{جا ٣ هـ + جا ٢ هـ}}{\text{جتا ٢ هـ − جتا ٣ هـ}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

(٤٥) $\frac{\text{جا ح − جا ى}}{\text{جتا ى − جتا ح}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{ح + ى}}{\text{٢}}$

(٤٦) $\frac{\text{جا ح − جا ى}}{\text{جا ح + جا ى}} = \text{ظتا}\left(\frac{\text{ح + ى}}{\text{٢}}\right)\text{ظا}\left(\frac{\text{ح − ى}}{\text{٢}}\right)$

(٤٧) $\frac{\text{جا ح + جا ى}}{\text{جتا ح − جتا ى}} = \frac{\text{جتا ح + حتا ى}}{\text{جا ى − جا ح}}$

(٤٨) $\frac{\text{جا ح + جا ى}}{\text{جتا ح + جتا ى}} = \text{ظا}\,\frac{\text{ح − ى}}{\text{٢}}$

(٤٩) $\frac{\text{جتا هـ − جتا ٣ هـ}}{\text{جا ٣ هـ − جا هـ}} = \text{ظا ٢ هـ}$

(٥٠) $\frac{\text{جا ح − جا ى}}{\text{جتا ى + جتا ح}} = \text{ظا}\,\frac{\text{ح − ى}}{\text{٢}}$

(٥١) $\frac{\text{جا ٥ هـ + حا ٣ هـ}}{\text{جتا ٣ هـ − حتا ٥ هـ}} = \text{ظتا هـ}$

(٥٢) $\frac{\text{جتا ٢ ى − حتا ٥ ى}}{\text{جا ٢ ى + جا ٥ ى}} = \text{ظا}\,\frac{\text{٣ ى}}{\text{٢}}$

(٥٣) $\frac{\text{جتا ٢ ب + حتا ب}}{\text{جا ٢ ب − جا ب}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$

(٥٤) $\frac{\text{جا ٣ ب + جا ٥ ب}}{\text{جا ٥ ب − جا ٣ ب}} = \text{ظتا ب ظا ٤ ب}$

(٥٥) $\frac{\text{جا ٦٠° + جا ٣٠°}}{\text{جتا ٣٠° − جتا ٦٠°}} = \text{ظتا ١٥°}$

(٥٦) $\frac{\text{جا ٧٥° − جا ١٥°}}{\text{جتا ٧٥° + جتا ١٥°}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

(٥٧) $\frac{\text{حتا ٢° − جتا ٧٠°}}{\text{جا ٧٠° − جا ٢٠°}} = \text{١}$

(٥٨) جتا (٦٠° + حـ) + جتا (٦٠° − حـ) = جتا حـ

(٥٩) جتا (٤٥° + حـ) + جتا (٤٥° − حـ) = √٢ جتا حـ

(٦٠) جا (٤٥° + حـ) − جا (٤٥° − حـ) = √٢ جا حـ

(٦١) جتا (٣٠° − حـ) − جتا (٣٠° + حـ) = جا حـ

(٦٢) [جا (٣ ى + ب) − جا (ى + ب)] / [جتا (٣ ى + ب) + جتا (ى + ب)] = ظا ى

(٦٣) [جا (٣ ى + ٢ ب) + جا ى] / [جتا ى − جتا (٣ ى + ٢ ب)] = ظتا (ى + ب)

(٦٤) [جتا ٣ ب − جتا (٤ ى + ٣ ب)] / [جا (٤ ى + ٣ ب) + جا ٣ ب] = ظا ٢ ى

بند ٩٩ — أمثله عامة للتطبيق على القوانين السابقة وتشتمل على اكثر من زاويتين

(مثال ١) برهن على أن

جا (حـ + ى + هـ) = جا حـ جتا ى جتا هـ + جا ى جتا هـ جتا حـ
+ جا هـ جتا حـ جتا ى − جا حـ جا ى جا هـ

(البرهان) جا (حـ + ى + هـ) = جا (حـ + ى) حتا هـ + جتا (حـ + ى) جا هـ
= (جا حـ جتا ى + جتا حـ جا ى) جتا هـ
+ (حتا حـ حتا ى − جا حـ حا ى) جا هـ
= جا حـ جتا ى جتا هـ + جا ى حتا هـ جتا حـ
+ جا هـ جتا ى جتا حـ − جا حـ جا ى جا هـ

(مثال ٢) برهن على أن

جا حـ + جا ى − جا هـ − جا (حـ + ى − هـ)
= ٤ جا (حـ − هـ)/٢ . جا (ى − هـ)/٢ . جا (حـ + ى)/٢

(البرهان) جا حـ − جا (حـ + ى − هـ)
= − ٢ جتا ½ (٢ حـ + ى − هـ) جا ½ (ى − هـ)

و جا ى − حا هـ = ٢ جتا ½ (ى + هـ) جا ½ (ى − هـ)

فيكون   جا حـ + جا ى − جا هـ − جا (حـ + ى − هـ)

= ٢ جتا ½ (ى + هـ) جا ½ (ى − هـ) − ٢ جتا ½ (٢ حـ + ى − هـ) جا ½ (ى − هـ)

= ٢ جا ½ (ى − هـ) {جتا ½ (ى + هـ) − جتا ½ (٢ حـ + ى − هـ)}

= ٢ جا ½ (ى − هـ) ٢ جا ½ (حـ + ى) جا ½ (حـ − هـ)

= ٤ جا ½ (حـ − هـ) جا ½ (ى − هـ) جا ½ (حـ + ى)   وهو المطلوب

(تمارين ٢٩)

برهن على أن المتساويات الآتية صحيحة

(١) جتا (حـ + ى + هـ) = جتا حـ جتا ى جتا هـ − جتا حـ جا ى جا هـ
− جتا ى جا هـ جا حـ − جتا هـ جا حـ جا ى

(٢) جا (حـ + ى − هـ) = جا حـ جتا ى جتا هـ + جا ى جتا هـ جتا حـ
− جا هـ جتا حـ جتا ى + جا حـ جا ى جا هـ

(٣) جتا (حـ − ى + هـ) = جتا حـ جتا ى جتا هـ + جتا حـ جا ى جا هـ
− جتا ى جا هـ جا حـ + جتا هـ جا حـ جا ى

(٤) جا حـ + جا ى + جا هـ − جا (حـ + ى + هـ)
= ٤ جا (ى + هـ)/٢ جا (هـ + حـ)/٢ جا (حـ + ى)/٢

(٥) جا (حـ − ى − هـ) − جا حـ + جا ى + جا هـ
= ٤ جا (حـ − ى)/٢ جا (حـ − هـ)/٢ جا (ى + هـ)/٢

(٦) جتا س + جتا ص + جتا ع + جتا (س + ص + ع)
= ٤ جتا (ص + ع)/٢ جتا (ع + س)/٢ جتا (س + ص)/٢

(٧) جا ٢ س + جا ٢ ص + جا ٢ ع − جا ٢ (س + ص + ع)
= ٤ جا (ص + ع) جا (ع + س) جا (س + ص)

(٨) جتا ٢ س + جتا ٢ ص + جتا ٢ ع + جتا ٢ (س + ص + ع)
= ٤ جتا (ص + ع) جتا (ع + س) جتا (س + ص)

(٩) جا(ص + ع − س) + جا(ع + س − ص) + جا(س + ص − ع)
− جا(س + ص + ع) = ٤ جا س جا ص جا ع

(١٠) جا(س + ص + ع) + جا(ص + ع − س) + جا(ع + س − ص)
− جا(س + ص − ع) = ٤ جتا س جتا ص جا ع

(١١) جتا(ص + ع − س) + جتا(ع + س − ص) + جتا(س + ص − ع)
+ جتا(س + ص + ع) = ٤ جتا س جتا ص جتا ع

(١٢) جا^{٢} س + جا^{٢} ص + جا^{٢} ع + جا^{٢}(س + ص + ع)
= ٢ {١ − جتا(ص + ع) جتا(ع + س) جتا(س + ص)}

(١٣) جتا^{٢} س + جتا^{٢} ص + جتا^{٢} ع + جتا^{٢}(س + ص + ع)
= ٢ {١ + جتا(ص + ع) جتا(ع + س) جتا(س + ص)}

(١٤) جتا حـ جا(ء − هـ) + جتا ء جا(هـ − حـ) + جتا هـ جا(حـ − ء) = صفراً

(١٥) جا حـ جا(ء − هـ) + جا ء جا(هـ − حـ) + جا هـ جا(حـ − ء) = صفراً

البـــاب الخامس عشر

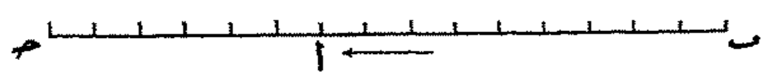
فى طريقة استعمال الاشارتين + ، —

بند ١٠٠ — الخطوط الموجبة والخطوط السالبة

اذا كان قياس مستقيمين فى جهتين متضادتين أمكن تمييز هـذا الاختلاف بوضع الاشارتين + ، — أمام المقدار العددى لطوليهما وللتطبيق على ذلك نمثل بالمثال الآتى فنقول

(مثال) رجل ابتدأ السير من نقطة ب على بعد ٩ كيلومترات شرق مدينة ا ومشى قاصداً المدينة بسرعة ٣ كيلومترات فى الساعة فما هو موقع الرجل بالنسبة الى المدينة بعد مضى ٥ ساعات من مبدأ قيامه

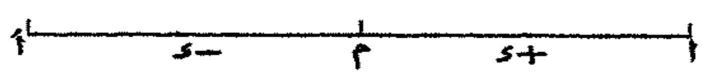
(الحل) بما ان الرجل يمشى ٣ كيلومترات فى الساعة الواحدة يكفى طرح ٣ كيلومترات عن كل ساعة من المسافة التى شرق المدينة ا



(شكل ٢٩)

فبعد مضى ساعة واحدة يكون الرجل شرق المدينة بمقدار ٩ — ٣ أو ٦ كيلومترات
« « ساعتين « « « « « ٦ — ٣ أو ٣ «
« « ٣ ساعات « « « « « ٣ — ٣ أو ٠ «
« « ٤ ساعات « « « « « ٠ — ٣ أو — ٣ «
« « ٥ ساعات « « « « « — ٣ — ٣ أو — ٦ «

ويظهر من ذلك ان الرجل يصل الى المدينة نفسها بعد مضى ٣ ساعات من مبدأ قيامه وانه باستمراره فى المشى غرب المدينة مدة ساعتين يكون قد وصل النقطة حـ التى على بعد ٦ كيلومترات غرب المدينة ا ومن ذلك نستنتج ان — ٦ كيلومترات شرق المدينة عبارة عن + ٦ كيلومترات غربها



(شكل ٣٠)

فاذا فرضنا نقطة مثل م (شكل ٣٠) وقسنا البعد م ا يمينها ثم قسنا البعد م اَ شمالها (ومساو م ا فى الطول) امكننا تمييز اختلاف جهتى القياس بالاشارتين + ، — وتسمى احدى الجهتين الجهة

الموجبة والثانية الجهة السالبة فاذا كان + ى طول البعد م ا المقيس من جهة اليمين يكون — ى طول البعد م اَ المقيس من جهة الشمال وبالعكس اذا كان + ى طول البعد م اَ يكون — ى طول البعد م ا

بند (١٠١) — فى أهمية ترتيب الحروف عند تسمية المستقيمات

يمكن الاستدلال على الجهة التى رسم فيها خط مستقيم من ترتيب الحروف الموضوعة لتسمية هذا المستقيم فالمستقيم ا ب (شكل ٣١) يدل على المستقيم المرسوم من ا الى ب

والمستقيم ب ا يدل على المستقيم المرسوم من ب الى ا

(شكل ٣١)

فاذا فرضنا أن ا ، ب مدينتان تبعد احداهما عن الأخرى بمقدار ه أميال يكون ا ب عبارة عن المسافة التى يقطعها شخص يمشى من ا الى ب ، ب ا عبارة عن المسافة التى يقطعها شخص يمشى من ب الى ا ومن حيث ان جهتى المشى متضادتان فلو كانت المسافة ا ب = + ه تكون المسافة ب ا = — ه وللتطبيق على هذه القاعدة نمثل بالمثال الآتى فنقول

(مثال) رسم المستقيم ا ب ح ى ه (شكل ٣٢) بحيث كان ا ب = + ١ ، ب ح = + ٢

(شكل ٣٢)

، ح ى = + ٣ ، ى ه = + ٤ والمطلوب ايجاد الاستدلال الجبرى للوضع

ا ى + ى ح — ا ب

(الحل) الاستدلال الجبرى للمستقيم ا ى هو + ٦

« « « ى ح هو — ٣

« « « ا ب هو + ١

اذن ا ى + ى ح — ا ب = + ٦ — ٣ — ١ = + ٢

(تمارين ٣٠)

المطلوب ايجاد الاستدلال الجبرى للأوضاع الآتية المأخوذة من (شكل ٣٢)

(١) ا ب + ب ح + ى ه

(٢) ا ب + ب ح + ح ى

(٣) ا ب + ب ح + ح ا

(٤) ب ح + ح ى + ح ا

(٥) ح ى + ى ه + ه ح

(٦) ا ب + ب ح — ح ه

(٧) ب ى + ى ح + ح ه

(٨) ح ى — ب ح + ا ى — ى ه

(٩) ا ى + ى ب + ب ه

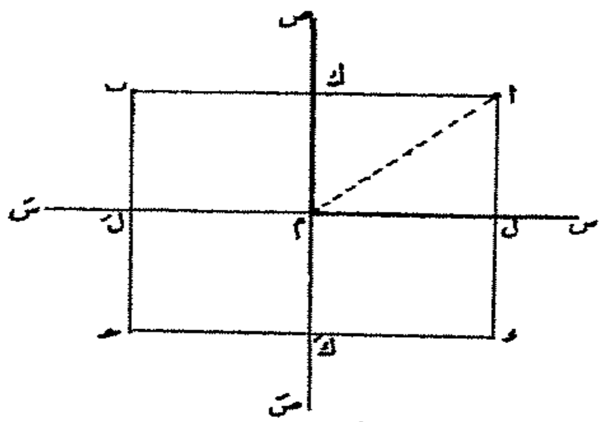
(١٠) ى ه — ا ح + ب ا + ب ح + ح ه

الباب السادس عشر

فى طريقة استعمال الاشارتين + ٯ — فى حساب المثلثات

بند ١٠٢ — الخطوط الموجبة والخطوط السالبة

اذا فرض المستقيان المتعامدان س م س َ ٯ ص م ص َ وفرض ان م ا كان منطبقاً على م س وابتدأ يدور حول نقطة م وأخذ الاوضاع م ا ٯ م ب ٯ م حـ ٯ م ى المبينة بشكل ٣٣ فلأجل تعيين اشارات النسب المثلثية للزوايا الحادثة من دوران م ا يجب معرفة القواعد الآتية وهى



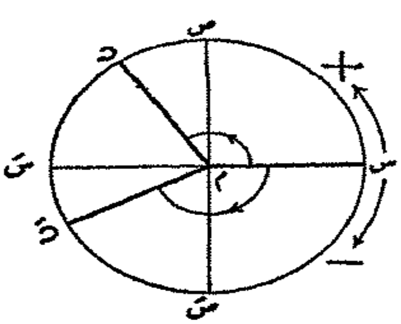
(شكل ٣٣)

(أولاً) ان المستقيات الأفقية المرسومة يمين ص م ص َ تعتبر موجبة
(ثانياً) ان المستقيات الأفقية المرسومة شمال ص م ص َ تعتبر سالبة
(ثالثاً) ان المستقيات الرأسية المرسومة أعلى س م س َ تعتبر موجبة
(رابعاً) ان المستقيات الرأسية المرسومة أسفل س م س َ تعتبر سالبة

ففى (شكل ٣٣) المستقيات ك ا ٯ م ل ٯ ك َ ى كلها موجبة
والمستقيات ك ب ٯ م ل َ ٯ ك َ حـ كلها سالبة
والمستقيات ل ا ٯ م ك ٯ ل َ ب كلها موجبة
والمستقيات ل ى ٯ م ك َ ٯ ل َ حـ كلها سالبة

بند ١٠٣ — الزوايا الموجبة والزوايا السالبة

تقدم الكلام عرضاً على الزوايا الموجبة والزوايا السالبة أثناء الكلام على قياس الزوايا وخلاصة القول انه اذا كان اتجاه دوران الخط الدائر مضاداً اتجاه تحرك دوارتى الساعة كان مقدار الزاوية الحادثه موجباً وسميت جهة الدوران بالجهة الموجبة واذا كان دورانه موافقاً اتجاه تحركهما كان مقدار الزاوية الحادثة سالباً وسميت جهة الدوران بالجهة السالبة



(شكل ٣٤)

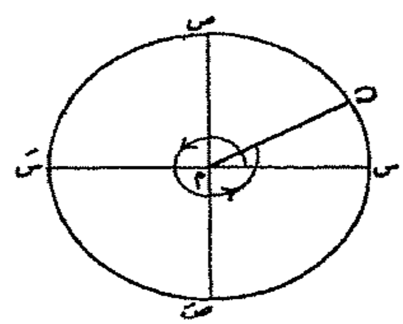
ففى (شكل ٣٤) الزاوية س م ه موجبة والزاوية س م هَ سالبة

بند ١٠٤ — أمثلة محلولة للتطبيق على الزوايا الموجبة والسالبة

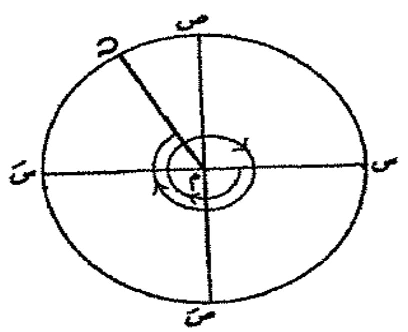
(مثال ١) ارسم شكلاً هندسياً يدل على الزاوية التي قدرها ٣٩٠° وبين الربع الذى يقف فيه الخط الدائر

(الطريقة) ٣٩٠° = ٣٦٠° + ٣٠°

فلرسم الزاوية التى قدرها ٣٩٠° يجب أن يتحرك الخط الدائر م ه فى الجهة الموجبة المبينة بالسهم (شكل ٣٥) بأن يدور دورة كاملة (٣٦٠°) مع ثلث الربع الأول (٣٠°) فشكل ٣٥ يدل على زاوية قدرها ٣٩٠° وفيه يقف الخط الدائر فى الربع الأول



(شكل ٣٥)



(شكل ٣٦)

(مثال ٢) ارسم شكلاً هندسياً يدل على الزاوية التى قدرها (— $\frac{١٠ ط}{٣}$) وبين الربع الذى يقف فيه الخط الدائر

(الطريقة) — $\frac{١٠ ط}{٣}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = — ٦٠٠°

— ٦٠٠° = — ٣٦٠° — ٢٤٠°

فلرسم الزاوية التى قدرها (— ٦٠٠°) يجب أن يتحرك الخط الدائر م ه فى الجهة السالبة المبينة بالسهم (شكل ٣٦) بأن يدور دورة كاملة (— ٣٦٠°) مع الربع الرابع والربع الثالث وثلثي الربع الثانى (— ٢٤٠°) فشكل ٣٦ يدل على زاوية قدرها (— ٦٠٠°) او (— $\frac{١٠ ط}{٣}$) وفيه يقف الخط الدائر فى الربع الثانى

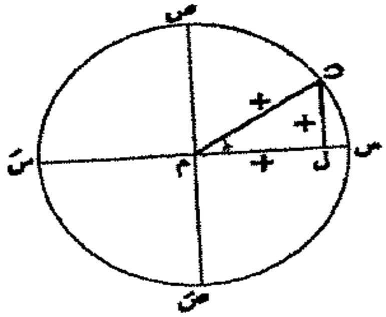
(تمارين ٣١)

ارسم أشكالاً هندسية تدل على الزوايا الآتية وبين الربع الذى يقف فيه الخط الدائر لكل زاوية منها

(١) ٢٢٥°	(٥) ٣٢٥°	(٩) ٣٣٠°
(٢) ١٥٠°	(٦) — $\frac{٣ ط}{٤}$	(١٠) — ٧٢٥°
(٣) — ٣٠٠°	(٧) $\frac{٣ ط}{٥}$	(١١) $\frac{٥ ط}{٨}$
(٤) — ١٥٠°	(٨) — ١٠٠٠°	(١٢) — $\frac{١١ ط}{٤}$

بند ١٠٥ — لتعيين اشارات النسب المثلثية لأى زاوية مهما بلغ مقدارها نقول

تقدم ببند ١٠ (عند الكلام على قياس الزوايا) ان الزاوية مهما بلغ مقدارها اما ان تقع فى الربع الاول او فى الربع الثانى أو فى الربع الثالث أو فى الربع الرابع وللنسب المثلثية للزوايا التى بهذه الارباع الاربعة اشارات خاصة بكل ربع منها ولتعيين هذه الاشارات نقول



(شكل ٣٧)

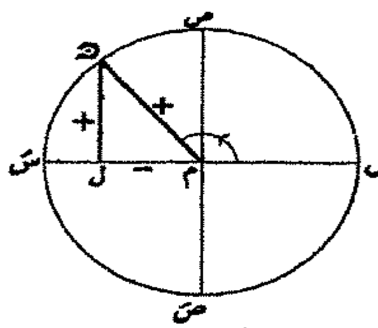
(أولاً) اذا كانت الزاوية المفروضة هى بالربع الاول بأن أخذ الخط الدائر الوضع م ه (شكل ٣٧) فلايجاد النسب المثلثية للزاوية س م ه نرسم ه ل عموداً على م س وبذلك يكون ه ل موجباً ، م ل موجباً ، م ه موجباً

$$\text{ويكون} \qquad \text{جا س م ه} = \frac{\text{ل ه}}{\text{م ه}} = \frac{\text{كمية موجبة}}{\text{كمية موجبة}} = \text{كمية موجبة}$$

$$\text{،} \qquad \text{جتا س م ه} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}} = \frac{\text{كمية موجبة}}{\text{كمية موجبة}} = \text{كمية موجبة}$$

$$\text{،} \qquad \text{ظا س م ه} = \frac{\text{ل ه}}{\text{م ل}} = \frac{\text{كمية موجبة}}{\text{كمية موجبة}} = \text{كمية موجبة}$$

وكذا نبرهن على ان ظتا س م ه = كمية موجبة ، قا س م ه = كمية موجبة ، قتا س م ه = كمية موجبة



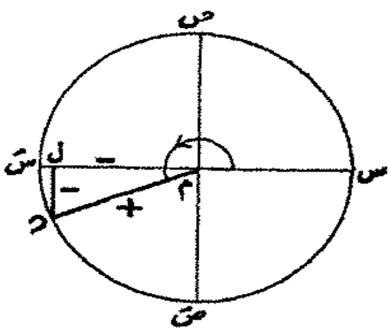
(شكل ٣٨)

(ثانياً) اذا كانت الزاوية المفروضة هى بالربع الثانى بأن أخذ الخط الدائر الوضع م ه (شكل ٣٨) فلايجاد النسب المثلثية للزاوية س م ه نرسم ه ل عموداً على م سَ وبذلك يكون ه ل موجباً ، م ل سالباً ، م ه موجباً

$$\text{ويكون} \qquad \text{جا س م ه} = \frac{\text{ل ه}}{\text{م ه}} = \frac{\text{كمية موجبة}}{\text{كمية موجبة}} = \text{كمية موجبة}$$

$$\text{،} \qquad \text{جتا س م ه} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}} = \frac{\text{كمية سالبة}}{\text{كمية موجبة}} = \text{كمية سالبة}$$

$$\text{،} \qquad \text{ظا س م ه} = \frac{\text{ل ه}}{\text{م ل}} = \frac{\text{كمية موجبة}}{\text{كمية سالبة}} = \text{كمية سالبة}$$



(شكل ٣٩)

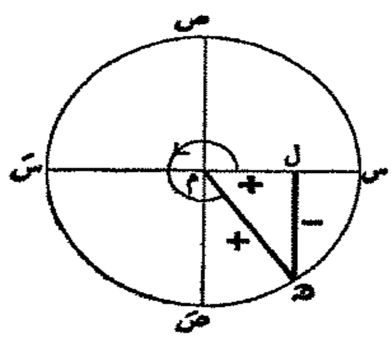
وكذا نبرهن على ان ظتا س م ه = كمية سالبة ، قا س م ه = كمية سالبة ، قتا س م ه = كمية موجبة

(ثالثاً) اذا كانت الزاوية المفروضة هى بالربع الثالث بأن أخذ الخط الدائر الوضع م ه (شكل ٣٩) فلايجاد النسب المثلثية للزاوية س م ه نرسم ه ل عموداً على م س َ وبذلك يكون ه ل سالباً ، م ل سالباً ، م ه موجباً

ويكون جا س م ه = ه ل / م ه = كمية سالبة / كمية موجبة = كمية سالبة

، جتا س م ه = م ل / م ه = كمية سالبة / كمية موجبة = كمية سالبة

، ظا س م ه = ه ل / م ل = كمية سالبة / كمية سالبة = كمية موجبة



(شكل ٤٠)

وكذا نبرهن على ان ظتا س م ه = كمية موجبة ، قا س م ه = كمية سالبة ، قتا س م ه = كمية سالبة

(رابعاً) اذا كانت الزاوية المفروضة هى بالربع الرابع بأن اخذ الخط الدائر الوضع م ه (شكل ٤٠) فلايجاد النسب المثلثية للزاوية س م ه نرسم ه ل عموداً على م س وبذلك يكون ه ل سالباً ، م ل موجباً ، م ه موجباً

ويكون جا س م ه = ه ل / م ه = كمية سالبة / كمية موجبة = كمية سالبة

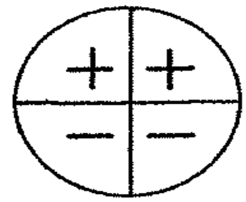
، جتا س م ه = م ل / م ه = كمية موجبة / كمية موجبة = كمية موجبة

، ظا س م ه = ه ل / م ل = كمية سالبة / كمية موجبة = كمية سالبة

وبالمثل نبرهن على أن ظتا س م ه = كمية سالبة ، قا س م ه = كمية موجبة ، قتا س م ه = كمية سالبة

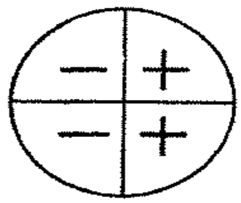
بند ١٠٦ — ويمكن الاستدلال على اشارات النسب المثلثية للزوايا المرسومة فى أى ربع من الارباع الأربعة بواسطة الأشكال الآتية

الجيب وقاطع التمام



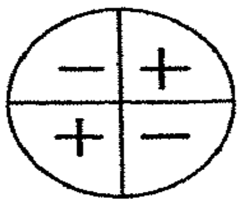
(شكل ٤١)

جيب التمام والقاطع



(شكل ٤٢)

الظل وظل التمام



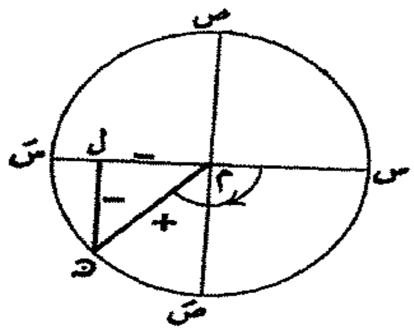
(شكل ٤٣)

بند ١٠٧ — مثال محلول للتطبيق على تعيين اشارات النسب المثلثية لزاوية معلومة

(المثال) المطلوب تعيين الاشارات الجبرية للنسب المثلثية للزاوية التى قدرها (— ١٣٥°)

(الحل) — أولا — نرسم الزاوية بالطريقة المتقدمة ببند ١٠٤ فنجد ان الخط الدائر م ه يقف فى الربع الثالث (شكل ٤٤)

— ثانياً — من حيث أن الزاوية (— ١٣٥°) فى الربع الثالث فبمقتضى ما تقدم ببند ١٠٥ يكون جا (— ١٣٥°) سالباً ، جتا (— ١٣٥°) سالباً ، ظا (— ١٣٥°) موجباً ، ظتا (— ١٣٥°) موجباً ، قا (— ١٣٥°) سالباً ، قتا (— ١٣٥°) سالباً



(شكل ٤٤)

(تمارين ٣٢)

المطلوب تعيين الاشارات الجبرية لمقادير جيوب وقواطع الزوايا الآتية

(١)	١٥٠°	(٤)	— ٥ ط/٦	(٧)	٣١٨٠°
(٢)	— ٢١٠°	(٥)	٣٠٠°	(٨)	— ٥٧٥°
(٣)	٢٤٠°	(٦)	— ٢٠٠٠°	(٩)	١١ ط/١٢

المطلوب تعيين الاشارات الجبرية لمقادير قواطع تمام وظلال الزوايا الآتية

(١٠)	٢٢٥°	(١٣)	— ٥ ط/٨	(١٦)	١٠٠٠°
(١١)	— ٣٠٠°	(١٤)	٣ ط/٤	(١٧)	— ٨٨٠°
(١٢)	١٣٥°	(١٥)	— ٧٥٠°	(١٨)	٧ ط/٨

الباب السابع عشر

فى النسب المثلثية لمضاعفات الزوايا وأجزائها

بند ١٠٨ — لايجاد جيب الزاوية ٢ حـ بدلالة حـ نقول

تقدم ان جا (حـ + ى) = جا حـ جتا ى + جتا حـ جا ى

فاذا فرض أن ى = حـ

يكون جا (حـ + حـ) = جا حـ جتا حـ + جتا حـ جا حـ

أى أن جا ٢ حـ = ٢ جا حـ جتا حـ

بند ١٠٩ — لايجاد جيب تمام الزاوية ٢ حـ بدلالة حـ نقول

تقدم أن جتا (حـ + ى) = جتا حـ جتا ى — جا حـ جا ى

فاذا فرض أن ى = حـ

يكون جتا (حـ + حـ) = جتا حـ جتا حـ — جا حـ جا حـ

أى ان جتا ٢ حـ = جتا٢ حـ — جا٢ حـ

ومن حيث ان جا٢ حـ = ١ — جتا٢ حـ ، جتا٢ حـ = ١ — جا٢ حـ

يكون جتا ٢ حـ = ٢ جتا٢ حـ — ١

أو جتا ٢ حـ = ١ — ٢ جا٢ حـ

بند ١١٠ — لايجاد ظل الزاوية ٢ حـ بدلالة حـ نقول

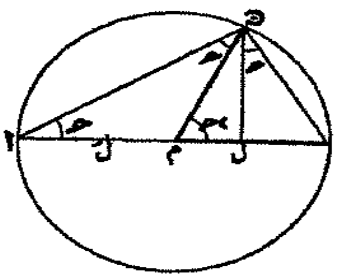
تقدم ان ظا (حـ + ى) = (ظا حـ + ظا ى) / (١ — ظا حـ ظا ى)

فاذا فرض ان ى = حـ

يكون ظا (حـ + حـ) = (ظا حـ + ظا حـ) / (١ — ظا حـ ظا حـ)

أى ان ظا ٢ حـ = (٢ ظا حـ) / (١ — ظا٢ حـ)

بند ١١١ — يمكن اثبات قوانين النسب المثلثية للزاوية ٢ حـ بطرق هندسية



(شكل ٤٥)

وذلك بأن نركز فى نقطة م (شكل ٤٥) ونرسم دائرة ثم نرسم على القطر ب م ا الزاوية ب ا هـ = حـ وننزل عموداً من نقطة هـ على ب ا ونصل هـ ب ، هـ م

فتكون ∠ م هـ ا = ∠ م ا هـ لأن م هـ = م ا وبذلك تكون الزاوية الخارجة ب م هـ = ٢ حـ

والزاوية ب هـ ل = الزاوية م ا هـ لأن كلاً منهما متممة للزاوية ل هـ ا وبذلك تكون ∠ ب هـ ل = حـ

وبواسطة هذا الشكل يتيسر اثبات القوانين اللازمة

(١) لاثبات ان جا ٢ حـ = ٢ جا حـ جتا حـ نقول

(البرهان) $$\text{جا ٢ حـ} = \frac{\text{ل هـ}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{ل هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{٢ ل هـ}}{\text{٢ م ب}} = \frac{\text{٢ ل هـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{٢ ل هـ . ا هـ}}{\text{ا هـ . ا ب}}$$

$$= \text{٢} \times \frac{\text{ل هـ}}{\text{ا هـ}} \cdot \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}}$$

$$= \text{٢ جا ل ا هـ . جتا ب ا هـ}$$

$$= \text{٢ جا حـ جتا حـ}$$ وهو المطلوب

(٢) لاثبات ان جتا ٢ حـ = جتا^{٢} حـ — جا^{٢} حـ نقول

(البرهان) نأخذ البعد م لَ = م ل

فيكون ٢ م ل = ل لَ = ا ل − ا لَ = ا ل ل ب

ويكون $$\text{جتا ٢ حـ} = \frac{\text{م ل}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ب}} = \frac{\text{٢ م ل}}{\text{٢ م ب}} = \frac{\text{ل لَ}}{\text{ا ب}}$$

$$= \frac{\text{ا ل} - \text{ل ب}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ا ب}} - \frac{\text{ل ب}}{\text{ا ب}}$$

وبضرب حدى الكسر $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا ب}}$ فى ا هـ وحدى الكسر $\frac{\text{ل ب}}{\text{ا ب}}$ فى هـ ب ينتج أن

$$\text{جتا ٢ حـ} = \frac{\text{ا ل . ا هـ}}{\text{ا هـ . ا ب}} - \frac{\text{ل ب . هـ ب}}{\text{هـ ب . ا ب}}$$

$$= \frac{\text{ا ل}}{\text{ا هـ}} \cdot \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}} - \frac{\text{ل ب}}{\text{هـ ب}} \cdot \frac{\text{هـ ب}}{\text{ا ب}}$$

= جتا ل ا ه جتا ه ا ب − جا ل ه ب جا ه ا ب

= جتا ح جتا ح − جا ح جا ح

= جتا^{٢} ح − جا^{٢} ح وهو المطلوب

(٣) لاثبات ان جتا ٢ ح = ٢ جتا^{٢} ح − ١ نقول

(البرهان) جتا ٢ ح = $\frac{\text{م ل}}{\text{م ه}}$ = $\frac{\text{ا ل − ا م}}{\text{ا م}}$

= $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا م}}$ − $\frac{\text{ا م}}{\text{ا م}}$ = $\frac{\text{٢ ا ل}}{\text{٢ ا م}}$ − ١

= $\frac{\text{٢ ا ل}}{\text{ا ب}}$ − ١ = $\frac{\text{٢ ا ل . ا ه}}{\text{ا ه . ا ب}}$ − ١

= ٢ × $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا ه}}$. $\frac{\text{ا ه}}{\text{ا ب}}$ − ١

= ٢ جتا ل ا ه جتا ه ا ب − ١

= ٢ جتا ح جتا ح − ١

= ٢ جتا^{٢} ح − ١ وهو المطلوب

(٤) لاثبات ان جتا ٢ ح = ١ − ٢ جا^{٢} ح نقول

(البرهان) جتا ٢ ح = $\frac{\text{م ل}}{\text{م ه}}$ = $\frac{\text{م ب − ل ب}}{\text{م ب}}$

= $\frac{\text{م ب}}{\text{م ب}}$ − $\frac{\text{ل ب}}{\text{م ب}}$ = ١ − $\frac{\text{٢ ل ب}}{\text{٢ م ب}}$

= ١ − $\frac{\text{٢ ل ب}}{\text{ا ب}}$ = ١ − $\frac{\text{٢ ل ب . ه ب}}{\text{ه ب . ا ب}}$

= ١ − ٢ × $\frac{\text{ل ب}}{\text{ه ب}}$. $\frac{\text{ه ب}}{\text{ا ب}}$

= ١ − ٢ جا ل ه ب جا ه ا ب

= ١ − ٢ جا ح جا ح

= ١ − ٢ جا^{٢} ح وهو المطلوب

(٥) لاثبات ان ظا ٢ حـ = $\frac{\text{٢ ظا حـ}}{\text{١ − ظا}^{\text{٢}}\text{ حـ}}$ نقول

(البرهان) ظا ٢ حـ = $\frac{\text{ل ه}}{\text{م ل}}$ = $\frac{\text{٢ ل ه}}{\text{٢ م ل}}$ = $\frac{\text{٢ ل ه}}{\text{ا ل − ل ب}}$

وبقسمة حدى الكسر الأخير على ا ل ينتج أن

ظا ٢ حـ = $\frac{\frac{\text{٢ ل ه}}{\text{ا ل}}}{\frac{\text{ا ل}}{\text{ا ل}} - \frac{\text{ل ب}}{\text{ا ل}}}$ = $\frac{\text{٢ ظا ل ا ه}}{\text{١} - \frac{\text{ل ب . ل ه}}{\text{ل ه . ا ل}}}$

= $\frac{\text{٢ ظا حـ}}{\text{١ − ظا ل ه ب ظا ل ا ه}}$ = $\frac{\text{٢ ظا حـ}}{\text{١ − ظا حـ ظا حـ}}$

= $\frac{\text{٢ ظا حـ}}{\text{١ − ظا}^{\text{٢}}\text{ حـ}}$ وهو المطلوب

بند ١١٢ — بوضع $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ بدل حـ فى الخمسة القوانين السابقة تنتج قوانين النسب المثلثية للراوية حـ بدلالة $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ أما القوانين فهى

(١) جا حـ = ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ مثلاً جا ٩٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

(٢) جتا حـ = جتا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ − جا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ « جتا ٩٠° = جتا$^{\text{٢}}$ ٤٥° − جا$^{\text{٢}}$ ٤٥°

(٣) جتا حـ = ٢ جتا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ − ١ « جتا ٩٠° = ٢ جتا$^{\text{٢}}$ ٤٥° − ١

(٤) جتا حـ = ١ − ٢ جا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ « جتا ٩٠° = ١ − ٢ جا$^{\text{٢}}$ ٤٥°

(٥) ظا حـ = $\frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{حـ}}{\text{٢}}}{\text{١ − ظا}^{\text{٢}} \frac{\text{حـ}}{\text{٢}}}$ « ظا ٤٥° = $\frac{\text{٢ ظا ٢٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{°}}{\text{١ − ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{°}}$

بند ١١٣ — لايجاد الجيب وجيب التمام والظل للراوية حـ بدلالة جتا ٢ حـ نقول

(١) تقدم ان جتا ٢ حـ = ١ − ٢ جا$^{\text{٢}}$ حـ

فيكون ٢ جا$^{\text{٢}}$ حـ = ١ − جتا ٢ حـ

، جا$^{\text{٢}}$ حـ = $\frac{\text{١ − جتا ٢ حـ}}{\text{٢}}$

، جا حـ = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ − جتا ٢ حـ}}{\text{٢}}\right)}$

(٢) تقدم ان $\text{جتا}\ ٢\ \text{ح} = ٢\ \text{جا}^{٢}\ \text{ح} - ١$

فيكون $٢\ \text{جتا}^{٢}\ \text{ح} = ١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}$

، $\text{جتا}^{٢}\ \text{ح} = \frac{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{٢}$

، $\text{جتا}\ \text{ح} = \pm \sqrt{\left(\frac{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{٢}\right)}$

(٣) ومن حيث أن $\text{ظا}\ \text{ح} = \frac{\text{جا}\ \text{ح}}{\text{جتا}\ \text{ح}}$

يكون $\text{ظا}\ \text{ح} = \sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{٢}\right)} \div \sqrt{\left(\frac{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{٢}\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}\right)}$$

بند **١١٤** — وبوضع $\frac{\text{ح}}{٢}$ بدل ح فى الثلاثة القوانين الأخيرة تنتج قوانين الجيب وجيب التمام والظل للزاوية $\frac{\text{ح}}{٢}$ بدلالة جتا ح أما القوانين فهى

(١) $\text{جا}^{٢}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \frac{١ - \text{جتا}\ \text{ح}}{٢}$ (٤) $\text{جا}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \pm \sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا}\ \text{ح}}{٢}\right)}$

(٢) $\text{جتا}^{٢}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \frac{١ + \text{جتا}\ \text{ح}}{٢}$ (٥) $\text{جتا}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \pm \sqrt{\left(\frac{١ + \text{جتا}\ \text{ح}}{٢}\right)}$

(٣) $\text{ظا}^{٢}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \frac{١ - \text{جتا}\ \text{ح}}{١ + \text{جتا}\ \text{ح}}$ (٦) $\text{ظا}\ \frac{\text{ح}}{٢} = \pm \sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا}\ \text{ح}}{١ + \text{جتا}\ \text{ح}}\right)}$

بند **١١٥** — برهن على أن

$$\text{ظا}\ \text{ح} = \frac{\text{جا}\ ٢\ \text{ح}}{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}} = \frac{١ - \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{\text{جا}\ ٢\ \text{ح}}$$

(البرهان) $\frac{\text{جا}\ ٢\ \text{ح}}{١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}} = \frac{٢\ \text{جا}\ \text{ح}\ \text{جتا}\ \text{ح}}{٢\ \text{جتا}^{٢}\ \text{ح}} = \frac{\text{جا}\ \text{ح}}{\text{جتا}\ \text{ح}} = \text{ظا}\ \text{ح}$

وكذا نقول ان $\frac{١ - \text{جتا}\ ٢\ \text{ح}}{\text{جا}\ ٢\ \text{ح}} = \frac{٢\ \text{جا}^{٢}\ \text{ح}}{٢\ \text{جا}\ \text{ح}\ \text{جتا}\ \text{ح}} = \frac{\text{جا}\ \text{ح}}{\text{جتا}\ \text{ح}} = \text{ظا}\ \text{ح}$.

بند ١١٦ — وبوضع $\frac{\text{حـ}}{٢}$ بدل حـ فى القانونين الاخيرين ينتج أن

$$\text{ظا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \frac{\text{جا حـ}}{١ + \text{جتا حـ}} = \frac{١ - \text{جتا حـ}}{\text{جا حـ}}$$

بند ١١٧ — لايجاد مقادير النسب المثلثية للزاوية $\frac{\text{حـ}}{٢}$ بدلالة جا حـ

(العمل) تقدم ان

$$٢\,\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \text{جا حـ}$$

، $$\text{جا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} = ١$$

وباضافة المتساوية الاولى الى الثانية أولاً وطرحها منها ثانياً

يكون $$\text{جا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} + ٢\,\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} = ١ + \text{جا حـ}$$

، $$\text{جا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} - ٢\,\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} = ١ - \text{جا حـ}$$

أى أن $$\left(\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢}\right)^{٢} = ١ + \text{جا حـ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١)$$

، $$\left(\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} - \text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢}\right)^{٢} = ١ - \text{جا حـ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٢)$$

وباستخراج الجذر التربيعى لطرفى كل من المتساويتين (١) ، (٢)

يكون $$\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \pm\sqrt{١ + \text{جا حـ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٣)$$

، $$\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} - \text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \pm\sqrt{١ - \text{جا حـ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٤)$$

وباضافة متساوية (٤) الى (٣) أولاً وطرحها منها ثانياً ينتج أن

$$\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \frac{١}{٢}\left\{\pm\sqrt{١ + \text{جا حـ}} \pm \sqrt{١ - \text{جا حـ}}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (٥)$$

، $$\text{جتا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \frac{١}{٢}\left\{\pm\sqrt{١ + \text{جا حـ}} \mp \sqrt{١ - \text{جا حـ}}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (٦)$$

وبعد ذلك نستخرج باقى النسب من النسبتين (٥) ، (٦) وبذلك ينتج المطلوب

بند ١١٨ — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) أوجد مقدار جا $\frac{١}{٢}٢٢^{\circ}$

(الحل) تقدم ان $$\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \pm\sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا حـ}}{٢}\right)}$$

اذن $$\text{جا}\,\frac{١}{٢}٢٢^{\circ} = \pm\sqrt{\left(\frac{١ - \text{جتا}\,٤٥^{\circ}}{٢}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}\right)} = \pm\frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$$

ومن حيث ان الزاوية $\frac{١}{٢}$ ٢٢° من الزوايا التى بالربع الاول تكون كل نسبها المثلثية موجبة

ويكون $\text{جا}\ \frac{١}{٢}\,٢٢^\circ = \frac{١}{٢}\sqrt{(٢ - \sqrt{٢})}$

(مثال ٢) أوجد مقادير جا ٢ حـ ، جتا ٢ حـ ، ظا ٢ حـ اذا كان مقدار جا حـ $= \frac{١}{٢}$

(الحل) من حيث ان جا حـ $= \frac{١}{٢}$

يكون $\text{جتا حـ} = \sqrt{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ظا حـ} = \frac{١}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ويكون اذن $\text{جا ٢ حـ} = ٢\ \text{جا حـ جتا حـ} = ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{جتا ٢ حـ} = ١ - ٢\ \text{جا}^٢\ \text{حـ} = ١ - ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

، $\text{ظا ٢ حـ} = \frac{٢\ \text{ظا حـ}}{١ - \text{ظا}^٢\ \text{حـ}} = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}} \div (١ - \frac{١}{٣}) = \sqrt{٣}$

(مثال ٣) برهن على أن

$$٢\ \text{قتا ٢ حـ} = \text{قتا حـ قا حـ}$$

(البرهان) $٢\ \text{قتا ٢ حـ} = \frac{٢}{\text{جا ٢ حـ}} = \frac{٢}{٢\ \text{جا حـ جتا حـ}}$

$= \frac{١}{\text{جا حـ جتا حـ}} = \text{قتا حـ قا حـ}$ وهو المطلوب

(تمارين ٣٣)

(١) برهن على ان $\text{جتا}\ \frac{١}{٢}\,٢٢^\circ = \frac{١}{٢}\sqrt{(٢ + \sqrt{٢})}$

(٢) « « « $\text{ظتا}\ \frac{١}{٢}\,٢٢^\circ = \sqrt{٢} + ١$

(٣) « « « $\text{ظا}\ \frac{١}{٢}\,٢٢^\circ = \sqrt{٢} - ١$

أوجد مقادير جا ٢ حـ ، جتا ٢ حـ ، ظا ٢ حـ

(٤) اذا كان جا حـ $= \frac{١}{٢}$

(٥) « « جا حـ $= \frac{١}{٤}$

(٦) « « جتا حـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٧) واذا كان جتا حـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٨) « « ظا حـ $= \sqrt{٣}$

(٩) « « ظا حـ $= ١$

برهن على أن المتساويات الآتية صحيحة

(١٠) $\frac{\text{قتا}^{٢}\text{ح}}{\text{قتا}^{٢}\text{ح} - ٢} = \text{قا } ٢ \text{ ح}$

(١١) $\frac{٢ - \text{قا}^{٢}\text{ح}}{\text{قا}^{٢}\text{ح}} = \text{جتا } ٢ \text{ ح}$

(١٢) $\text{جتا}^{٢}\text{ح} \left(١ - \text{ظا}^{٢}\text{ح}\right) = \text{جتا } ٢ \text{ ح}$

(١٣) $\text{ظا هـ} + \text{ظتا هـ} = ٢ \text{ قتا } ٢ \text{ هـ}$

(١٤) $\text{ظتا هـ} - \text{ظا هـ} = ٢ \text{ ظتا } ٢ \text{ هـ}$

(١٥) $\left(\text{جا } \frac{\text{ء}}{٢} + \text{جتا } \frac{\text{ء}}{٢}\right)^{٢} = ١ + \text{جا ء}$

(١٦) $\left(\text{جا } \frac{\text{ء}}{٢} - \text{جتا } \frac{\text{ء}}{٢}\right)^{٢} = ١ - \text{جا ء}$

(١٧) $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ء}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{ء}} = \text{جتا } ٢ \text{ ء}$

(١٨) $\text{جتا}^{٢} \frac{\text{ح}}{٢} \left(١ + \text{ظا } \frac{\text{ح}}{٢}\right)^{٢} = ١ + \text{جا ح}$

(١٩) $\frac{\text{جا ب}}{١ + \text{جتا ب}} = \text{ظا } \frac{\text{ب}}{٢}$

(٢٠) $\frac{١ - \text{جتا ب}}{١ + \text{جتا ب}} = \text{ظا}^{٢} \frac{\text{ب}}{٢}$

(٢١) $\text{قتا ب} - \text{ظتا ب} = \text{ظا } \frac{\text{ب}}{٢}$

(٢٢) $\frac{\text{جتا } ٢ \text{ س}}{١ + \text{جا } ٢ \text{ س}} = \frac{١ - \text{ظا س}}{١ + \text{ظا س}}$

(٢٣) $\frac{\text{جا } ٣ \text{ ء}}{\text{جا ء}} - \frac{\text{جتا } ٣ \text{ ء}}{\text{جتا ء}} = ٢$

(٢٤) $\frac{\text{جتا } ٣ \text{ ء}}{\text{جا ء}} + \frac{\text{جا } ٣ \text{ ء}}{\text{جتا ء}} = ٢ \text{ ظتا } ٢ \text{ ء}$

(٢٥) $\frac{\text{جا } ٤ \text{ ء}}{\text{جا } ٢ \text{ ء}} = ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ ء}$

(٢٦) $\frac{\text{جا } ٥ \text{ ء}}{\text{جا ء}} - \frac{\text{جتا } ٥ \text{ ء}}{\text{جتا ء}} = ٤ \text{ جتا } ٢ \text{ ء}$

بند ١١٩ — أوجد مقادير النسب المثلثية للزاوية ٣ ح بدلالة ح

(أولاً) لاثبات أن

$\text{جا } ٣ \text{ ح} = ٣ \text{ جا ح} - ٤ \text{ جا}^{٣} \text{ح}$ يقال

(البرهان)

$$\text{جا } ٣ \text{ ح} = \text{جا } (٢ \text{ ح} + \text{ح})$$
$$= \text{جا } ٢ \text{ ح جتا ح} + \text{جتا } ٢ \text{ ح جا ح}$$
$$= (٢ \text{ جا ح جتا ح}) \text{ جتا ح} + (١ - ٢ \text{ جا}^{٢}\text{ح}) \text{ جا ح}$$
$$= ٢ \text{ جا ح جتا}^{٢} \text{ح} + \text{جا ح} - ٢ \text{ جا}^{٣} \text{ح}$$
$$= ٢ \text{ جا ح } (١ - \text{جا}^{٢} \text{ح}) + \text{جا ح} - ٢ \text{ جا}^{٣} \text{ح}$$
$$= ٢ \text{ جا ح} - ٢ \text{ جا}^{٣} \text{ح} + \text{جا ح} - ٢ \text{ جا}^{٣} \text{ح}$$
$$= ٣ \text{ جا ح} - ٤ \text{ جا}^{٣} \text{ح}$$

وهو المطلوب

(ثانياً) لاثبات أن

$$\text{جتا } ٣ \text{ حـ} = ٤ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ} - ٣ \text{ جتا حـ}$$ يقال

(البرهان) $$\text{جتا } ٣ \text{ حـ} = \text{جتا} (٢ \text{ حـ} + \text{حـ})$$
$$= \text{جتا } ٢ \text{ حـ جتا حـ} - \text{جا } ٢ \text{ حـ جا حـ}$$
$$= (٢ \text{ جتا}^{٢} \text{ حـ} - ١) \text{ جتا حـ} - (٢ \text{ جا حـ جتا حـ}) \text{ جا حـ}$$
$$= ٢ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ} - \text{جتا حـ} - ٢ \text{ جا}^{٢} \text{ حـ جتا حـ}$$
$$= ٢ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ} - \text{جتا حـ} - ٢ (١ - \text{جتا}^{٢} \text{ حـ}) \text{ جتا حـ}$$
$$= ٢ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ} - \text{جتا حـ} - ٢ \text{ جتا حـ} + ٢ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ}$$
$$= ٤ \text{ جتا}^{٣} \text{ حـ} - ٣ \text{ جتا حـ}$$ وهو المطلوب

(ثالثاً) لاثبات أن

$$\text{ظا } ٣ \text{ حـ} = \frac{٣ \text{ ظا حـ} - \text{ظا}^{٣} \text{حـ}}{١ - ٣ \text{ ظا}^{٢} \text{ حـ}}$$ يقال

(البرهان) $$\text{ظا } ٣ \text{ حـ} = \text{ظا} (\text{حـ} + ٢ \text{ حـ})$$
$$= \frac{\text{ظا حـ} + \text{ظا } ٢ \text{ حـ}}{١ - \text{ظا حـ ظا } ٢ \text{ حـ}}$$
$$= \frac{\text{ظا حـ} + \frac{٢ \text{ ظا حـ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ}}}{١ - \text{ظا حـ} \times \frac{٢ \text{ ظا حـ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ}}}$$
$$= \frac{\frac{٢ \text{ ظا حـ} + \text{ظا حـ} (١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ})}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ}}}{\frac{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ} - ٢ \text{ ظا}^{٢} \text{ حـ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ حـ}}}$$
$$= \frac{٣ \text{ ظا حـ} - \text{ظا}^{٣} \text{ حـ}}{١ - ٣ \text{ ظا}^{٢} \text{ حـ}}$$ وهو المطلوب

بند ١٢٠ — أمثلة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) برهن على ان $٨ \text{ جا}^{٤} \text{ حـ} = ٣ - ٤ \text{ جتا } ٢ \text{ حـ} + \text{جتا } ٤ \text{ حـ}$

(البرهان) ٨ جا^{٤} حـ = ٢ (٢ جا^{٢} حـ)^{٢}

= ٢ (١ — جتا ٢ حـ)^{٢}

= ٢ (١ — ٢ جتا ٢ حـ + جتا^{٢} ٢ حـ)

= ٢ — ٤ جتا ٢ حـ + ٢ جتا^{٢} ٢ حـ

= ٢ — ٤ جتا ٢ حـ + ١ + جتا ٤ حـ

= ٣ — ٤ جتا ٢ حـ + جتا ٤ حـ

(مثال ٢) برهن على أن المتساوية الآتية صحيحة

$$\frac{\text{جا ٣ حـ}}{\text{جا حـ}} = \text{٢ جتا ٢ حـ + ١}$$

(البرهان)
$$\frac{\text{جا ٣ حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{٣ جا حـ − ٤ جا}^{٣}\text{ حـ}}{\text{جا حـ}}$$

= ٣ — ٤ جا^{٢} حـ = ٣ — ٢ × ٢ جا^{٢} حـ

= ٣ — ٢ (١ — جتا ٢ حـ)

= ٣ — ٢ + ٢ جتا ٢ حـ

= ٢ جتا ٢ حـ + ١ وهو المطلوب

(تمارين ٣٤)

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(١) $\frac{\text{جتا ٣ حـ}}{\text{جتا حـ}} = \text{٢ جتا ٢ حـ — ١}$

(٢) $\frac{\text{٣ جا ى — جا ٣ ى}}{\text{٣ جتا ى + جتا ٣ ى}} = \text{ظا}^{٣}\text{ ى}$

(٣) جا ٣ هـ = ٤ جا هـ . جا (٦٠° + هـ) جا (٦٠° — هـ)

(٤) جتا ٣ هـ = ٤ جتا هـ . جا (٣٠° — هـ) جا (٣٠° + هـ)

(٥) ظا ٣ هـ = ظا (٦٠° — هـ) ظا هـ ظا (٦٠° + هـ)

(٦) $\frac{\text{جا ٣ حـ جا حـ}}{\text{جتا ٣ حـ + جتا حـ}} = \text{ظا حـ}$

(٧) $$\frac{\text{جا ٣ ح} - \text{جتا ٣ ح}}{\text{جا ح} + \text{جتا ح}} = \text{٢ جا ٢ ح} - ١$$

(٨) $$\frac{\text{جا ٣ ح} + \text{جتا ٣ ح}}{\text{جتا ح} - \text{جا ح}} = \text{٢ جا ٢ ح} + ١$$

(٩) $$\frac{١}{\text{ظا ٣ هـ} - \text{ظا هـ}} = \frac{١}{\text{ظتا هـ} - \text{ظتا ٣ هـ}} = \text{ظتا ٢ هـ}$$

(١٠) $$\frac{١ - \text{جتا ٣ ح}}{١ - \text{جتا ح}} = (١ + \text{٢ جتا ح})^{٢}$$

(١١) $$\frac{\text{٢ جا ح}}{\text{جتا ح} + \text{جتا ٣ ح}} = \text{ظا ٢ ح} - \text{ظا ح}$$

(١٢) $$\text{جا}^{٣}\text{ح}\,\frac{\text{جتا ٣ ح}}{٣} + \text{جتا}^{٣}\text{ح}\,\frac{\text{جا ٣ ح}}{٣} = \frac{\text{جا ٤ ح}}{٤}$$

(١٣) $$\text{جا ٣ ح} - \text{جتا ٣ ح} + ٢(\text{جتا ح} + \text{جا ح}) = ٢(\text{جا ح} + \text{جتا ح})^{٣}$$

(١٤) $$\text{ظا ٣ هـ} = \frac{\text{٣ ظا هـ قا}^{٢}\text{هـ} - \text{٤ ظا}^{٣}\text{هـ}}{٤ - \text{٣ قا}^{٢}\text{هـ}}$$

(١٥) $$\frac{\text{ظتا هـ}}{\text{ظتا هـ} - \text{ظتا ٣ هـ}} + \frac{\text{ظا هـ}}{\text{ظا هـ} - \text{ظا ٣ هـ}} = ١$$

(١٦) $$\text{٢ جا هـ جتا ٢ هـ} = \text{جا ٣ هـ} - \text{جا هـ}$$

الباب الثامن عشر

في النسب المثلثية للزوايا ١٨° ، ٣٦° ، ٩°

بند ١٢١ — النسب المثلثية للزاوية ١٨°

يسهل ايجاد النسب المثلثية لهذه الزاوية باستخدام بعض القوانين المذكورة في الباب السابق ومع ذلك يمكن ايجاد هذه النسب بطرق هندسية لا ارتباط لها بهذه القوانين وللايضاح نذكر الطريقتين

(أولاً) لايجاد النسب المثلثية للزاوية ١٨° بالطرق الجبرية نقول

$$٥ \times ١٨^\circ = ٩٠^\circ$$

فيكون
$$٢ \times ١٨^\circ = ٩٠^\circ - ٣ \times ١٨^\circ$$

ويكون
$$\text{جا}\,(٢ \times ١٨^\circ) = \text{جتا}\,(٣ \times ١٨^\circ)$$

أي أن
$$٢\ \text{جا}\ ١٨^\circ\ \text{جتا}\ ١٨^\circ = ٤\ \text{جتا}^{٣}\ ١٨^\circ - ٣\ \text{جتا}\ ١٨^\circ$$

ومن حيث أن جتا ١٨° لا يمكن أن يكون صفراً نقسم طرفي المتساوية على جتا ١٨° فينتج أن

$$٢\ \text{جا}\ ١٨^\circ = ٤\ \text{جتا}^{٢}\ ١٨^\circ - ٣$$

أي أن
$$٢\ \text{جا}\ ١٨^\circ = ٤\,(١ - \text{جا}^{٢}\ ١٨^\circ) - ٣$$

فيكون
$$٢\ \text{جا}\ ١٨^\circ = ٤ - ٤\ \text{جا}^{٢}\ ١٨^\circ - ٣$$

،
$$٤\ \text{جا}^{٢}\ ١٨^\circ + ٢\ \text{جا}\ ١٨^\circ - ١ = ٠$$

ويكون
$$\text{جا}\ ١٨^\circ = \frac{-١ \pm \sqrt{٥}}{٤}$$

ومن حيث انه لا يمكن أن يكون جا ١٨° سالباً (بند ١٠٥)

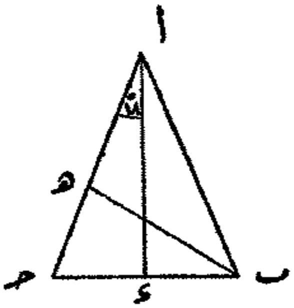
يكون
$$\text{جا}\ ١٨^\circ = \frac{\sqrt{٥} - ١}{٤}$$

وبعد ذلك نستخرج باقي النسب من الجيب فمثلاً

$$\text{جتا}\ ١٨^\circ = \sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\ ١٨^\circ} = \sqrt{١ - \frac{٦ - ٢\sqrt{٥}}{١٦}} = \sqrt{\frac{١٠ + ٢\sqrt{٥}}{١٦}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}}{٤}$$

(ثانياً) لايجاد النسب المثلثية للزاوية ١٨° بالطرق الهندسية نقول



(شكل ٤٦)

نفرض أن ا ب حـ مثلث فيه ∠ ا = ٣٦° ، ∠ ب = ∠ حـ = ٧٢° (شكل ٤٦)

ثم ننصف ∠ ا بالمستقيم ا ء فتكون ∠ حـ ا ء = ١٨° ويكون ا ء عموداً على ب حـ ومنصفاً له فى نقطة ء

وننصف كذلك ∠ ب بالمستقيم ب هـ فتكون ∠ هـ ب ا = ٣٦° = ∠ ب ا حـ

وتكون ∠ ب هـ حـ = ٧٢° = ∠ ب حـ هـ

ويكون اذن ب حـ = ب هـ = ا هـ

ومن حيث ان المثلثين ب هـ حـ ، ا ب حـ متشابهان

يكون $\overline{\text{ب حـ}}^{\,٢}$ = حـ ا × حـ هـ

واذا فرض أن ء حـ = س ، ا حـ = ص

يكون ٤ س² = ص (ص − ٢ س)

وباضافة س² الى طرفى المعادلة

يكون ص² − ٢ س ص + س² = ٥ س²

وباستخراج الجذر التربيعى لطرفى المعادلة مقتصرين على المقدار الموجب لان ص > س فرضا

يكون ص − س = س √٥

اذن ص = س √٥ + س

أى ان ص = س (√٥ + ١)

ويكون $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١}{\sqrt{٥}+١}$

اذن $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ا حـ}} = \frac{١}{\sqrt{٥}+١}$

ومن المثلث ء ا حـ جا ١٨° = $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ا حـ}} = \frac{١}{\sqrt{٥}+١} = \frac{\sqrt{٥}-١}{٤}$ وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث ان ٧٢° تم ١٨° يمكن ايجاد النسب المثلثية للزاوية ٧٢° من نفس النسب المثلثية لزاوية ١٨° باستخدام بند ٧٠

بند **١٢٢** — النسب المثلثية للزاوية ٣٦°

يتيسر ايجاد هذه النسب بالطرق الهندسية زيادة على الطرق الجبرية وللايضاح نذكر الطريقتين

(أولاً) لايجاد النسب المثلثية للزاوية ٣٦° بالطرق الجبرية نقول

$$٣٦° = ٢ \times ١٨°$$

فيكون $\text{جتا } ٣٦° = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢}\, ١٨°$

$$= ١ - ٢ \left(\frac{\sqrt{٥} - ١}{٤}\right)^{٢}$$

$$= ١ - ٢ \left(\frac{٦ - ٢\sqrt{٥}}{١٦}\right)$$

$$= ١ - \frac{٣ - \sqrt{٥}}{٤}$$

اى ان $\text{جتا } ٣٦° = \frac{\sqrt{٥} + ١}{٤}$

و بعد ذلك نستخرج باقى النسب من حيب التمام فمثلا

$$\text{جا } ٣٦° = \sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\, ٣٦°} = \sqrt{١ - \frac{٦ + ٢\sqrt{٥}}{١٦}} = \frac{\sqrt{١٠ - ٢\sqrt{٥}}}{٤}$$

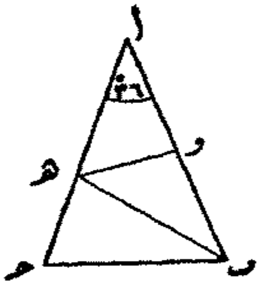
(ثانياً) لايجاد النسب المثلثية للزاوية ٣٦° بالطرق الهندسية نقول

نفرض أن ا ب حـ مثلث فيه ∠ ا = ٣٦° ، ∠ ب = ∠ حـ = ٧٢° كالمرسوم فى (شكل ٤٦)

ثم ننصف زاوية ب بالمستقيم ب هـ ونفرض أن ب حـ = ٢ س ، ا حـ = ص

فحسبما تقدم فى البند السابق

يكون $\frac{ص}{س} = \sqrt{٥} + ١$



(شكل ٤٧)

واذا نصفنا ∠ ب هـ ا بالمستقيم هـ و يكون هـ و عموداً على ب ا ومنصفاً له فى نقطة ى

ومن المثلث ا هـ و $\text{جتا } ٣٦° = \frac{ا و}{ا هـ} = \frac{\frac{ص}{٢}}{٢ س} = \frac{ص}{٤ س}$

$$= \frac{\sqrt{٥} + ١}{٤}$$ وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث ان ٥٤° تمم ٣٦° يمكن ايجاد النسب المثلثية للزاوية ٥٤° من نفس النسب المثلثية للزاوية ٣٦° باستخدام بند ٧٠

بند ١٢٣ — النسب المثلثية للزاوية ٩°

(الطريقة) من حيث ان ١٨° = ٢ × ٩° وكلاً من جا ٩° وجتا ٩° موجب (بند ١٠٥)

يكون $\text{جا}\,9^\circ + \text{جتا}\,9^\circ = \sqrt{1 + \text{جا}\,18^\circ}$ (بند ١١٧)

$$= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2}$$

وبما ان جتا ٩° اكبر من جا ٩° يكون جا ٩° — جتا ٩° سالباً (بند ١١٧)

ويكون $\text{جا}\,9^\circ - \text{جتا}\,9^\circ = -\sqrt{1 - \text{جا}\,18^\circ}$

$$= -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}} = -\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2}$$

ويكون $\text{جا}\,9^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} - \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

، $\text{جتا}\,9^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

ومن هاتين النسبتين نستخرج باقي النسب المثلثية للزاوية ٩°

(ملاحظة) بما أن ٨١° تتمم ٩° يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٨١° من نفس النسب المثلثية لزاوية ٩° باستخدام بند ٧٠

(تمارين ٣٥)

برهن على أن المتساويات الآتية صحيحة

(١) $\text{جا}^2\,72^\circ - \text{جا}^2\,60^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$

(٢) $\text{جتا}^2\,48^\circ - \text{جا}^2\,12^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}$

(٣) جتا ١٢° + جتا ٦٠° + جتا ٨٤° = جتا ٢٤° + جتا ٤٨°

(٤) جا^{٢} $\frac{ط}{٥}$ جا^{٢} $\frac{٢ط}{٥}$ = $\frac{٥}{١٦}$

(٥) جا $\frac{ط}{١٠}$ − جا $\frac{٣ط}{١٠}$ = − $\frac{١}{٢}$

(٦) جا $\frac{ط}{١٠}$ جا $\frac{٣ط}{١٠}$ = $\frac{١}{٤}$

(٧) ظا ٦٠° ظا ٦٦° = $\frac{٣ - \sqrt{٥}}{١ + \sqrt{٥}}$

(٨) جتا $\frac{ط}{١٥}$ جتا $\frac{ط}{١٥}$ جتا $\frac{٣ط}{١٥}$ جتا $\frac{٤ط}{١٥}$ جتا $\frac{٥ط}{١٥}$ جتا $\frac{٦ط}{١٥}$ جتا $\frac{٧ط}{١٥}$ = $\frac{١}{٧٢}$

(٩) أوجد مقدار جا ١٨° بواسطة قانونى جا ٣ حـ ، جتا ٢ حـ

(١٠) ارسم زاوية جيب تمامها يساوى ظلها

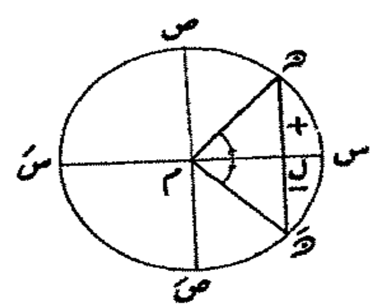
البـــاب التاسع عشر

فى مقارنة النسب المثلثية لبعض زوايا منتسبة

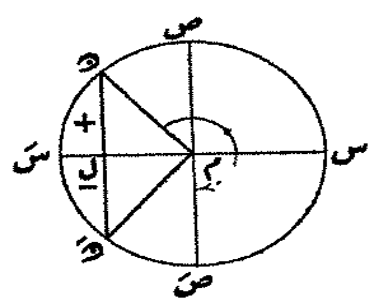
بند **١٢٤** — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين مجموعهما = ٠°

لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها حـ فلكى يكون المجموع صفراً يجب أن تكون الزاوية الثانية = (— حـ)

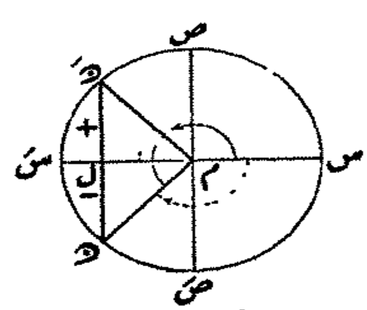
فنرسم الزاوية س م ھ أولاً فى الربع الأول (شكل ٤٨) وثانياً فى الربع الثانى (شكل ٤٩) وثالثاً فى الربع الثالث (شكل ٥٠) ورابعاً فى الربع الرابع (شكل ٥١) ونجعلها مساوية حـ ونرسم فى كل حالة الزاوية س م ھ´ = (— حـ) كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نصل ھ ھ´



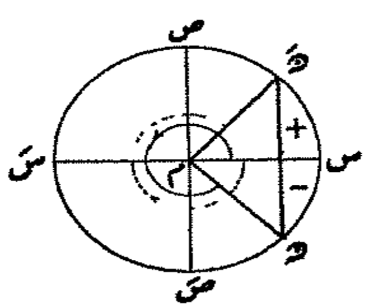
(شكل ٤٨)



(شكل ٤٩)



(شكل ٥٠)



(شكل ٥١)

فيحدث المثلث م ھ ھ´ متساوى الساقين وفى كل حالة من الأحوال الأربع نرى ان ∠ ھ م ل = ∠ ھ´ م ل فيكون م ل منصفا للقاعدة ھ ھ´ وعموداً عليها

و بذلك يكون ل ھ = ل ھ´ (فى الطول)

أى ان ل ھ = — ل ھ´ (جبرياً)

ويكون جا (− حـ) = ل هـَ / م هـَ = − ل هـ / م هـ = − جا حـ

، جتا (− حـ) = م لَ / م هـَ = م ل / م هـ = جتا حـ

، ظا (− حـ) = ل هـَ / م لَ = − ل هـ / م ل = − ظا حـ

وكذا نبرهن على ان قتا (− حـ) = − قتا حـ ، قا (− حـ) = قا حـ ، ظتا (− حـ) = − ظتا حـ

(تنبيه) يمكن استنتاج النسب الاربع الأخيرة من الاثنتين الاوليين وذلك بمقتضى العلاقات التى بين النسب المثلثية

فمثلا جا (− ٣٠°) = − جا ٣٠° = − ½

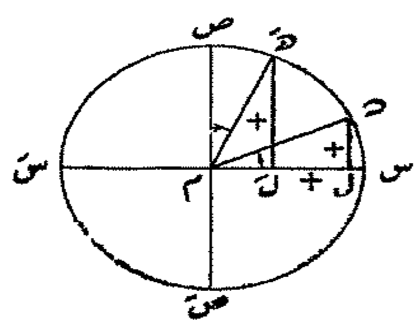
، ظا (− ٦٠°) = − ظا ٦٠° = − √٣

، جتا (− ٤٥°) = جتا ٤٥° = ١ / √٢

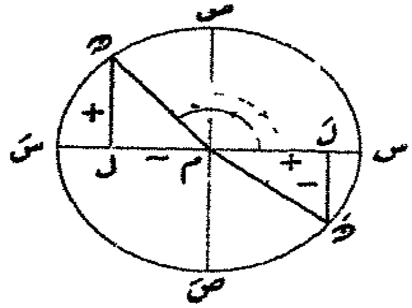
بند ١٢٥ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين مجموعهما = ٩٠°

لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها حـ فلكى يكون المجموع ٩٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية = (٩٠° − حـ) أو (ط/٢ − حـ)

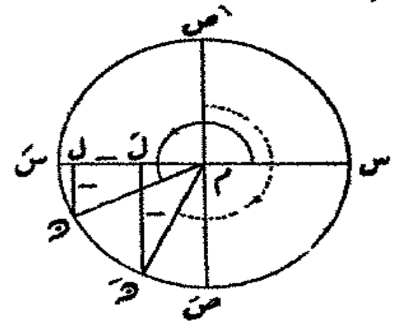
ونرسم الزاوية س م هـ فى كل من الأرباع الأربعة (شكل ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥) ونجعلها مساوية حـ ونرسم فى كل حالة الزاوية س م هـَ = (٩٠° − حـ) كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نرسم هـ ل ، هـَ لَ عمودين على س سَ



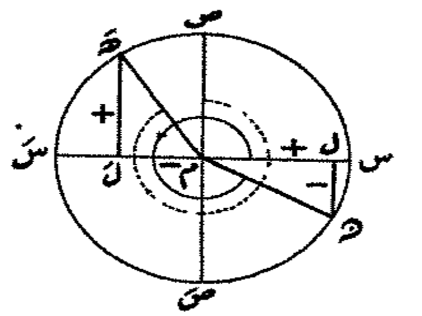
(شكل ٥٢)



(شكل ٥٣)



(شكل ٥٤)



(شكل ٥٥)

فعند ما يكون م ھ فى الربع الاول والربع الرابع (شكل ٥٢ ، ٥٥) نرى أن ∠ ھ م ل = ∠ ھ′ م ص

ولكن ∠ ھ′ م ص = ∠ م ھ′ ل′ بالتبادل

اذن ∠ ھ م ل = م ھ′ ل′

وكذا عند ما يكون م ھ فى الربع الثانى والربع الثالث (شكلى ٥٣ ، ٥٤) نرى ان ∠ ھ م ل = ∠ ھ′ م ص′

ولكن ∠ ھ′ م ص′ = ∠ م ھ′ ل′ بالتبادل

اذن ∠ ھ م ل = م ھ′ ل′

وعلى ذلك ففى كل حالة من الحالات الاربع يتساوى المثلثان ھ م ل ، ھ′ م ل′ لتساوى وتريهما ولتساوى الزاويتين الحادتين م ھ′ ل′ ، ھ م ل

وينتج من تساوى المثلثين ان

ل ھ = م ل′ (جبرياً)

، م ل = ل′ ھ′ (جبرياً)

ويكون جا (٩٠° — ح) = $\frac{\text{ل′ ھ′}}{\text{م ھ′}} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ھ}}$ = جتا ح

، جتا (٩٠° — ح) = $\frac{\text{م ل′}}{\text{م ھ′}} = \frac{\text{ل ھ}}{\text{م ھ}}$ = جا ح

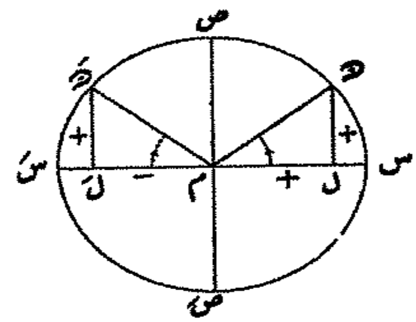
، ظا (٩٠° — ح) = $\frac{\text{ل′ ھ′}}{\text{م ل′}} = \frac{\text{م ل}}{\text{ل ھ}}$ = ظتا ح

وكذا نبرهن على أن قتا (٩٠° — ح) = قا ح ، قا (٩٠° — ح) = قتا ح ، ظتا (٩٠° — ح) = ظا ح

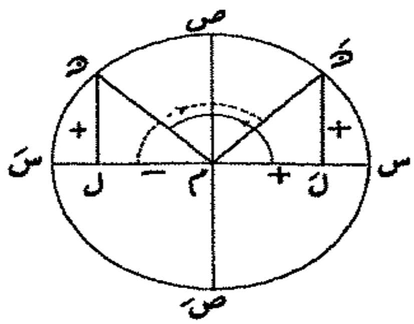
بند ١٢٦ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين مجموعهما = ١٨٠°

لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها ح فلكى يكون المجموع ١٨٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية = (١٨٠° — ح) أو (ط — ح)

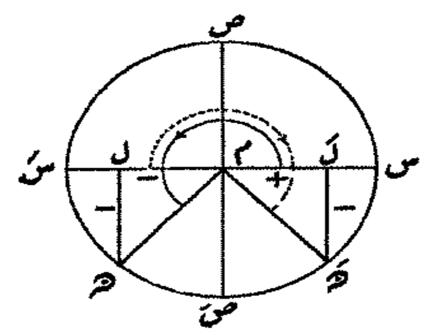
فنرسم الزاوية س م ﻫ فى كل من الأرباع الأربعة (شكل ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٦٩) ونجعلها مساوية ﺣ ونرسم فى كل حالة من الأحوال الأربع الزاوية س م ﻫَ = (١٨٠° − ﺣ) كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نرسم ﻫ ل ، ﻫَ لَ عمودين على س سَ



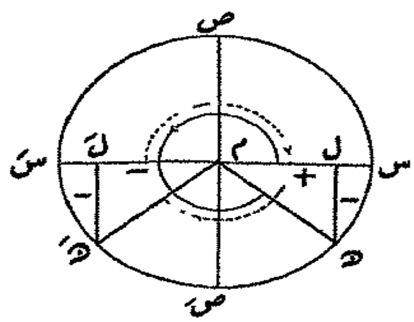
(شكل ٥٦)



(شكل ٥٧)



(شكل ٥٨)



(شكل ٥٩)

ومن حيث انه فى كل من الارباع الاربعة مقدار الدوران السلبى الناشىء من تحرك م سَ الى م ﻫَ يساوى مقدار الدوران الايجابى الناشىء من تحرك م س الى م ﻫ ينتج ان ∠ ﻫ م ل = ∠ ﻫَ م لَ من حيث المقدار

وعلى ذلك ففى كل حالة من الحالات الاربع يتساوى المثلثان ﻫ م ل ، ﻫَ م لَ لتساوى وتريهما ولتساوى الزاويتين الحادتين ﻫ م ل ، ﻫَ م لَ

وينتج من تساوى المثلثين أن

لَ ﻫَ = ل ﻫ (جبرياً)

، م لَ = م ل (فى الطول)

أى أن م لَ = − م ل (جبرياً)

ويكون جا (١٨٠° − ﺣ) = $\frac{\text{لَ ﻫَ}}{\text{م ﻫَ}} = \frac{\text{ل ﻫ}}{\text{م ﻫ}}$ = جا ﺣ

، جتا (١٨٠° حـ) = $\frac{\text{م ل}'}{\text{م هـ}'}$ = $\frac{-\text{م ل}}{\text{م هـ}}$ = − جتا حـ

، ظا (١٨٠° − حـ) = $\frac{\text{ل}'\text{هـ}'}{\text{م ل}'}$ = $\frac{\text{ل هـ}}{-\text{م ل}}$ = − ظا حـ

وكذا يبرهن على أن قتا (١٨٠° − حـ) = قتا حـ ، قا (١٨٠° − حـ) = − قا حـ
، ظتا (١٨٠° − حـ) = − ظتا حـ

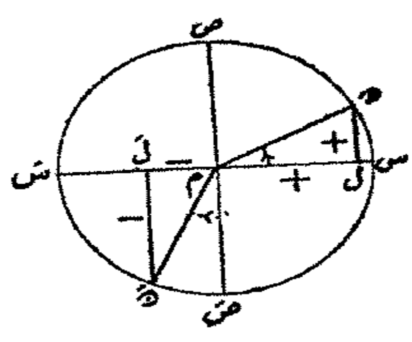
فمثلاً جا ١٢٠° = جا (١٨٠° − ٦٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

، جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠° − ٤٥°) = − جتا ٤٥° = − $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

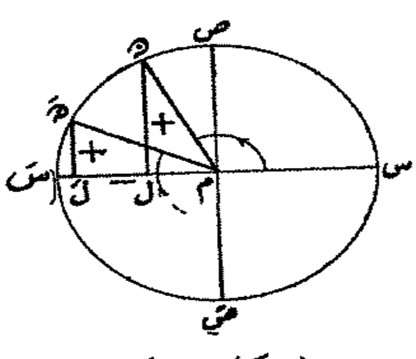
، ظا ١٥٠° = ظا (١٨٠° − ٣٠°) = − ظا ٣٠° = − $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

بند ١٢٧ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين مجموعهما = ٢٧٠°

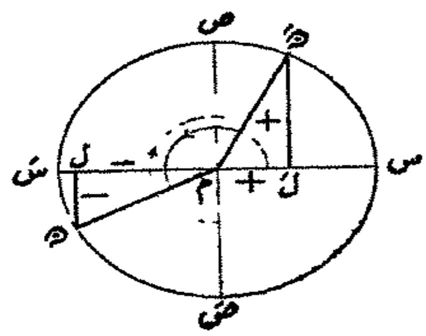
لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها حـ فلكي يكون المجموع ٢٧٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية = (٢٧٠° − حـ) أو ($\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ط − حـ)



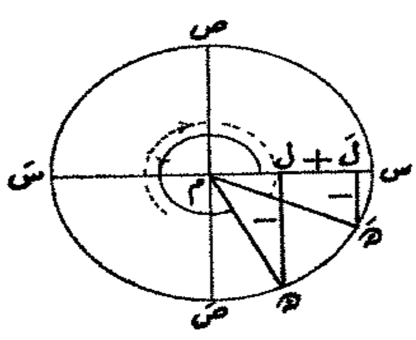
(شكل ٦٠)



(شكل ٦١)



(شكل ٦٢)



(شكل ٦٣)

فنرسم الزاوية س م ه فى كل من الأرباع الأربعة (شكل ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣) ونجعلها مساوية حـ ونرسم فى كل حالة الزاوية س م هَ = (٢٧٠° - حـ) كما هو مبين من اسهم الرسم ثم نرسم ه ل ، هَ لَ عمودين على س سَ

فعند ما تكون ∠ س م ه فى الربع الاول (شكل ٦٠) نرى ان ∠ ه م ل = ∠ هَ م صَ

ولكن ∠ هَ م صَ = ∠ م هَ لَ بالتبادل

اذن ∠ ه م ل = ∠ م هَ لَ

وعند ما تكون ∠ س م ه فى الربع الثانى (شكل ٦١) نرى ان ∠ لَ م هَ = ∠ ص م ه

ولكن ∠ ص م ه = ∠ م ه ل بالتبادل

اذن ∠ لَ م هَ = ∠ م ه ل

وعند ما تكون ∠ س م ه فى الربع الثالث (شكل ٦٢) نرى ان ∠ ل م ه = ∠ ص م هَ

ولكن ∠ ص م هَ = ∠ م هَ لَ بالتبادل

اذن ∠ ل م ه = ∠ م هَ لَ

وعند ما تكون ∠ س م ه فى الربع الرابع (شكل ٦٣) نرى ان ∠ لَ م هَ = ∠ صَ م ه

ولكن ∠ صَ م ه = ∠ م ه ل

اذن ∠ لَ م هَ = ∠ م ه ل

وعلى ذلك ففى كل حالة من الحالات الاربع يتساوى المثلثان ه م ل ، هَ م لَ لأن فى كل منهما وتراً وزاوية حادة يساويان نظيريهما فى الثانى

و ينتج من تساوى المثلثين أن

ل ه = م لَ (فى الطول)

، م ل = لَ هَ (فى الطول)

أى أن ل ه = — م لَ (جبرياً)

، م ل = — لَ هَ (جبرياً)

و يكون جا (٢٧٠° — حـ) = $\frac{\text{لَ هَ}}{\text{م هَ}}$ = $\frac{\text{— م ل}}{\text{م ه}}$ = — جتا حـ

، جتا (٢٧٠° — حـ) = $\frac{\text{م لَ}}{\text{م هَ}}$ = $\frac{\text{— ل ه}}{\text{م ه}}$ = — جا حـ

، ظا (٢٧٠° — حـ) = $\frac{\text{لَ هَ}}{\text{م لَ}}$ = $\frac{\text{— م ل}}{\text{— ل ه}}$ = ظتا حـ

وكذا نبرهن على أن قتا (٢٧٠° − حـ) = − قا حـ ، قا (٢٧٠° − حـ) = − قتا حـ ، ظتا (٢٧٠° − حـ) = ظا حـ

فمثلا جا ٢٤٠° = جا (٢٧٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

، جتا ٢١٠° = جتا (٢٧٠° − ٦٠°) = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

بند ١٢٨ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين مجموعهما = ٣٦٠°

لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها حـ فلكى يكون المجموع ٣٦٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية = (٣٦٠° − حـ) أو (٢ ط − حـ)

فنرسم الزاوية س م ﮪ فى كل من الارباع الاربعة (شكل ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١) ونجعلها مساوية حـ ولرسم زاوية = (٣٦٠° − حـ) يكفى فى كل حالة أن نحرك م س الى م ﮪَ فى الجهة السالبة مقدار زاوية س م ﮪ الموجبة كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نصل ﮪ ﮪَ فبمقتضى ما تقدم ببند ١٢٤

يكون ل ﮪ = ل ﮪَ (فى الطول)

أى ان ل ﮪ = − ل ﮪَ (جبرياً) ويكون

جا (٣٦٠° − حـ) = − جا حـ	قتا (٣٦٠° − حـ) = − قتا حـ
جتا (٣٦٠° − حـ) = جتا حـ	قا (٣٦٠° − حـ) = قا حـ
ظا (٣٦٠° − حـ) = − ظا حـ	ظتا (٣٦٠° − حـ) = − ظتا حـ

فمثلاً جا ٣١٥° = جا (٣٦٠° − ٤٥°) = − جا ٤٥° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

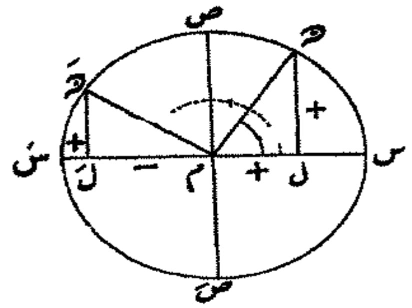
، ظا ٣٣٠° = ظا (٣٦٠° − ٣٠°) = − ظا ٣٠° = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

بند ١٢٩ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين الفرق بينهما = ٩٠°

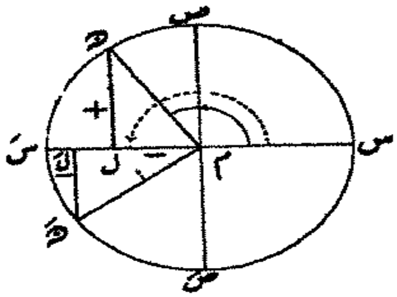
لذلك نفرض ان احدى الزاويتين قدرها حـ فلكى يكون الفرق ٩٠° يجب ان تكون الزاوية الثانية = (٩٠° + حـ) أو ($\frac{ط}{٢}$ + حـ)

فنرسم الزاوية س م ﮪ فى كل من الأرباع الاربعة (شكل ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧) ونجعلها مساوية حـ ونرسم فى كل حالة الزاوية س م ﮪَ = (٩٠° + حـ) كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نرسم ﮪ ل ، ﮪَ لَ عمودين على س سَ

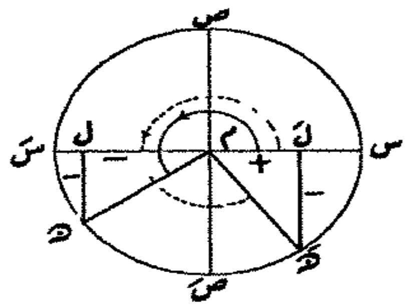
ففى جميع الحالات نعلم ان ∠ ﮪ م ﮪَ = ٩٠° لأنها عبارة عن الفرق بين الزاويتين المفروضتين



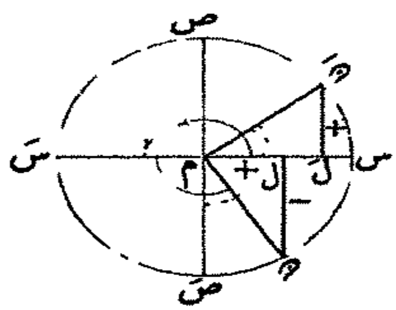
(شكل ٦٤)



(شكل ٦٥)



(شكل ٦٦)



(شكل ٦٧)

فتكون ∠ هـ م ل تمم ∠ هـَ م لَ

أى ان ∠ هـ م ل = ∠ م هـَ لَ

وعلى ذلك ففى كل حالة من الحالات الأربع يتساوى المثلثان هـ م ل ، هـَ م لَ لتساوى وتريهما ولتساوى الزاويتين الحادتين هـ م ل ، م هـَ لَ

وينتج من تساوى المثلثين أن

لَ هـَ = م ل (جبرياً)

، م لَ = ل هـ (فى الطول)

أى ان م لَ = − ل هـ (جبرياً)

ويكون جا $(90^\circ + \text{ح}) = \dfrac{\text{لَ هـَ}}{\text{م هـَ}} = \dfrac{\text{م ل}}{\text{م هـ}} =$ جتا ح

، جتا $(90^\circ + \text{ح}) = \dfrac{\text{م لَ}}{\text{م هـَ}} = \dfrac{-\text{ل هـ}}{\text{م هـ}} = -$ جا ح

، ظا $(90^\circ + \text{ح}) = \dfrac{\text{لَ هـَ}}{\text{م لَ}} = \dfrac{\text{م ل}}{-\text{ل هـ}} = -$ ظتا ح

وكذا نبرهن على أن قتا (٩٠° + ح) = قا ح ، قا (٩٠° + ح) = — قتا ح
، ظتا (٩٠° + ح) = — ظا ح

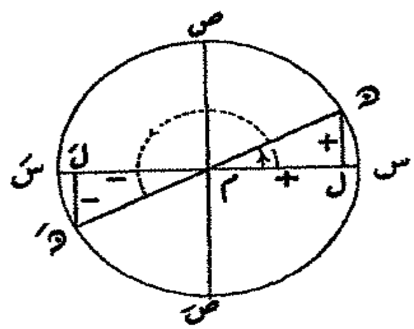
فمثلاً جتا ١٣٥° = جتا (٩٠° + ٤٥) = — جا ٤٥° = — ١ / √٢

، ظا ١٢٠° = ظا (٩٠° + ٣٠°) = — ظتا ٣٠° = — √٣

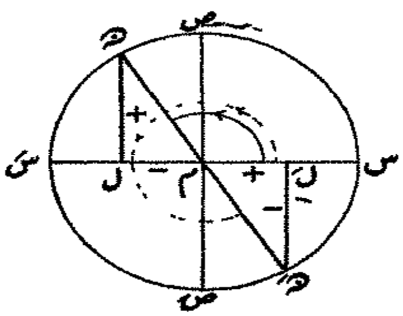
بند ١٣٠ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين الفرق بينهما = ١٨٠°

نفرض ان احدى الزاويتين قدرها ح فلكى يكون الفرق ١٨٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية = (١٨٠° + ح) أو (ط + ح)

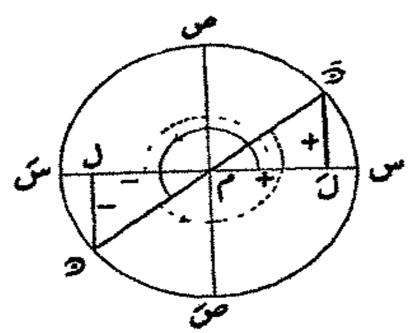
فنرسم الزاوية س م ه فى كل من الارباع الاربعة (شكل ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١) ونجعلها مساوية ح ونرسم فى كل حالة الزاوية س م هَ = (١٨٠° + ح) كما هو مبين من أسهم الرسم



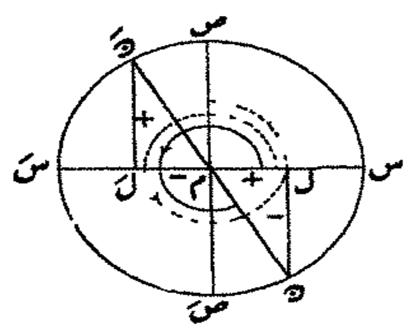
(شكل ٦٨)



(شكل ٦٩)



(شكل ٧٠)



(شكل ٧١)

ثم نرسم ه ل ، هَ لَ عمودين على س سَ ففى كل حالة من الحالات الأربع نعلم ان ∠ س م ه = ح ، ∠ س م هَ = ١٨٠° + ح

اذن ∠ س م هَ — ∠ س م ه = ١٨٠°

وبذلك يكون م هَ على استقامة م ه

وتكون ∠ ه م ل = ∠ هَ م لَ   بالتقابل فى الرأس

وعلى ذلك ففي كل حالة من الحالات الأربع يتساوى المثلثان ه ل م ، ه َ ل َ م لتساوي وتريهما ولتساوي الزاويتين الحادتين ه م ل ، ه َ م ل َ

و ينتج من تساوي المثلثين أن

$$\text{ل}'\text{ه}' = \text{ل ه} \quad (\text{في الطول})$$

$$\text{، م ل}' = \text{م ل} \quad (\text{في الطول})$$

$$\text{أي ان} \quad \text{ل}'\text{ه}' = -\,\text{ل ه} \quad (\text{جبرياً})$$

$$\text{، م ل}' = -\,\text{م ل} \quad (\text{جبرياً})$$

$$\text{ويكون جا}\,(١٨٠^\circ + \text{ح}) = \frac{\text{ل}'\text{ه}'}{\text{م ه}'} = \frac{-\,\text{ل ه}}{\text{م ه}} = -\,\text{جا ح}$$

$$\text{، جتا}\,(١٨٠^\circ + \text{ح}) = \frac{\text{م ل}'}{\text{م ه}'} = \frac{-\,\text{م ل}}{\text{م ه}} = -\,\text{جتا ح}$$

$$\text{، ظا}\,(١٨٠^\circ + \text{ح}) = \frac{\text{ل}'\text{ه}'}{\text{م ل}'} = \frac{-\,\text{ل ه}}{-\,\text{م ل}} = \text{ظا ح}$$

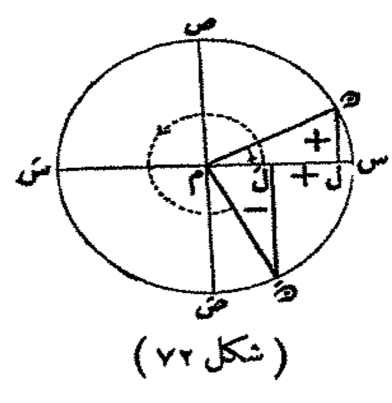
وكذا نبرهن على ان قتا $(١٨٠^\circ + \text{ح}) = -$ قتا ح ، قا $(١٨٠^\circ + \text{ح}) = -$ قا ح ، ظتا $(١٨٠^\circ + \text{ح}) =$ ظتا ح

$$\text{فمثلاً جا } ٢٤٠^\circ = \text{جا}\,(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = -\,\text{جا } ٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

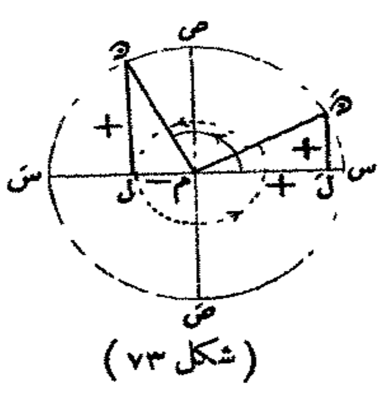
$$\text{، جتا } ٢٢٥^\circ = \text{جتا}\,(١٨٠^\circ + ٤٥^\circ) = -\,\text{جتا } ٤٥^\circ = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

بند ١٣١ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين الفرق بينهما $= ٢٧٠^\circ$

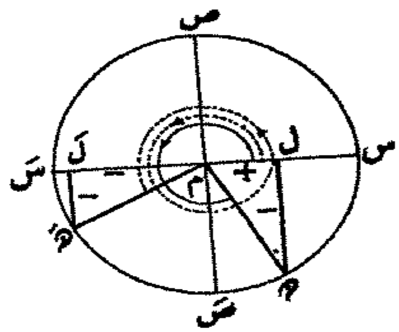
نفرض ان احدى الزاويتين قدرها ح فلكي يكون الفرق ٢٧٠° يجب أن تكون الزاوية الثانية $= (٢٧٠^\circ + \text{ح})$ أو $(\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ح})$



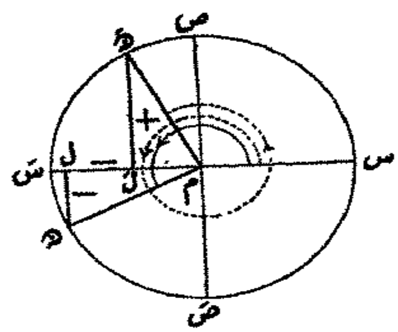
(شكل ٧٢)



(شكل ٧٣)



(شكل ٧٥)



(شكل ٧٤)

فنرسم الزاوية س م هـ فى كل من الارباع الأربعة (شكل ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥) ونجعلها مساوية حـ ونرسم فى كل حالة ∠ س م هـَ = (٢٧٠° + حـ) كما هو مبين من أسهم الرسم ثم نرسم هـ ل ، هـَ لَ عمودين على س سَ

ففى جميع الحالات نعلم ان ∠ س م هـ = حـ ، ∠ س م هـَ = ٢٧٠° + حـ

فتكون ∠ س م هـَ − ∠ س م هـ = ٢٧٠°

أى ان ∠ هـ م هـَ العكسية = ٢٧٠°

وبذلك تكون ∠ هـ م هـَ غير العكسية = ٩٠°

فعند ما تكون س م هـ فى الربع الأول تكون ∠ ل م هـ = ∠ صَ م هـَ

ولكن ∠ صَ م هـَ = ∠ م هـَ لَ

اذن ∠ ل م هـ = ∠ م هـَ لَ

وكذا نبرهن على أن ∠ لَ م هـَ = ∠ م هـ ل عندما تكون الزاوية الاصلية فى الربع الثانى

وان ∠ ل م هـ = ∠ م هـَ لَ « « « « « « الثالث

وان ∠ لَ م هـَ = ∠ م هـ ل « « « « « « الرابع

وعلى ذلك ففى كل حالة من الحالات الأربع يتساوى المثلثان هـ م ل ، هـَ م لَ لأن فى كل منهما وتراً وزاوية حادة يساويان نظيريهما من الثانى

وينتج من تساوى المثلثين أن

م ل = هـَ لَ (فى الطول)

أى ان م ل = − هـَ لَ (جبرياً)

، هـ ل = م لَ (جبرياً)

$$\text{ويكون}\quad \text{جا}\,(٢٧٠^\circ + \text{حـ}) = \frac{\text{هـَ لَ}}{\text{م هـَ}} = \frac{-\,\text{م ل}}{\text{م هـ}} = -\,\text{جتا حـ}$$

$$،\quad \text{جتا}\,(٢٧٠^\circ + \text{حـ}) = \frac{\text{م لَ}}{\text{م هـَ}} = \frac{\text{هـ ل}}{\text{م هـ}} = \text{جا حـ}$$

$$،\quad \text{ظا}\,(٢٧٠^\circ + \text{حـ}) = \frac{\text{هـَ لَ}}{\text{م لَ}} = \frac{-\,\text{م ل}}{\text{هـ ل}} = -\,\text{ظتا حـ}$$

وكذا نبرهن على ان قتا $(٢٧٠^\circ + ح) = -$ قا ح ، قا $(٢٧٠^\circ + ح) =$ قتا ح

، ظتا $(٢٧٠^\circ + ح) = -$ ظا ح

فمثلاً جتا $٣٠٠^\circ =$ جتا $(٢٧٠^\circ + ٣٠^\circ) =$ جا $٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، ظا $٣١٥^\circ =$ ظا $(٢٧٠^\circ + ٤٥^\circ) = -$ ظتا $٤٥^\circ = - ١$

بند ١٣٢ — لمقارنة النسب المثلثية لزاويتين الفرق بينهما $= ٣٦٠^\circ$

نفرض ان احدى الزاويتين قدرها ح فلكى يكون الفرق ٣٦٠° يجب ان تكون الزاوية الثانية $= (٣٦٠^\circ + ح)$ أو $(٢ ط + ح)$

اذا رسمنا أى زاوية مثل ح ووقع الخط الدائر فى أى ربع من الارباع الاربعة ثم بعد ذلك دار هذا الخط دورة كاملة (٣٦٠°) كى تصير الزاوية $(٣٦٠^\circ + ح)$ فان الخط الدائر يأخذ وضعه الاول بعد ان حدد زاوية ح

ومن ذلك نستنتج ان النسب المثلثية للزاوية $(٣٦٠^\circ + ح)$ هى عين النسب المثلثية لزاوية ح

ويمكن التوسع فى هذه الخاصة بأن نقول انه باضافة أو فصل ٣٦٠° أو أى مكرر للمقدار ٣٦٠° الى أو من أى زاوية معلومة ينتج زاوية نسبها المثلثية عين النسب المثلثية للزاوية المفروضة

فمثلاً جا $١٧٦٥^\circ =$ جا $[٤ \times ٣٦٠^\circ + ٣٢٥^\circ] =$ جا ٣٢٥°

$=$ جا $(١٨٠^\circ + ١٤٥^\circ) = -$ جا ١٤٥°

$= -$ جا $(١٨٠^\circ - ٣٥^\circ) = -$ جا ٣٥°

، ظا $١١٩٠^\circ =$ ظا $(٣ \times ٣٦٠^\circ + ١١٠) =$ ظا ١١٠°

$=$ ظا $(٩٠^\circ + ٢٠^\circ) = -$ ظتا ٢٠°

، قتا $(- ١٤٦٥^\circ) = -$ قتا ١٤٦٥°

$= -$ قتا $(٤ \times ٣٦٠^\circ + ٢٥^\circ) = -$ قتا ٢٥°

(ملاحظة) يحسن استخدام هذا البند فى ايجاد النسب المثلثية للزوايا السالبة وذلك باضافة ٣٦٠° أو أى مكرر لهذا المقدار الى الزاوية المعلومة حتى يصير الناتج موجباً

فمثلا ظا $(- ٣٣٠^\circ) =$ ظا $(٣٦٠^\circ - ٣٣٠^\circ) =$ ظا $٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، جا $(- ٨٤٠^\circ) =$ جا $(٣ \times ٣٦٠^\circ - ٨٤٠^\circ)$ جا ٢٤٠°

$=$ جا $(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = -$ جا $٦٠^\circ = - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا $(- ١٣٠٥^\circ) =$ جتا $(٤ \times ٣٦٠^\circ - ١٣٠٥^\circ) =$ جتا ١٣٥°

$=$ جتا $(١٨٠^\circ - ٤٥^\circ) = -$ جتا $٤٥^\circ = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

بند ١٣٣ — أمثلة متنوعة

(مثال ١) اختصر الكمية الآتية

جا (١٨٠° — ح) ظا (٩٠° + ح) قتا (١٨٠° + ح)

(العمل) من حيث ان جا (١٨٠° — ح) = جا ح ، ظا (٩٠° + ح) = — ظتا ح

، قتا (١٨٠° + ح) = — قتا ح

يكون الوضع الاصلى = جا ح × (— ظتا ح) × (— قتا ح)

= جا ح . ظتا ح . (١ / جا ح) = ظتا ح

(مثال ٢) برهن على ان

ظتا (٩٠° — ح) — جا ح + ظتا (٩٠° + ح) = جا (٣٦٠° — ح)

(البرهان) الطرف الأيمن من هذه المتساوية = ظا ح — جا ح + (— ظا ح)

= ظا ح — جا ح — ظا ح

= — جا ح

ولكن جا (٣٦٠° — ح) = — جا ح

اذن يتحقق تساوى طرفى المتساوية وبذلك يثبت المطلوب

(تمارين ٣٦)

احسب المقادير الآتية

(١) قتا ١٣٥°
(٢) قا ٢٢٥°
(٣) ظتا ١٢٠°
(٤) ظا ٢١٠°
(٥) جا ١٥٠°
(٦) قتا ٣١٥°
(٧) جتا ٣٣٠°
(٨) قتا (— ٣٠°)
(٩) قا (— ١٣٥°)
(١٠) ظتا ٢٤٠°

(١١) ظا ٢٢٥°
(١٢) جتا (— ٣٣٠°)
(١٣) ظا (— ٣٠٠°)
(١٤) جا (— ٣٣٠°)
(١٥) قتا ٣/٤ ط
(١٦) قا ٢/٣ ط
(١٧) جتا ٥/٦ ط
(١٨) جا ٥/٣ ط
(١٩) ظتا ١١/٦ ط
(٢٠) ظا ٧/٦ ط

(٢١) قا (— ٢/٣ ط)
(٢٢) ظا (— ٣/٤ ط)
(٢٣) ظتا (— ٥/٤ ط)
(٢٤) قتا ٤٨٠°
(٢٥) قا ٩٦٠°
(٢٦) ظتا (— ٥٨٥°)
(٢٧) ظا ٦٩٠°
(٢٨) قتا ٤٩٥°
(٢٩) جا (— ٦٧٥°)
(٣٠) قتا ٩٣٠°

اختصر الكميات الآتية

(٣١) جا (١٨٠° + حـ) جتا (٩٠° − حـ)

(٣٢) جتا (١٨٠° − حـ) ظتا (٩٠° + حـ)

(٣٣) ظتا (١٨٠° + حـ) قا (١٨٠° − حـ)

(٣٤) ظا (٩٠° − حـ) قتا (٩٠° + حـ)

(٣٥) قتا (١٨٠° − حـ) قا (٩٠° + حـ) ظتا (٩٠° − حـ)

(٣٦) ظتا (٩٠° + حـ) ظا (١٨٠° + حـ) قا (٩٠° − حـ)

(٣٧) قتا (١٨٠° − حـ) قا (١٨٠° + حـ) ظا (٩٠° − حـ)

(٣٨) جا حـ + جا (٢ ط + حـ) + جا (٤ ط + حـ) + جا (− حـ)

(٣٩) جتا حـ + جتا (ط + حـ) + جتا (٢ ط + حـ) + جتا (− حـ)

(٤٠) ظا حـ + ظا (ط + حـ) + ظا (٢ ط + حـ) + ظا (٤ ط + حـ)

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(٤١) جا (٤٥° + حـ) = جتا (٤٥° − حـ)

(٤٢) ظا (٤٥° + حـ) ظا (٤٥° − حـ) = ١

(٤٣) جتا (٩٠° + حـ) − ظتا (٢٧٠° + حـ) − جا (١٨٠° + حـ) = ظا حـ

(٤٤) ظتا (٩٠° − حـ) − جا حـ + ظتا (٩٠° + حـ) = جا (٣٦٠° − حـ)

(٤٥) جتا ى + جتا (ط/٢ + ى) + جتا (ط + ى) + جتا (٣ط/٢ + ى) = ٠

(٤٦) جا ى + جا (ط/٤ + ى) + جا (٥ط/٤ + ى) + جا (٣ ط + ى) = ٠

(٤٧) جتا (ط/٢ + هـ) جتا (ط/٢ − هـ) − جا (ط/٢ + هـ) جا (ط/٢ − هـ) = − ١

(٤٨) جتا (٤٥° + ى) جتا (٤٥° − ى) − جا (٤٥° + ى) جا (٤٥° − ى) = ٠

(٤٩) جا (٤٥° + ى) جتا (٤٥° − ى) + جتا (٤٥° + ى) جا (٤٥° − ى) = ١

(٥٠) جا (٢ ط + حـ) جتا (٢ ط − حـ) + حتا (٢ ط + حـ) جا (٢ ط − حـ) = ٠

(٥١) جتا (٣٦٠° + حـ) جتا (٣٦٠° − حـ) − جا (٣٦٠° + حـ) جا (٣٦٠° − حـ) = ١

(٥٢) جتا حـ + جا (٢٧٠° + حـ) − جا (٢٧٠° − حـ) + جتا (١٨٠° + حـ) = ٠

(٥٣) قا (٢٧٠° − حـ) قا (٩٠° − حـ) − ظا (٢٧٠° − حـ) ظا (٩٠° + حـ) + ١ = ٠

(٥٤) ظتا حـ + ظا (١٨٠° + حـ) + ظا (٩٠° + حـ) + ظا (٣٦٠° − حـ) = ٠

(٥٥) − جا ٤٨٠° جتا ١٢٠° + جتا ٢٤٠° جا ١٢٠° = ٠

(٥٦) جتا ١٥٠° جتا ٤٢٠° + جا ٣٣٠° جا ٣٠٠° = ٠

(٥٧) حا ٧٨٠° جا ١٢٠° + جتا ١٢٠° حا ٣٩٠° = ½

(٥٨) جا ٦٠° جتا ٣٣٠° + جتا ١٢٠° جا ١٥٠° = − ١

(٥٩) جا ٤٢٠° جتا ٣٩٠° + جتا (— ٣٠٠°) جا (— ٣٣٠°) = ١

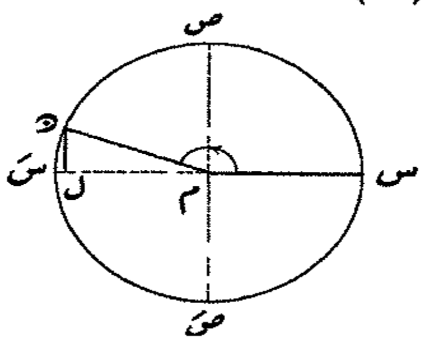
(٦٠) جتا ٥٧٠° جا ٥١٠° — جا ٣٣٠° جتا ٣٩٠ = ٠

(٦١) ظا ٢٢٥° ظتا ٤٠٥° + ظا ٧٦٥° ظتا ٦٧٥° = ٠

بند ١٣٤ — يتيسر الآن معرفة مقادير النسب المثلثية لأى زاوية مهما كان موضع ضلعها الدائر ويحسن أن نذكر بوجه خاص كيفية ايجاد مقادير النسب المثلثية للزاوية عند ما ينطبق ضلعها الدائر على أحد المحورين المكونين للارباع الأربعة

وقد سبق ان بينا فى الباب التاسع كيفية ايجاد مقادير النسب المثلثية للزاويتين ٠° ، ٩٠° والآن نشرح كيفية ايجاد مقادير النسب المثلثية للزوايا ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°

بند ١٣٥ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية ١٨٠° (ط)



(شكل ٧٦)

نفرض الزاوية س م ه (شكل ٧٦) التى يقرب مقدارها من الزاوية المستقيمة س م سَ وننزل من نقطة ه الضلع ه ل عموداً على م سَ ثم نفرض ان ه م يتحرك اتجاه م سَ فعند ما ينطبق عليه يكون مقدار الزاوية س م ه = ١٨٠° ويعدم مقدار العمود ه ل و ينطبق ه م على ل م فاذا فرض فى الحالة الاخيرة ان ه م = ١ يكون ل م = — ١ ، ه ل = ٠

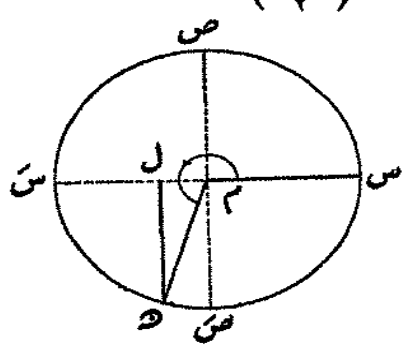
وعليه يكون جا ١٨٠° = جا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

، جتا ١٨٠° = جتا س م ه = $\frac{—١}{١}$ = — ١

، ظا ١٨٠° = ظا س م ه = $\frac{٠}{—١}$ = ٠

وكذا نبرهن على ان قتا ١٨٠° = ∞ ، قا ١٨٠° = — ١ ، ظتا ١٨٠° = — ∞

بند ١٣٦ — لايجاد مقادير النسب المثلثية لزاوية قدرها ٢٧٠° ($\frac{٣ط}{٢}$)



(شكل ٧٧)

نفرض الزاوية س م ه (شكل ٧٧) التى يقرب مقدارها من زاوية س م صَ المساوية الى ٢٧٠° وننزل من نقطة ه الضلع ه ل عموداً على م سَ ثم نفرض ان ه م يتحرك اتجاه م صَ فعند ما ينطبق عليه يكون مقدار الزاوية س م ه = ٢٧٠° ويعدم مقدار القاعدة ل م وينطبق العمود ه ل على ه م فاذا فرض فى الحالة الاخيرة ان ه م = ١ يكون ه ل = — ١ ، ل م = ٠

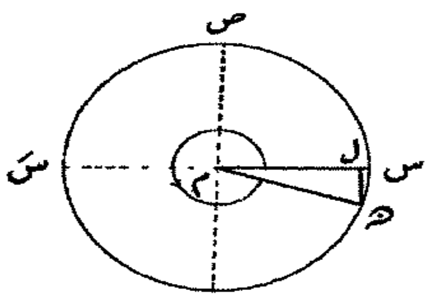
وعليه يكون جا ٢٧٠° = جا س م ه = $\frac{-١}{١}$ = − ١

، جتا ٢٧٠° = جتا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

، ظا ٢٧٠° = ظا س م ه = $\frac{-١}{٠}$ = ∞

وكذا نبرهن على ان قتا ٢٧٠° = − ١ ، قا ٢٧٠° = ∞ ، ظتا ٢٧٠° = ٠

بند ١٣٧ — لايجاد النسب المثلثية لزاوية قدرها ٣٦٠° (٢ ط)



(شكل ٧٨)

نفرض الزاوية س م ه (شكل ٧٨) التى يقرب مقدارها من ٣٦٠° وننزل من نقطة ه الضلع ه ل عموداً على م س ثم نفرض ان ه م يتحرك اتجاه م س فعند ما ينطبق عليه يكون مقدار الزاوية س م ه = ٣٦٠° ويعدم مقدار العمود ه ل وينطبق ه م على ل م فاذا فرض فى الحالة الأخيرة ان ه م = ١ يكون ل م = ١ ، ه ل = ٠

وعليه يكون جا ٣٦٠° = جا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

، جتا ٣٦٠° = جتا س م ه = $\frac{١}{١}$ = ١

، ظا ٣٦٠° = ظا س م ه = $\frac{٠}{١}$ = ٠

وكذا نبرهن على ان قتا ٣٦٠° = ∞ ، قا ٣٦٠° = ١ ، ظتا ٣٦٠° = ∞

(ملاحظة) يراعى ان النسب المثلثية للزاوية ٣٦٠° هى عين النسب المثلثية للزاوية ٠° وذلك لانه عند ما يتحرك الخط الدائر ٣٦٠° بأن يدور دورة كاملة يعود الى وضعه الاصلى كانه لم يتحرك من موضعه

بند ١٣٨ — والجدول الآتى يحتوى على مقادير النسب المثلثية لهذه الزوايا الفاصلة بين الارباع الاربعة

الزاوية	٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
جا =	٠	١	٠	− ١	٠
جتا =	١	٠	− ١	٠	١
ظا =	٠	∞	٠	∞	٠
ظتا =	∞	٠	∞	٠	∞
قا =	١	∞	− ١	∞	١
قتا =	∞	١	∞	− ١	∞
التقدير الدائري =	٠	ط/٢	ط	٣ط/٢	٢ ط

بند ١٣٩ — تطبيق قوانين الجمع والطرح على الزوايا التى ليست أقل من ٩٠°

اثبتنا فى الباب الثالث عشر صحة نظريات الجمع والطرح وكان البرهان وقتئذ قاصراً على الزوايا التى أقل من ٩٠° ومن حيث أنه يتيسر الآن ايجاد مقادير النسب المثلثية لاى زاوية مهما كان مقدارها فيسهل تطبيق قوانين الجمع والطرح على الزوايا التى ليست أقل من ٩٠°

فمثلاً اذا فرضت الزوايا ا ، ب ، (ا + ب) وكانت فى الربع الأول (أى ان كلاً منها حادة) كانت كل من الزاويتين (١٨٠° — ا) ، (١٨٠° — ب) فى الربع الثانى (أى ان كلاً منهما منفرجة) وكان مجموعهما زاوية فى الربع الرابع ويكون

جا {(١٨٠° — ا) + (١٨٠° — ب)}

= جا {٣٦٠° — (ا + ب)}

= — جا (ا + ب)

= — (جا ا جتا ب + جتا ا جا ب)

= جا ا (— جتا ب) + (— جتا ا) جا ب

= جا (١٨٠° — ا) جتا (١٨٠° — ب) + جتا (١٨٠° — ا) جا (١٨٠° — ب)

ومثلاً اذا فرضت الزوايا ا ، ب ، (ا − ب) وكانت فى الربع الأول (أى ان كلاً منها حادة) كانت الزاوية (١٨٠° + ا) فى الربع الثالث والزاوية (٢٧٠° + ب) فى الربع الرابع وكان الفرق بينهما زاوية فى الربع الأول ويكون

ظا {(٢٧٠° + ب) − (١٨٠° + ا)} = ظا {٩٠° − (ا − ب)} = ظتا (ا − ب)

$$= \frac{\text{١}}{\text{ظا (ا − ب)}} = \frac{\text{١ + ظا ا ظا ب}}{\text{ظا ا − ظا ب}}$$

$$= \frac{\text{− ظتا ب − ظا ا}}{\text{− ظا ا ظتا ب + ١}}$$

$$= \frac{\text{ظا (٢٧٠° + ب) − ظا (١٨٠° + ا)}}{\text{١ + ظا (٢٧٠° + ب) ظا (١٨٠° + ا)}}$$

بند ١٤٠ − ويمكن استنتاج قانون جتا (ا − ب) من قانون جا (ا + ب) بوضع (٩٠° − ا) بدل ا هكذا

جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب

اذن جا (٩٠° − ا + ب) = جا (٩٠° − ا) جتا ب + جتا (٩٠° − ا) جا ب

أى ان جا {٩٠° − (ا − ب)} = جا (٩٠° − ا) جتا ب + جتا (٩٠° − ا) جا ب

أو جتا (ا − ب) = جتا ا جتا ب + جا ا جا ب

وبطريقة مماثلة نستنتج القوانين الاربعة جا (ا ± ب) ، جتا (ا ± ب) بعضها من بعض

الباب العشرون

فى زوايا المثلث

بند ١٤١ — لكل مثلث ثلاث زوايا داخلة يقابلها ثلاثة أضلاع ويرمز عادة الى هذه الزوايا بالرموز ا ، ب ، حـ ويرمز الى طول الضلع الذى يقابل زاوية ا بالرمز ا َ وطول الضلع الذى يقابل زاوية ب بالرمز ب َ وطول الضلع الذى يقابل زاوية حـ بالرمز حـ َ

بند ١٤٢ — اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠° فبرهن على ان

جا (ب + حـ) = جا ا ، جتا (ب + حـ) = — جتا ا

(البرهان) ب + حـ = ١٨٠° — ا

فيكون جا (ب + حـ) = جا (١٨٠° — ا) = جا ا

، جتا (ب + حـ) = جتا (١٨° — ا) = — جتا ا وهوالمطلوب

بند ١٤٣ — اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠° فبرهن على أن

$$\text{جا}\,\frac{\text{ب + حـ}}{٢} = \text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{٢} \text{ ، } \text{جتا}\,\frac{\text{ب + حـ}}{٢} = \text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$$

(البرهان) $$\frac{\text{ا}}{٢} + \frac{\text{ب}}{٢} + \frac{\text{حـ}}{٢} = \frac{١٨٠^\circ}{٢} = ٩٠^\circ$$

فيكون $$\frac{\text{ب + حـ}}{٢} = ٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢}$$

ويكون $$\text{جا}\,\frac{\text{ب + حـ}}{٢} = \text{جا}\left(٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢}\right) = \text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$$

، $$\text{جتا}\,\frac{\text{ب + حـ}}{٢} = \text{جتا}\left(٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢}\right) = \text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$$ وهو المطلوب

بند ١٤٤ — اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠° فبرهن على ان

جا ٢ ا + جا ٢ ب + جا ٢ حـ = ٤ جا ا جا ب جا حـ

(البرهان) جا ٢ ب + جا ٢ حـ = ٢ جا (ب + حـ) جتا (ب — حـ)

= ٢ جا ا جتا (ب — حـ)

ولكن جا ٢ ا = ٢ جا ا جتا ا

= − ٢ جا ا جتا (ب + حـ)

فيكون جا ٢ ا + جا ٢ ب + جا ٢ حـ = ٢ جا ا { جتا (ب − حـ) − جتا (ب + حـ) }

= ٢ جا ا { ٢ جا ب جا حـ }

= ٤ جا ا جا ب جا حـ وهو المطلوب

بند ١٤٥ − اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠° فبرهن على ان

جتا ا + جتا ب + جتا حـ = ١ + ٤ جا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$

(البرهان) جتا ا + جتا ب = ٢ جتا $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{٢}}$

= ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{٢}}$

ولكن جتا حـ = ١ − ٢ جا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$

فيكون جتا ا + جتا ب + جتا حـ = ١ − ٢ جا$^{\text{٢}}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ + ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{٢}}$

= ١ + ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{٢}}$ − جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$)

= ١ + ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{٢}}$ − جتا $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{٢}}$)

= ١ + ٢ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ (٢ جا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$)

= ١ + ٤ جا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ وهو المطلوب

(تمارين ٣٧)

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠°

(١) جا ا + جا ب + جا حـ = ٤ جتا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$

(٢) جا ا + جا ب − جا حـ = ٤ جا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$

(٣) جتا ا + جتا ب − جتا حـ = ٤ جتا $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}$ − ١

(٤) جتا ٢ ا + جتا ٢ ب + جتا ٢ حـ = − ١ − ٤ جتا ا جتا ب جتا حـ

(٥) جا ٢ ا + جا ٢ ب − جا ٢ حـ = ٤ جتا ا جتا ب جا حـ

(٦) جتا ٢ ا + جتا ٢ ب − جتا ٢ حـ = ١ − ٤ جا ا جا ب جتا حـ

(٧) ظا ا − ظتا ب = جتا حـ قا ا قتا ب

(٨) $\dfrac{\text{جا ا} - \text{جا ب}}{\text{جا ا} + \text{جا ب}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢}\,\text{ظا}\,\dfrac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$

(٩) $\dfrac{\text{جا ٣ ب} - \text{جا ٣ حـ}}{\text{جتا ٣ حـ} - \text{جتا ٣ ب}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{٣ ا}}{٢}$

(١٠) $\text{جا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} + \text{جا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢} + \text{جا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢} = ١ + ٤\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} + \text{ا}}{٤}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} + \text{ب}}{٤}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} + \text{حـ}}{٤}$

(١١) $\text{جتا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} + \text{جتا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢} + \text{جا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢} = ٤\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} - \text{ا}}{٤}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} - \text{ب}}{٤}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ط} - \text{حـ}}{٤}$

(١٢) جا (ب + حـ − ا) + جا (حـ + ا − ب) + جا (ا + ب − حـ)
− جا (ا + ب + حـ) = ٤ جا ا جا ب جا حـ

(١٣) $\text{جا}\,\dfrac{\text{ب} + \text{حـ} - \text{ا}}{٢} + \text{جا}\,\dfrac{\text{حـ} + \text{ا} - \text{ب}}{٢} + \text{جا}\,\dfrac{\text{ا} + \text{ب} - \text{حـ}}{٢} - ١$

$= ٤\,\text{جا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢}\,\text{جا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢}$

(١٤) جا^{٢} ا + جا^{٢} ب + جا^{٢} حـ = ٢ (١ + جتا ا جتا ب جتا حـ)

(١٥) جتا^{٢} ا + جتا^{٢} ب + جتا^{٢} حـ = ١ − ٢ جتا ا جتا ب جتا حـ

(١٦) جا^{٢} ا + جا^{٢} ب − جا^{٢} حـ = ٢ جا ا جا ب جتا حـ

(١٧) جتا^{٢} ا + جتا^{٢} ب − جتا^{٢} حـ = ١ − ٢ جا ا جا ب جتا حـ

(١٨) جا^{٢} ٢ ا + جا^{٢} ٢ ب + جا^{٢} ٢ حـ = ٢ (١ − جتا ٢ ا جتا ٢ ب جتا ٢ حـ)

(١٩) جتا^{٢} ٢ ا + جتا^{٢} ٢ ب + جتا^{٢} ٢ حـ = ١ + ٢ جتا ٢ ا جتا ٢ ب جتا ٢ حـ

(٢٠) $\text{جا}^{٢}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} - \text{جا}^{٢}\,\dfrac{\text{ب}}{٢} + \text{جا}^{٢}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢} = ١ - ٢\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢}\,\text{جا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢}$

(٢١) $\text{جتا}^{٢}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\,\dfrac{\text{ب}}{٢} - \text{جتا}^{٢}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢} = ٢\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢}$

(٢٢) ظا ا + ظا ب + ظا حـ = ظا ا ظا ب ظا حـ

(٢٣) ظا ٢ ا + ظا ٢ ب + ظا ٢ حـ = ظا ٢ ا ظا ٢ ب ظا ٢ حـ

(٢٤) $\text{ظا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢}\,\text{ظا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢} + \text{ظا}\,\dfrac{\text{ب}}{٢}\,\text{ظا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢} + \text{ظا}\,\dfrac{\text{حـ}}{٢}\,\text{ظا}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} = ١$

بند ١٤٦ — وهناك نوع آخر من المسائل الخاصة بزوايا المثلث وهذه المسائل الجديدة عكس المسائل المتقدمة اذ هى تبحث فى تحويل كية مركبة من حاصل ضرب الجيوب وجيوب التمام الى مجموع جبرى

(مثال) اذا كان ا + ب + حـ = ١٨٠° فبرهن على ان

٤ جا ا جتا ب جا حـ = ١ − جتا ٢ ا + جتا ٢ ب − جتا ٢ حـ

(البرهان) ٤ جا ا جتا ب جا حـ = ٢ جا ا (٢ جتا ب جا حـ)

= ٢ جا ا { جا (ب + حـ) − جا (ب − حـ) }

= ٢ جا ا { جا ا − جا (ب − حـ) }

= ٢ جا^{٢} ا − ٢ جا ا جا (ب − حـ)

= ٢ جا^{٢} ا − ٢ جا (ب + حـ) جا (ب − حـ)

= ١ − جتا ٢ ا − (جتا ٢ حـ − جتا ٢ ب)

= ١ − جتا ٢ ا + جتا ٢ ب − جتا ٢ حـ

وهو المطلوب

(تمارين ٣٨)

حول كلاً من الكيات الآتية الى مجموع جبرى بفرض ان ا + ب + حـ = ١٨٠°

(١) ٤ جا ا جا ب جا حـ　　(٢) ٤ جا ا جا ب جتا حـ

(٣) ٤ جا ا جتا ب جتا حـ　　(٤) ٤ جتا ا جتا ب جتا حـ

(٥) ٤ جا $\frac{ا}{٢}$ جا $\frac{ب}{٢}$ جا $\frac{حـ}{٢}$　　(٦) ٤ جا $\frac{ا}{٢}$ جا $\frac{ب}{٢}$ جتا $\frac{حـ}{٢}$

(٧) ٤ جا $\frac{ا}{٢}$ جتا $\frac{ب}{٢}$ جتا $\frac{حـ}{٢}$　　(٨) ٤ جتا $\frac{ا}{٢}$ جتا $\frac{ب}{٢}$ جتا $\frac{حـ}{٢}$

الباب الحادى والعشرون

فى اللوغاريتمات

بند ١٤٧ — اذا فرض أن $\text{ح}^{\text{س}} = \text{ن}$ يكون الاس س لوغاريتم العدد ن للاساس ح يكتب الوضع اللوغاريتمى هكذا

$$\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن} = \text{س}$$

تعريف) لوغاريتم أى عدد لاساس معلوم هو الاس الذى يرفع اليه هذا الاساس لينتج العدد المفروض

فمثلاً $\text{لو}_{٣}\,٩ = ٢$ لأن $٣^{٢} = ٩$

، $\text{لو}_{٤}\,٦٤ = ٣$ « $٤^{٣} = ٦٤$

، $\text{لو}_{٥}\,\frac{١}{٢٥} = -٢$ « $\frac{١}{٢٥} = ٥^{-٢}$

بند ١٤٨ — نظرية (١) لوغاريتم الواحد لأى أساس صفر

وذلك لأن المتساوية ($\text{ح}^{٠} = ١$) حقيقية مهما كان مقدار ح

بند ١٤٩ — نظرية (٢) لوغاريتم حاصل ضرب عددين أو جملة أعداد يساوى مجموع لوغاريتمى ذين العددين أو مجموع لوغاريتمات هذه الأعداد

فاذا فرض العددان م ، ن

يكون $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م ن} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} + \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن}$

(البرهان) نفرض ان $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} = \text{س}$ وان $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن} = \text{ص}$

فيكون $\text{ح}^{\text{س}} = \text{م}$ ، $\text{ح}^{\text{ص}} = \text{ن}$

، $\text{م ن} = \text{ح}^{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{ص}} = \text{ح}^{\text{س} + \text{ص}}$

، $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م ن} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ح}^{\text{س} + \text{ص}} = \text{س} + \text{ص}$

$= \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} + \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن}$ وهو المطلوب

وكذا نبرهن على أن $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}\,\text{ن}\,\text{ل} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} + \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن} + \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ل}$

بند **١٥٠** — نظرية (٣) لوغاريتم خارج قسمة عـددين يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصاً لوغاريتم المقسوم عليه

فاذا فرض العددان م ، ن

يكون $$\text{لو}_{\text{ح}}\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} - \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن}$$

(البرهان) نفرض أن $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} = \text{س}$ وأن $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن} = \text{ص}$

فيكون $$\text{ح}^{\text{س}} = \text{م} \quad ، \quad \text{ح}^{\text{ص}} = \text{ن}$$

، $$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\text{ح}^{\text{س}}}{\text{ح}^{\text{ص}}} = \text{ح}^{\text{س} - \text{ص}}$$

، $$\text{لو}_{\text{ح}}\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ح}^{\text{س} - \text{ص}} = \text{س} - \text{ص}$$

، $$= \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} - \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ن}$$ وهو المطلوب

بند **١٥١** — نظرية (٤) لوغاريتم قوة أى عدد يساوى حاصل ضرب درجة القوة فى لوغاريتم العدد

فاذا فرض العدد $\text{م}^{\text{ه}}$

يكون $$\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}^{\text{ه}} = \text{ه}\,\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}$$

(البرهان) نفرض ان $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} = \text{س}$

فيكون $$\text{ح}^{\text{س}} = \text{م}$$

، $$\text{م}^{\text{ه}} = (\text{ح}^{\text{س}})^{\text{ه}} = \text{ح}^{\text{ه}\,\text{س}}$$

، $$\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}^{\text{ه}} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{ح}^{\text{ه}\,\text{س}} = \text{ه}\,\text{س}$$

$$= \text{ه}\,\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}$$ وهو المطلوب

بند **١٥٢** — نظرية (٥) لوغاريتم جذر أى عدد يساوى خارج قسمة لوغاريتم العدد على دليل الجذر

فاذا فرض العدد $\sqrt[\text{هـ}]{\text{م}}$

يكون $\text{لو}_{\text{ح}} \sqrt[\text{هـ}]{\text{م}} = \frac{\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}}{\text{هـ}}$

(البرهان) نفرض ان $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م} = \text{س}$

فيكون $\text{ح}^{\text{س}} = \text{م}$

، $\sqrt[\text{هـ}]{\text{م}} = \sqrt[\text{هـ}]{\text{ح}^{\text{س}}} = \text{ح}^{\frac{\text{س}}{\text{هـ}}}$

، $\text{لو}_{\text{ح}} \sqrt[\text{هـ}]{\text{م}} = \text{لو}_{\text{ح}}\, \text{ح}^{\frac{\text{س}}{\text{هـ}}} = \frac{\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \frac{\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{م}}{\text{هـ}}$ وهو المطلوب

بند ١٥٣ — أمثلة محلولة للتطبيق على النظريات الاساسية للوغاريتمات

(مثال ١) ما لوغاريتما العددين ٠,١٢٥ ، $\sqrt[٣]{٦٤}$ للاساس ٢

(الحل) $٠{,}١٢٥ = \frac{١٢٥}{١٠٠٠} = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢^{٣}} = ٢^{-٣}$

فيكون $\text{لو}_{٢}\, ٠{,}١٢٥ = -٣$

والعدد $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤ = ٢^{٢}$

فيكون $\text{لو}_{٢} \sqrt[٣]{٦٤} = ٢$

(مثال ٢) اذا كان $\text{لو}_{١٠}\, ٢ = ٠{,}٣٠١٠$ ، $\text{لو}_{١٠}\, ٣ = ٠{,}٤٧٧١$ فاوجد $\text{لو}_{١٠}\, ٣٦$

(الحل) $\text{لو}_{١٠}\, ٣٦ = \text{لو}_{١٠} (٤ \times ٩) = \text{لو}_{١٠} (٢^{٢} \times ٣^{٢})$

$= \text{لو}_{١٠} (٢^{٢}) + \text{لو}_{١٠} (٣^{٢})$

$= ٢\,\text{لو}_{١٠}\, ٢ + ٢\,\text{لو}_{١٠}\, ٣$

$= ٢ \times ٠{,}٣٠١٠ + ٢ \times ٠{,}٤٧٧١$

$= ٠{,}٦٠٢٠ + ٠{,}٩٥٤٢ = \underline{\underline{١{,}٥٥٦٢}}$

(تمارين ٣٩)

(١) أوجد لوغاريتمات المقادير $\text{حـ}^{٤}$ ، $\text{حـ}^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{\text{حـ}^{٤}}$ ، $\frac{١}{\text{حـ}^{٥}}$ للاساس حـ

(٢) أوجد لوغاريتمات الأعداد ٨١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ للاساس ٣

(٣) أوجد لوغاريتمات الأعداد ٨ ، $\sqrt[٣]{١٦}$ ، $\sqrt[٤]{٠٫٥}$ للاساس ٤

(٤) أوجد مقادير

$\text{لو}_{٢}\,٠٫٥$ ولو$_{٣}$ ٢٤٣ ولو$_{٥}$ ٠٫٠٤ ولو$_{٢٧}$ ٣ ولو$_{٨}$ ٢ ولو$_{١٠٠}$ ١٠ ولو$_{ى}$ $\text{ى}^{\frac{٢}{٥}}$ ولو$_{س}$ $\sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}}}$ ولو$_{ص}$ $\frac{١}{\text{ص}^{٢}}$

أوجد مقادير الكميات الآتية اذا علم ان

$\text{لو}_{١٠}\,٢ = ٠٫٣٠١٠$ ولو$_{١٠}$ ٣ = ٠٫٤٧٧١ ولو$_{١٠}$ ٧ = ٠٫٨٤٥١

(٥) لو$_{١٠}$ ١٦ ولو$_{١٠}$ ٤٢

(٦) لو$_{١٠}$ ٤٩ ولو$_{١٠}$ ٦٣

(٧) لو$_{١٠}$ ٣٠٠ ولو$_{١٠}$ ٧٠

(٨) لو$_{١٠}$ ٥ ولو$_{١٠}$ ٥٠

(٩) لو$_{١٠}$ $(\sqrt{٦١} \times \sqrt[٣]{٧} \times \sqrt[٤]{٩})$

(١٠) لو$_{١٠}$ $\frac{٦٣}{\frac{١٠}{\sqrt{٢}}}$

الباب الثانى والعشرون

فى اللوغاريتمات العادية وكيفية استعمال جداولها

بند ١٥٤ — اللوغاريتمات العادية محسوبة على مقتضى الاساس ١٠ وأول من حسب هذه اللوغاريتمات هنرى بريجز (Henry Briggs) سنة ١٦١٥ ميلادية بناء على توصية نبير (Napier) له ويقال للوغاريتمات المحسوبة على هذا الاساس اللوغاوبتمات البريجزية (نسبة الى الرجل بريجز الذى أدخلها)

بند ١٥٥ — فى اللوغاريتمات العادية تكون لوغاريتمات الاعداد التى هى قوى للعدد ١٠ أعداداً صحيحة فمثلاً

لو$_{١٠}$١٠٠٠ = ٣ لان ١٠^{٣} = ١٠٠٠	لو$_{١٠}$٠٫١ = −١ لان ١٠$^{-١}$ = $\frac{١}{١٠}$
لو$_{١٠}$١٠٠ = ٢ « ١٠^{٢} = ١٠٠	لو$_{١٠}$٠٫٠١ = −٢ « ١٠$^{-٢}$ = $\frac{١}{١٠٠}$
لو$_{١٠}$١٠ = ١ « ١٠^{١} = ١٠	لو$_{١٠}$٠٫٠٠١ = −٣ « ١٠$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٠٠٠}$
لو$_{١٠}$١ = ٠ « ١٠^{٠} = ١	لو$_{١٠}$٠٫٠٠٠١ = −٤ « ١٠$^{-٤}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠}$

بند ١٥٦ — فى اللوغاريتمات العادية تكون لوغاريتمات الاعداد التى ليست قوى للعدد ١٠ مركبة من عدد صحيح ومن كسر عشرى ويقال للعدد الصحيح العدد البيانى وللكسر الجزء العشرى

من حيث ان الاعداد المركبة من ثلاثة أرقام محصورة بين ١٠٠ و ١٠٠٠ فلوغاريتم اى عدد مركب من ثلاثة ارقام اكبر من ٢ وأصغر من ٣ أى انه = ٢ + كسراً

ومن حيث ان الاعداد المركبة من رقمين محصورة بين ١٠ و ١٠٠ فلوغاريتم اى عدد مركب من رقمين اكبر من ١ وأصغر ٢ اى انه = ١ + كسراً

ومن حيث ان الاعداد المركبة من رقم واحد محصورة بين ١ و ١٠ فلوغاريتم اى عدد ذى رقم واحد اكبر من صفر وأصغر من ١ اى انه = ٠ + كسراً

وعلى هذا المنوال يكون لوغاريتم اى عدد محصور بين ٠٫١ و ١ اكبر من — ١ وأقل من صفر اى انه = — ١ + كسراً

ويكون لوغاريتم اى عدد محصور بين ٠٫١ و ٠٫٠١ اكبر من — ٢ وأقل من — ١ اى انه = — ٢ + كسراً

ويكون لوغاريتم أى عدد محصور بين ٠٫٠١ و ٠٫٠٠١ اكبر من — ٣ وأقل من — ٢ أى انه = — ٣ + كسراً

قاعدة (١) العدد البيانى من لوغاريتم أى عدد اكبر من الواحد يكون موجباً ويساوى عدد أرقامه الصحيحة ناقصاً واحداً

فالجزء البيانى من لوغاريتم ٦٣٤٥٠ هو ٤
« « « « ٦٣٤٫٥ « ٢
« « « « ٦٫٣٤٥ « ٠

قاعدة (٢) العدد البيانى من لوغاريتم أى عدد أصغر من الواحد يكون سالباً ويساوى عدد الأصفار التى تلى الشرطة العشرية مباشرة مضافاً اليه واحد

فالجزء البيانى من لوغاريتم ٠٫٦٣٤٥ هو $\bar{١}$
« « « « ٠٫٠٠٦٣٤٥ « $\bar{٣}$
« « « « ٠٫٠٠٠٠٦٣٤٥ « $\bar{٥}$

(تنبيه) عند ما يكون العدد البيانى سالباً تكتب العلامة (—) فوق العدد البيانى مثل $\bar{٢}$

بند ١٥٧ — الأعداد المركبة من أرقام متحدة ذات ترتيب واحد ولا تختلف الا بوضع العلامة العشرية تكون لوغاريتماتها متحدة فى الجزء العشرى ومختلفة فى العدد البيانى

فاذا فرض ان لو ٤٫٦٣ = ٠٫٦٦٥٦

يكون الجزء العشرى لكل من لوغاريتمات الاعداد ٠٫٠٤٦٣ و ٤٦٫٣ و ٤٦٣٠ هو ٠٫٦٦٥٦ وذلك

لأن لو ٠٫٠٤٦٣ = لو (٤٫٦٣ × ١٠$^{-٢}$) = ٠٫٦٦٥٦ — ٢ = $\bar{٢}$٫٦٦٥٦
و لو ٤٦٫٣ = لو (٤٫٦٣ × ١٠) = ٠٫٦٦٥٦ + ١ = ١٫٦٦٥٦
و لو ٤٦٣٠ = لو (٤٫٦٣ × ١٠^{٣}) = ٠٫٦٦٥٦ + ٣ = ٣٫٦٦٥٦

بند ١٥٨ — اذا كانت جداول لوغاريتمات الاعداد محسوبة لاساس معلوم مثل ح وأريد ايجاد لوغاريتم أى عدد لاساس آخر مثل ء تقسم لوغاريتم العدد للاساس ح على لوغاريتم الاساس ء (بصفته عدداً) للاساس ح أيضاً فينتج اللوغاريتم المطلوب

فاذا فرض ان لو$_{ح}$ م = ل وأريد ايجاد لو$_{ء}$ م نقول أن

$$\text{لو}_{ء}\ \text{م} = \frac{\text{لو}_{ح}\ \text{م}}{\text{لو}_{ح}\ \text{ء}}$$

(البرهان) نفرض ان $\text{لو}_{\text{ى}}\,\text{م} = \text{س}$

فيكون $\text{ى}^{\text{س}} = \text{م}$

و بأخذ لوغاريتمى طرفى المتساوية للاساس حـ

يكون $\text{لو}_{\text{حـ}}\,(\text{ى}^{\text{س}}) = \text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{م}$

أى ان $\text{س}\,\text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{ى} = \text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{م}$

و يكون $$\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{م}}{\text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{ى}}$$

أى ان $$\text{لو}_{\text{ى}}\,\text{م} = \frac{\text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{م}}{\text{لو}_{\text{حـ}}\,\text{ى}}$$ وهو المطلوب

بند ١٥٩ — أمثلة محلولة للتطبيق على الخواص الاساسية للوغاريتمات

(مثال ١) ما عدد أرقام الجزء الصحيح للعدد الذى لوغاريتمه ٣,٤٢٨٤

(الحل) من حيث ان العدد البيانى الموجب من لوغاريتم أى عدد يساوى عدد أرقامه الصحيحة ناقصاً واحداً يكون عدد أرقام الجزء الصحيح للعدد المعلوم لوغاريتمه = ٣ + ١ = ٤

(مثال ٢) اذا كان $\text{لو}_{١٠}\,٣ = ٠,٤٧٧١$ فا عدد أرقام $٣^{١٥}$

(الحل) نفرض ان $\text{س} = ٣^{١٥}$

فيكون $\text{لو}\,\text{س} = \text{لو}\,٣^{١٥} = ١٥\,\text{لو}\,٣$

$= ١٥ \times ٠,٤٧٧١ = \underline{\underline{٧,١٥٦٥}}$

فن حيث ان العدد البيانى من اللوغاريتم هو ٧ يكون عدد الارقام الصحيحة فى $٣^{١٥}$ هو ٨

(مثال ٣) اذا كان لو ٤٦٩,١ = ٢,٦٧١٣ فا هو العدد الذى لوغاريتمه $\bar{٣},٦٧١٣$

(الحل) من حيث ان $\bar{٣},٦٧١٣ = ٠,٦٧١٣ - ٣$

يكون $\bar{٣},٦٧١٣ = \text{لو}\,(٤,٦٩١ \times ١٠^{-٣})$

$= \text{لو}\,٠,٠٠٤٦٩١$

اذن ٠,٠٠٤٦٩١ هو العدد المعلوم لوغاريتمه

(مثال ٤) كيف تحول اللوغاريتمات التى أساسها ٤ الى لوغاريتمات أساسها ٦٤
(الحل) نفرض عدداً مثل م ونفرض ان لوغاريتمه للاساس ٤ = ه

فيكون $$\text{لو}_{٦٤}\,\text{م} = \frac{\text{ه}}{\text{لو}_{٤}\,٦٤} = \frac{\text{ه}}{٣}$$

ومن ذلك نستنتج انه بقسمة لوغاريتم أى عدد للاساس ٤ على ٣ ينتج لوغاريتم العدد للاساس ٦٤

(تمارين ٤٠)

(١) ما هى الاعداد البيانية من لوغاريتمات الاعداد الآتية بفرض ان الاساس ١٠
٢٩٠٣ ، ٣٦١٫١٧ ، ١٩٠٩٠٠ ، ٠٫٠٠٠٠٦١٢ ، ٠٫٠٥٦ ، ٧٫٣٢٤

(٢) ما عدد أرقام الاجزاء الصحيحة للاعداد التى لوغاريتماتها ٣٫٥٦٣٥ ، ٠٫٦٩٧٢ ، ٥٫٩٣٠٩

(٣) اذا كان لو ٢ = ٠٫٣٠١٠ فأوجد عدد الارقام الصحيحة فى كل من المقادير الآتية
٢^{٢٠} ، ٢^{٣٢} ، ٢^{٤٠}

(٤) اذا كان لو ٣ = ٠٫٤٧٧١ فأوجد موضع أول رقم معنوى بعد الشرطة العشرية فى كل من الاعداد ٣$^{-٩}$ ، ٣$^{-١٠}$ ، ٣$^{-٢١}$

(٥) اذا كان لو ٦٫٤٧٨ = ٠٫٨١١٤ فما هى لوغاريتمات الاعداد ٠٫٦٤٧٨ ، ٠٫٠٠٠٦٤٧٨ ، ٦٤٧٫٨

(٦) اذا كان لو ٧٩٫٦٢ = ١٫٩٠١٠ فما هى الاعداد التى لوغاريتماتها ٠٫٩٠١٠ ، ٥٫٩٠١٠ ، $\bar{٤}$٫٩٠١٠

(٧) كيف تحول اللوغاريتمات التى أساسها ٢ الى أخرى أساسها ٨

(٨) كيف تحول اللوغاريتمات التى أساسها ٢٥ الى أخرى أساسها ٥

(٩) اذا كان لو$_{١٠}$ ٧ = ٠٫٨٤٥١ فأوجد لو$_{٧}$ ١٠

(١٠) اذا كان لو$_{١٠}$ ٢ = ٠٫٣٠١٠ فأوجد لو$_{٢}$ ١٠ ، لو$_{٨}$ ١٠ ، لو$_{٣٢}$ ١٠

بند ١٦٠ — فى البحث عن لوغاريتمات الاعداد التى ليست قوى للعدد ١٠

تقدم ان لوغاريتمات الاعداد التى ليست قوى للعدد ١٠ تتركب من عدد صحيح ومن جزء عشرى ويستدل على العدد الصحيح من اللوغاريتم بمجرد معاينة الارقام الصحيحة للعدد اذا كان أكبر من الواحد ومعاينة عدد الاصفار التى تلى الشرطة العشرية مباشرة اذا كان أصغر من الواحد وقد سبق

الكلام على معرفة العدد البيانى تفصيلياً ببند ١٥٦

وأما الجزء العشرى من اللوغاريتم فيستدل عليه بواسطة جدول مرتب بكيفية يتيسر بها ايجاد الاجزاء العشرية للوغاريتمات الاعداد التى بين ١ ، ١٠٠٠٠ ويسمى هذا الجدول بجدول لوغاريتمات الاعداد

بند ١٦١ — فى كيفية استعمال جدول لوغاريتمات الاعداد

من حيث ان الجدول محسوب للوغاريتمات الاعداد التى بين ١ ، ١٠٠٠٠ يتأتى أن يكون العدد المراد ايجاد لوغاريتمه مركباً من رقم واحد أو من رقمين أو من ثلاثة أرقام أو من أربعة ولبيان كيفية البحث عن الجزء العشرى من الجدول نمثل بالامثلة الآتية فنقول

(مثال ١) أوجد الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨

(الطريقة) لذلك نبحث عن العدد ٨٠ فى الجدول فى الصف الرأسى الاول ونبحث عن (٠)

											الفروق		
	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٣٢١	٦٥٤	٩٨٧
٨٠	٩٠٣١	٩٠٣٦	٩٠٤٢	٩٠٤٧	٩٠٥٣	٩٠٥٨	٩٠٦٣	٩٠٦٩	٩٠٧٤	٩٠٧٩	٢١١	٣٣٢	٥٤٤

فى الصف الافقى الاول من الصفحة ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٨٠ والصف الرأسى المبدوء بصفر فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٩٠٣١و٠ فيكون هو الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨

(مثال ٢) أوجد الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٥و٨

(الطريقة) لذلك نبحث عن العدد ٨٥ فى الجدول فى الصف الرأسى الاول ونبحث عن (٠)

											الفروق		
	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٣٢١	٦٥٤	٩٨٧
٨٥	٩٢٩٤	٩٢٩٩	٩٣٠٤	٩٣٠٩	٩٣١٥	٩٣٢٠	٩٣٢٥	٩٣٣٠	٩٣٣٥	٩٣٤٠	٢١١	٣٣٢	٥٤٤

فى الصف الافقى الاول من الصفحة ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٨٥ والصف الرأسى المبدوء بصفر فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٩٢٩٤و٠ فيكون هو الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٥و٨

(مثال ٣) أوجد الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨٥٦

(الطريقة) لذلك نبحث عن العدد المركب من الرقمين الاولين من يسار هذا العدد (وهو ٨٥) فى الجدول فى الصف الرأسى الاول ونبحث عن الرقم الثالث ٦ فى الصف الافقى الاول من الصفحة ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٨٥ والصف الرأسى المبدوء برقم ٦ فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٩٣٢٥و٠ فيكون هو الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨٥٦

(مثال ٤) أوجد الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨٥٦٢

(الطريقة) لذلك نبحث عن الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٨٥٦ كما فى المثال الثالث فنجد أنه ٠٫٩٣٢٥ ثم نبحث عن العدد ٢ فى الصف الافقى الاول من اعمدة الفروق ونتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٨٥ والصف الرأسى المبدوء بالفرق ٢ فنجد فى متقاطع هذين الصفين ١ فيكون هو العدد الذى تلزم اضافته الى ٩٣٢٥ لينتج الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨٥٦٢

وعلى ذلك يكون ٩٣٢٥ + ١ (أى ٠٫٩٣٢٦) هو الجزء العشرى من لوغاريتم العدد ٨٥٦٢

بند ١٦٢ — لايجاد العدد المقابل للوغاريتم معلوم

يمكن الاستدلال على عدد أرقام العدد المعلوم لوغاريتمه باضافة ١ الى العدد البيانى للوغاريتم اذا كان العدد البيانى موجباً ويمكن الاستدلال على عدد الاصفار التى تلى الشرطة العشرية للعدد المعلوم لوغاريتمه بطرح ١ من العدد البيانى اذا كان العدد البيانى سالباً

وأما نفس الارقام المعنوية المكونة للعدد فيستدل عليها بواسطة الجزء العشرى للوغاريتم من جدول معد لهذا الغرض يسمى جدول الاعداد المقابلة للوغاريتمات وطريقة البحث فى هذا الجدول تماثل طريقة البحث فى جدول اللوغاريتمات وللتمثيل نقول

(مثال) أوجد العدد الذى لوغاريتمه هو ٢٫٠٦٧٤

(الطريقة) لذلك نبحث عن ٠٫٠٦ فى الجدول فى الصف الرأسى الاول ونبحث عن الرقم العشرى الثالث ٧ فى الصف الافقى الاول من الصفحة ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٠٫٠٦

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠٫٠٦	١١٤٨	١١٥١	١١٥٣	١١٥٦	١١٥٩	١١٦١	١١٦٤	١١٦٧	١١٦٩	١١٧٢	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٢

والصف الرأسى المبدوء بالعدد ٧ فنجد فى متقاطع هذين الصفين ١١٦٧ ثم نبحث عن ٤ فى الصف الافقى الاول من اعمدة الفروق ونتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٠٫٠٦ والصف الرأسى المبدوء بالفرق ٤ فنجد فى متقاطع هذين الصفين ١ فيكون هو العدد الذى تلزم اضافته الى ١١٦٧ لتنتج الارقام المكونة للعدد المطلوب

وعلى ذلك تكون ارقام العدد الجارى البحث عنه هى ١١٦٧ + ١ = ١١٦٨

ومن حيث ان العدد البيانى للوغاريتم هو ٢ يكون عدد أرقامه الصحيحة ٣ ويكون العدد الذى لوغاريتمه ٢٫٠٦٧٤ هو ١١٦٫٨

بند ١٦٣ — أمثلة عامة للتطبيق على استعمال جدول لوغاريتمات الاعداد وجدول الاعداد المقابلة للوغاريتمات

(مثال ١) أوجد مقدار $\frac{٨٢٫٣٣ \times ٣٧٫٢١}{٠٫٤١٢٩}$

(الحل) نفرض ان $س = \frac{٣٧٫٢١ \times ٨٢٫٣٣}{٠٫٤٧٢٩}$

فيكون لو س = لو ٣٧٫٢١ + لو ٨٢٫٣٣ − لو ٠٫٤٧٢٩

أى ان لو س = ١٫٥٧٠٦ + ١٫٩١٥٦ − ($\overline{١}$٫٦٧٤٧)

= ٣٫٤٨٦٢ − (٠٫٦٧٤٧ − ١)

= ٣٫٤٨٦٢ + ٠٫٣٢٥٣

= ٣٫٨١١٥

وعلى ذلك يكون س = $\underline{\underline{٦٤٧٩}}$ وهو المطلوب

(مثال ٢) أوجد مقدار $(٥٫٧٢٦)^{٨}$

(الحل) نفرض ان $س = (٥٫٧٢٦)^{٨}$

فيكون لو س = ٨ لو ٥٫٧٢٦ = ٨ × ٠٫٧٥٧٩

= ٦٫٠٦٣٢

وعلى ذلك يكون س = $\underline{\underline{١١٥٧٠٠٠}}$ وهو المطلوب

(تمارين ٤١)

أجر العمليات الآتية بواسطة اللوغاريتمات

(١) ٨٢٣٫١ × ٧٫٢٠٣

(٢) ٥٧٫٦٧ × ٨١٫٣٢ × ٠٫٠٠٣٤٥

(٣) $\frac{٨١٥٫٩ \times ٠٫٠٠٣٢٦}{٠٫٧١٨٥}$

(٤) $\frac{٥٫٢٧٩ \times ٠٫٠٧٢٠١ \times ٥٩٨٫٥}{٨٢٫٣٤}$

(٥) $(٥٢٣٫٧)^{\frac{٢}{٧}}$

(٦) $(٠٫٠٢٣٥٧)^{\frac{١}{٩}}$

(٧) $\sqrt[٣]{٧٨٩٢} \times \sqrt[٥]{٨٧٫٤٥}$

(٨) $(٣٫١٤٦)^{\frac{١}{٧}} \times (٧٢٫٥٤)^{\frac{٢}{٥}} \times (٨٢٣٫٩)^{\frac{١}{٣}}$

(٩) $\sqrt{٧٢٤٫٨} \times \sqrt[٥]{٧٢٫٩٦} \times \sqrt{٨٧٥٣}$

(١٠) $\frac{(٩٧٫٦٢)^{\frac{٢}{٣}} \times (٨٢٫٧٥)^{\frac{١}{٣}} \times (٣٢٫٧)^{٣}}{(٨٧٫٦٢)^{\frac{١}{٥}}}$

الباب الثالث والعشرون

فى لوغاريتمات النسب المثلثية وكيفية استعمال جداولها

بند ١٦٤ — علمنا من الباب الحادى عشر كيفية ايجاد النسب المثلثية للزوايا التى بين °٠ ، °٩٠ والآن نشرع فى كيفية ايجاد لوغاريتمات هذه النسب المثلثية

بند ١٦٥ — يبحث عن لوغاريتمات النسب المثلثية للزوايا التى بين °٠ ، °٩٠ بواسطة جداول مرتبة بالكيفية المرتبة بها جداول النسب المثلثية بحيث يتيسر ايجاد لوغاريتمات النسب المثلثية لهذه الزوايا (مباشرة) سواء علم مقدار الزاويه بالدرجات أو بالدرجات والدقائق

بند ١٦٦ — وللوغاريتمات كل نسبة من النسب المثلثية جدول خاص بها وسنقتصر على شرح جداول لوغاريتمات الجيوب ولوغاريتمات جيوب التمام ولوغاريتمات الظلال لأنها الكثيرة الاستعمال فى المسائل العملية

وقبل الشروع فى شرح كيفية البحث فى هذه الجداول يجب مراعاة النقطة الآتية

بند ١٦٧ — تقدم ان جيوب وجيوب تمام الزوايا التى بين °٠ ، °٩٠ كلها أقل من الواحد وان ظلال الزوايا التى بين °٠ ، °٤٥ أقل من الواحد أيضاً فيمقتضى ذلك تكون لوغاريتمات هذه النسب ذات عدد بيانى سالب وعوضاً عن أن توضع هذه الأعداد البيانية السالبة فى الجداول قد اتفق على اضافة ١٠ الى كل لوغاريتم منها بحيث يصير عدده البيانى موجباً ويسمى اللوغاريتم الناتج من اضافة ١٠ الى اللوغاريتم الحقيقى اللوغاريتم الجدولى

بند ١٦٨ — يرمز الى اللوغاريتم الجدولى بحرف ل

فاذا قلنا ل جا (١٥´ °٣١) يقصد بذلك اللوغاريتم الجدولى لجيب الزاوية ١٥´ °٣١ ويساوى

$$\left\{ \text{لوجا} \left(١٥' \; ٣١^\circ \right) + ١٠ \right\}$$

بند ١٦٩ — فى كيفية استعمال الجداول

طريقة البحث فى جداول لوغاريتمات النسب المثلثية هى عين طريقة البحث فى جداول النسب المثلثية نفسها وللتطبيق على ذلك نمثل بالأمثله الآتية فنقول

(مثال ١) أوجد مقدار لو جا ٣٨´ °٤١

(الطريقة) لذلك نبحث فى جدول لوغاريتمات الجيوب عن العدد ٤١ فى الصف الرأسى الاول

	٠´	٦´	١٢´	١٨´	٢٤´	٣٠´	٣٦´	٤٢´	٤٨´	٥٤´	فروق الدقائق ١	٢	٣	٤	٥
٤١	٩,٨١٦٩	٨١٧٨	٨١٨٧	٨١٩٥	٨٢٠٤	٨٢١٣	٨٢٢١	٨٢٣٠	٨٢٣٨	٨٢٤٧	١	٣	٤	٦	٧

ونبحث عن أول عدد يلى ٣٨ فى الصفر فى صف الدقائق (وهو الصف الاول من الصفحة ، فنجد أنه ٣٦ثم نتتبع الصف الأفقى المبدوء بالعدد ٤١ والصف الرأسى المبدوء بالعدد ٣٦ فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٨٢٢١ فيكون ل جا ٣٦´ ٤١° = ٩,٨٢٢١

ثم نأتى بالفرق بين ٣٨ ، ٣٦ فنجد أنه ٢ ونبحث عن هذا العدد فى أعمدة الفروق من الصفحة عينها ونتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٤١ والصف الرأسى المبدوء بالفرق ٢ فنجد فى متقاطع هذين الصفين العدد ٣ فيكون هو العدد الذى تلزم اضافته الى ٩,٨٢٢١ لينتج اللوغاريتم الجدولى لجيب الزاوية ٣٨´ ٤١°

وعلى ذلك يكون ل جا ٣٨´ ٤١° = ٩,٨٢٢٤

و يكون لو جا ٣٨´ ٤١° = ٩,٨٢٢٤ — ١٠

= $\overline{١}$,٨٢٢٤

(ملاحظات) فى جداول لوغاريتمات النسب المثلثية لم توضع العلامة العشرية ولم يذكر العدد الصحيح لكافة اللوغاريتمات الا فى الصف الرأسى المعنون (٠´) ووضع الشرطة فوق العدد مثل $\overline{٤}$ دلالة على ان العدد الصحيح المذكور فى الصف المعنون (٠´) قد تغير وأنه يلزم أخذ العدد الصحيح للصف الأفقى الذى يليه عوضاً عنه

تضاف الأعداد المقابلة للفروق فى جدولى لوغاريتمات الجيوب ولوغاريتمات الظلال وتطرح فى جدول لوغاريتمات جيوب التمام جرياً على ما تقدم ذكره فى جداول النسب المثلثية نفسها

(مثال ٢) أوجد مقدار لو جتا ٣٧´ ٥٩°

(الطريقة) لذلك نبحث عنه فى جداول لوغاريتمات جيوب التمام بالطريقة المتقدمة فى المثال الأول غير اننا نطرح العدد المقابل لفرق الدقائق بدل أن نضيفه

	٠´	٦´	١٢´	١٨´	٢٤´	٣٠´	٣٦´	٤٢´	٤٨´	٥٤´	فروق الدقائق ١	٢	٣	٤	٥
٥٩	٩,٧١١٨	٧١٠٦	٧٠٩٣	٧٠٨٠	٧٠٦٨	٧٠٥٥	٧٠٤٢	٧٠٢٩	٧٠١٦	٧٠٠٣	٢	٤	٦	٩	١١

فن الجداول ل جتا ٣٦´ ٥٩° = ٩,٧٠٤٢

والعدد المقابل للفرق ١´ = ٢

و بالطرح يكون ل جتا ٣٧´ ٥٩° = ٩,٧٠٤٠

ويكون لوجتا ٣٧´ ٥٩° = ٩,٧٠٤٠ — ١٠

= $\overline{١}$,٧٠٤٠

(مثال ٣) أوجد مقدار لو ظا ١٦´ ٤٤°

(الطريقة) لذلك نبحث عنه فى جدول لوغاريتمات الظلال بالطريقة المتقدمة فى البحث عن لوغاريتمات الجيوب

	٠′	٦′	١٢′	١٨′	٢٤′	٣٠′	٣٦′	٤٢′	٤٨′	٥٤′	فروق الدقائق ٣٢١	٤	٥
٤٤	٩,٩٨٤٨	٩٨٦٤	٩٨٧٩	٩٨٩٤	٩٩٠٩	٩٩٢٤	٩٩٣٩	٩٩٥٥	٩٩٧٠	٩٩٨٥	٨٥٣	١٠	١٣

فمن الجداول ل ظا ١٢′ ٤٤° = ٩,٩٨٧٩

والعدد المقابل للفرق ٤′ = ١٠

وبالجمع يكون ل ظا ١٦′ ٤٤° = ٩,٩٨٨٩

ويكون لوظا ١٦′ ٤٤° = ٩,٩٨٨٩ — ١٠

= ١̅,٩٨٨٩

بند ١٧٠ — لايجاد مقدار الزاوية اذا علم لوغاريتم أحد نسبها المثلثية

(الطريقة) لذلك نضيف ١٠ الى اللوغاريتم الحقيق فينتج اللوغاريتم الجدولى ثم نبحث بطريقة عكسية للطريقة السابقة عن عدد الدرجات والدقائق للزاوية المطلوبة

فمثلاً اذا أردنا البحث عن مقدار الزاوية التى لوغاريتم جيبها = ١̅,٧٦١٤ نجرى العمل هكذا

	٠′	٦′	١٢′	١٨′	٢٤′	٣٠′	٣٦′	٤٢′	٤٨′	٥٤′	فروق الدقائق ٣٢١	٤	٥
٣٥	٩,٧٥٨٦	٧٥٩٧	٧٦٠٧	٧٦١٨	٧٦٢٩	٧٦٤٠	٧٦٥٠	٧٦٦١	٧٦٧١	٧٦٨٢	٥٤٢	٧	٩

١̅,٧٦١٤ + ١٠ = ٩,٧٦١٤ اللوغاريتم الجدولى لجيب الزاوية

العدد الذى يلى ٧٦١٤ فى الصغر فى نفس جدول لوغاريتمات الجيوب هو ٧٦٠٧ وفرقهما ٧

ومن الجدول ٩,٧٦٠٧ = ل جا ١٢′ ٣٥°

وعدد الدقائق المقابل للفرق ٧ = ٤′

وبالجمع يكون ٩,٧٦١٤ = ل جا ١٦′ ٣٥°

اذن ١٦′ ٣٥° هى الزاوية المطلوبة

بند ١٧١ — أمثلة عامة للتطبيق على استعمال جداول لوغاريتمات النسب المثلثية

(مثال ١) احسب المقدار

جا ٢٢′ ٥٣° × جتا ٢٧′ ٢٢°

(الحل) نفرض ان س = جا ٢٢′ ٥٣° × جتا ٢٧′ ٢٢°

فيكون لوس = لوجا ٢٢´ ٥٣° + لوجتا ٢٧´ ٢٢°

= ل جا ٢٢´ ٥٣° − ١٠ + ل جتا ٢٧´ ٢٢° − ١٠

= ٩,٩٠٤٥ + ٩,٩٦٥٧ − ٢٠

= ١٩,٨٧٠٢ − ٢٠

= $\bar{\text{١}}$,٨٧٠٢

ويكون س = ٠,٧٤١٦ وهو المطلوب

(مثال ٢) احسب المقدار

قتا ٢٢´ ١٤٣° × ظتا ٣´ ١٥٧°

(الحل) نفرض ان س = قتا ٢٢´ ١٤٣° × ظتا ٣´ ١٥٧°

فيكون س = قتا (١٨٠° − ٣٨´ ٣٦°) × ظتا (٩٠° + ٣´ ٦٧°)

= قتا ٣٨´ ٣٦° × (− ظا ٣´ ٦٧°)

= $\frac{\text{١}}{\text{جا ٣٨´ ٣٦°}}$ × (− ظا ٣´ ٦٧°)

ويكون − س = $\frac{\text{ظا ٣´ ٦٧°}}{\text{جا ٣٨´ ٣٦°}}$

ويكون لو (− س) = لوظا ٣´ ٦٧° − لوجا ٣٨´ ٣٦°

= ل ظا ٣´ ٦٧° − ١٠ − (ل جا ٣٨´ ٣٦° − ١٠)

= ١٠,٣٧٣٢ − ١٠ − ٩,٧٧٥٧ + ١٠

= ١٠,٣٧٣٢ − ٩,٧٧٥٧

= ٠,٥٩٧٥

ويكون − س = ٣,٩٥٩

∴ س = − ٣,٩٥٩ وهو المطلوب

(تمارين ٤٢)

احسب المقادير الآتية بواسطة اللوغاريتمات

(١) جا ٢٤´ ٣٧° × جتا ١٥´ ٧٢°

(٢) جا ٣٢´ ٢٦° × ظتا ١٧´ ٤١°

(٣) ظا ٣٣´ ٣٧° × قتا ١٨´ ٢٢°

(٤) قا ٢٢´ ٥٣° × قتا ٢٧´ ٢٢°

(٥) ظتا ٤٧´ ١٢٥° × جتا ١٥´ ١٧٢°

(٦) جا ١٥´ ٣٧° ÷ جتا ١٣´ ٤٧°

(٧) ظا ٣٢´ ٥٧° ÷ ظتا ٣´ ٤٧°

(٨) قا ١٣´ ٢٢° ÷ ظا ٤١´ ٥١°

(٩) جا ٤٤´ ١٥٣° × ظا ٢٧´ ٧٣°

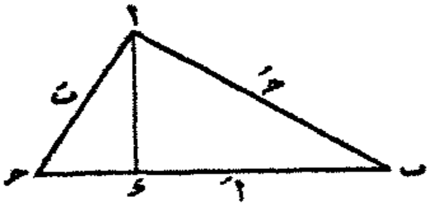
(١٠) ظا ٣١´ ١٢٧° × ظتا ١١´ ١٣٦°

الباب الرابع والعشرون

فى العلاقات التى بين أضلاع المثلث وزواياه

بند ١٧٢ — برهن على انه فى أى مثلث ا ب ح

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$$


(شكل ٧٩)

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح حاد الزوايا رسم ا ى عموداً على ب ح (شكل ٧٩)

فيكون $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}} = \text{جا ب}$

أى ان $\text{ا ى} = \text{ا ب} \times \text{جا ب} = \text{ح}'\ \text{جا ب}$

وكذلك $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ح}} = \text{جا ح}$

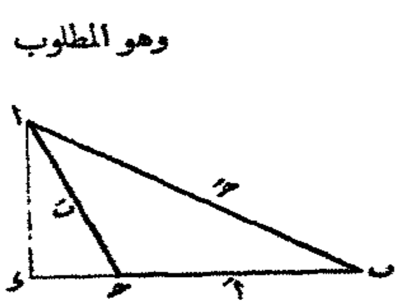
فيكون $\text{ا ى} = \text{ا ح} \times \text{جا ح} = \text{ب}'\ \text{جا ح}$

ومن ذلك ينتج ان $\text{ح}'\ \text{جا ب} = \text{ب}'\ \text{جا ح}$

أى ان $\frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$

وكذا نبرهن على ان $\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$

فيكون $\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$ وهو المطلوب


(شكل ٨٠)

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح منفرج الزاوية ترسم ا ى عموداً على ب ح (شكل ٨٠)

فيكون $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}} = \text{جا ب}$

أى ان $\text{ا ى} = \text{ا ب} \times \text{جا ب} = \text{ح}'\ \text{جا ب}$

ولكن $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ح}} = \text{جا ا ح ى} = \text{جا}\,(١٨٠^\circ - \text{ح}) = \text{جا ح}$

فيكون $\text{ا ى} = \text{ا ح} \times \text{جا ح} = \text{ب}' \,\text{جا ح}$

ومن ذلك ينتج ان $\text{ح}' \,\text{جا ب} = \text{ب}' \,\text{جا ح}$

أى ان $\dfrac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$

وكذا نبرهن على ان $\dfrac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$

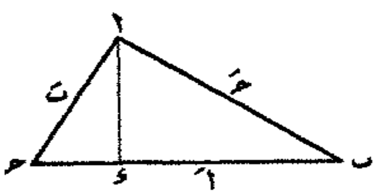
فيكون $\dfrac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$ وهو المطلوب

بند ١٧٣ — برهن على انه فى أى مثلث ا ب ح

$$\text{ا}' = \text{ب}' \,\text{جتا ح} + \text{ح}' \,\text{جتا ب}$$
$$\text{ب}' = \text{ا}' \,\text{جتا ح} + \text{ح}' \,\text{جتا ا}$$
$$\text{ح}' = \text{ا}' \,\text{جتا ب} + \text{ب}' \,\text{جتا ا}$$

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح حاد الزوايا

نرسم ا ى عموداً على ب ح (شكل ٨١)



(شكل ٨١)

فيكون $\dfrac{\text{ح ى}}{\text{ا ح}} = \text{جتا ح}$

أى ان $\text{ح ى} = \text{ح ا} \times \text{جتا ح} = \text{ب}' \,\text{جتا ح}$

وكذا نبرهن على ان $\text{ى ب} = \text{ا ب} \times \text{جتا ب} = \text{ح}' \,\text{جتا ب}$

ولكن $\text{ب ح} = \text{ح ى} + \text{ى ب}$

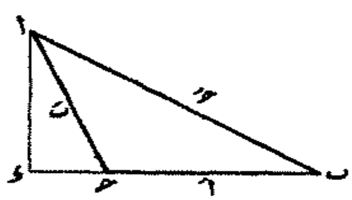
وبالتعويض يكون $\text{ا}' = \text{ب}' \,\text{جتا ح} + \text{ح}' \,\text{جتا ب}$ وهو المطلوب

وكذا نبرهن على ان $\text{ب}' = \text{ا}' \,\text{جتا ح} + \text{ح}' \,\text{جتا ا}$

وان $\text{ح}' = \text{ا}' \,\text{جتا ب} + \text{ب}' \,\text{جتا ا}$

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح منفرج الزاوية

نرسم ا ى عموداً على ب ح (شكل ٨٢)



(شكل ٨٢)

فيكون $\dfrac{\text{ب ى}}{\text{ا ب}} = \text{جتا ب}$

أى ان $\text{ب ى} = \text{ا ب} \times \text{جتا ب} = \text{ح}' \,\text{جتا ب}$

ولكن $\dfrac{\text{ح ى}}{\text{ا ح}} = \text{جتا ى ح ا} = \text{جتا}\,(١٨٠^\circ - \text{ح}) = -\,\text{جتا ح}$

أى ان   ح ء = − ا ح × جتا ح = − ب′ جتا ح

ولكن   ب ح = ب ء − ح ء

وبالتعويض يكون   ا′ = ح′ جتا ب − (− ب′ جتا ح)

أى ان   ا′ = ح′ جتا ب + ب′ جتا ح   وهو المطلوب

وكذا نبرهن على صحة القانونين الآخرين

بند ١٧٤ — برهن على أنه فى أى مثلث ا ب ح

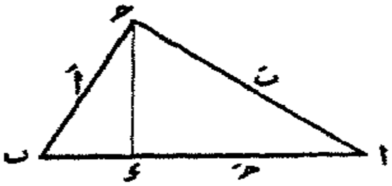
ا′٢ = ب′٢ + ح′٢ − ٢ ب′ ح′ جتا ا

ب′٢ = ح′٢ + ا′٢ − ٢ ح′ ا′ جتا ب

ح′٢ = ا′٢ + ب′٢ − ٢ ا′ ب′ جتا ح

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح حاد الزوايا

نرسم ح ء عموداً على ا ب (شكل ٨٣) فما تقدم فى الهندسة المستوية يكون ح ب مقابلاً للزاوية الحادة ا فى المثلث ا ب ح



(شكل ٨٣)

ويكون   ح ب٢ = ح ا٢ + ا ب٢ − ٢ ا ب . ا ء

ولكن   ء ا = ب′ جتا ا

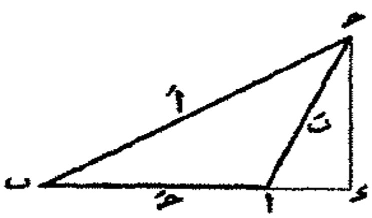
فيكون   ا′٢ = ب′٢ + ح′٢ − ٢ ب′ ح′ جتا ا   وهو المطلوب

وكذا نبرهن على ان   ب′٢ = ح′٢ + ا′٢ − ٢ ح′ ا′ جتا ب

وان   ح′٢ = ا′٢ + ب′٢ − ٢ ا′ ب′ جتا ح

(البرهان) عند ما يكون المثلث ا ب ح منفرج الزاوية

نرسم ح ء عموداً على ب ا (شكل ٨٤) فما تقدم فى الهندسة المستوية يكون ح ب مقابلاً للزاوية المنفرجة ا فى المثلث ا ب ح



(شكل ٨٤)

ويكون   ح ب٢ = ح ا٢ + ا ب٢ + ٢ ا ب . ا ء

ولكن   ء ا = ب′ جتا (١٨٠° − ا) = − ب′ جتا ا

فيكون   ا′٢ = ب′٢ + ح′٢ + ٢ ح′ × (− ب′ جتا ا)

أى ان   ا′٢ = ب′٢ + ح′٢ − ٢ ب′ ح′ جتا ا   وهو المطلوب

وكذا نبرهن على صحة القانونين الآخرين

بند ١٧٥ — لايجاد مقدار جيوب تمام زوايا المثلث ا ب ح بدلالة أضلاعه

تقدم ببند ١٧٤ أن

ا′٢ = ب′٢ + ح′٢ − ٢ ب′ ح′ جتا ا

فيكون $\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'\ \text{جتا ا} = \text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}$

، $\text{جتا ا} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'}$

وكذا نبرهن على ان $\text{جتا ب} = \dfrac{\text{حـ}'^{٢} + \text{ا}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{\text{٢ حـ}'\,\text{ا}'}$

وان $\text{جتا حـ} = \dfrac{\text{ا}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢}}{\text{٢ ا}'\,\text{ب}'}$

بند ١٧٦ — (تمهيد) اذا رمز الى نصف محيط المثلث ا ب حـ بالرمز ع

يكون $\text{ع} = \dfrac{\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}'}{٢}$

، $(\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}') = \text{٢ ع}$

، $(\text{ا}' + \text{ب}' - \text{حـ}') = (\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}' - \text{٢ حـ}')$
$= (\text{٢ ع} - \text{٢ حـ}') = ٢(\text{ع} - \text{حـ}')$

، $(\text{حـ}' + \text{ا}' - \text{ب}') = (\text{حـ}' + \text{ا}' + \text{ب}' - \text{٢ ب}')$
$= (\text{٢ ع} - \text{٢ ب}') = ٢(\text{ع} - \text{ب}')$

، $(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ا}') = (\text{ب}' + \text{حـ}' + \text{ا}' - \text{٢ ا}')$
$= (\text{٢ ع} - \text{٢ ا}') = ٢(\text{ع} - \text{ا}')$

بند ١٧٧ — لايجاد مقدار جيوب انصاف زوايا المثلث ا ب حـ بدلالة أضلاعه

تقدم ببند ١٠٦ أن $\text{جا}^{٢}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} = \dfrac{\text{١} - \text{جتا ا}}{٢}$

فيكون $\text{٢ جا}^{٢}\,\dfrac{\text{ا}}{٢} = \text{١} - \text{جتا ا} = \text{١} - \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'}$

$$= \dfrac{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}' - (\text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{ا}'^{٢})}{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'}$$

$$= \dfrac{\text{ا}'^{٢} - (\text{ب}'^{٢} - \text{٢ ب}'\,\text{حـ}' + \text{حـ}'^{٢})}{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'}$$

$$= \dfrac{\text{ا}'^{٢} - (\text{ب}' - \text{حـ}')^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{حـ}'}$$

أي أن $$\text{جا}^{٢}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \frac{(\text{ا}' + \text{ح}' - \text{ب}')(\text{ا}' + \text{ب}' - \text{ح}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$

$$= \frac{(٢\text{ع} - ٢\text{ب}')(٢\text{ع} - ٢\text{ح}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$

ويكون $$\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{(٢\text{ع} - ٢\text{ب}')(٢\text{ع} - ٢\text{ح}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}}$$

وكذا نبرهن على ان $$\text{جا}\,\frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ح}')(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ح}'\,\text{ا}'}}$$

وان $$\text{جا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{ا}'\,\text{ب}'}}$$

بند ١٧٨ — لايجاد مقدار جيوب تمام انصاف زوايا المثلث ا ب ح بدلالة أضلاعه

تقدم ببند ١٠٦ ان $$\text{جتا}^{٢}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \frac{١ + \text{جتا ا}}{٢}$$

فيكون $$٢\,\text{جتا}^{٢}\,\frac{\text{ا}}{٢} = ١ + \text{جتا ا} = ١ + \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$

$$= \frac{٢\,\text{ب}'\,\text{ح}' + \text{ب}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\,\text{ب}'\,\text{ح}'} = \frac{(\text{ب}' + \text{ح}')^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$

أي ان $$\text{جتا}^{٢}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \frac{(\text{ب}' + \text{ح}' + \text{ا}')(\text{ب}' + \text{ح}' - \text{ا}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'} = \frac{٢\text{ع}\,(٢\text{ع} - ٢\text{ا}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$

ويكون $$\text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{٢\text{ع}\,(٢\text{ع} - ٢\text{ا}')}{٤\,\text{ب}'\,\text{ح}'}} = \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}}$$

وكذا نبرهن على ان $$\text{جتا}\,\frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{ح}'\,\text{ا}'}}$$

وان $\text{جتا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ا}'\,\text{ب}'}}$

بند ١٧٩ — لايجاد مقدار ظلال انصاف زوايا المثلث ا ب ح بدلالة أضلاعه

علم ان ظل أى زاوية يساوى مقدار جيبها مقسوماً على جيب تمامها

فيكون $\text{ظا}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢}}{\text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}}$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}} \div \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')}}$$

وكذا نبرهن على ان $\text{ظا}\,\frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ح}')\,(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ب}')}}$

وان $\text{ظا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ا}')\,(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ح}')}}$

بند ١٨٠ — لايجاد مقدار جيوب تمام انصاف زوايا المثلث ا ب ح بدلالة أضلاعه

تقدم بند ٤١ أن $\text{جا}\,\text{ا} = ٢\,\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

فيكون $\text{جا}\,\text{ا} = ٢\sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}} \cdot \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}}$

$$= \frac{٢}{\text{ب}'\,\text{ح}'}\sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')\,(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}$$

وكذا نبرهن على ان $\text{جا}\,\text{ب} = \frac{٢}{\text{ح}'\,\text{ا}'}\sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')\,(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}$

وان $\text{جا}\,\text{ح} = \frac{٢}{\text{ا}'\,\text{ب}'}\sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')\,(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}$

(تنبيه) يرمز عادة الى المقدار $\sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{ا}')\,(\text{ع} - \text{ب}')\,(\text{ع} - \text{ح}')}$ بالرمز س وعلى ذلك

يكون $\text{جا ا} = \frac{٢\,\text{س}}{\text{ب}'\,\text{ح}'}$ ، $\text{جا ب} = \frac{٢\,\text{س}}{\text{ح}'\,\text{ا}'}$ ، $\text{جا ح} = \frac{٢\,\text{س}}{\text{ا}'\,\text{ب}'}$

س ١٨١ — برهن على ان

$$\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'} \,.\, \text{ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$$

(البرهان) تقدم ببند ١٧٢ ان $\frac{\text{ح}'}{\text{جا ح}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$

فيكون $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا ح}} = \frac{\text{ب}'}{\text{ح}'}$

، $\frac{\text{جا ب} - \text{جا ح}}{\text{جا ب} + \text{جا ح}} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'}$

، $\frac{٢\,\text{جا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢}}{٢\,\text{جا}\,\frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢}} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'}$

أى ان $\frac{\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢}}{\text{ظا}\,\frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢}} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'}$

ويكون $\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'} \,.\, \text{ظا}\,\frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢}$

ومن حيث ان $\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}}{٢} = ٩٠^\circ$ يكون $\text{ظا}\,\frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢} = \text{ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

ويكون $\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'} \,.\, \text{ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

وكذا برهن على ان $\text{ظا}\,\frac{\text{ح} - \text{ا}}{٢} = \frac{\text{ح}' - \text{ا}'}{\text{ح}' + \text{ا}'} \,.\, \text{ظتا}\,\frac{\text{ب}}{٢}$

وان $\text{ظا}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} = \frac{\text{ا}' - \text{ب}'}{\text{ا}' + \text{ب}'} \,.\, \text{ظتا}\,\frac{\text{ح}}{٢}$

بند ١٨٢ — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) اوجد مقدار جا حـ

اذا كان اَ = ١٨٫٢ متراً ، بَ = ١٦٫٤ متراً ، حـَ = ١٤٫٦ متراً

(الحل) ٢ ع = ١٨٫٢ + ١٦٫٤ + ١٤٫٦ = ٤٩٫٢

فيكون ع = ٢٤٫٦

، (ع − اَ) = ٢٤٫٦ − ١٨٫٢ = ٦٫٤

، (ع − بَ) = ٢٤٫٦ − ١٫٦٤ = ٨٫٢

، (ع − حـَ) = ٢٤٫٦ − ١٤٫٦ = ١٠

ولكن جا حـ = $\frac{٢}{\text{اَ بَ}}\sqrt{\text{ع (ع − اَ) (ع − بَ) (ع − حـَ)}}$

فيكون لو جا حـ = ½ { لو ٢٤٫٦ + لو ٦٫٤ + لو ٨٫٢ + لو ١٠ }

+ لو ٢ − لو ١٨٫٢ − لو ١٦٫٤

= ½ (١٫٣٩٠٩ + ٠٫٨٠٦٢ + ٠٫٩١٣٨ + ١)

+ ٠٫٣٠١٠ − ١٫٢٦٠١ − ١٫٢١٤٨

= ½ × ٤٫١١٠٩ + ٠٫٣٠١٠ − ٢٫٤٧٤٩

= ٢٫٠٥٥٥ + ٠٫٣٠١٠ − $\underline{٢}$٫٤٧٤٩

= ٢٫٣٥٦٥ − ٢٫٤٧٤٩ = $\overline{١}$٫٨٨١٦

ويكون جا حـ = ٠٫٧٦١٤ وهو المطلوب

(مثال ٢) اوجد مقدار حـَ

اذا كان اَ = ١٠ ، بَ = ١٢ ، حـ = ٣٥°

(الحل) حـَ^{٢} = اَ^{٢} + بَ^{٢} − ٢ اَ بَ جتا حـ

فيكون حـَ^{٢} = ١٠٠ + ١٤٤ − ٢ × ١٠ × ١٢ × ٠٫٨١٩٢

= ٢٤٤ − (٢٤٠ × ٠٫٨١٩٢)

= ٢٤٤ − ١٩٦٫٦٠٨ = ٤٧٫٣٩٢

ويكون حـَ = $\sqrt{٤٧٫٣٩٢}$ = ٦٫٨٨ تقريباً وهو المطلوب

(مثال ٣) فى أى مثلث (ا ب حـ) برهن على أن

جتا ب (بَ − حـَ جتا ا) = جتا حـ (حـَ − بَ جتا ا)

(البرهان) جتا ب (بَ − حـَ جتا ا) = جتا ب (اَ جتا حـ + حـَ جتا ا − حـَ جتا ا)

= اَ جتا ب جتا حـ

ولكن اَ جتا ب = (اَ جتا ب + بَ جتا ا) − بَ جتا ا

= حـَ − بَ جتا ا

فيكون جتا ب (بَ − حـَ جتا ا) = جتا حـ (حـَ − بَ جتا ا) وهو المطلوب

(تمارين ٤٣)

(١) اوجد مقدار جا ا اذا كان ا′ = ١٤,٢ ، ب′ = ١٢,٨ ، حـ′ = ١٠,٤
(٢) اوجد مقدار جا ب اذا كان ا′ = ١٨,٢ ، ب′ = ١٠,٤ ، حـ′ = ١٦,٨
(٣) اوجد مقدار ا′ اذا كان ب′ = ١٦ ، حـ′ = ١٤ ، ا = ٧٢°
(٤) اوجد مقدار ب′ اذا كان حـ′ = ١٨ ، ا′ = ٥ ، ب = ٣٤°

فى أى مثلث (ا ب حـ) برهن على أن

(٥) $\frac{\text{ب′ — ا′ جتا حـ}}{\text{حـ′ — ا′ جتا ب}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{جا ب}}$

(٦) $\frac{\text{جا ا + ٢ جا ب}}{\text{ا′ + ٢ ب′}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ′}}$

(٧) ب′^{٢} — حـ′^{٢} = ا′ (ب′ جتا حـ — حـ′ جتا ب)
(٨) (ا′ + ب′) (١ — جتا حـ) = حـ′ (جتا ا + جتا ب)
(٩) ا′ (جتا ب — جا ب) + ب′ (جتا ا + جا ا) = حـ′
(١٠) ظا حـ (ا′ — حـ′ جتا ب) = حـ′ جا ب
(١١) حـ′^{٢} (ظا ا — ظا ب) = (ا′^{٢} — ب′^{٢}) (ظا ا + ظا ب)
(١٢) ا′ جتا ا — ب′ جتا ب = جتا حـ (ب′ جتا ا — ا′ جتا ب)
(١٣) (ب′ + حـ′) جتا ا + (حـ′ + ا′) جتا ب + (ا′ + ب′) جتا حـ
= ا′ + ب′ + حـ′
(١٤) ا′ جتا ا + ب′ جتا ب + حـ′ جتا حـ = ٢ ا′ جا ب جا حـ
(١٥) ا′ جتا ا + ب′ جتا ب — حـ′ جتا حـ = ٢ حـ′ جتا ا جتا ب

(١٦) $\frac{\text{جتا ا}}{\text{جا ب جا حـ}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{جا حـ جا ا}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جا ا جا ب}} = ٢$

(١٧) ب′ + حـ′ — ا′
= (ب′ + حـ′) جتا ا — (حـ′ — ا′) جتا ب + (ا′ — ب′) جتا حـ

(١٨) ظا ا = $\frac{\text{ا′ جا حـ}}{\text{ب′ — ا′ جتا حـ}}$

(١٩) $\frac{\text{جتا ا}}{\text{ا}'} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}'} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{حـ}'} = \frac{\text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} + \text{حـ}'^{2}}{2\,\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'}$

(٢٠) $\frac{\text{ظا ب}}{\text{ظا حـ}} = \frac{\text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{حـ}'^{2}}{\text{ا}'^{2} - \text{ب}'^{2} + \text{حـ}'^{2}}$

(٢١) $\text{ب}'\,\text{جتا}^{2}\,\frac{\text{حـ}}{2} + \text{حـ}'\,\text{جتا}^{2}\,\frac{\text{ب}}{2} = \text{ع}$

(٢٢) $\text{ظا}\,\frac{\text{ب}}{2} \cdot \text{ظا}\,\frac{\text{حـ}}{2} = \frac{\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ا}'}{\text{ب}' + \text{حـ}' + \text{ا}'}$

(٢٣) $\text{ظا}\,\frac{\text{ا}}{2}\,(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ا}') = \text{ظا}\,\frac{\text{ب}}{2}\,(\text{حـ}' + \text{ا}' - \text{ب}')$

(٢٤) $\text{حـ}'^{2} = (\text{ا}' + \text{ب}')^{2}\,\text{جا}^{2}\,\frac{\text{حـ}}{2} + (\text{ا}' - \text{ب}')^{2}\,\text{جتا}^{2}\,\frac{\text{حـ}}{2}$

البــاب الخامس والعشرون

فى حل المثلثات بواسطة اللوغاريتمات

بند ١٨٣ — (تمهيد) يشتمل كل مثلث على ستة أجزاء ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا و يقصد بحل المثلث ايجاد مقادير بعض هذه الأجزاء بعد أن يعلم منه عدد كاف منها

بند ١٨٤ — ولا يحل المثلث الا بعد أن يعلم منه ثلاثة أجزاء من الآجزاء الستة بشرط أن يكون أحد هذه الآجزاء ضلعاً

بند ١٨٥ — فى حل المثلثات القائمة الزوايا

يكفى لحل المثلث القائم الزاوية معرفة مقدارى جزأين من اجرائه خلاف زاويته القائمة

ولحل المثلث القائم الزاوية أربع أحوال مختلفة

(الحالة الاولى) بعد ان يعلم الوتر وزاوية حاده

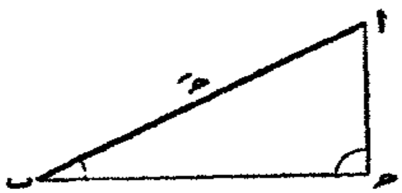
(الحالة الثانية) بعد ان يعلم ضلع من أضلاع الزاوية القائمة وزاوية حادة

(الحالة الثالثة) بعد ان يعلم الوتر وأحد أضلاع الزاوية القائمة

(الحالة الرابعة) بعد ان يعلم ضلعا القائمة

(الحالة الاولى)

بند ١٨٦ — المطلوب حل المثلث القائم الزاوية ا حـ ب (شكل ٨٥) بعد أن يعلم منه الوتر حـَ والزاوية الحادة ب



(شكل ٨٥)

(الحل) من حيث ان ا + ب = ٩٠°

تكون ا = ٩٠° — ب

ومن حيث ان بَ / حـَ = جا ب

يكون لو بَ = لو حـَ + ل جا ب — ١٠

ومن حيث ان اَ / حـَ = جتا ب

يكون لو اَ = لو حـَ + ل جتا ب — ١٠

و بذلك تتعين مقادير الآجزاء الباقية من المثلث وهى ا ، اَ ، بَ

(الحالة الثانية)

بند ١٨٧ — المطلوب حل المثلث القائم الزاوية ا حـ ب (شكل ٨٦) بعد ان يعلم منه الضلع ب′ والزاوية الحادة ا

(شكل ٨٦)

(الحل) من حيث ان ا + ب = ٩٠°

تكون ب = ٩٠° − ا

ومن حيث ان ا′ / ب′ = ظا ا

يكون لو ا′ = لو ب′ + ل ظا ا − ١٠

ومن حيث ان حـ′ / ب′ = قا ا

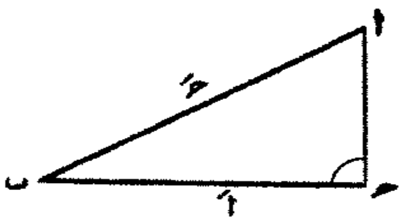
يكون لو حـ′ = لو ب′ + لو قا ا = لو ب′ − لو جتا ا

= لو ب′ − ل جتا ا + ١٠

وبذلك تتعين مقادير الأجزاء الباقية من المثلث وهى ب ، حـ′ ، ا′

(الحالة الثالثة)

بند ١٨٨ — المطلوب حل المثلث القائم الزاوية ا حـ ب (شكل ٨٧) بعد ان يعلم منه الوتر حـ′ والضلع ا′



(شكل ٨٧)

(الحل) من حيث ان جا ا = ا′ / حـ′

تكون ل جا ا = لو ا′ − لو حـ′ + ١٠

وأما زاوية ب فهى تمم زاوية ا وتساوى (٩٠° − ا)

ومن حيث ان ب′ / حـ′ = جا ب

يكون لو ب′ = لو حـ′ + ل جا ب − ١٠

(تنبيه) يمكن ايجاد مقدار ب′ من القانونين الآتيين

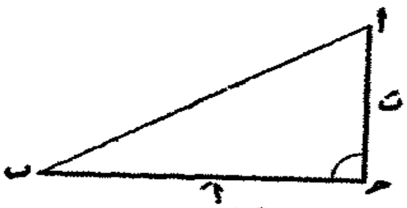
(١) ب′ = ا′ ظا ب

(٢) ب′² = حـ′² − ا′² = (حـ′ + ا′) (حـ′ − ا′)

وبذلك تتعين مقادير الأجزاء الباقية من المثلث وهى ا ، ب ، ب′

(الحالة الرابعة)

بند ١٨٩ — المطلوب حل المثلث القائم الزاوية ا حـ ب (شكل ٨٨) بعد ان يعلم منه الضلعان اَ ، بَ



(شكل ٨٨)

(الحل) من حيث ان ظا ب = بَ / اَ

يكون ل ظا ب = لو بَ − اَ + ١٠

وأما زاوية ا فهى تتمم زاوية ب وتساوى (٩٠° — ب)

ومن حيث ان حـَ / بَ = قتا ب

يكون لو حـَ = لو بَ + لو قتا ب = لو بَ — لو جا ب

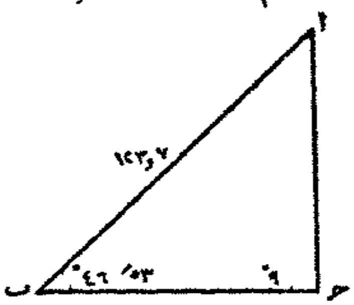
= لو بَ — ل جا ب + ١٠

(تنبيه) يمكن ايجاد مقدار حـَ من القانون حـَ / اَ = قا ب

و بذلك تتعين مقادير الاجزاء الباقية من المثلث وهى ا ، ب ، حـَ

بند ١٩٠ — مثال محلول للتطبيق على حل المثلثات القائمة الزوايا بواسطة اللوغاريتمات

(المثال) المطلوب حل المثلث القائم الزاوية ا حـ ب (شكل ٨٩) اذا علم ان حـَ = ١٢٣٫٧ وان ب = ٥٣° ٤٦َ



(شكل ٨٩)

(الحل) ا = ٩٠° − (٥٣َ ٤٦°) = ٧َ ٤٣°

واكن بَ = حـَ جا ب

فيكون لو بَ = لو ١٢٣٫٧ + ل جا ٥٣َ ٤٦° — ١٠

= ٢٫٠٩٢٣ + ٩٫٨٥٦١ — ١٠

= ١٫٩٤٨٤

و يكون بَ = ٨٨٫٨٠

ومن حيث ان اَ = حـَ جتا ب

يكون لو اَ = لو ١٢٣٫٧ + ل جتا ٥٣َ ٤٦ — ١٠

= ٢٫٠٩٢٣ + ٩٫٨٣٤٧ — ١٠ = ١٫٩٢٧٠

و يكون اَ = ٨٤٫٥٣

(تمارين ٤٤)

المطلوب حل المثلثات القائمة الزوايا الآتية بفرض ان حـ الزاوية القائمة فى كل منها ومع العلم بأن

(١) حَ = ١,٥٣٢ ، ب = ١٤´ ٥٩° (٦) اَ = ١,٧٣٢ ، ب = ١٣´ ٨٢°

(٢) بَ = ١٢٣,٩ ، اَ = ٣٢١,٤ (٧) حَ = ٨٢٣,١ ، اَ = ٢٣٧,٥

(٣) بَ = ٢٧,٣٢ ، ا = ١٧´ ١٥° (٨) حَ = ٢٩,٩ ، ا = ٢٢´ ٣٣°

(٤) بَ = ١٢٢,٢ ، حَ = ٢٣٦,٣ (٩) اَ = ٣١,٣ ، بَ = ٢٦,٩

(٥) حَ = ١٢٧,٢ ، ب = ٥٥´ ٥٢° (١٠) بَ = ١٢٥ ، ا = ٢٢´ ٣٧°

بند ١٩١ — فى حل المثلثات أية كانت

يكفى لحل المثلث أياً كان معرفة ثلاثة اجزاء من احزائه (شرط ان يكون أحد هذه الاجزاء ضلعاً)

ولحل المثلث أربع أحوال مختلفة

(الحالة الاولى) بعد ان يعلم الثلاثة الاضلاع

(الحاله الثانية) بعد ان يعلم ضلع وزاويتان

(الحاله الثالثة) بعد ان يعلم ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

(الحاله الرابعة) بعد ان يعلم ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما

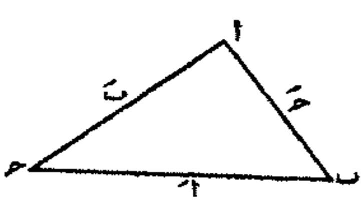
(الحاله الاولى)

بند ١٩٢ — المطلوب حل المثلث ا ب حـ (شكل ٩٠) بعد ان يعلم منه الاضلاع اَ ، بَ ، حَ

(الحل) أولا نبحث عن مقدارى الزاويتين ا ، ب من القانونين

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{بَ})(\text{ع} - \text{حَ})}{\text{ع}(\text{ع} - \text{اَ})}}$$

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{حَ})(\text{ع} - \text{اَ})}{\text{ع}(\text{ع} - \text{بَ})}}$$



(سكل ٩٠)

ثم نبحث عن مقدار الزاوية حـ من القانون $\text{حـ} = ١٨٠° - (\text{ا} + \text{ب})$

وعند اجراء العمل نحسب مقادير الاجزاء المجهوله بواسطة اللوغاريتمات فنقول

من حيث ان $\text{ظا}\ \frac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{بَ})(\text{ع} - \text{حَ})}{\text{ع}(\text{ع} - \text{اَ})}}$

يكون

ل ظا ١/٢ ا − ١٠ = ١/٢ {لو (ع − ب′) + لو (ع − ح′) − لو ع − لو (ع − ا′)}

وكذا يكون

ل ظا ١/٢ ب − ١٠ = ١/٢ {لو (ع − ح′) + لو (ع − ا′) − لو ع − لو (ع − ب′)}

(تنبيه) زيادة على القانون السابق يمكن حل المثلث بواسطة القانونين

(١) جا ١/٢ ا = √((ع − ب′) (ع − ح′) / ب′ ح′)

(٢) جتا ١/٢ ا = √(ع (ع − ا′) / ب′ ح′)

ومع هذا فانه لا يستعمل الا القانون السابق لانه لا يحتاج الا الى بحث قليل فى جداول اللوغاريتمات

بند ١٩٣ — (مثال) المطلوب حل المثلث ا ب ح اذا علم ان
ا′ = ٥٢,٨ متراً ، ب′ = ٣٩,٣ متراً ، ح′ = ٧٢,١

(الحل) ٢ ع = ٥٢,٨ + ٣٩,٣ + ٧٢,١ = ١٦٤,٢
فيكون ع = ٨٢,١
، (ع − ا′) = ٨٢,١ − ٥٢,٨ = ٢٩,٣
، (ع − ب′) = ٨٢,١ − ٣٩,٣ = ٤٢,٨
، (ع − ح′) = ٨٢,١ − ٧٢,١ = ١٠

ويكون ظا ١/٢ ا = √((ع − ب′) (ع − ح′) / ع (ع − ا′)) = √(٤٢,٨ × ١٠ / ٨٢,١ × ٢٩,٣)

، ل ظا ١/٢ ا − ١٠ = ١/٢ (لو ٤٢,٨ + لو ١٠ − لو ٨٢,١ − لو ٢٩,٣)
= ١/٢ (١,٦٣١٤ + ١ − ١,٩١٤٣ − ١,٤٦٦٩)
= ١/٢ (٢,٦٣١٤ − ٣,٣٨١٢) = ١/٢ × ١̅,٢٥٠٢
= ١/٢ × (١,٢٥٠٢ − ٢) = ١̅,٦٢٥١

ويكون ل ظا ١/٢ ا = ١̅,٦٢٥١ + ١٠ = ٩,٦٢٥١
، ١/٢ ا = ٢٢° ٥٢,٢٥′ تقريباً
، ا = ٤٥° ٤٥,٥′

وكذا نقول ان

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ح}')(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ع}(\text{ع} - \text{ب}')}} = \sqrt{\frac{١٠ \times ٢٩,٣}{٨٢,١ \times ٤٢,٨}}$$

∴ ل ظا $\frac{\text{ب}}{٢}$ − ١٠ = $\frac{١}{٢}$ (لو ١٠ + لو ٢٩,٣ − لو ٨٢,١ − لو ٤٢,٨)

= $\frac{١}{٢}$ (١ + ١,٤٦٦٩ − ١,٩١٤٣ − ١,٦٣١٤)

= $\frac{١}{٢}$ × $\bar{٢}$,٩٢١٢ = $\bar{١}$,٤٦٠٦

ويكون ل ظا $\frac{\text{ب}}{٢}$ = $\bar{١}$,٤٦٠٦ + ١٠ = ٩,٤٦٠٦

∴ $\frac{\text{ب}}{٢}$ = ٦,٥′ ١٦° تقريباً

∴ ب = ١٣′ ٣٢°

∴ ح = ١٨٠° − (٤٥,٥′ ٤٥° + ١٣′ ٣٢°)

= ١٨٠° − ٥٨,٥′ ٧٧°

= ١,٥′ ١٠٢°

(تمارين ٤٥)

المطلوب ايجاد اصغر زاوية فى كل مثلث من المثلثات الآتية

(١) ا′ = ٣٧٢,٤ ، ب′ = ٨٢,٥ ، ح′ = ٣٥٠,٥
(٢) ا′ = ١٢٧,٩ ، ب′ = ١٥٣,٤ ، ح′ = ٩٨,٥
(٣) ا′ = ٨٢,٣ ، ب′ = ٧١,٥ ، ح′ = ١٢٠
(٤) ا′ = ٧٢١ ، ب′ = ٤٣٢ ، ح′ = ٦٤٣

المطلوب ايجاد مقادير زوايا المثلثات الآتية

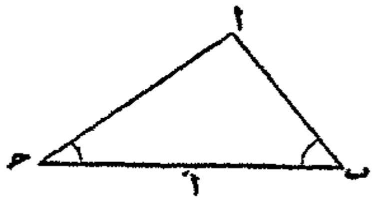
(٥) ا′ = ١٥ ، ب′ = ١٣,١ ، ح′ = ١٤,٧
(٦) ا′ = ١٢,٧٢ ، ب′ = ١١,١٥ ، ح′ = ١٠,٩٣
(٧) ا′ = ٢ ، ب′ = √٦ ، ح′ = √٣ + ١
(٨) ا′ = ٢ ، ب′ = √٢ ، ح′ = √ − ١

المطلوب ايجاد اكبر زاوية فى كل مثلث من المثلثات الآتية

(٩) ا′ = ٣٢,٩ ، ب′ = ٥٧,٣١ ، ح′ = ٤٠,٢٧
(١٠) ا′ = ٧٢,٤١ ، ب′ = ٣٦,٢١ ، ح′ = ٥٣,٢
(١١) ا′ = ٨٢,٣٦ ، ب′ = ٧٢,٤ ، ح′ = ١٢٠,٩
(١٢) ا′ = ١٠٧٥ ، ب′ = ١٠٢١ ، ح′ = ١٥٧٢

(الحالة الثانية)

بند ١٩٤ — المطلوب حل المثلث ا ب ح (شكل ٩١) بعد أن يعلم منه الضلع ا َ والزاويتان ب، ح



(شكل ٩١)

(الحل) أولا — نبحث عن مقدار الزاوية ا من القانون

ا = ١٨٠° − (ب + ح)

ثانياً — نبحث عن مقدارى الضلعين ب َ ، ح َ من القانونين

(١) ب َ = ا َ جا ب / جا ا

(٢) ح َ = ا َ جا ح / جا ا

وعند اجراء العمل نحسب مقادير الأجزاء المجهولة بواسطة اللوغاريتمات فنقول

من حيث ان ب َ = ا َ جا ب / جا ا

يكون لو ب َ = لو ا َ + ل جا ب — ل جا ا

وكذا يكون لو ح َ = لو ا َ + ل جا ح — ل جا ا

بند ١٩٥ — (مثال) المطلوب حل المثلث ا ب ح اذا علم ان

ا = ٤٢ َ ١٥° ، ب = ١٧ َ ٥٥° ، ح َ = ١٢٣,٤

(الحل) أولاً ح = ١٨٠° − (٤٢ َ ١٥° + ١٧ َ ٥٥°)

= ١٨٠° — ٥٩ َ ٧٠° = ١ َ ١٠٩°

ثانياً ا َ = ح َ جا ا / جا ح = ١٢٣,٤ جا ٤٢ َ ١٥° / جا ١ َ ١٠٩°

فيكون لو ا َ = لو ١٢٣,٤ + ل جا ٤٢ َ ١٥° — ل جا ١ َ ١٠٩°

= ٢,٠٩١٣ + ٩,٤٣٢٣ — ٩,٩٧٥٦

= ١١,٥٢٣٦ — ٩,٩٧٥٦ = ١,٥٤٨٠

، ا َ = ٣٥,٣٢

ثالثاً ب َ = ح َ جا ب / جا ح = ١٢٣,٤ جا ١٧ َ ٥٥° / جا ١ َ ١٠٩°

فيكون لو ب َ = لو ١٢٣,٤ + ل جا ١٧ َ ٥٥° — ل جا ١ َ ١٠٩°

= ٢,٠٩١٣ + ٩,٩١٤٨ — ٩,٩٧٥٦

، = ١٢,٠٠٦١ − ٩,٩٧٥٦ = ٢,٠٣٠٥

، ب′ = ١٠٧,٣

(تمارين ٤٦)

المطلوب ايجاد مقادير الاضلاع المجهولة من المثلثات الآتية

(١) ا = ١٧′ ٣٥° ، ح = ١٣′ ٤٥° ، ب′ = ٤٢,١

(٢) ا = ١٣′ ٧٢° ، ح = ٢٢′ ٥٤° ، ا′ = ١٧,٢١

(٣) ح = ٣٧′ ٨٤° ، ب = ١٧′ ٤٣° ، ح′ = ٤٥,٢٧

(٤) ب = ٢٣′ ٦٤° ، ح = ٤٣′ ٧٢° ، ا′ = ١٨,٩٢

(٥) ا = ٢١′ ٦٢° ، ح = ٣٧′ ٥٤° ، ح′ = ٧٢١,٦

(٦) ا = ١٥′ ٣٧° ، ب = ٥′ ٧٢° ، ا′ = ٧٥,٢

(٧) ا = ١٤′ ٧٥° ، ب = ١٣′ ٣٢′ ، ا′ = ١٧,٤٢

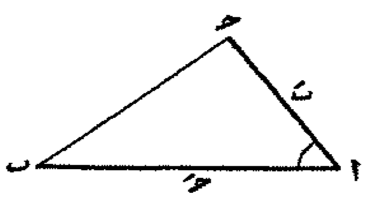
(٨) ب = ١٤′ ٣٩° ، ح = ١٥′ ٤٢° ، ا′ = ١٢٣,٩

(٩) ا = ١٥′ ٤٩° ، ب = ١٦′ ٧١° ، ح′ = ٤٢,١٧

(١٠) ا = ١٥′ ٣٧° ، ح = ٣٩′ ٤٩° ، ا′ = ١٩٧,٤

(الحالة الثالثة)

بند ١٩٦ — المطلوب حل المثلث ا ب ح (شكل ٩٢) بعد ان يعلم منه الضلعان ب′ ، ح′ والزاوية المحصورة بينهما ا



(شكل ٩٢)

(الحل) أولاً — نبحث عن مقدار (ب + ح) من القانون

ب + ح = ١٨٠° − ا

ثانياً — نبحث عن مقدار (ب − ح) من القانون

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{ح}'}{\text{ب}' + \text{ح}'}\ \text{ظتا}\ \frac{١}{٢}\ \text{ا}$$

وبعد أن يعلم (ب + ح) ، (ب − ح) يتعين مقدار كل من الزاويتين ب ، ح

وأخيراً نبحث عن مقدار الضلع ا′ من القانون ا′ = $\frac{\text{ب}'\ \text{جا ا}}{\text{جا ب}}$

وعند اجراء العمل نحسب مقادير الأجزاء المجهولة بواسطة اللوغاريتمات فنقول

من حيث ان $\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{حـ}'}{\text{ب}' + \text{حـ}'}\,\text{ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

يكون $\text{ل ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = \text{لو}\,(\text{ب}' - \text{حـ}') - \text{لو}\,(\text{ب}' + \text{حـ}') + \text{ل ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

ومن حيث ان $\text{ا}' = \frac{\text{ب}'\,\text{جا ا}}{\text{جا ب}}$

يكون $\text{لو ا}' = \text{لو ب}' + \text{ل جا ا} - \text{ل جا ب}$

بند **١٩٧** — (مثال) المطلوب حل المثلث ا ب حـ اذا علم ان

$\text{ب}' = ٨٤{,}٥$ ، $\text{حـ}' = ٦٨{,}٧$ ، $\text{ا} = ٥٣^\circ\ ٢٦'$

(الحل) أولاً $\text{ب} + \text{حـ} = ١٨٠^\circ - ٥٣^\circ\ ٢٦' = ١٢٦^\circ\ ٣٤'$

ثانياً $\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{حـ}'}{\text{ب}' + \text{حـ}'}\,\text{ظتا}\,\frac{\text{ا}}{٢}$

$= \frac{١٥{,}٨}{١٥٣{,}٢}\,\text{ظتا}\,٢٦^\circ\ ٤٣'$

ويكون $\text{ل ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = \text{لو}\,١٥{,}٨ + \text{ل ظتا}\,٢٦^\circ\ ٤٣' - \text{لو}\,١٥٣{,}٢$

$= ١{,}١٩٨٧ + ١٠{,}٢٩٨٢ - ٢{,}١٨٥٣$

$= ١١{,}٤٩٦٩ - ٢{,}١٨٥٣ = ٩{,}٣١١٦$

ويكون $\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = ١١^\circ\ ٣٥'$ ، $\text{ب} - \text{حـ} = ٢٣^\circ\ ١٠'$

وعلى ذلك يكون $\text{ب} = ٧٤^\circ\ ٥٢'$ ، $\text{حـ} = ٥١^\circ\ ٤٢'$

ثالثاً $\text{ا}' = \frac{\text{ب}'\,\text{جا ا}}{\text{جا ب}} = \frac{٨٤{,}٥\,\text{جا}\,٥٣^\circ\ ٢٦'}{\text{جا}\,٧٤^\circ\ ٥٢'}$

فيكون $\text{لو ا}' = \text{لو}\,٨٤{,}٥ + \text{ل جا}\,٥٣^\circ\ ٢٦' - \text{ل جا}\,٧٤^\circ\ ٥٢'$

$= ١{,}٩٢٦٩ + ٩{,}٩٠٤٨ - ٩{,}٩٨٤٦$

$= ١١{,}٨٣١٧ - ٩{,}٩٨٤٦ = ١{,}٨٤٧١$

ويكون $\text{ا}' = ٧٠{,}٣٣$

(تمارين ٤٧)

المطلوب حل المثلثات الآتية عند ما يكون

(١) ب′ = ٢٨,٥ ، حـ′ = ١٩,٧ ، ا = ٣٢′ ٤٨°

(٢) ا′ = ٢٩,٨ ، حـ′ = ٣٢,٤٢ ، ب = ١٤′ ٢٦°

(٣) ب′ = ٢٧,٣٢ ، حـ′ = ٥٣,٩ ، ا = ٣٨′ ٥٨°

(٤) ا′ = ٣٩,٩ ، ب′ = ٤٣,٢ ، حـ = ١٤′ ٣٨°

(٥) ب′ = ٣٧,٢ ، حـ′ = ٢٢,٣ ، ا = ٣٨′ ٣٩°

المطلوب ايجاد مقادير الزوايا المجهولة من المثلثات الآتية عند ما يكون

(٦) ا′ = ١٢٥,٩ ، حـ′ = ٨٤,٣٢ ، ب = ٢٨′ ٤٤°

(٧) ا′ = ٢٥٣,٢ ، ب′ = ١٤٩,٧ ، حـ = ١٤′ ٥٣°

(٨) ب′ = ٢٣١,٢ ، حـ′ = ٢٤٥,٨ ، ا = ٢٢′ ١٧°

(٩) ا′ = ٢٥,٣٢ ، ب′ = ٤٢,٩ ، حـ = ١٤′ ٥٢°

(١٠) ب′ = ٢٧,٥١ ، حـ′ = ٢٧,٠٥ ، ا = ١٢′ ٧٣°

(الحالة الرابعة)

بند ١٩٨ — المطلوب حل المثلث ا ب حـ (شكل ٩٣) بعد أن يعلم منه الضلعان ب′ ، حـ′ والزاوية حـ

(شكل ٩٣)

(الحل) أولاً — نبحث عن مقدار الزاوية ب من القانون

$$\text{جا ب} = \frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$$

ثانياً — نبحث عن مقدار الزاوية ا من القانون

$$\text{ا} = ١٨٠^\circ - (\text{ب} + \text{حـ})$$

ثالثاً — نبحث عن طول الضلع ا′ من القانون

$$\text{ا}' = \frac{\text{حـ}'\ \text{جا ا}}{\text{جا حـ}}$$

وعند اجراء العمل نحسب مقادير الأجزاء المجهولة بواسطة اللوغاريتمات فنقول

من حيث ان $\text{جا ب} = \frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$

يكون لـ جا ب = لو ب′ + لـ جا حـ − لو حـ′

ومن حيث ان $\text{ا}' = \frac{\text{حـ}'\ \text{جا ا}}{\text{جا حـ}}$

يكون لو ا َ = لو حـ َ + ل جا ا − ل جا حـ

بند ١٩٩ – (ملاحظة) تقدم ببند ١٢٦ أن جا (١٨٠° − حـ) = جا حـ

ففى المعادلة جا ب = $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ يتأتى ان يكون مقدار ∠ ب أقل من ٩٠° أو أزيد من ٩٠°

ولنبحث الآن فيما اذا كان كلا المقدارين مقبولا فى الحل فنقول

(أولاً) ان كانت ∠ حـ اكبر من ٩٠° فلا يتأتى ان تكون ∠ ب اكبر من ٩٠° لأنه لا يمكن وجود زاويتين منفرجتين فى مثلث وبذلك يكون المقدار الأصغر للزاوية ب هو المقبول فى الحل

(ثانياً) ان كانت ∠ حـ أصغر من ٩٠° يجب مراعاة الأحوال الآتية

(١) ان كان حـ َ اصغر من ب َ جا حـ يكن المقدار $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ الذى يساوى جا ب اكبر من ١ وبذلك تستحيل المسألة ولا يكون لها حل أصلا

(٢) وان كان حـ َ يساوى ب َ جا حـ يكن المقدار $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ الذى يساوى جا ب يساوى ١ وبذلك تكون ∠ ب = ٩٠° ويكون للمسألة حل واحد

(٣) وان كان حـ َ اكبر من ب َ جا حـ وأصغر من ب َ تكن ∠ حـ أصغر من ∠ ب وبذلك يتأتى ان تكون ∠ ب منفرجة أو حادة وفى هذه الحالة كلا المقدارين الناتجين من المعادلة جا ب = $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ يحل المسأله ويكون المسألة حلان

وتسمى هذه الحالة بالحالة ذات الحلين أو (الحالة المبهمة) ولا يكون للمثلث حلان بهذه الصفة الا اذا كان الضلع المقابل للزاوية المعلومة أصغر من الضلع الثانى المعلوم

(٤) وان كان حـ َ اكبر من ب َ جا حـ ويساوى ب َ تكن ∠ حـ تساوى ∠ ب وبذلك لا يتأتى ان تكون ∠ ب الا حادة ففى هذه الحالة يكون أصغر المقدارين الناتجين من المعادلة جا ب = $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ هو المقبول فى الحل ويكون للمسألة حل واحد

(٥) وان كان حـ َ اكبر من ب َ جا حـ واكبر من ب َ تكن ∠ حـ اكبر من ∠ ب وبذلك لا يتأتى ان تكون ∠ ب الا حاده ففى هذه الحالة يكون أصغر المقدارين الناتجين من المعادلة جا ب = $\frac{\text{ب}'\ \text{جا حـ}}{\text{حـ}'}$ هو المقبول فى الحل ويكون المسألة حل واحد

بند ٢٠٠ — ويمكن الوقوف على صحة الأحوال السابقة بالطرق الهندسية الآتية

(العمل) نرسم ا حـ = ب َ ونرسم ∠ ا حـ س تساوى الزاوية المعلومة حـ ثم نركز فى نقطة ا و نرسم دائرة نصف قطرها يساوى حـ َ فتقاطع الدائرة مع حـ س يعين الرأس الثالث للمثلث و بذا يتعين المثلث المطلوب

ولكن عند رسم الدائرة يتأتى حصول الأحوال الآتية

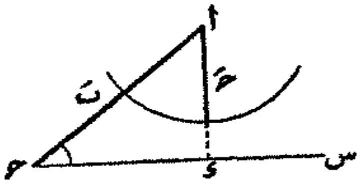
(أولاً) ان لا تقطع الدائرة المستقيم حـ س و بذا لا يكون للمسألة حل أصلاً

(ثانياً) أن تمس الدائرة المستقيم حـ س و بذا يكون للمسألة حل واحد

(ثالثاً) أن تقطع الدائرة المستقيم حـ س فى نقطتين و بذا يكون للمسألة حلان

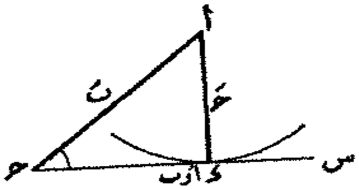
ولبيان هذه الأحوال تفصيلياً نرسم ا ء عموداً على حـ س

فيكون ا ء = ا حـ جا ا حـ س = ب َ جا حـ



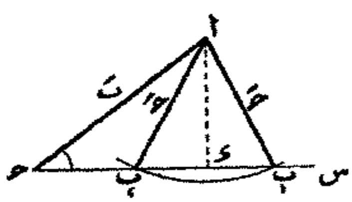
(شكل ٩٤)

(١) فإن كان حـ َ أصغر من ب َ جا حـ يكن حـ َ أصغر من ا ء فلا يمكن ان تقطع الدائرة المستقيم حـ س (شكل ٩٤) و بذا يكون المثلث عديم الحل بالمعلومات المفروضة



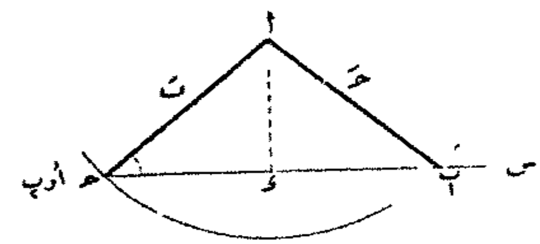
(شكل ٩٥)

(٢) وان كان حـ َ = ب َ جا حـ يكن حـ َ = ا ء فتمس الدائرة المستقيم حـ س فى نقطة ء وتنطبق نقطة ب على نقطة ء (شكل ٩٥) وبذا يكون المثلث القائم الزاوية ا ب ء هو المثلث المطلوب ويكون للمثلث حل واحد



(شكل ٩٦)

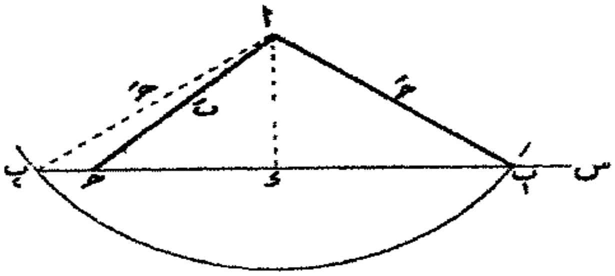
(٣) وان كان حـ َ اكبر من ب َ جا حـ وأصغر من ب َ يكن حـ َ اكبر من ا ء وأصغر من ا حـ فتقطع الدائرة المستقيم حـ س فى النقطتين $ب_١$ ، $ب_٢$ وكلاهما فى جهة واحدة من نقطة حـ (شكل ٩٦) وبذا يكون كلا المثلثين ا حـ $ب_١$ ، ا حـ $ب_٢$ وافياً بالشروط المطلوبة ويكون للمثلث حلان



(شكل ٩٧)

(٤) وان كان حـ َ اكبر من ب َ جا حـ ويساوى ب َ يكن حـ َ اكبر من ا ء ويساوى ا حـ فتقطع الدائرة المستقيم حـ س فى النقطتين $ب_١$ ، $ب_٢$ وتنطبق احداهما على حـ (شكل ٩٧) وبذا يكون المثلث ا $ب_١$ حـ هو المثلث المطلوب ولا يكون للمثلث الا حل واحد

(٥) وان كان حـَ ا اكبر من بَ جا حـَ واكبر من بَ يكن حـَ ا اكبر من ا ء واكبر من ا حـ فتقطع الدائرة المستقيم حـ س فى النقطتين ب١ ، ب٢ احداهما على يمين نقطة حـ والاخرى على يسارها (شكل ٩٨) و بذا يكون المثلث ا ب١ حـ هو المثلث المطلوب ولا يكون للمثلث الا حل واحد



(شكل ٩٨)

بند ٢٠١ — (مثال) المطلوب حل المثلث ا ب حـ اذا علم ان

اَ = ١٩,٤٥ ، بَ = ٢١,٣٢ ، ا = ١٤َ ٣٥°

(الحل) جا ب = بَ جا ا / اَ = ٢١,٣٢ جا ١٤َ ٣٥° / ١٩,٤٥

فيكون ل جا ب = لو ٢١,٣٢ + ل جا ١٤َ ٣٥° — لو ١٩,٤٥

= ١,٣٢٨٨ + ٩,٧٦١١ — ١,٢٨٨٩

= ٩,٨٠١٠

وتكون ب = ١٤َ ٣٩°

ومن حيث ان طول الضلع اَ المقابل للزاوية المعلومة ا أصغر من طول الضلع بَ يكون للمثلث حلان

وعلى ذلك ب١ = ١٤َ ٣٩°

، ب٢ = (١٨٠° — ب١) = ٤٦َ ١٤٠°

، حـ١ = ١٨٠° — (١٤َ ٣٥° + ١٤َ ٣٩°) = ٣٢َ ١٠٥°

، حـ٢ = ١٨٠° — (١٤َ ٣٥° + ٤٦َ ١٤٠°) = ٤°

ولكن حـَ١ = اَ جا حـ١ / جا ا = ١٩,٤٥ جا ٣٢َ ١٠٥° / جا ١٤َ ٣٥°

فيكون لو حـَ١ = لو ١٩,٤٥ + ل جا ٣٢َ ١٠٥° — ل جا ١٤َ ٣٥°

= ١,٢٨٨٩ + ٩,٩٨٣٨ — ٩,٧٦١١

= ١,٥١١٦

ويكون حـَ١ = ٣٢,٤٨

وكذا حـَ٢ = اَ جا حـ٢ / جا ا = ١٩,٤٥ جا ٤° / جا ١٤َ ٣٥°

فيكون لو حـَ٢ = لو ١٩,٤٥ + ل جا ٤° — ل جا ١٤َ ٣٥°

= ١,٢٨٨٩ + ٨,٨٤٣٦ − ٩,٧٦١١

= ٠,٣٧١٤

ويكون حـ٢´ = ٢,٣٥٢

(تمارين ٤٨)

بين ان كانت المثلثات الآتية ذات حلين أو ذات حل واحد

(١) ب´ = ١٧,٥ ، حـ´ = ١٥,٢ ، حـ = ٤٥° ٢٢´

(٢) أ´ = ١٤,٢٥ ، ب´ = ١٧,٥ ، أ = ٣٣° ١٧´

(٣) حـ´ = ١٨,٩ ، أ´ = ١٠,٤ ، حـ = ٦٥° ١٧´

المطلوب ايجاد مقادير الزوايا المجهولة فى المثلثات الآتية

(٤) أ´ = ٨٢,٣٥ ، ب´ = ٩٦,٥١ ، أ = ٥٥° ١٤´

(٥) حـ´ = ٤٢١,٩ ، أ´ = ٥٣١,٤ ، أ = ٧٢° ١٥´

(٦) ب´ = ١٧,٤١ ، حـ´ = ١٩,٣٢ ، ب = ٤٥° ٣٢´

(٧) أ´ = ١٢٣,٩ ، حـ´ = ١٧٢,٤ ، حـ = ٥٩° ٣٧´

المطلوب حل المثلثات الآتية

(٨) أ´ = ١٨٢,٥ ، ب´ = ٨٢,٥ ، أ = ٧٢° ١٥´

(٩) ب´ = ٧٢,٩٥ ، حـ´ = ٨٢,٣١ ، ب = ٤٢° ٢٧´

(١٠) ب´ = ١٨,٤٢ ، حـ´ = ١٤,٣٩ ، حـ = ٤٨° ٥٤´

الباب السادس والعشرون

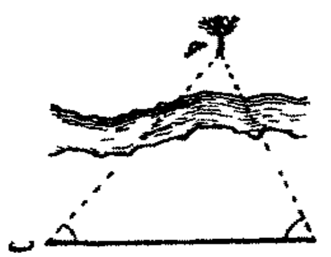
فى قياس الارتفاعات والمسافات

بند ٢٠٢ — يمكن بواسطة حل المثلثات ايجاد البعد بين النقط التى لا يمكن الوصول اليها ويمكن ايجاد مقادير الزوايا التى يستحيل ايجاد مقاديرها بالقياس العملى ويمكن ايجاد أطوال ارتفاعات النقط البعيدة والنقط التى لا يمكن الوصول اليها

وهذه الطرق هى المستعملة فى مساحة أراضى البلاد وللايضاح نمثل بالمسائل الآتية فنقول

بند ٢٠٣ — (المسألة الاولى) المطلوب ايجاد المسافة بين نقطتين احداهما يسهل الوصول اليها والاخرى لا يمكن الوصول اليها

لذلك نفرض ان رجلاً واقف فى نقطة مثل ا فى جهة من نهر (شكل ٩٩) وانه يريد ان يعرف طول المسافة بين هذه النقطة ونقطة اخرى مثل حـ فى الجهة الثانية من النهر وذلك بدون ان يعبر النهر



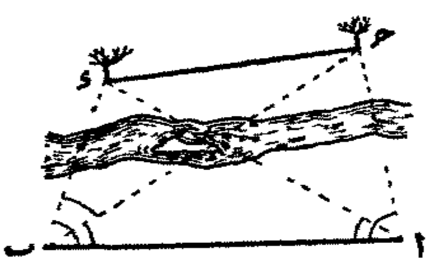
(شكل ٩٩)

(العمل) تؤخذ مسافة اختيارية مثل ا ب ويقاس طولها ثم تقاس الزاويتان ا ، ب من المثلث ا ب حـ

فبعد ان يعلم منه الضلع ا ب والزاويتان ا ، ب يحل المثلث ا ب حـ (بند ١٩٤) وبذلك يعلم طول المسافة ا حـ المطلوب ايجاده

بند ٢٠٤ — (المسألة الثانية) المطلوب ايجاد المسافة بين نقطتين لا يمكن الوصول اليهما

لذلك نفرض ان رجلاً فى جهة من نهر وانه يريد أن يعرف المسافة التى بين شجرتين (حـ ، ى) فى الجهة الثانية من النهر (شكل ١٠٠) وذلك بدون ان يعبر النهر



(شكل ١٠٠)

العمل تؤخذ مسافة اختيارية مثل ا ب ويقاس طولها ثم تقاس الزاويتان حـ ا ب ، حـ ب ا فبعد ان يعلم الضلع ا ب وهاتان الزاويتان يحل المثلث حـ ا ب (بند ١٩٤) ويعلم طول الضلع حـ ب

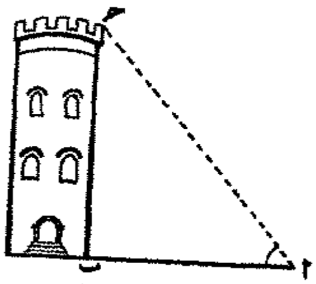
وبعد ذلك تقاس الزاويتان ى ا ب ، ى ب ا فبعد أن يعلم الضلع ا ب والزاويتان ى ا ب ، ى ب ا يحل المثلث ى ا ب (بند ١٩٤) ويعلم طول الضلع ى ب

وأخيراً تقاس الزاوية حـ ب ى فبعد أن يعلم الضلع حـ ب (من المثلث حـ ا ب) والضلع ى ب

(من المثلث ء ا ب) والزاوية المحصورة بينهما حـ ب ء يحل المثلث حـ ب ء (بند ١٩٦) ويعلم طول المسافة حـ ء المطلوب ايجاده

بند ٢٠٥ — (المسألة الثالثة) المطلوب ايجاد ارتفاع شيء يمكن الوصول الى موقعه لذلك نفرض برجاً يمكن الوصول الى موقعه ب (شكل ١٠١) ونفرض انه يراد ايجاد ارتفاعه ب حـ

(العمل) تقاس مسافة اختيارية على سطح الارض من نقطة مثل ا ب ثم تقاس زاوية الارتفاع ب ا حـ فبعد أن يعلم الضلع ب ا والزاوية الحادة ب ا حـ يحل المثلث القائم الزاوية ا ب حـ (بند١٨٧) و يعلم طول الارتفاع ب حـ المطلوب ايجاده

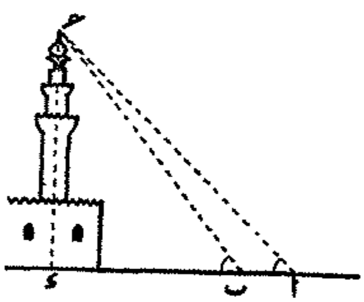


(شكل ١٠١)

بند ٢٠٦ — (المسألة الرابعة) المطلوب ايجاد ارتفاع شيء لا يمكن الوصول الى موقعه مع العلم بأن نقطتي الرصد على استقامة موقع الشيء

لذلك نفرض مئذنة لا يمكن الوصول الى موقعها ء (شكل١٠٢) ونفرض ان نقطتي الرصد ا ، ب على استقامة الموقع ء وانه يراد ايجاد طول الارتفاع حـ ء

(العمل) تقاس المسافة ا ب ثم تقاس الزاويتان حـ ا ب ، ا ب حـ فبعد أن يعلم الضلع ا ب وهاتان الزاويتان يحل المثلث ا ب حـ (بند ١٩٤) ويعلم طول الضلع ا حـ وبعد ذلك يحل المثلث القائم الزاوية ا ء حـ بعد أن يعلم الوتر ا حـ والزاوية الحادة حـ ا ء (بند ١٨٦) ويعلم طول الارتفاع ء حـ المطلوب ايجاده



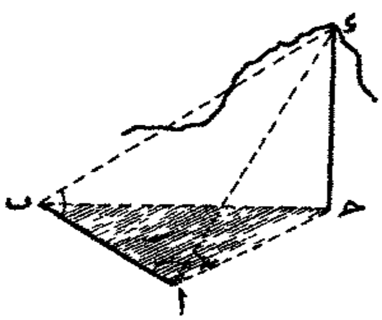
(شكل ١٠٢)

بند ٢٠٧ — (المسألة الخامسة) المطلوب ايجاد ارتفاع شيء لا يمكن الوصول الى موقعه مع العلم بأن نقطتي الرصد ليستا على استقامة موقع الشيء

لذلك نفرض جبلاً لا يمكن الوصول الى موقعه حـ (شكل١٠٣) ونفرض ان نقطتي الرصد ا ، ب ليستا على استقامة الموقع حـ وأنه يراد ايجاد طول الارتفاع حـ ء

(العمل) تقاس المسافة ا ب ثم تقاس الزاويتان ا ب ء ، ب ا ء فبعد ان يعلم الضلع ا ب وهاتان الزاويتان يحل المثلث ء ب ا (بند ١٩٤) ويعلم طول الضلع ء ا

و بعد ذلك تقاس الزاوية ء ا حـ فبعد ان يعلم الوتر ء ا والزاوية الحادة ء ا حـ يحل المثلث القائم الزاوية ء حـ ا (بند ١٨٦)

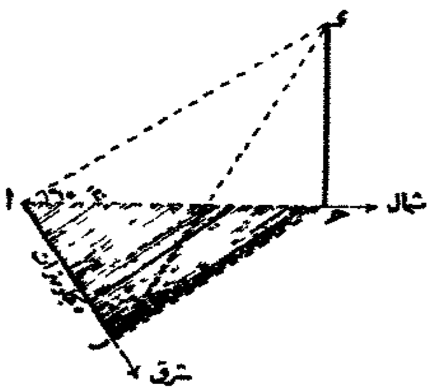


(شكل ١٠٣)

ويعلم طول الارتفاع حـ ء المطلوب ايجاده

بند ٢٠٨ — أمثلة محلولة للتطبيق على قياس الارتفاعات والمسافات

(مثال ١) رجل واقف فى نقطة ا وجد ان زاوية ارتفاع قمة جبل متجه شمال هذه النقطة هى ٢٠´ ١٥° ثم مشى ٥ كيلومترات اتجاه الشرق فوجد ان زاوية ارتفاع قمة الجبل هى ٢٥´ ١١° والمطلوب ايجاد ارتفاع هذا الجبل



(شكل ١٠٤)

(الحل) نفرض ان ارتفاع الجبل هو ء حـ (شكل ١٠٤) فيكون ا حـ متجهاً الى الشمال ثم نفرض ان ا ب = ٥ كيلومترات شرق نقطة ا فتكون ∠ ء ا حـ = ٢٠´ ١٥°

، ∠ ء ب حـ = ٢٥´ ١١° ، ∠ ب ا حـ = ٩٠°

فى المثلث ء ا حـ ا حـ = ء حـ ظتا ٢٠´ ١٥°

فى المثلث ء ب حـ ب حـ = ء حـ ظتا ٢٥´ ١١°

فى المثلث ا ب حـ ب حـ٢ − ا حـ٢ = ا ب٢ = ٢٥

فيكون ء حـ٢ ظتا٢ ٢٥´ ١١° − ء حـ٢ ظتا٢ ٢٠´ ١٥° = ٢٥

أى أن ء حـ٢ (ظتا٢ ٢٥´ ١١° − ظتا٢ ٢٠´ ١٥°) = ٢٥

، ء حـ٢ = ٢٥ / (ظتا٢ ٢٥´ ١١° − ظتا٢ ٢٠´ ١٥°)

، ء حـ = ٥ / √((ظتا ٢٥´ ١١° + ظتا ٢٠´ ١٥°)(ظتا ٢٥´ ١١° − ظتا ٢٠´ ١٥°))

= ٥ / √((٤,٩٥٢٠ + ٣,٦٤٧٢)(٤,٩٥٢٠ − ٣,٦٤٧٢))

= ٥ / √(٨,٥٩٩٢ + ١,٣٠٤٨)

ويكون لو ء حـ = لو ٥ − ½ (لو ٨,٥٩٩٢ + لو ١,٣٠٤٨)

= ٠,٦٩٩٠ − ½ (٠,٩٣٤٥ + ٠,١١٥٥)

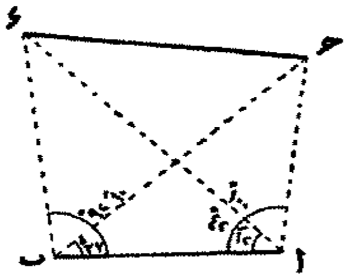
= ٠,٦٩٩٠ − ½ × ١,٠٥٠٠

= ٠,٦٩٩٠ − ٠,٥٢٥٠ = ٠,١٧٤٠

ويكون ء حـ = ١٫٤٩٣ من الكيلومترات

(مثال ٢) نظرت قلمتا حـ ، ء (شكل ١٠٥) من نقطتى ا ، ب فكانت ∠ حـ ا ب = ١٠٠°

، ∠ ء ا ب = ٤٢° ١٢′ ، ∠ حـ ب ا = ٣٧° ، ∠ ء ب ا = ٩٢° ١٠′ والمطلوب ايجاد طول المسافة التى بين القلمتين مع العلم بأن المسافة بين ا ، ب = ١٢٠٠ متر



(شكل ١٠٥)

(الحل) أولاً — نبحث عن طول الضلع ا ء من المثلث ء ا ب المعلوم منه الضلع ا ب والزاويتان ء ا ب ، ء ب ا

∠ ا ء ب = ١٨٠° — ٩٢° ١٠′ — ٤٢° ١٢′

= ٤٥° ٣٨′

ولكن ا ء = (١٢٠٠ جا ٩٢° ١٠′) / (جا ٤٥° ٣٨′)

فيكون لو ا ء = لو ١٢٠٠ + ل جا ٩٢° ١٠′ — ل جا ٤٥° ٣٨′

= ٣٫٠٧٩٢ + ٩٫٩٩٩٧ — ٩٫٨٥٤٢

= ٣٫٢٢٤٧

ويكون ا ء = ١٦٧٨ متراً

ثانياً — نبحث عن طول الضلع حـ ا من المثلث حـ ا ب المعلوم منه ا ب والزاويتان حـ ا ب ، حـ ب ا

∠ ا حـ ب = ١٨٠° — ١٠٠° — ٣٧°

= ٤٣°

ولكن حـ ا = (١٢٠٠ جا ٣٧°) / (جا ٤٣°)

فيكون لو حـ ا = لو ١٢٠٠ + ل جا ٣٧° — ل جا ٤٣°

= ٣٫٠٧٩٢ + ٩٫٧٧٩٥ — ٩٫٨٣٣٨

= ٣٫٠٢٤٩

ويكون حـ ا = ١٠٥٩ متراً

ثالثاً — نبحث عن طول الضلع حـ ء من المثلث حـ ا ء المعلوم منه الضلعان ا حـ ، ا ء والزاوية المحصورة بينهما حـ ا ء

∠ حـ ا ء = ١٠٠° — ٤٢° ١٢′

= ٥٧° ٤٨′

ولكن ظا (ا حـ ى − ا ى حـ)/٢ = ٦١٩/٢٧٣٧ ظتا ٥٤´ ٢٨°

فيكون ل ظا (ا حـ ى − ا ى حـ)/٢ = لو ٦١٩ − لو ٢٧٣٧ + ل ظتا ٥٤´ ٢٨°

= ٢٫٧٩١٧ − ٣٫٤٣٧٣ + ١٠٫٢٥٨٠

= ٩٫٦١٢٤

ويكون (ا حـ ى − ا ى حـ)/٢ = ١٦٫٥´ ٢٢°

، ∠ ا حـ ى − ∠ ا ى حـ = ٣٣´ ٤٤°

ولكن ∠ ا حـ ى + ∠ ا ى حـ = ١٨٠° − ٤٨´ ٥٧° = ١٢´ ١٢٢°

فتكون ∠ ا حـ ى = ٢٢٫٥´ ٨٣°

ولكن حـ ى = (ا ى جا حـ ا ى)/(جا ا حـ ى) = (١٦٧٨ جا ٤٨´ ٥٧°)/(جا ٢٢٫٥´ ٨٣°)

فيكون لو حـ ى = لو ١٦٧٨ + ل جا ٤٨´ ٥٧° − ل جا ٢٢٫٥´ ٨٣°

= ٣٫٢٢٤٨ + ٩٫٩٢٧٥ − ٩٫٩٩٧١

= ٣٫١٥٥٢

ويكون حـ ى = ١٤٣٠ متراً وهو المطلوب

(تمارين ٤٩)

(١) ا ، ب ، حـ ثلاث قرى ليست على استقامة واحده فاذا كانت قرية ب تبعد ٣٠ ميلاً عن ا وقرية حـ تبعد ١٥ ميلاً عن ا فأوجد المسافة بين ب ، حـ مع العلم بأن ∠ ب ا حـ = ٦٠°

(٢) اقلعت سفينتان من مرفأ الاولى متجهة الى الشمال الشرقى وسرعتها ½ ٧ من الكيلومترات فى الساعة والثانية متجهة الى الشمال وسرعتها ١٠ كيلومترات فى الساعة والمطلوب ايجاد المسافة بين السفينتين بعد مضى ساعة ونصف من مبدأ قيامهما

(٣) اذا فرض ان هـ قمة مئذنة وان حـ ، ى نقطتان فى الطريق فأوجد طول المسافة التى بين هـ ، حـ مع العلم بأن ∠ حـ ى هـ = ١٢٠° ، ∠ ى حـ هـ = ٤٥° وان حـ ى = ميلا واحداً

(٤) رجل يمشى فى طريق مستقيم بسرعة ثلاثة اميال فى الساعة أبصر امامه منطاداً يسير موازياً للاتجاه الذى يمشى هو فيه فوجد ان زاوية ارتفاع المنطاد ٦٠° وبعد مضى عشر دقائق من مسيره

وجد ان زاوية الارتفاع ٣٠° والمطلوب ايجاد ارتفاع المنطاد عن الارض (بالياردات) مع العلم بأنه يسير بسرعة ستة اميال فى الساعة

(٥) وجد رجل وهو واقف على سطح الارض ان زاوية ارتفاع قمة تل هى ٦٠° ثم بعد الرجل مسافة قدرها ١٠٠ متر وابصر قمة التل فوجد ان زاوية الارتفاع ٤٥° فما ارتفاع هذا التل

(٦) رجل يمشى اتجاه برج وجد ان زاوية ارتفاع قمته ٢٠´ ١١° ثم قرب مسافة قدرها ٥٥متراً فوجد ان زاوية الارتفاع ٣٥´ ١٤° والمطلوب ايجاد ارتفاع هذا البرج

(٧) من قاعدة برج ارتفاعه ٢٥٠ متراً وجد ان زاوية ارتفاع قمة جبل ٢٠´ ١٥° ومن قمة البرج وجد ان زاوية الارتفاع ١٥´ ١٤° والمطلوب ايجاد ارتفاع هذا الجبل

(٨) رجل فوق جرف ارتفاعه ١٨٠ قدماً وجد ان زاويتى انخفاض سفينتين فى البحر هما ٣٠´ ٨ ٤° ، ٢٥´ ٣٢° والمطلوب ايجاد طول المسافة التى بين السفينتين مع العلم بأنهما على استقامة موقع الجرف

(٩) رجل فى منطاد وجد ان زاوية انخفاض قلعة ١٥´ ٢٨° وبعد هبوط المنطاد مسافة قدرها ٥٨٠ قدماً وجد ان زاوية الانخفاض ١٠´ ١٢° والمطلوب ايجاد اصل ارتفاع المنطاد عن الارض

(١٠) من نقطة على سطح الارض وجد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة هى ٣٥´ ١١° ومن نقطة ثانية اقرب الى المئذنة من الاولى مسافة قدرها ٨٢٠ متراً وجد ان زاوية الارتفاع ١٥´ ٦٥° والمطلوب ايجاد ارتفاع المئذنة

(١١) رجلان ابصرا منطاداً فى الجو فوجد الاول ان زاوية ارتفاع المنطاد ٢٥´ ٥٩° ووجد الثانى ان زاوية الارتفاع ١٥´ ٣٤° والمطلوب ايجاد ارتفاع هذا المنطاد مع العلم بأن المسافة بين الرجلين تساوى ٢٠٠٠ متر وان موقع المنطاد ينطبق على احدى نقط هذه المسافة (المستقيم)

(١٢) ا ، ب نقطتان على ضفة واحدة من نهر مستقيم ، حـ نقطة ثالثة على الضفة الثانية فاذا كانت ∠ حـ ا ب = ٣١´ ٤٨° ، ∠ حـ ب ا = ٢٥´ ٧٥° فأوجد عرض هذا النهر مع العلم بأن المسافة بين ا ، ب هى ٦٤٥ ياردة

(١٣) من نقطة على سطح الارض وجد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة مبنية على سطح جامع ٦٠° ووجد ان زاوية ارتفاع سطح الجامع من نفس النقطة الاولى ٤٥° والمطلوب ايجاد النسبة بين ارتفاع المئذنة وارتفاع الجامع

(١٤) ا ، ب نقطتان تبعد احداهما عن الاخرى بمقدار ١٠٠ متر ، حـ نقطة ثالثة متساوية البعد عن ا ، ب فما طول حـ ا ، حـ ب كى تكون الزاوية ا حـ ب ١٥٠°

(١٥) من قمة تل وجد ان زاويتى انخفاض منزلين فى طريق مستقيم هما ١٣´ ١٢° ، ٤٥´ ٢°

والمطلوب ايجاد ارتفاع التل (بالياردات) مع العلم بأن المسافة بين المنزلين تبلغ ميلاً واحداً

(١٦) من أوطأ نافذة فى منزل وجد أن زاوية ارتفاع قمة نخلة ٤٥° ومن نافذة تعلو عن النافذة الاولى بمقدار ٢٠ قدماً وجد ان زاوية الارتفاع ٤٠° والمطلوب ايجاد بعد المنزل عن النخلة

(١٧) سكتان حديديتان متلاقيتان فى زاوية قدرها ٣٥° ٢٠´ ومن نقطة تلاقيهما قام قطاران فى وقت واحد وكانت سرعة احدهما ٣٠ ميلاً فى الساعة والمطلوب ايجاد سرعة القطار الثانى اذا فرض ان المسافة بين القطارين بعد مضى ساعتين ونصف من مبدأ قيامهما هى ٥٠ ميلا

(١٨) رجل ينظر الى برج متجه جهة الشمال وجد ان زاوية ارتفاع قمته ٥٠° فما تكون زاوية الارتفاع بعد أن يمشى الرجل جهة الشرق مسافة قدرها ٣٠٠ قدم مع العلم بأن ارتفاع البرج ١٠٠قدم

(١٩) رجل واقف فى نقطة على سطح الارض وجد أن زاوية ارتفاع قمة جبل متجه شمال هذه النقطة هى ١٤° ٢٧´ ثم مشى ٧ كيلومترات اتجاه الغرب ووجد أن زاوية الارتفاع ١٠° ٢٤´ والمطلوب ايجاد ارتفاع هذا الجبل بالامتار

(٢٠) من نقطة جنوب منطاد وجد أن زاوية ارتفاعه ٤٥° ٣٥´ ومن نقطة اخرى غرب النقطة الاولى بمسافة قدرها ٧٢٥ متراً وجد ان زاوية الارتفاع ٤٠° ٢٢´ والمطلوب ايجاد ارتفاع المنطاد

(٢١) ا ، ب نقطتان فى مستو افقى تبعد احداهما عن الاخرى بمقدار ١٢٠٠ قدم ونقطة حـ عبارة عن موقع برج فاذا كانت ∠ حـ ا ب = ٦٧° ٣٠´ ، ∠ حـ ب ا = ٤٩° ١٥´ فأوجد ارتفاع البرج مع العلم بأن زاوية ارتفاع قمته من نقطة ا هى ٨° ١٧´

(٢٢) ا ، ب نقطتان فى مستو افقى تبعد احداهما عن الاخرى بمقدار ١٢٥٠ قدماً ونقطة ى عبارة عن قمة برج فاذا كانت ∠ ى ا ب = ٦٤° ٢١´ ، ∠ ى ب ا = ٤٧° ١٥´ فأوجد ارتفاع البرج مع العلم بأن زاوية ارتفاع قمته من نقطة ا هى ١١° ٢٤´

(٢٣) من نقطة جنوب برج وجد أن زاوية ارتفاع قمته ٤٣° ١٨´ ومن نقطة اخرى شرق النقطة الاولى بمسافة قدرها ٢٤٠ قدماً وجد أن زاوية الارتفاع ٢٨° ٣٠´ والمطلوب ايجاد ارتفاع البرج

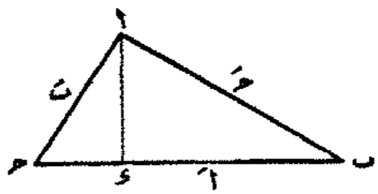
(٢٤) حـ ، ى قلعتان نظرتا من محطتى ا ، ب فكانت ∠ حـ ا ب = ١٠٨° ، ∠ ى ا ب = ٤٣° ١٢´ ، ∠ حـ ب ا = ٣٢° ١٠´ ، ∠ ى ب ا = ٨٧° ١٢´ والمطلوب ايجاد المسافة بين القلعتين مع العلم بأن المسافة بين المحطتين = ١٣٥٠ متراً

(٢٥) من نقطة جنوب مئذنة وجد أن زاوية ارتفاع قمتها ٢١° ٣٠´ ومن نقطة أخرى غرب النقطة الاولى بمسافة قدرها ٢٢٥ متراً وجد ان زاوية الارتفاع ١٧° ١٢´ والمطلوب ايجاد ارتفاع المئذنة

البـــاب السابع والعشرون

فى خواص المثلث

بند ٢٠٩ — لايجاد مساحة المثلث



(شكل ١٠٦)

(العمل) عند ما يكون المثلث المفروض حاد الزوايا

نفرض ان المثلث ا ب حـ (شكل ١٠٦) حاد الزوايا ونرسم ا ى عموداً على ب حـ فكما تقدم فى الهندسة المستوية

تكون مساحة △ ا ب حـ = ½ ا ى . ب حـ

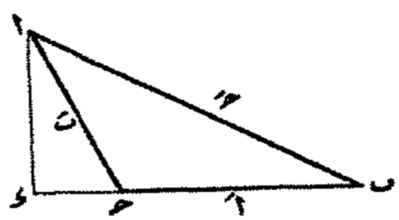
ولكن ا ى = بَ جا حـ

فيكون △ = ½ بَ جا حـ . اَ

أى ان △ = ½ اَ بَ جا حـ

وكذا نبرهن على ان △ = ½ اَ حـَ جا ب

وان △ = ½ بَ حـَ جا ا



(شكل ١٠٧)

(العمل) عند ما يكون المثلث منفرج الزاوية

نفرض ان المثلث ا ب حـ منفرج الزاوية فى حـ (شكل ١٠٧) ونرسم ا ى عموداً على ب حـ فكما تقدم

تكون مساحة △ ا ب حـ = ½ ا ى . ب حـ

ولكن ا ى = بَ جا ى حـ ا

= بَ جا (١٨٠° — حـ) = بَ جا حـ

فيكون △ = ½ بَ جا حـ . اَ

أى ان △ = ½ اَ بَ جا حـ

وكذا نبرهن على صحة القانونين الآخرين

بند ٢١٠ — لايجاد مساحة المثلث بدلالة أضلاعه

تقدم ببند ٢٠٩ ان مساحة △ ا ب حـ = ½ حـَ اَ جا ب

وتقدم ببند ١٨٠ ان $\text{جا ب} = \frac{٢}{\text{حـَ اَ}} \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{اَ})\,(\text{ع} - \text{بَ})\,(\text{ع} - \text{حـَ})}$

فتكون مساحة المثلث $= \frac{\text{حـَ اَ}}{٢} \cdot \frac{٢}{\text{حـَ اَ}} \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{اَ})\,(\text{ع} - \text{بَ})\,(\text{ع} - \text{حـَ})}$

$$= \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{اَ})\,(\text{ع} - \text{بَ})\,(\text{ع} - \text{حـَ})}$$

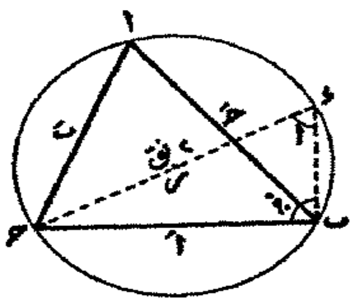
$$= \text{س}$$

(تنبيه) يرمز أحياناً الى مساحة المثلث بالرمز ($\triangle$)

بند ٢١١ — لايجاد نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

(العمل) عند ما يكون مركز الدائرة داخل المثلث

تفرض ان مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ (شكل ١٠٨) داخله ونرمز الى نصف قطرها بالرمز نق ثم نصل من حـ الى المركز م ونمد حـ م حتى يقابل الدائرة فى ى ونصل ى ب فتكون $\angle$ حـ ى ب $=$ $\angle$ حـ ا ب لانهما فى قطعة واحدة ، $\angle$ ى ب حـ تساوى قائمة لانها مرسومة فى نصف دائرة



(شكل ١٠٨)

فن الشكل $\frac{\text{حـ ب}}{\text{حـ ى}} = \text{جا حـ ى ب} = \text{جا ا}$

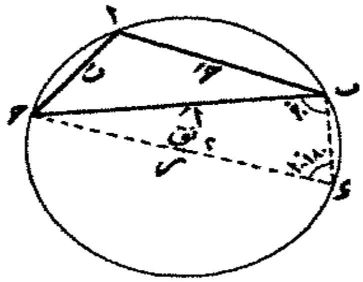
ولكن $\text{حـ ب} = \text{اَ}$ ، $\text{حـ ى} = ٢\ \text{نق}$

فيكون $\frac{\text{اَ}}{٢\ \text{نق}} = \text{جا ا}$

أى ان $٢\ \text{نق} = \frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}}$

، $\text{نق} = \frac{\text{اَ}}{٢\ \text{جا ا}}$

وكذا نبرهن على ان $\text{نق} = \frac{\text{بَ}}{٢\ \text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{٢\ \text{جا حـ}}$



(شكل ١٠٩)

(العمل) عند ما يكون مركز الدائرة خارج المثلث

نفرض ان مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ (شكل ١٠٩) خارجه ثم نرسم القطر حـ م ء ونصل ء ب فتكون ∠ حـ ء ب = (١٨٠° − ا) لان الشكل الرباعى ا ب حـ ء مرسوم داخل دائرة ، ∠ ء ب حـ تساوى قائمة لانها مرسومة فى نصف دائرة

فمن الشكل $\frac{\text{حـ ب}}{\text{حـ ء}} = \text{جا حـ ء ب} = \text{جا}\,(١٨٠^\circ - \text{ا}) = \text{جا ا}$

فيكون $$\frac{\text{ا}'}{\text{٢ نق}} = \text{جا ا}$$

أى ان $$\text{٢ نق} = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} \quad ، \quad \text{نق} = \frac{\text{ا}'}{\text{٢ جا ا}}$$

وكذا نبرهن على أن $$\text{نق} = \frac{\text{ب}'}{\text{٢ جا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{٢ جا حـ}}$$

ومن حيث ان $\text{جا ا} = \frac{٢}{\text{ب}'\,\text{حـ}'}\,\text{س}$ ، $\text{جا ب} = \frac{٢}{\text{ا}'\,\text{حـ}'}\,\text{س}$ ، $\text{جا حـ} = \frac{٢}{\text{ا}'\,\text{ب}'}\,\text{س}$

يكون $$\text{نق} = \frac{\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'}{\text{٤ س}} = \frac{\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'}{٤\,\triangle}$$

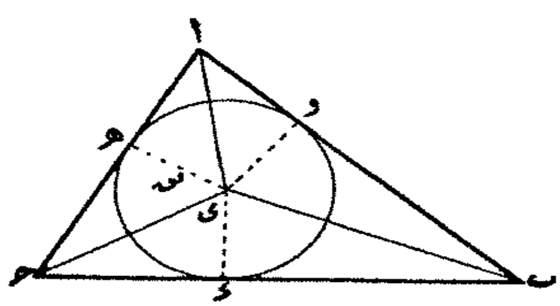
(تنبيه) من حيث ان ٢ نق يساوى $\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}$ ويساوى $\frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$ ويساوى $\frac{\text{حـ}'}{\text{جا حـ}}$

يكون $$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{جا حـ}}$$

ويكون ا' = ٢ نق جا ا ، ب' = ٢ نق جا ب ، حـ' = ٢ نق جا حـ

وقد سبق البرهنة على هذه الخاصة بطريقة اخرى ببند ١٧٢

بند **٢١٢** — لايجاد نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث



(شكل ١١٠)

(اولاً) نفرض المثلث ا ب حـ (شكل ١١٠) ونرسم الدائرة ء و هـ داخله بحيث تمس اضلاعه فى ء ، هـ ، و ونرمز الى نصف قطرها بالرمز نو فيكون

ى ء = ى هـ = ى و = نو

فن الشكل مساحة المثلث ا ب حـ = مساحة ب ى حـ + مساحة حـ ى ا + مساحة ا ى ب

أى ان المثلث ا ب حـ = ½ ى د . ب حـ + ½ ى هـ . حـ ا + ½ ى و . ا ب

= ½ نق ا′ + ½ نق ب′ + ½ نق حـ′

= ½ نق (ا′ + ب′ + حـ′)

= ½ نق × ٢ ع = نق ع

ويكون نق = (مساحة △ ا ب حـ) / ع = س / ع = ـــ / ع

(ثانياً) من حيث ان المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة متساويان

يكون ا هـ = ا و ، ب د = ب و ، حـ هـ = حـ د

ويكون ٢ ا هـ = ا هـ + ا و

= (ا حـ − حـ هـ) + (ا ب − ب و)

= ا حـ − حـ د + ا ب − ب د

= ا حـ + ا ب − حـ ب

= ب′ + حـ′ − ا′ = ٢ (ع − ا′)

ويكون ا هـ = ا و = (ع − ا′)

وكذا نبرهن على أن ب د = ب و = (ع − ب′)

وأن حـ هـ = حـ د = (ع − حـ′)

ولكن ى و / ا و = ظا ا/٢

اذن نق / (ع − ا′) = ظا ا/٢

، نق = (ع − ا′) ظا ا/٢

وكذا نبرهن على أن نق = (ع − ب′) ظا ب/٢ = (ع − حـ′) ظا حـ/٢

(ثالثاً) ا′ = ب د + د حـ

= ى د ظتا ى ب د + ى د ظتا ى حـ د

$$= \text{نو ظتا } \tfrac{\text{ب}}{٢} + \text{نو ظتا } \tfrac{\text{ح}}{٢}$$

$$= \text{نو} \left[\frac{\text{جتا } \frac{\text{ب}}{٢}}{\text{جا } \frac{\text{ب}}{٢}} + \frac{\text{جتا } \frac{\text{ح}}{٢}}{\text{جا } \frac{\text{ح}}{٢}} \right]$$

$$= \text{نو} \left[\frac{\text{جا } \frac{\text{ح}}{٢} \text{ جتا } \frac{\text{ب}}{٢} + \text{جتا } \frac{\text{ح}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ب}}{٢}}{\text{جا } \frac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ح}}{٢}} \right]$$

اذن $\text{ا}' \text{ جا } \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \tfrac{\text{ح}}{٢} = \text{نو} \left[\text{جا } \tfrac{\text{ح}}{٢} \text{ جتا } \tfrac{\text{ب}}{٢} + \text{جتا } \tfrac{\text{ح}}{٢} \text{ جا } \tfrac{\text{ب}}{٢} \right]$

$$= \text{نو جا } \left(\tfrac{\text{ب}}{٢} + \tfrac{\text{ح}}{٢} \right)$$

$$= \text{نو جا} \left[٩٠^\circ - \tfrac{\text{ا}}{٢} \right]$$

$$= \text{نو جتا } \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

ويكون $\text{نو} = \text{ا}' \dfrac{\text{جا } \frac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ح}}{٢}}{\text{جتا } \frac{\text{ا}}{٢}}$

وكذا نبرهن على أن

$$\text{نو} = \text{ب}' \frac{\text{جا } \frac{\text{ح}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ا}}{٢}}{\text{جتا } \frac{\text{ب}}{٢}} = \text{ح}' \frac{\text{جا } \frac{\text{ا}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ب}}{٢}}{\text{جتا } \frac{\text{ح}}{٢}}$$

(نتيجة) من حيث ان $\text{ا}' = ٢ \text{ نق جا ا}$

يكون $\text{نو} = ٢ \text{ نق جا ا} \times \dfrac{\text{جا } \frac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ح}}{٢}}{\text{جتا } \frac{\text{ا}}{٢}}$

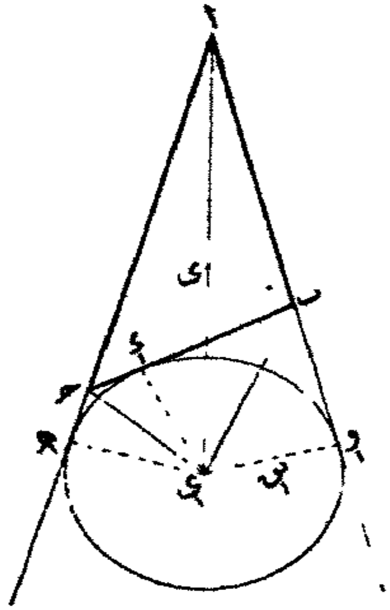
$$= ٢ \text{ نق} \times ٢ \text{ جا } \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{ جتا } \tfrac{\text{ا}}{٢} \times \frac{\text{جا } \frac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ح}}{٢}}{\text{جتا } \frac{\text{ا}}{٢}}$$

$$= ٤ \text{ نق جا } \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{ جا } \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \tfrac{\text{ح}}{٢}$$

بند **٢١٣** — لايجاد نصف قطر الدائرة التي تمس المثلث من الخارج

(أولاً) نفرض المثلث ا ب ح (شكل ١١١) ونرسم الدائرة $\text{و}_١$ $\text{د}_١$ $\text{هـ}_١$ تمس الضلع ب ح وامتدادى ا ب ، ا ح ونرمز الى نصف قطرها بالرمز $\text{نو}_١$ فيكون

$$\text{ى}_١\text{د}_١ = \text{ى}_١\text{هـ}_١ = \text{ى}_١\text{و}_١ = \text{نو}_١$$



(شكل ١١١)

فمن الشكل مساحة المثلث ا ب حـ

$$= \text{مساحة المنحرف ا ب ى}_1\text{ حـ} - \text{مساحة المثلث ب ى}_1\text{ حـ}$$

$$= \text{مساحة ا ى}_1\text{ حـ} + \text{مساحة ا ى}_1\text{ ب} - \text{مساحة ب ى}_1\text{ حـ}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ى}_1\text{هـ}_1 \cdot \text{ا حـ} + \tfrac{1}{2}\,\text{ى}_1\text{و}_1 \cdot \text{ا ب} - \tfrac{1}{2}\,\text{ى}_1\text{د}_1 \cdot \text{ب حـ}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{نق}_1\,\text{ب}' + \tfrac{1}{2}\,\text{نق}_1\,\text{حـ}' - \tfrac{1}{2}\,\text{نق}_1\,\text{ا}'$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{نق}_1\,(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ا}')$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{نق}_1\,(\text{٢ ع} - \text{٢ ا}')$$

$$= \text{نق}_1\,(\text{ع} - \text{ا}')$$

ويكون $\text{نق}_1 = \dfrac{\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب حـ}}{\text{ع} - \text{ا}'} = \dfrac{\text{س}}{\text{ع} - \text{ا}'} = \dfrac{\triangle}{\text{ع} - \text{ا}'}$

وكذا اذا رمزنا الى نصف قطر الدائرة التى تمس الضلع ب′ بالرمز نق_2 والى نصف قطر الدائرة التى تمس الضلع حـ′ بالرمز نق_3 يمكننا ان نثبت

ان $\text{نق}_2 = \dfrac{\text{س}}{\text{ع} - \text{ب}'} = \dfrac{\triangle}{\text{ع} - \text{ب}'}$

وان $\text{نق}_3 = \dfrac{\text{س}}{\text{ع} - \text{حـ}'} = \dfrac{\triangle}{\text{ع} - \text{حـ}'}$

(ثانياً) من حيث ان المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة متساويان

يكون $\text{ا هـ}_1 = \text{ا و}_1$ ، $\text{ب د}_1 = \text{ب و}_1$ ، $\text{حـ هـ}_1 = \text{حـ د}_1$

ويكون $\text{٢ ا هـ}_1 = \text{ا هـ}_1 + \text{ا و}_1$

$$= (\text{ا حـ} + \text{حـ هـ}_1) + (\text{ا ب} + \text{ب و}_1)$$

$$= \text{ا حـ} + \text{حـ د}_1 + \text{ا ب} + \text{ب د}_1$$

$$= \text{ا حـ} + \text{ا ب} + \text{ب حـ}$$

$$= ا' + ب' + حـ' = ٢ ع$$

ويكون $ا هـ_١ = ا و_١ = ع$

، $ب ى_١ = ب و_١ = ا و_١ - ا ب = (ع - حـ')$

، $حـ د_١ = حـ هـ_١ = ا هـ_١ - ا حـ = (ع - ب')$

ولكن $\frac{ى_١ و_١}{ا و_١} = ظا \frac{ا}{٢}$

اذن $\frac{نق_١}{ع} = ظا \frac{ا}{٢}$

، $نق_١ = ع ظا \frac{ا}{٢}$

وكذا نبرهن على أن $نق_٢ = ع ظا \frac{ب}{٢}$

، $نق_٣ = ع ظا \frac{حـ}{٢}$

(ثالثاً) من حيث ان كلا من زاويتى $ب و_١ ى_١$ ، $ب ى_١ ى_١$ تساوى قائمة

تكون $\angle و_١ ى_١ ى_١ + \angle ى_١ ب و_١ = ٢ ق$

وتكون اذن $\angle و_١ ى_١ ى_١ = \angle ا ب حـ$

، $\angle و_١ ى_١ ب = \angle ب ى_١ ى_١ = \frac{ب}{٢}$

وكذا نبرهن على أن $\angle هـ_١ ى_١ حـ = \angle حـ ى_١ ى_١ = \frac{حـ}{٢}$

واكن $\frac{ى_١ و_١}{ب و_١} = ظتا و_١ ى_١ ب$

اذن $\frac{نق_١}{ع - حـ'} = ظتا \frac{ب}{٢}$

، $نق_١ = (ع - حـ') ظتا \frac{ب}{٢}$

وكذلك $\frac{\text{ى}_١\,\text{هـ}_١}{\text{حـ}\,\text{هـ}_١} = \text{ظتا}\ \text{هـ}_١\,\text{ى}_١\,\text{حـ}$

اذن $\frac{\text{نق}_١}{\text{ع} - \text{ب}'} = \text{ظتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}$

، $\text{نق}_١ = (\text{ع} - \text{ب}')\ \text{ظتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}$

وكذا نبرهن على أن $\text{نق}_٢ = (\text{ع} - \text{ا}')\ \text{ظتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} = (\text{ع} - \text{حـ}')\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}$

، $\text{نق}_٣ = (\text{ع} - \text{ا}')\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ب}}{٢} = (\text{ع} - \text{ب}')\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}$

(رابعاً) $\text{ا}' = \text{ب}\,\text{ى}_١ + \text{ى}_١\,\text{حـ}$

$= \text{ى}_١\,\text{ى}_١\ \text{ظتا}\ \text{ى}_١\,\text{ب}\,\text{ى}_١ + \text{ى}_١\,\text{ى}_١\ \text{ظتا}\ \text{ى}_١\,\text{حـ}\,\text{ى}_١$

$= \text{نق}_١\ \text{ظتا}\ \frac{١}{٢}(١٨٠^\circ - \text{ب}) + \text{نق}_١\ \text{ظتا}\ \frac{١}{٢}(١٨٠^\circ - \text{حـ})$

$= \text{نق}_١ \left\{ \text{ظتا}\ (٩٠^\circ - \frac{\text{ب}}{٢}) + \text{ظتا}\ (٩٠^\circ - \frac{\text{حـ}}{٢}) \right\}$

$= \text{نق}_١ \left(\text{ظا}\ \frac{\text{ب}}{٢} + \text{ظا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} \right)$

$= \text{نق}_١ \left[\frac{\text{جا}\ \frac{\text{ب}}{٢}}{\text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}} + \frac{\text{جا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}}{\text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}} \right]$

$= \text{نق}_١ \left[\frac{\text{جا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}}{\text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}} \right]$

اذن $\text{ا}'\ \text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} = \text{نق}_١ \left[\text{جا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} + \text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} \right]$

$= \text{نق}_١\ \text{جا} \left(\frac{\text{ب}}{٢} + \frac{\text{حـ}}{٢} \right) = \text{نق}_١\ \text{جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}$

ويكون $\text{نق}_١ = \text{ا}'\ \frac{\text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}}{\text{جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}}$

وكذا نبرهن على أن $\text{نق}_٢ = \text{ب}'\ \frac{\text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}}{\text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}}$

، $$\text{نق}_{٣} = \text{ح}\ \dfrac{\text{جتا}\frac{ا}{٢}\ \text{جتا}\frac{ب}{٢}}{\text{جتا}\frac{ح}{٢}}$$

(نتيجة) من حيث ان $ا' = ٢\ \text{نق جا}\ ا$ ، $ب' = ٢\ \text{نق جا}\ ب$ ، $ح' = ٢\ \text{نق جا}\ ح$

يكون $$\text{نق}_{١} = ٢\ \text{نق جا}\ ا \times \dfrac{\text{جتا}\frac{ب}{٢}\ \text{جتا}\frac{ح}{٢}}{\text{جتا}\frac{ا}{٢}}$$

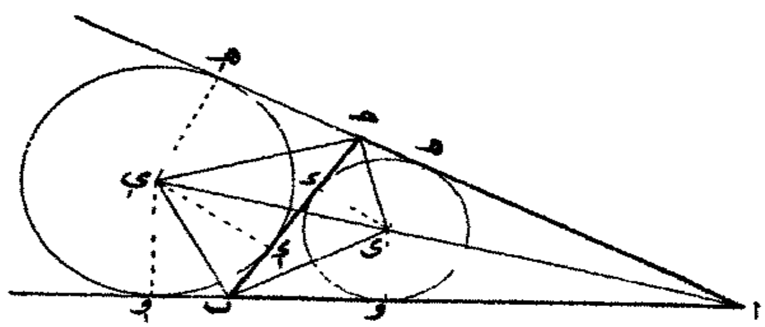
$$= ٢\ \text{نق} \times ٢\ \text{جا}\frac{ا}{٢}\ \text{جتا}\frac{ا}{٢} \times \dfrac{\text{جتا}\frac{ب}{٢}\ \text{جتا}\frac{ح}{٢}}{\text{جتا}\frac{ا}{٢}}$$

$$= ٤\ \text{نق جا}\frac{ا}{٢}\ \text{جتا}\frac{ب}{٢}\ \text{جتا}\frac{ح}{٢}$$

وكذا نبرهن على أن $\text{نق}_{٢} = ٤\ \text{نق جا}\frac{ب}{٢}\ \text{جتا}\frac{ح}{٢}\ \text{جتا}\frac{ا}{٢}$

، $$\text{نق}_{٣} = ٤\ \text{نق جا}\frac{ح}{٢}\ \text{جتا}\frac{ا}{٢}\ \text{جتا}\frac{ب}{٢}$$

بند ٢١٤ — يمكن استنتاج بعض خواص هامة من (شكل ١١٢) الذى يحتوى على المثلث ا ب ح مرسومة فيه الدائرة الداخلة والدائرة التى تمس الضلع ا' وامتداد ضلعيه الآخرين



(شكل ١١٢)

(١) $ا ه_{١} = ا و_{١} = ح$

(٢) $ا ه = ا و = (ح - ا')$

$ب ى = ب و = (ح - ب')$

$ح ه = ح ى = (ح - ح')$

(٣) $ب ى_{١} = ب و_{١} = (ح - ح')$

$ح ه_{١} = ح ى_{١} = (ح - ب')$

(٤) ب ى١ = حـ ى [لأن كلاً منهما يساوى (ع − حـ´)]

حـ ى١ = ب ى [لأن كلاً منهما يساوى (ع − ب´)]

(٥) و و١ = ا و١ − ا و = {ع − (ع − ا´)} = ا´

وكذلك هـ هـ١ = ا´

، ى ى١ = ب ى − ب ى١ = (ع − ب´) − (ع − حـ´)

= حـ´ − ب´

(٦) ى ى١ = ا ى١ − ا ى = ا و١ قا ½ا − ا و قا ½ا

= قا ½ا (ا و١ − ا و) = و و١ قا ½ا

= ا´ / جتا ½ا

بند **٢١٥** — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) احسب مساحة المثلث ا ب حـ اذا كان

ا´ = ١٨,٢ سنتيمتراً ، ب´ = ١٦,٤ سنتيمتراً ، حـ´ = ١٤,٦ سنتيمتراً

(الحل) ٢ ع = ١٨,٢ + ١٦,٤ + ١٤,٦ = ٤٩,٢

فيكون ع = ٢٤,٦

، ع − ا´ = ٢٤,٦ − ١٨,٢ = ٦,٤

، ع − ب´ = ٢٤,٦ − ١٦,٤ = ٨,٢

، ع − حـ´ = ٢٤,٦ − ١٤,٦ = ١٠

ويكون △ = √(٢٤,٦ × ٦,٤ × ٨,٢ × ١٠)

، لو △ = ½ (لو ٢٤,٦ + لو ٦,٤ + لو ٨,٢ + لو ١٠)

= ½ (١,٣٩٠٩ + ٠,٨٠٦٢ + ٠,٩١٣٨ + ١)

= ½ × ٤,١١٠٩ = ٢,٠٥٥٥

ويكون △ = ١١٣,٦ سنتيمتراً مربعاً

(مثال ٢) برهن على ان

$$\frac{1}{\text{نق}_1}+\frac{1}{\text{نق}_2}+\frac{1}{\text{نق}_3}=\frac{1}{\text{نق}}$$

(البرهان) $$\frac{1}{\text{نق}_1}+\frac{1}{\text{نق}_2}+\frac{1}{\text{نق}_3}=\frac{\text{ع}-\text{أ}'}{\triangle}+\frac{\text{ع}-\text{ب}'}{\triangle}+\frac{\text{ع}-\text{حـ}'}{\triangle}$$

$$=\frac{3\,\text{ع}-(\text{أ}'+\text{ب}'+\text{حـ}')}{\triangle}$$

$$=\frac{3\,\text{ع}-2\,\text{ع}}{\triangle}=\frac{\text{ع}}{\triangle}$$

$$=\frac{1}{\text{نق}}$$ وهو المطلوب

(تمارين ٥٠)

احسب مساحة المثلث ا ب حـ اذا كان

(١) ا´ = ١٧٫٢ ، ب´ = ١٥٫٣ ، حـ´ = ١٤٫٩ سنتيمتراً

(٢) ا´ = ٢٥ ، ب´ = ٢٦ ، حـ´ = ١٨٫٥ سنتيمتراً

(٣) ا´ = ١٨٫٢٤ ، ب´ = ١٩٫٣٦ ، حـ´ = ١٤٫٢٢ سنتيمتراً

(٤) ا´ = ٤ ، ب´ = ١٠ أقدام ، حـ = ٣٠°

(٥) ب´ = ٥ ، حـ´ = ٢٠ بوصة ، ا = ٦٠°

(٦) احسب نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ وانصاف أقطار الدوائر التي تمسه من الخارج اذا كان ا´ = ١٣ ، ب´ = ١٤ ، حـ´ = ١٥ سنتيمتراً

(٧) ما طول نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ اذا كانت أضلاعه هي ٥ ، ٦ ، ٩ سنتيمترات

(٨) اذا كان ا´ = $\sqrt{\text{٣}}$ ، ب´ = $\sqrt{\text{٢}}$ ، ا = ٦٠° فبرهن على ان مساحة المثلث = $\frac{\text{٣}+\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$

(٩) برهن على أن مساحة المثلث تساوى كلاً من المقادير الآتية

(ا) نع ح

(ب) ٢ نع^{٢} جا ا . جا ب . جا حـ

(ج) $\sqrt{\text{نع نع}_{١}\text{ نع}_{٢}\text{ نع}_{٣}}$

(د) نق نع (جا ا + جا ب + جا حـ)

(هـ) $\dfrac{\text{ا}'\text{ نع نع}_{١}}{\text{نع}_{١} - \text{نع}}$

(و) $\dfrac{(\text{ب}' + \text{حـ}')\text{ نع نع}_{١}}{\text{نع} + \text{نع}_{١}}$

(ز) $\dfrac{\text{ا}'\text{ نع}_{٢}\text{ نع}_{٣}}{\text{نع}_{٢} + \text{نع}_{٣}}$

(ح) نع ا′ قتا $\frac{\text{ا}}{٢}$ جتا $\frac{\text{ب}}{٢}$ جتا $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(ط) $\dfrac{\text{نع نع}_{١}(\text{نع}_{٢} - \text{نع}_{٣})}{\text{ب}' - \text{حـ}'}$

(ى) $\dfrac{\text{نع نع}_{٢}\sqrt{\text{نع}_{١٠} + \text{نع}_{٣}}}{\sqrt{\text{نع}_{٢} - \text{نع}}}$

(ك) نع$_{٢}$ نع$_{٣}$ ظا $\frac{\text{ا}}{٢}$

(ل) نع نع$_{١}$ ظتا $\frac{\text{ا}}{٢}$

(م) نع $\sqrt{\text{نع}_{١}\text{ نع}_{٢} + \text{نع}_{٢}\text{ نع}_{٣} + \text{نع}_{٣}\text{ نع}_{١}}$

برهن على أن الاوضاع الآتية صحيحة

(١٠) نع ح^{٢} = نع$_{١}$ نع$_{٢}$ نع$_{٣}$

(١١) نع$_{١}$ نع$_{٢}$ نع$_{٣}$ = نع^{٣} ظتا^{٢} $\frac{\text{ا}}{٢}$ ظتا^{٢} $\frac{\text{ب}}{٢}$ ظتا^{٢} $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(١٢) ٤ نق نع ح = ا′ ب′ حـ′

(١٣) ٤ نق = نع$_{١}$ + نع$_{٢}$ + نع$_{٣}$ − نع

(١٤) ا′ ب′ حـ′ نع = ٤ نق (ح − ا′) (ح − ب′) (ح − حـ′)

(١٥) نع$_{٣}$ = نع ظتا $\frac{\text{ا}}{٢}$ ظتا $\frac{\text{ب}}{٢}$

(١٦) نع نع$_{١}$ = نع$_{٢}$ نع$_{٣}$ ظا^{٢} $\frac{\text{ا}}{٢}$

(١٧) $\left(\dfrac{\text{نع}_{١}}{\text{نع}} - ١\right)\left(\dfrac{\text{نع}_{٢}}{\text{نع}} - ١\right)\left(\dfrac{\text{نع}_{٣}}{\text{نع}} - ١\right) = \dfrac{\text{٤ نق}}{\text{نع}}$

(١٨) ٢نق جا ا جا ب جا حـ = نع (جا ا + جا ب + جا حـ)

(١٩) نع$_{٢}$ نع$_{٣}$ + نع$_{٣}$ نع$_{١}$ + نع$_{١}$ نع$_{٢}$ = ح^{٢}

(٢٠) $\dfrac{١}{\text{ب}'\text{حـ}'} + \dfrac{١}{\text{حـ}'\text{ا}'} + \dfrac{١}{\text{ا}'\text{ب}'} = \dfrac{١}{\text{٢ نق نع}}$

(٢١) ٤ نق نوه + نوه^{٢} = ا′ ب′ + ب′ حـ′ + حـ′ ا′ − ع^{٢}

(٢٢) $\frac{١}{\text{حـ′ جا ب}} + \frac{١}{\text{ا′ جا حـ}} + \frac{١}{\text{ب′ جا ا}} = \frac{١}{\text{نوه}}$

(٢٣) (ب′ − حـ′) نوه$_{٢}$ نوه$_{٣}$ + (حـ′ − ا′) نوه$_{٣}$ نوه$_{١}$ + (ا′ − ب′) نوه$_{١}$ نوه$_{٢}$ = ٠

(٢٤) اذا فرض ان ∠ ا قائمة فبرهن على أن

نوه$_{٢}$ + نوه$_{٣}$ = ا′

(٢٥) فى المثلث المتساوى الأضلاع برهن على أن

٣ نق = ٦ نوه = ٢ نوه$_{١}$

(٢٦) ٤ ∆ (ظتا ا + ظتا ب + ظتا حـ) = ا′^{٢} + ب′^{٢} + حـ′^{٢}

(٢٧) $\frac{\text{جتا ا}}{\text{ا′}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب′}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{حـ′}} = \frac{\text{ا′ جا ا + ب′ جا ب + حـ′ جا حـ}}{٤\ \triangle}$

(٢٨) ٢ نق (١ − جتا ا) = نوه$_{١}$ − نوه

(٢٩) $\frac{\text{جتا ا}}{\text{حـ′ جا ب}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ا′ جا حـ}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{ب′ جا ا}} = \frac{١}{\text{نق}}$

(٣٠) نوه$_{١}$ (جتا ب − جتا حـ) + نوه$_{٢}$ (جتا حـ − جتا ا) + نوه$_{٣}$ (جتا ا − جتا ب) = ٠

(٣١) $\frac{\text{نوه}_{٣}^{٢}}{\text{٤ نق − نوه}_{١}\text{ − نوه}_{٢}} = \text{نوه}_{٣} + \frac{\text{نوه}_{١}\text{ نوه}_{٢}}{\text{نوه}_{١}\text{ + نوه}_{٢}}$

(٣٢) ا′ ب′ حـ′ + (ا′ − ب′) (ب′ − حـ′) (حـ′ − ا′)

= ٤ نق نوه (ا′ جتا حـ + ب′ جتا ا + حـ′ جتا ب)

(٣٣) ٨ نق^{٢} (١ + جتا ا جتا ب جتا حـ) = ا′^{٢} + ب′^{٢} + حـ′^{٢}

(٣٤) ٨ نق جتا $\frac{ا}{٢}$ جتا $\frac{ب}{٢}$ جتا $\frac{حـ}{٢}$ = ا′ + ب′ + حـ′

(٣٥) اذا فرض ان نوه : نوه$_{١}$ = نوه$_{٢}$: نوه$_{٣}$ فبرهن على أن

حـ = ٩٠°

الباب الثامن والعشرون

ويشتمل على القوانين العامة الوارده فى هذا الكتاب

(بند ٣) ط = ٣٫١٤١٦ أو $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$

(بند ٤) محيط الدائره = ٢ ط نق

(بند ١٩) الزاوية النصف القطرية = $\frac{\text{٢ ق}}{\text{ط}}$

(بند ٢٥) الزاوية النصف القطرية = ٤٤″ ١٧′ ٥٧° تقريباً
الزاوية النصف القطرية = ١٩″ ٦٦′ ٦٣ تقريباً

(بند ٢٦) الزاوية القائمة = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ من الزاوية النصف القطرية

(بند ٣١) ٢ ق = ١٨٠° = ٢٠٠ = ط زوايا نصف قطرية

(بند ٤٧) قتا ح = $\frac{\text{١}}{\text{جا ح}}$ ، قا ح = $\frac{\text{١}}{\text{جتا ح}}$ ، ظتا ح = $\frac{\text{١}}{\text{ظا ح}}$

(بند ٤٨) ظا ح = $\frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}}$ (بند ٤٩) ظتا ح = $\frac{\text{جتا ح}}{\text{جا ح}}$

(بند ٥٠) جا^{٢} ح + جتا^{٢} ح = ١

(بند ٥١) ظا^{٢} ح + ١ = قا^{٢} ح

(بند ٥٢) ١ + ظتا^{٢} ح = قتا^{٢} ح

(بند ٨٠) جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب

(بند ٨١) جتا (ا + ب) = جتا ا جتا ب — جا ا جا ب

(بند ٨٢) جا (ا — ب) = جا ا جتا ب — جتا ا جا ب

(بند ٨٣) جتا (ا — ب) = جتا ا جتا ب + جا ا جا ب

(بند ٨٦) ظا (ا + ب) = $\frac{\text{ظا ا + ظا ب}}{\text{١ — ظا ا ظا ب}}$ (بند ٨٧) ظا (ا — ب) = $\frac{\text{ظا ا — ظا ب}}{\text{١ + ظا ا ظا ب}}$

(بند ٩٤)
جا (ا + ب) + جا (ا — ب) = ٢ جا ا جتا ب
جا (ا + ب) — جا (ا — ب) = ٢ جتا ا جا ب
جتا (ا — ب) + جتا (ا + ب) = ٢ جتا ا جتا ب
جتا (ا — ب) — جتا (ا + ب) = ٢ جا ا جا ب

(بند ٩٥)

جا ح + جا ء = ٢ جا $\frac{\text{ح} + \text{ء}}{٢}$ جتا $\frac{\text{ح} - \text{ء}}{٢}$

جا ح − جا ء = ٢ جتا $\frac{\text{ح} + \text{ء}}{٢}$ جا $\frac{\text{ح} - \text{ء}}{٢}$

جتا ء + جتا ح = ٢ جتا $\frac{\text{ح} + \text{ء}}{٢}$ جتا $\frac{\text{ح} - \text{ء}}{٢}$

جتا ء − جتا ح = ٢ جا $\frac{\text{ح} + \text{ء}}{٢}$ جا $\frac{\text{ح} - \text{ء}}{٢}$

(بند ١٠٨) جا ٢ ح = ٢ جا ح جتا ح

(بند ١٠٩)

جتا ٢ ح = جتا^{٢} ح − جا^{٢} ح

جتا ٢ ح = ٢ جتا^{٢} ح − ١

جتا ٢ ح = ١ − ٢ جا^{٢} ح

(بند ١١٠) ظا ٢ ح = $\frac{\text{٢ ظا ح}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ح}}$

(بند ١١٣)

جا ح = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ − جتا ٢ ح}}{٢}\right)}$

جتا ح = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ + جتا ٢ ح}}{٢}\right)}$

ظا ح = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ − جتا ٢ ح}}{\text{١ + جتا ٢ ح}}\right)}$

(بند ١١٢)

جا ح = ٢ جا $\frac{\text{ح}}{٢}$ جتا $\frac{\text{ح}}{٢}$

جتا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = جتا^{٢} $\frac{\text{ح}}{٢}$ − جا^{٢} $\frac{\text{ح}}{٢}$

جتا ح = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{ح}}{٢}$ − ١

جتا ح = ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\text{ح}}{٢}$

ظا ح = $\frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{ح}}{٢}}{\text{١ − ظا}^{٢} \frac{\text{ح}}{٢}}$

(بند ١١٤)

جا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ − جتا ح}}{٢}\right)}$

جتا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ + جتا ح}}{٢}\right)}$

ظا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\left(\frac{\text{١ − جتا ح}}{\text{١ + جتا ح}}\right)}$

(بند ١١٥) ظا ح = $\frac{\text{جا ٢ ح}}{\text{١ + جتا ٢ ح}}$ = $\frac{\text{١ − جتا ٢ ح}}{\text{جا ٢ ح}}$

(بند ١١٦) ظا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\frac{\text{جا ح}}{\text{١ + جتا ح}}$ = $\frac{\text{١ − جتا ح}}{\text{جا ح}}$

(بند ١١٧)

جا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $\left\{\pm\sqrt{\text{١ + جا ح}} \pm \sqrt{\text{١ − جا ح}}\right\}$

جتا $\frac{\text{ح}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $\left\{\pm\sqrt{\text{١ + جا ح}} \mp \sqrt{\text{١ − جا ح}}\right\}$

(بند ١١٩)

جا ٣ حـ = ٣ جا حـ − ٤ جا^{٣} حـ

جتا ٣ حـ = ٤ جتا^{٣} حـ − ٣ جتا حـ

ظا ٣ حـ = $\frac{\text{٣ ظا حـ − ظا}^{٣}\text{ حـ}}{\text{١ − ٣ ظا}^{٢}\text{ حـ}}$

(بند ١٢٤)

جا (− حـ) = − جا حـ ، جتا (− حـ) = جتا حـ ، ظا (− حـ) = − ظا حـ

قتا (− حـ) = − قتا حـ ، قا (− حـ) = قا حـ ، ظتا (− حـ) = − ظتا حـ

(بند ١٢٥)

جا (٩٠° − حـ) = جتا حـ ، قتا (٩٠° − حـ) = قا حـ

جتا (٩٠° − حـ) = جا حـ ، قا (٩٠° − حـ) = قتا حـ

ظا (٩٠° − حـ) = ظتا حـ ، ظتا (٩٠° − حـ) = ظا حـ

(بند ١٢٦)

جا (١٨٠° − حـ) = جا حـ ، قتا (١٨٠° − حـ) = قتا حـ

جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ ، قا (١٨٠° − حـ) = − قا حـ

ظا (١٨٠° − حـ) = − ظا حـ ، ظتا (١٨٠° − حـ) = − ظتا حـ

(بند ١٢٧)

جا (٢٧٠° − حـ) = − جتا حـ ، قتا (٢٧٠° − حـ) = − قا حـ

جتا (٢٧٠° − حـ) = − جا حـ ، قا (٢٧٠° − حـ) = − قتا حـ

ظا (٢٧٠° − حـ) = ظتا حـ ، ظتا (٢٧٠° − حـ) = ظا حـ

(بند ١٢٨)

جا (٣٦٠° − حـ) = − جا حـ ، قتا (٣٦٠° − حـ) = − قتا حـ

جتا (٣٦٠° − حـ) = جتا حـ ، قا (٣٦٠° − حـ) = قا حـ

ظا (٣٦٠° − حـ) = − ظا حـ ، ظتا (٣٦٠° − حـ) = − ظتا حـ

(بند ١٢٩)

جا (٩٠° + حـ) = جتا حـ ، قتا (٩٠° + حـ) = قا حـ

جتا (٩٠° + حـ) = − جا حـ ، قا (٩٠° + حـ) = − قتا حـ

ظا (٩٠° + حـ) = − ظتا حـ ، ظتا (٩٠° + حـ) = − ظا حـ

(بند ١٣٠)

جا (١٨٠° + حـ) = − جا حـ ، قتا (١٨٠° + حـ) = − قتا حـ

جتا (١٨٠° + حـ) = − جتا حـ ، قا (١٨٠° + حـ) = − قا حـ

ظا (١٨٠° + حـ) = ظا حـ ، ظتا (١٨٠° + حـ) = ظتا حـ

(بند ١٣١)

جا (٢٧٠° + حـ) = − جتا حـ ، قتا (٢٧٠ + حـ) = − قا حـ

جتا (٢٧٠° + حـ) = جا حـ ، قا (٢٧٠° + حـ) = قتا حـ

ظا (٢٧٠° + حـ) = − ظتا حـ ، ظتا (٢٧٠ + حـ) = − ظا حـ

(بند ١٤٩) لو$_{\text{حـ}}$ م ن = لو$_{\text{حـ}}$ م + لو$_{\text{حـ}}$ ن (بند ١٥٠) لو$_{\text{حـ}}$ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ = لو$_{\text{حـ}}$ م − لو$_{\text{حـ}}$ ن

(بند ١٥١) $\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{هـ}} = \text{هـ}\;\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ا}$

(بند ١٥٢) $\text{لو}_{\text{م}}\sqrt[\text{هـ}]{\text{ا}} = \dfrac{\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ا}}{\text{هـ}}$

(بند ١٥٨) $\text{لو}_{\text{ء}}\,\text{ا} = \dfrac{\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ا}}{\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ء}}$

(بند ١٧٢) $\dfrac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{ح}'}{\text{جا ح}}$

(بند ١٧٣)
$$\text{ا}' = \text{ب}'\,\text{جتا ح} + \text{ح}'\,\text{جتا ب}$$
$$\text{ب}' = \text{ا}'\,\text{جتا ح} + \text{ح}'\,\text{جتا ا}$$
$$\text{ح}' = \text{ا}'\,\text{جتا ب} + \text{ب}'\,\text{جتا ا}$$

(بند ١٧٤)
$$\text{ا}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - ٢\,\text{ب}'\,\text{ح}'\,\text{جتا ا}$$
$$\text{ب}'^{٢} = \text{ح}'^{٢} + \text{ا}'^{٢} - ٢\,\text{ح}'\,\text{ا}'\,\text{جتا ب}$$
$$\text{ح}'^{٢} = \text{ا}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - ٢\,\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{جتا ح}$$

(بند ١٧٥)
$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\,\text{ب}'\,\text{ح}'}$$
$$\text{جتا ب} = \frac{\text{ح}'^{٢} + \text{ا}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{٢\,\text{ح}'\,\text{ا}'}$$
$$\text{جتا ح} = \frac{\text{ا}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{ح}'^{٢}}{٢\,\text{ا}'\,\text{ب}'}$$

(بند ١٧٦)
$$(\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}') = ٢\,\text{ع}$$
$$\text{ع} = \frac{\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}'}{٢}$$
$$(\text{ا}' + \text{ب}' - \text{ح}') = ٢\,(\text{ع} - \text{ح}')$$
$$(\text{ح}' + \text{ا}' - \text{ب}') = ٢\,(\text{ع} - \text{ب}')$$
$$(\text{ب}' + \text{ح}' - \text{ا}') = ٢\,(\text{ع} - \text{ا}')$$

(بند ١٧٧)
$$\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{ح}')}{\text{ب}'\,\text{ح}'}}$$
$$\text{جا}\,\frac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ح}')(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ح}'\,\text{ا}'}}$$
$$\text{جا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ا})(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{ا}'\,\text{ب}'}}$$

(بند ١٧٨)

$$\text{جتا}\ \tfrac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ب}'\,\text{حـ}'}}$$

$$\text{جتا}\ \tfrac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{\text{ع}(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{حـ}'\,\text{ا}'}}$$

$$\text{جتا}\ \tfrac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{\text{ع}(\text{ع} - \text{حـ}')}{\text{ا}'\,\text{ب}'}}$$

(بند ١٧٩)

$$\text{ظا}\ \tfrac{\text{ا}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')}}$$

$$\text{ظا}\ \tfrac{\text{ب}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ا}')}{\text{ع}(\text{ع} - \text{ب}')}}$$

$$\text{ظا}\ \tfrac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{ع}(\text{ع} - \text{حـ}')}}$$

(بند ١٨٠)

$$\text{جا ا} = \frac{٢}{\text{ب}'\,\text{حـ}'}\sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')} = \frac{٢\,\triangle}{\text{ب}'\,\text{حـ}'}$$

$$\text{جا ب} = \frac{٢}{\text{حـ}'\,\text{ا}'}\sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')} = \frac{٢\,\triangle}{\text{حـ}'\,\text{ا}'}$$

$$\text{جا حـ} = \frac{٢}{\text{ا}'\,\text{ب}'}\sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')} = \frac{٢\,\triangle}{\text{ا}'\,\text{ب}'}$$

(بند ١٨١)

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢} = \frac{\text{ب}' - \text{حـ}'}{\text{ب}' + \text{حـ}'}\ \text{ظتا}\ \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

$$\text{ظا}\ \frac{\text{حـ} - \text{ا}}{٢} = \frac{\text{حـ}' - \text{ا}'}{\text{حـ}' + \text{ا}'}\ \text{ظتا}\ \tfrac{\text{ب}}{٢}$$

$$\text{ظا}\ \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} = \frac{\text{ا}' - \text{ب}'}{\text{ا}' + \text{ب}'}\ \text{ظتا}\ \tfrac{\text{حـ}}{٢}$$

(بند ٢٠٩)

$$\text{مساحة المثلث} = \text{س} = \tfrac{١}{٢}\,\text{ب}'\,\text{حـ}'\ \text{جا ا}$$

$$= \tfrac{١}{٢}\,\text{حـ}'\,\text{ا}'\ \text{جا ب}$$

$$= \tfrac{١}{٢}\,\text{ا}'\,\text{ب}'\ \text{جا حـ}$$

(بند ٢١٠) مساحة المثلث $= \sqrt{\text{ع}\left(\text{ع} - \text{ا}'\right)\left(\text{ع} - \text{ب}'\right)\left(\text{ع} - \text{حـ}'\right)}$

(بند ٢١١) $\text{نق} = \frac{\text{ا}'}{\text{٢ جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{٢ جا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{٢ جا حـ}} = \frac{\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'}{\text{٤ س}} = \frac{\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'}{\text{٤}\triangle}$

(بند ٢١٢)

$$\text{نو} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{\triangle}{\text{ع}}$$

$$= \left(\text{ع} - \text{ا}'\right) \text{ظا} \tfrac{\text{ا}}{٢} = \left(\text{ع} - \text{ب}'\right) \text{ظا} \tfrac{\text{ب}}{٢} = \left(\text{ع} - \text{حـ}'\right) \text{ظا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}$$

$$= \text{ا}' \frac{\text{جا} \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{جا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}} = \text{ب}' \frac{\text{جا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} \text{جا} \tfrac{\text{ا}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢}} = \text{حـ}' \frac{\text{جا} \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{جا} \tfrac{\text{ب}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}}$$

$$= \text{٤ نق جا} \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{جا} \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{جا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}$$

(بند ٢١٣)

$$\text{نو}_{١} = \frac{\text{س}}{\text{ع} - \text{ا}'} = \frac{\triangle}{\text{ع} - \text{ا}'} = \text{ع ظا} \tfrac{\text{ا}}{٢} = \text{ا}' \frac{\text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}}$$

$$= \left(\text{ع} - \text{حـ}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{ب}}{٢} = \left(\text{ع} - \text{ب}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}$$

$$= \text{٤ نق جا} \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}$$

$$\text{نو}_{٢} = \frac{\text{س}}{\text{ع} - \text{ب}'} = \frac{\triangle}{\text{ع} - \text{ب}'} = \text{ع ظا} \tfrac{\text{ب}}{٢} = \text{ب}' \frac{\text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢}}$$

$$= \left(\text{ع} - \text{ا}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} = \left(\text{ع} - \text{حـ}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

$$= \text{٤ نق جا} \tfrac{\text{ب}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

$$\text{نو}_{٣} = \frac{\text{س}}{\text{ع} - \text{حـ}'} = \frac{\triangle}{\text{ع} - \text{حـ}'} = \text{ع ظا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} = \text{حـ}' \frac{\text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢}}{\text{جتا} \tfrac{\text{حـ}}{٢}}$$

$$= \left(\text{ع} - \text{ا}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{ب}}{٢} = \left(\text{ع} - \text{ب}'\right) \text{ظتا} \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

$$= \text{٤ نق جا} \tfrac{\text{حـ}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ا}}{٢} \text{جتا} \tfrac{\text{ب}}{٢}$$

تمّ الجزء الاوّل ويليه الجزء الثانى

أوّله المساقط

حساب المثلثات

المستوية

الجزء الثاني

تأليف

محمد خالد حسنين

مساعد المفتش بنظارة المعارف العمومية

(قررت نظارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب بمدارسها)

(الطبعة الاولى)

مطبعة المعارف بشارع الفجالة بمصر

١٩١٣

مواد الجزء الثانى

حساب المثلثات

المستوية

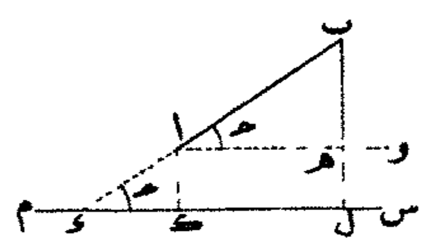
الجزء الثانى

الباب الأول

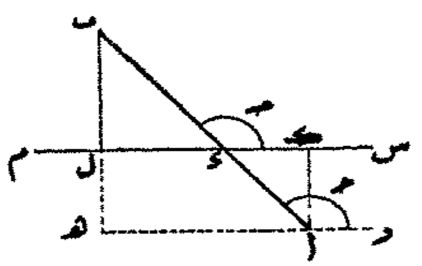
فى المساقط

بند ١ — علمنا فى الباب الثالث عشر من الجزء الاول كيفية ايجاد قوانين النسب المثلثيـة لمجموع زاويتين والفرق بينهما فارضين ان كلا من الزاويتين ومجموعهما والفرق بينهما أقل من قائمة واتبعنا فى اثبات هذه القوانين الطرق الهندسية البحتة والآن نشرع فى اثبات هذه القوانين بطرق اخرى جديرة بالذكر لسهولتها ولاهميتها فى علم حساب المثلثات وهذه الاثباتات الجديدة مؤسسة على خواص المساقط وتعم جميع الزوايا مهما كان مقدارها

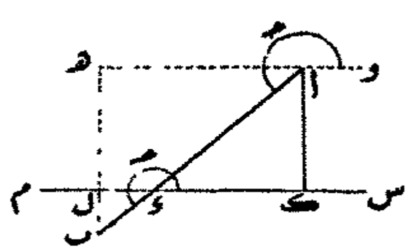
بند٢ — (تعريف) اذا أنزلنا من نهايتى مستقيم معلوم ا ب العمودين ا ك ، ب ل على مستقيم آخر مفروض م س يقال للنقطتين ك ، ل مسقطا ا ، ب على م س ويقال للمستقيم ك ل مسقط



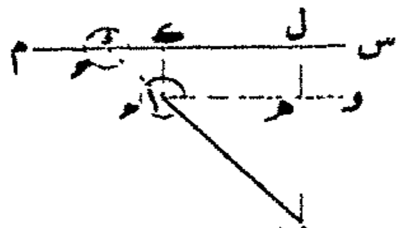
(شكل ١)



(شكل ٢)



(شكل ٣)



(شكل ٤)

ا ب على م س سواء تقاطع ا ب ، م س أو لم يتقاطعا ففى شكلى (٢ ، ٣) لا يزال ك ل مسقط ا ب على م س

بند ٣ — ويقال لزاوية حـ المبينة فى كل حالة من الحالات الاربع زاوية ميل المستقيم ا ب على م س

(ملاحظة) اذا كان المسقط ك ل فى اتجاه م س كما فى شكلى (١ ، ٤) يعتبر موجباً واذا كان فى اتجاه يضاد اتجاه م س كما فى شكلى (٢ ، ٣) يعتبر سالباً

بند ٤ — (نظرية) طول مسقط أى مستقيم على مستقيم آخر مفروض يساوى حاصل ضرب المستقيم الذى يراد ايجاد مسقطه فى جيب تمام زاوية الميل التى بين المستقيمين

(البرهان) هذه النظرية عامة وتتحقق بأى وضع يأخذه المستقيم الذى يراد ايجاد مسقطه وذلك لان فى كل شكل من الاشكال الاربعة السابقة

$$\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}} = \text{جتا حـ}$$ (على حسب تعريف جيب التمام)

فيكون ا هـ = ا ب جتا حـ

أو ك ل = ا ب جتا حـ وهو المطلوب

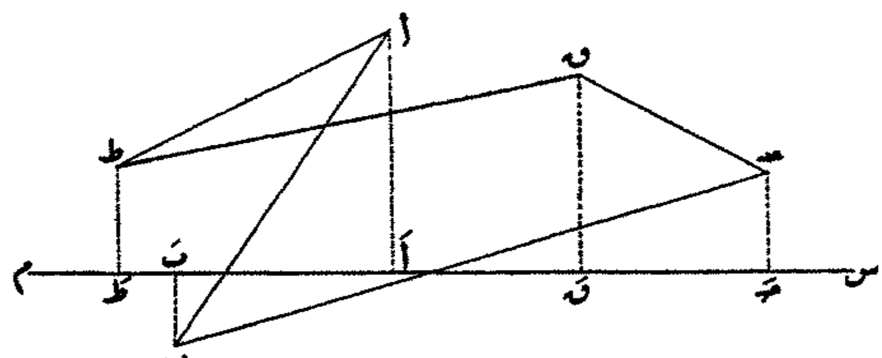
بند ٥ — (نتيجة) اذا كانت حـ زاوية ميل المستقيم ا ب على م س يكون مسقط ا ب على أى مستقيم عمودى على م س هو ا ب جا حـ باعتبار ان الاتجاه الموجب لهذا العمود هو الاتجاه الذى يأخذه عند ما تكون الزاوية القائمة الحادثة موجبة

(البرهان) هذه النتيجة عامة وذلك لان فى كل شكل من الاشكال الاربعة السابقة

$$\frac{\text{هـ ب}}{\text{ا ب}} = \text{جا حـ}$$ (على حسب تعريف الجيب)

ومنه هـ ب = ا ب جا حـ وهو المطلوب

بند ٦ — (نظرية) مجموع مساقط المستقيمات الجزئية المكونة لمستقيم منكسر على مستقيم مفروض يساوى مسقط المستقيم الذى يصل طرفيه على هذا المستقيم المفروض



(شكل ٥)

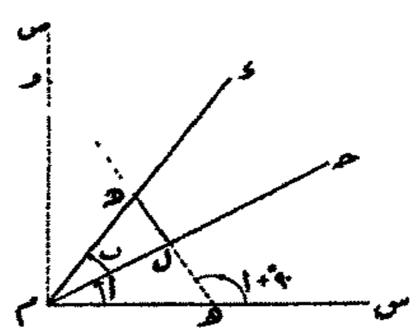
(البرهان) مسقط ط ا هو ط′ ا′
، مسقط ا ب هو ا′ ب′
، مسقط ب ح هو ب′ ح′
، مسقط ح ى هو ح′ ى′

وبالجمع يكون مجموع مساقط المستقيمات الجزئية = ط′ ا′ + ا′ ب′ + ب′ ح′ + ح′ ى′
= ط′ ا′ − ب′ ا′ + ب′ ح′ − ى′ ح′
= ط′ ى′
= مسقط ط ى على م س وهو المطلوب

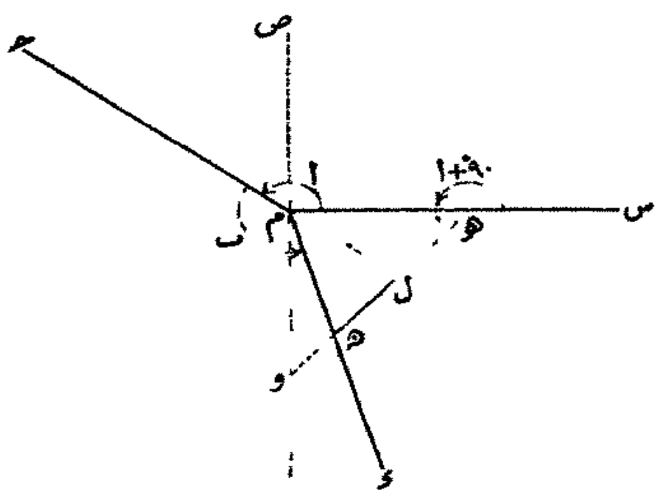
بند ٧ — (نتيجة) اذا أخذت اضلاع مضلع بالترتيب فان مجموع مساقطها على مستقيم مفروض يساوى صفراً

(البرهان) الشكل ط ا ب ح ى مضلع
وسبق ان علمنا أن مجموع مساقط المستقيمات ط ا ، ا ب ، ب ح ، ح ى = ط′ ى′
ولكن مسقط الضلع ى ط = ى′ ط′ = − ط′ ى′
اذن مجموع مساقط جميع اضلاع المضلع المفروض = ط′ ى′ − ط′ ى′
= صفراً وهو المطلوب

بند ٤ — برهن بواسطة المساقط على أن
جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب



(شكل ٦)



(شكل ٧)

(البرهان) نفرض ان الزاوية س م حـ (شكلى ٦ و ٧) مقدارها ا وان الزاوية حـ م ى مقدارها ب فتكون الزاوية س م ى عبارة عن الزاوية (ا + ب)

ثم نأخذ نقطة ن على الضلع م ى ونرسم منها ن ل عموداً على م حـ ونمد ن ل من طرفيه الى أن يقابل م س فى هـ و م ص فى و

وبأخذ مساقط المستقيمات الآتية على م ص

فيكون مسقط م ن = مسقط م ل + مسقط ل ن

وبما أن م ص عمود على م س

يكون م ن جا س م ى = م ل جا س م حـ + ل ن جا ن هـ س

أو م ن جا (ا + ب) = م ل جا ا + ل ن جا (٩٠° + ا)

اذن م ن جا (ا + ب) = م ل جا ا + ل ن جتا ا

وبقسمة طرفى المتساوية الأخيرة على م ن ينتج أن

$$\text{جا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \text{جا ا} \times \frac{\text{م ل}}{\text{م ن}} + \text{جتا ا} \times \frac{\text{ل ن}}{\text{م ن}}$$

$$= \text{جا ا جتا ب} + \text{جتا ا جا ب}$$ وهو المطلوب

بند ٩ – المطلوب البرهنة بواسطة المساقط على أن

جتا (ا + ب) = جتا ا جتا ب – جا ا جا ب

(البرهان) فى شكلى (٦ و ٧) نأخذ مساقط المستقيمات الآتية على م س

فيكون مسقط م ن = مسقط م ل + مسقط ل ن

أى ان م ن جتا س م ى = م ل جتا س م حـ + ل ن جتا ن هـ س

أو م ن جتا (ا + ب) = م ل جتا ا + ل ن جتا (٩٠° + ا)

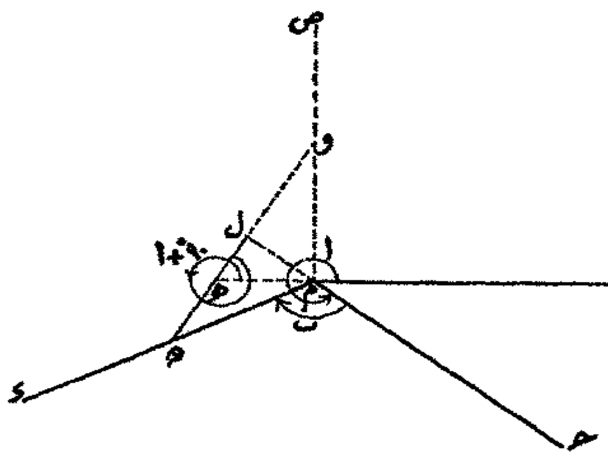
اذن م ن جتا (ا + ب) = م ل جتا ا – ل ن جا ا

وبقسمة طرفى المتساوية الأخيرة على م ن ينتج أن

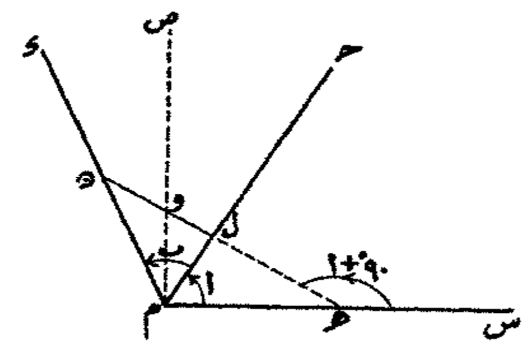
$$\text{جتا}\,(\text{ا} + \text{ب}) = \text{جتا ا} \times \frac{\text{م ل}}{\text{م ن}} - \text{جا ا} \times \frac{\text{ل ن}}{\text{م ن}}$$

$$= \text{جتا ا جتا ب} - \text{جا ا جا ب}$$ وهو المطلوب

(ملاحظة) البرهانان المذكوران فى بندى (٨ و ٩) عامان ويصلح تطبيقهما لجميع مقادير الزوايا كما فى الشكلين الآتيين



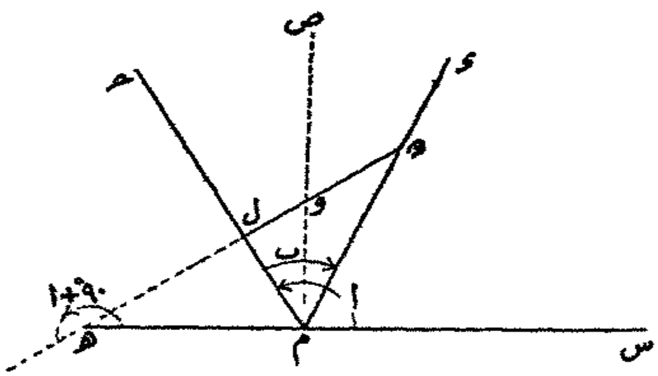
(شكل ٩)



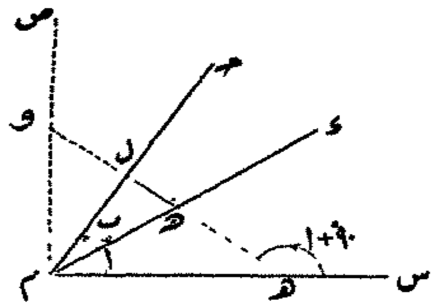
(شكل ٨)

بند ١٠ — برهن بواسطة المساقط على أن

جا (ا — ب) = جا ا جتا ب — جتا ا جا ب



(شكل ١١)



(شكل ١٠)

(البرهان) نفرض أن الزاوية س م ح شكلى (١٠، ١١) مقدارها ا وان الزاوية ى م ح مقدارها ب ثم نأخذ نقطة ن على الضلع م ى ونرسم منها ن ل عموداً على م ح ونمد ن ل من طرفيه الى أن يقابل م س فى هـ ، م ص فى و

ففى الشكل الزاوية س م ى عبارة عن الزاوية (ا — ب) والزاوية س هـ ل = (٩٠° + ا) والزاوية ح م ى = (— ب)

و بأخذ مساقط المستقيمات الآتيه على م ص المرسوم عموداً على م س

يكون مسقط م ل = مسقط م ن + مسقط ن ل

اى ان مسقط م ن = مسقط م ل مسقط ن ل

و يكون م ن جا س م ى = م ل جا س م ح — ن ل جا س هـ ن

أى ان م ن جا (ا — ب) = م ل جا س م ح — ن ل جا (٩٠° + ا)

اذن م ه جا (ا — ب) = م ل جا ا — ه ل جتا ا

وبقسمة طرفى المتساوية الأخيرة على م ه ينتج أن

$$\text{جا}\,(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}}\,\text{جا ا} - \frac{\text{ه ل}}{\text{م ه}}\,\text{جتا ا}$$

= جا ا جتا ب — جتا ا جا ب وهو المطلوب

بند ١١ — برهن بواسطة المساقط على أن

جتا (ا — ب) = جتا ا جتا ب + جا ا جا ب

(البرهان) فى شكلى (١٠ ، ١١) نأخذ مساقط المستقيمات الآتية على م س

يكون مسقط م ل = مسقط م ه + مسقط ه ل

أى ان مسقط م ه = مسقط م ل — مسقط ل ه

ويكون م ه جتا س م ى = م ل جتا س م ح — ل ه جتا س ه ه

أى ان م ه جتا (ا — ب) = م ل جتا ا — ل ه جتا (٩٠° + ا)

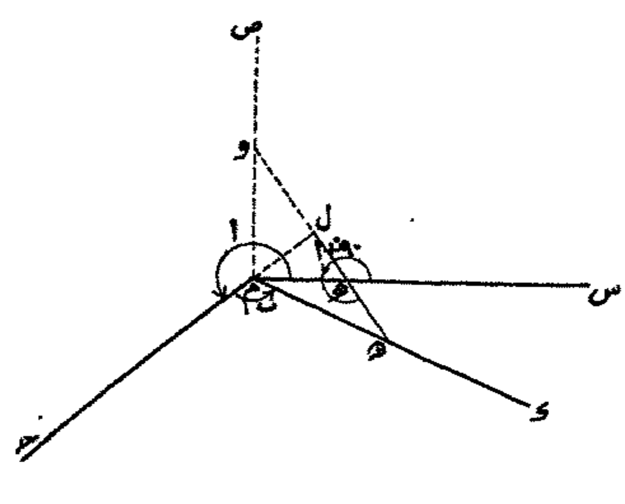
اذن م ه جتا (ا — ب) = م ل جتا ا + ل ه جا ا

وبقسمة طرفى المتساوية الأخيرة على م ه ينتج أن

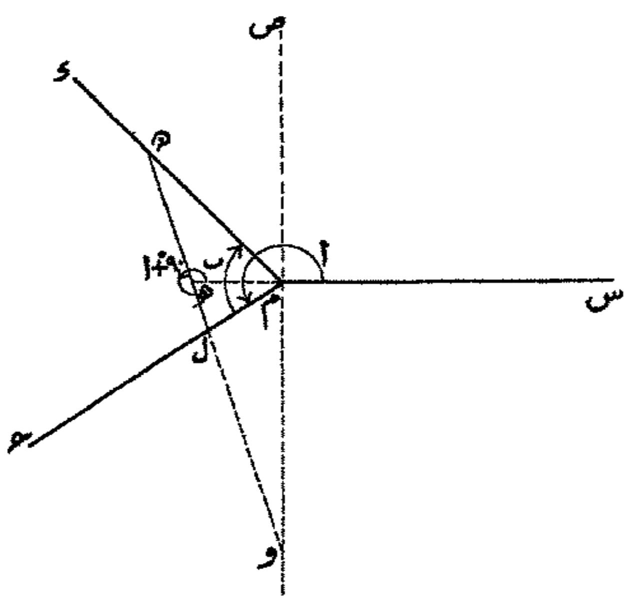
$$\text{جتا}\,(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}}\,\text{جتا ا} + \frac{\text{ل ه}}{\text{م ه}}\,\text{جا ا}$$

= جتا ا جتا ب + جا ا جا ب وهو المطلوب

(ملاحظة) البرهانان المذكوران فى بندى (١٠ ، ١١) عامان ويصلح تطبيقهما لجميع مقادير الزوايا كما فى الشكلين الآتيين



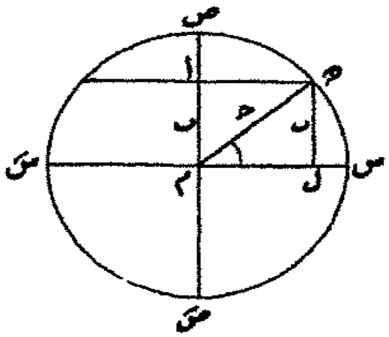
(شكل ١٢)



(شكل ١٣)

البـــاب الثانى

فى القوانين العامة للزوايا التى تشترك فى نسبة مثلثية معلومة



(شكل ١٤)

بند١٢ — المطلوب رسم أقل زاوية موجبة جيبها يساوى $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

(العمل) نركز فى نقطة مثل م (شكل ١٤) ونرسم دائرة نصف قطرها يساوى حـ من وحدات و بعد أن نعين فى هذه الدائرة الاربعة الارباع الاساسية نأخذ على م ص البعد م ا = ب وحدات ونرسم من ا مستقيما يوازى س سَ و يقطع محيط الدائرة فى ه فتكون ∠ س م ه هى الزاوية المطلوبة

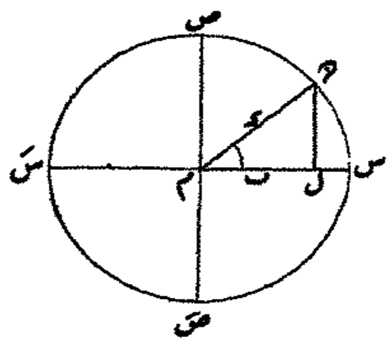
(البرهان) ننزل من ه المستقيم ه ل عموداً على م س

فيكون ه ل = ا م = ب وحدات

$$\text{ويكون جا س م ه} = \frac{\text{ه ل}}{\text{م ه}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$$

اذن ∠ س م ه هى الزاوية المطلوبة

بند١٣ — المطلوب رسم اقل زاوية موجبة جيب تمامها يساوى $\frac{\text{ب}}{\text{ى}}$



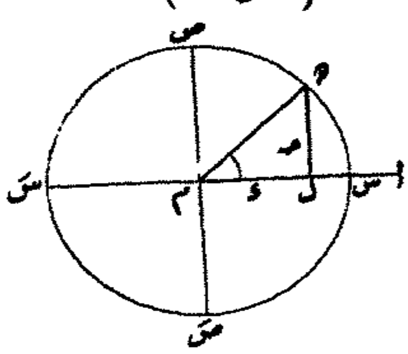
(شكل ١٥)

(العمل) نرسم دائرة مركزها م (شكل ١٥) بنصف قطر يساوى ى وحدات ثم نأخذ على م س البعد م ل يساوى ب وحدات ونرسم من ل عموداً على م س يقطع محيط الدائرة فى ه فتكون ∠ س م ه هى الزاوية المطلوبة

$$\text{(البرهان) جتا س م ه} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}} = \frac{\text{ب}}{\text{ى}}$$

اذن ∠ س م ه هى الزاوية المطلوبة

بند١٤ — المطلوب رسم أقل زاوية موجبة ظلها يساوى $\frac{\text{حـ}}{\text{ى}}$



(شكل ١٦)

(العمل) نفرض المستقيم ا م (شكل ١٦) ونأخذ عليه البعد م ل = ى وحدات ونرسم من ل عموداً على م ا طوله حـ وحدات مثل ل ه ثم نركز فى م و بنصف قطر يساوى م ه نرسم دائرة تقطع م ا فى س فتكون ∠ س م ه هى الزاوية المطلوبة

$$\text{(البرهان) ظا س م ه} = \frac{\text{ه ل}}{\text{م ل}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ى}}$$

اذن ∠ س م ﻫ هى الزاوية المطلوبة

(ملاحظة) بطرق مماثلة للطرق المذكورة فى بند ١٢ ، ١٣ ، ١٤ يمكن رسم الزاوية اذا علم قاطع تمامها أو قاطعها أو ظل تمامها

بند ١٥ — قد يظن الطالب من العمليات الثلاث السابقة ان فى استطاعته تعيين الزاوية اذا علمت احدى نسبها المثلثية وهذا بعيد عن الحقيقة لاننا فى هذه العمليات لم نعين الا أقل زاوية موجبة وهذه واحدة من عدة زوايا تفوق الحصر

نعم اذا علمت الزاوية امكن تعيين اى نسبة من نسبها المثلثية ولكن العكس لا يطرد فاذا علمت النسبة المثلثية لا تتعين الزاوية لان هنالك زوايا لا عدد لها تتحقق بالنسبة المثلثية المعلومة فمثلا كل من الزوايا ٣٠° ، ١٥٠° ، ٣٩٠° ، — ٢١٠° ، .... جيبها = ½ فاذا اريد تعيين الزاوية التى جيبها = ½ فلا يمكن ابداً تعيين الزاوية المطلوبة اذ هى واحدة من جملة زوايا لا نهاية لعددها ولما كان من الضرورى تعيين الزوايا بعد معرفة نسبها المثلثية لزم ان نبحث فى ايراد قوانين عامة تشتمل على جميع الزوايا التى تشترك فى نسبة مثلثية معلومة

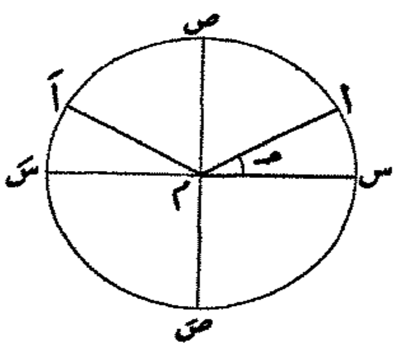
بند ١٦ — (تعريف) يقال لاقل زاوية موجبة نسبتها المثلثية تساوى النسبة المعلومة الزاوية الاولية الموجبة ويقال لاقل زاوية سالبة نسبتها المثلثية تساوى النسبة المعلومة الزاوية الاولية السالبة

بند ١٧ — المطلوب ايجاد القانون العام للزوايا التى تشترك فى الجيب

(العمل) نرسم ∠ س م ا (شكل١٧) اقل زاوية موجبة جيبها يساوى الجيب المعلوم ونرمز اليها بالرمز ﺣ وتفرض ان م ا أخذ يتحرك فى الجهة الموجبة حول م الى ان أخذ الوضع م ا′

∠ س م ا′ = ط − ﺣ

ويكون جيب ∠ س م ا′ = جيب فاصبحت ∠ س م ا = الجيب المعلوم



(شكل ١٧)

واذا استمر الخط الدائر فى الدوران الى ان قطع دورة كاملة فلا يوجد فى الدورة الاولى خلاف زاوية ﺣ ، زاوية ط − ﺣ جيبها يساوى الجيب المعلوم

ثم اذا استمر الخط الدائر فى الدوران دورة ثانية وثالثة و .... سواء كان ذلك فى الجهة الموجبة أو السالبة فكلما أخذ الوضع م ا أو م ا′ كان جيب الزاوية الناتجة يساوى الجيب المعلوم

وعند ما يأخذ الخط الدائر الوضع م ا تكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

ﺣ ، ٢ ط + ﺣ ، ٤ ط + ﺣ ، ٦ ط + ﺣ ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

− ٢ ط + ﺣ ، − ٤ ط + ﺣ ، − ٦ ط + ﺣ ، ....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

٢ ن ط + ﺣ .... (١)

بفرض أن ں تساوى صفراً أو أى عدد صحيح موجب أو سالب
وعندما يأخذ الخط الدائر الوضع م ا´ تكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

ط — ح ، ٣ ط — ح ، ٥ ط — ح ، ٧ ط — ح ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

— ط — ح ، — ٣ ط — ح ، — ٥ ط — ح ، — ٧ ط — ح ، ....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

(٢ ں + ١) ط — ح .... (٢)

بفرض ان ں تساوى صفراً أو اى عدد صحيح موجب أو سالب
ويمكن الجمع بين قانونى (١) ، (٢) فى القانون

ه ط + (— ١)^ه ح .... (٣)

بفرض ان ه تساوى صفراً أو أى عدد صحيح موجب أو سالب

(ملاحظة) لما كانت الزوايا التى تشترك فى الجيب تشترك كذلك فى قاطع التمام كان القانون (٣) يشتمل أيضاً على جميع الزوايا التى قاطع تمامها يساوى قاطع تمام زاوية ح

بند ١٨ — مسائل تطبيقية

(مثال ١) المطلوب حل المعادلة جا ح = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(الحل) نعلم ان جا ح = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فتكون الزاوية الاولية الموجبة = ٦٠° = $\frac{ط}{٣}$

اذن ح = ه ط + (— ١)^ه $\frac{ط}{٣}$

(مثال ٢) المطلوب حل المعادلة جا ح = — $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(الحل) نعلم أن جا ح = — $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فتكون الزاوية الاولية الموجبة = ٢٤٠° = $\frac{٤ ط}{٣}$

اذن ح = ه ط + (— ١)^ه $\frac{٤ ط}{٣}$

مثال ٣) المطلوب حل المعادلة قتا^٢ ح = $\frac{٤}{٣}$

(الحل) نعلم أن $\text{قتا}^2\,\text{ح} = \frac{٤}{٣}$

فيكون $\text{جا}^2\,\text{ح} = \frac{٣}{٤}$

و $\text{جا ح} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فاذا كان $\text{جا ح} = + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

كانت الزاوية الاوّلية الموجبة $= ٦٠^\circ = \frac{\text{ط}}{٣}$

واذن $\text{ح} = \text{ن ط} + (-١)^{\text{ن}} \frac{\text{ط}}{٣}$ .... (١)

واذا كان $\text{جا ح} = - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

كانت الزاوية الاوّلية السالبة $= -٦٠^\circ = - \frac{\text{ط}}{٣}$

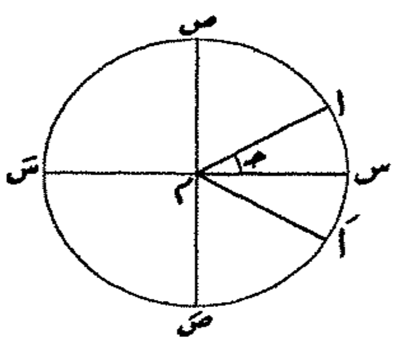
واذن $\text{ح} = \text{ن ط} + (-١)^{\text{ن}} \left(- \frac{\text{ط}}{٣}\right)$ .... (٢)

وبوضع قانونى (١) و (٢) فى قانون واحد

تكون $\text{ح} = \text{ن ط} \pm (-١)^{\text{ن}} \frac{\text{ط}}{٣}$

أى ان $\text{ح} = \text{ن ط} \pm \frac{\text{ط}}{٣}$

بند ١٩ — المطلوب ايجاد القانون العام للزوايا التى تشترك فى جيب التمام



(شكل ١٨)

(العمل) نرسم ∠ س م ا اقل زاوية موجبة جيب تمامها يساوى جيب التمام المعلوم ونرمز اليها بالرمز ح ونفرض ان م ا أخذ يتحرك فى الجهة الموجبة حول م الى أن أخذ الوضع م اَ واصبحت ∠ س م اَ $= ٢\,\text{ط} - \text{ح}$

فيكون جيب تمام ∠ س م اَ = جيب تمام ∠ س م ا

= جيب التمام المعلوم

واذا استمر الخط الدائر فى الدوران الى ان قطع دورة كاملة فلا يوجد فى الدورة الاولى خلاف زاوية ح و زاوية $٢\,\text{ط} - \text{ح}$ جيب تمامها يساوى جيب التمام المعلوم ثم اذا استمر الخط الدائر فى الدوران دورة ثانية وثالثة و .... سواء كان ذلك فى الجهة الموجبة أو السالبة فكلما اخذ الوضع م ا أو م اَ كان جيب تمام الزاوية الناتجة يساوى جيب التمام المعلوم

وعند ما يأخذ الخط الدائر الوضع م ا تكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

ح ، $٢\,\text{ط} + \text{ح}$ ، $٤\,\text{ط} + \text{ح}$ ، $٦\,\text{ط} + \text{ح}$ ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

— ٢ ط + حـ ، — ٤ ط + حـ ، — ٦ ط + حـ ، ....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

٢ هـ ط + حـ .... (١)

بفرض ان هـ تساوى صفراً او اى عدد صحيح موجب او سالب

وعند ما يأخذ الخط الدائر الوضع م اَ تكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

٢ ط — حـ ، ٤ ط — حـ ، ٦ ط — حـ ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

— حـ ، — ٢ ط — حـ ، — ٤ ط — حـ ، — ٦ ط — حـ ، .....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

٢ هـ ط — حـ .... (٢)

بفرض ان هـ تساوى صفراً او اى عدد صحيح موجب او سالب

ويمكن الجمع بين قانونى (١) ، (٢) فى القانون

٢ هـ ط ± حـ .... (٣)

بفرض ان هـ تساوى صفراً أو اى عدد صحيح موجب أو سالب

(ملاحظة) لما كانت الزوايا التى تشترك فى جيب التمام تشترك كذلك فى القاطع كان القانون (٣) يشتمل أيضاً على جميع الزوايا التى قاطعها يساوى قاطع زاوية حـ

بند ٢٠ — مسائل تطبيقية

(مثال ١) المطلوب حل المعادلة جتا حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(الحل) نعلم أن جتا حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

فتكون الزاوية الاولية الموجبة = ٤٥$^\circ$ = $\frac{ط}{٤}$

اذن حـ = ٢ هـ ط ± $\frac{ط}{٤}$

(مثال ٢) المطلوب حل المعادلة قا حـ = — $\sqrt{٢}$

(الحل) نعلم أن قا حـ = — $\sqrt{٢}$

فيكون جتا حـ = — $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

وتكون الزاوية الاولية الموجبة $= ١٣٥° = \frac{٣ ط}{٤}$

اذن $ح = ٢ ن ط \pm \frac{٣ ط}{٤}$

(مثال ٣) المطلوب حل المعادلة $جتا^{٢} ح = \frac{١}{٢}$

(الحل) نعلم ان $جتا^{٢} ح = \frac{١}{٢}$

فيكون $جتا ح = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

فاذا كان $جتا ح = + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

كانت الزاوية الاولية الموجبة $= ٤٥° = \frac{ط}{٤}$

واذن $ح = ٢ ن ط \pm \frac{ط}{٤}$ .... (١)

واذا كان $جتا ح = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

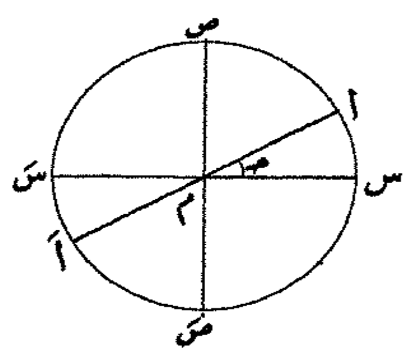
كانت الزاوية الاولية السالبة $= - ١٣٥° = - \frac{٣ ط}{٤} = (- ط + \frac{ط}{٤})$

واذن $ح = ٢ ن ط \pm (- ط + \frac{ط}{٤})$ .... (٢)

وبالجمع بين قانونى (١) ، (٢) فى قانون واحد

يكون $ح = ن ط \pm \frac{ط}{٤}$

بند **٢١** — المطلوب ايجاد القانون العام للزوايا التى تشترك فى الظل



(شكل ١٩)

(العمل) نرسم $\angle$ س م ا اقل زاوية موجبة ظلها يساوى الظل المعلوم ونرمز اليها بالرمز ح ونفرض ان م ا اخذ يتحرك فى الجهة الموجبة حول م الى ان اخذ الوضع م اَ واصبحت $\angle$ س م اَ $= ط + ح$

فيكون ظل $\angle$ س م اَ = ظل $\angle$ س م ا = الظل المعلوم

واذا استمر الخط الدائر فى الدوران الى ان قطع دورة كاملة فلا يوجد فى الدورة الاولى خلاف زاوية ح ، زاوية ط + ح ظل كل منهما يساوى الظل المعلوم ثم اذا استمر الخط الدائر فى الدوران دورة ثانية وثالثة و .... سواء كان ذلك فى الجهة الموجبة او السالبة فكلما اخذ الوضع م ا أو م اَ كان ظل الزاوية الناتجه يساوى الظل المعلوم

وعند ما يأخذ الخط الدائر الوضع م ا تكون الزاوية الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

. $ح$ ، $٢ ط + ح$ ، $٤ ط + ح$ ، $٦ ط + ح$ ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

− ٢ ط + ح ، − ٤ ط + ح ، − ٦ ط + ح ، ....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

٢ ن ط + ح .... (١)

بفرض ان ن تساوى صفراً او اى عدد صحيح موجب او سالب

وعند ما يأخذ الخط الدائر الوضع م أ' تكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة الموجبة هى

ط + ح ، ٣ ط + ح ، ٥ ط + ح ، ....

وتكون الزوايا الناتجة من دورانه فى الجهة السالبة هى

− ط + ح ، − ٣ ط + ح ، − ٥ ط + ح ، ....

ويمكن الجمع بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة فى القانون

(٢ ن + ١) ط + ح .... (٢)

بفرض ان ن = صفراً او أى عدد صحيح موجب او سالب

ويمكن الجمع بين قانونى (١) ، (٢) فى القانون

ه ط + ح .... (٣)

بفرض ان ه تساوى صفراً أو اى عدد صحيح موجب أو سالب

(ملاحظة) لما كانت الزوايا التى تشترك فى الظل تشترك كذلك فى ظل التمام كان القانون (٣) يشتمل ايضاً على جميع الزوايا التى ظل تمامها يساوى ظل تمام زاوية ح

بند **٢٢** — مسائل تطبيقية

(مثال ١) المطلوب حل المعادلة ظا ح $= \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

(الحل) نعلم ان ظا ح $= \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

فتكون الزاوية الاولية الموجبة $=$ ٣٠° $= \frac{\text{ط}}{\text{٦}}$

اذن ح $=$ ه ط $+ \frac{\text{ط}}{\text{٦}}$

(مثال ٢) المطلوب حل المعادلة ظا ح $= - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

(الحل) نعلم ان ظا ح $= - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

فتكون الزاوية الاولية الموجبة $=$ ١٥٠° $= \frac{\text{٥ ط}}{\text{٦}}$

اذن $ح = ن ط + \frac{٥ ط}{٦}$

(مثال ٣) المطلوب حل المعادلة ظتا^{٢} ح $= ٣$

(الحل) نعلم ان ظتا^{٢} ح $= ٣$

فيكون ظا^{٢} ح $= \frac{١}{٣}$

، ظا ح $= \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

فاذا كان ظا ح $= + \frac{١}{\sqrt{٣}}$

كانت الزاوية الاولية الموجبة $= ٣٠^{\circ} = \frac{ط}{٦}$

واذن $ح = ن ط + \frac{ط}{٦}$ .... (١)

واذا كان ظا ح $= - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

كانت الزاوية الاولية السالبة $= - ٣٠^{\circ} = - \frac{ط}{٦}$

واذن $ح = ن ط + \left(- \frac{ط}{٦}\right)$

$= ن ط - \frac{ط}{٦}$ .... (٢)

وبالجمع بين قانونى (١) ، (٢) فى قانون واحد

يكون $ح = ن ط \pm \frac{ط}{٦}$

(تمارين ١)

حل المعادلات الآتية

(١) جا ح $= \frac{١}{٢}$

(٢) جتا ح $= \frac{١}{٢}$

(٣) ظا ح $= \sqrt{٣}$

(٤) جا ح $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٥) جتا ح $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٦) ظا ح $= ١$

(٧) قتا ح $= - ١$

(٨) قا ح $= - ٢$

(٩) ظتا ح $= \sqrt{٣}$

(١٠) قتا ح $= - \frac{٤}{\sqrt{٥} - ١}$

(١١) قا ح $= - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(١٢) ظتا ح $= - \sqrt{٣}$

(١٣) قتا حـ = − قتا حـ

(١٤) جتا حـ = ٠

(١٥) ظا حـ = ∞

(١٦) جا حـ = ١

(١٧) قا حـ = ١

(١٨) ظا حـ = − ∞

(١٩) جا^{٢} حـ = ١

(٢٠) جتا^{٢} حـ = ١

(٢١) ظا^{٢} حـ = ١

(٢٢) جا^{٢} حـ = $\frac{١}{٤}$

(٢٣) جتا^{٢} حـ = $\frac{١}{٤}$

(٢٤) ظتا^{٢} حـ = $\frac{١}{٣}$

(٢٥) قتا^{٢} حـ = ٢

(٢٦) قا^{٢} حـ = $\frac{٤}{٣}$

(٢٧) ظا^{٢} حـ = ٧ + ٤ $\sqrt{٣}$

(٢٨) جا حـ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$

(٢٩) جتا حـ = − $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$

(٣٠) ظتا حـ = ٢ + $\sqrt{٣}$

الباب الثالث

فى المعادلات المتنوعة

بند **٢٣** — علمنا عرضاً فى الباب السابق انه اذا علمت نسبة مثلثية واريد ايراد جميع الزوايا التى تشترك فى هذه النسبة فانه يوجد زاويتان فقط من هذه الزوايا فى كل دورة كاملة

واما اذا علمت نسبتان مثلثيتان (بشرط الا تكون احداهما مقلوبة الاخرى) فلا يوجد الا زاوية واحدة فى كل دورة تتحقق بهاتين النسبتين وذلك لاننا اذا قلنا ان الزاويتين ٣٠° ، ١٥٠° هما الزاويتان اللتان فى الدورة الاولى من الزوايا التى جيبهما $=\frac{١}{٢}$ وأن ٣٠° ، ٢١٠° هما الزاويتان اللتان فى الدورة الاولى من الزوايا التى ظلها يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فانه لا يوجد غير زاوية ٣٠° (او $\frac{ط}{٦}$) فى هذه الدورة جيبها $=\frac{١}{٢}$ كما ان ظلها $=\frac{١}{\sqrt{٣}}$

وتكون بقية الزوايا التى تتحقق بهاتين النسبتين هى

$$٢ ن ط + \frac{ط}{٦}$$

بفرض ان ن تساوى صفراً أو أى عدد صحيح موجب او سالب

بند **٢٤** — (مثال محلول) المطلوب ايجاد المقدار الكامل لزاوية ح الذى يتحقق بكل من المعادلتين

$$جا ح = -\frac{١}{٢} ، ظا ح = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

(الحل) الزاويتان ٢١٠° ، ٣٣٠° هما الزاويتان اللتان فى الدورة الاولى من الزوايا التى جيبها $= -\frac{١}{٢}$

والزاويتان ٣٠° ، ٢١٠° هما الزاويتان اللتان فى الدورة الاولى من الزوايا التى ظلها $=\frac{١}{\sqrt{٣}}$

اذن زاوية ٢١٠° (أو $\frac{٧ ط}{٦}$) هى الزاوية التى فى الدورة الاولى التى جيبها $= -\frac{١}{٢}$ كما ان ظلها $=\frac{١}{\sqrt{٣}}$

اذن $ح = ٢ ن ط + \frac{٧ ط}{٦}$

بند **٢٥** - فى المعادلات الآتية

(مثال) حل المعادلتين الآتيتين

$\text{جا}(\text{حـ} + \text{ء}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا}(\text{حـ} - \text{ء}) = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(الحل) من حيث ان $\text{جا}(\text{حـ} + \text{ء}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \text{جا}\,\frac{\text{ط}}{٤}$

يكون $\text{حـ} + \text{ء} = \text{ن}\,\text{ط} + (-١)^{\text{ن}}\,\frac{\text{ط}}{٤}$

ومن حيث ان $\text{ظا}(\text{حـ} - \text{ء}) = -\frac{١}{\sqrt{٣}} = \text{ظا}\,\frac{٥\,\text{ط}}{٦}$

يكون $\text{حـ} - \text{ء} = \text{م}\,\text{ط} + \frac{٥\,\text{ط}}{٦}$

واذن $\text{حـ} = \frac{١}{٢}\left\{(\text{ن} + \text{م})\,\text{ط} + \frac{٥\,\text{ط}}{٦} + (-١)^{\text{ن}}\,\frac{\text{ط}}{٤}\right\}$

، $\text{ء} = \frac{١}{٢}\left\{(\text{ن} - \text{م})\,\text{ط} - \frac{٥\,\text{ط}}{٦} + (-١)^{\text{ن}}\,\frac{\text{ط}}{٤}\right\}$

(تمارين ٢)

أوجد المقدار الكامل لزاوية حـ بحيث يحقق المعادلات الآتية

(١) $\text{جا حـ} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{جتا حـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٦) $\text{جا حـ} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{جتا حـ} = -\frac{١}{٢}$

(٢) $\text{جتا حـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا حـ} = ١$ (٧) $\text{جا حـ} = -\frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا حـ} = ٢ + \sqrt{٣}$

(٣) $\text{جتا حـ} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{جا حـ} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٨) $\text{جتا حـ} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا حـ} = ١$

(٤) $\text{جا حـ} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا حـ} = -١$ (٩) $\text{ظتا حـ} = -\sqrt{٣}$ ، $\text{قا حـ} = -٢$

(٥) $\text{جتا حـ} = -\frac{١}{٢}$ ، $\text{ظا حـ} = \sqrt{٣}$ (١٠) $\text{جا حـ} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ظا حـ} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

أوجد أصغر مقدار موجب والمقدار الكامل لكل من زاويتى حـ ، ء فى المعادلات الآتية

(١١) $\text{جتا}(\text{حـ} - \text{ء}) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ظا}(٢\,\text{حـ} + \text{ء}) = ١$

(١٢) جا (حـ + ى) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا (حـ − ٢ ى) = $\frac{١}{٢}$

(١٣) ظا (٣حـ + ٢ى) = − ١ ، جا (٢ حـ − ى) = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(١٤) جتا (حـ − ى) = $\frac{١}{٢}$ ، جا (حـ + ى) = $\frac{١}{٢}$

(١٥) ظا (حـ − ى) = ١ ، قا (حـ + ى) = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

بند **٢٦** — هناك خلاف النوعين السابقين أنواع شتى من المعادلات المثلثية ولا يمكن وضع قواعد تحديدية لحلها فكل معادلة تتوقف فى الحل على شكلها ومع ذلك فقد امكن وضع بعض قواعد عامة لحل المعادلات التى تتحد فى الشكل وسنذكر مثالا من كل من هذه الأنواع كنموذج لحل غيره من التمارين التطبيقية

(مثال ١) حل المعادلة

$$\sqrt{٣}\ \text{جتا حـ} + \text{جا حـ} = \sqrt{٢}$$

(الحل) تقسم طرفى المعادلة على الجذر التربيعى لمجموع مربعى معاملى جتا حـ ، جا حـ

$$\sqrt{(\sqrt{٣})^{٢} + ١^{٢}} = ٢$$

اذن $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا حـ + $\frac{١}{٢}$ جا حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

أو جتا ٣٠° جتا حـ + جا ٣٠° جا حـ = جتا ٤٥°

أو جتا (حـ − ٣٠°) = جتا ٤٥°

ويكون حـ − $\frac{ط}{٦}$ = ٢ ن ط ± $\frac{ط}{٤}$

، حـ = ٢ ن ط ± $\frac{ط}{٤}$ + $\frac{ط}{٦}$

= ٢ ن ط + $\frac{٥ط}{١٢}$ أو ٢ ن ط − $\frac{ط}{١٢}$

(مثال ٢) حل المعادلة جا ٢ س = جا س

(الحل) من حيث ان جا ٢ س = ٢ جا س جتا س فتؤول المعادلة الاصلية الى

٢ جا س جتا س − جا س = ٠

او جا س (٢ جتا س − ١) = ٠

اذن جا س = ٠ أو ٢ جتا س − ١ = ٠

فيكون جا س = ٠ أو جتا س = $\frac{١}{٢}$

وتكون الزاويتان الاوليتان ٠ أو $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$

اذن $\text{س} = \text{ن ط}$ أو $\text{٢ ن ط} \pm \frac{\text{ط}}{\text{٣}}$

(مثال ٣) حل المعادلة $\text{جتا ٣ ح} + \text{جا ح} = \text{٠}$

(الحل) نعلم ان $\text{جتا ٣ ح} = - \text{جا ح}$

اذن $\text{جتا ٣ ح} = \text{جتا} \left(\frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ح} \right)$

وتكون $\text{٣ ح} = \text{٢ ن ط} \pm \left(\frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ح} \right)$

اذن $\text{٣ ح} = \text{٢ ن ط} + \frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ح}$ أو $\text{٢ ن ط} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}} - \text{ح}$

، $\text{٢ ح} = \text{٢ ن ط} + \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ أو $\text{٤ ح} = \text{٢ ن ط} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

اذن $\text{ح} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(\text{٢ ن ط} + \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \right)$ أو $\frac{\text{١}}{\text{٤}} \left(\text{٢ ن ط} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \right)$

(مثال ٤) حل المعادلة

$$\sqrt{\text{٢}}\ \text{جتا س} - \text{جا س} = \text{جتا س}$$

(الحل) من حيث ان $\sqrt{\text{٢}}\ \text{جتا س} - \text{جا س} = \text{جتا س}$

يكون $\sqrt{\text{٢}}\ \text{جتا س} - \text{جتا س} = \text{جا س}$

، $\text{جتا س} \left(\sqrt{\text{٢}} - \text{١} \right) = \text{جا س}$

وبقسمة طرفى المعادلة على جا س

يكون $\text{ظا س} = \sqrt{\text{٢}} - \text{١} = \text{ظا} \frac{\text{ط}}{\text{٨}}$

وتكون الزاوية الاولية تساوى $\frac{\text{ط}}{\text{٨}}$

، $\text{س} = \text{ن ط} + \frac{\text{ط}}{\text{٨}}$

(مثال ٥) حل المعادلة

$$\text{قتا ح} = \text{ظتا ح} + \sqrt{\text{٣}}$$

(الحل) من حيث ان $\text{قتا ح} = \text{ظتا ح} + \sqrt{\text{٣}}$

يكون $\frac{\text{١}}{\text{جا ح}} = \frac{\text{جتا ح}}{\text{جا ح}} + \sqrt{\text{٣}}$

، $\frac{\text{١} - \text{جتا ح}}{\text{جا ح}} = \sqrt{\text{٣}}$

اذن $\frac{\text{٢ جا}^{\text{٢}} \frac{\text{ح}}{\text{٢}}}{\text{٢ جا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٣}}$

، $\text{ظا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} = \sqrt{\text{٣}}$

وتكون الزاوية الأولية = ط/٣

اذن حـ/٢ = ه ط + ط/٣

، حـ = ٢ ه ط + ٢ط/٣

(مثال ٦) حل المعادلة

جا ٢ حـ − جتا ٢ حـ = جتا حـ − جا حـ

(الحل) نعلم ان جا ٢ حـ − جتا ٢ حـ = جتا حـ − جا حـ

فيكون جا ٢ حـ + جا حـ = جتا ٢ حـ + جتا حـ

، ٢ جا ٣حـ/٢ جتا حـ/٢ = ٢ جتا ٣حـ/٢ جتا حـ/٢

، جتا حـ/٢ (جا ٣حـ/٢ − جتا ٣حـ/٢) = ٠

اذن جتا حـ/٢ = ٠ أو جا ٣حـ/٢ − جتا ٣حـ/٢ = ٠

، جتا حـ/٢ = ٠ أو ظا ٣حـ/٢ = ١

ويكون حـ/٢ = ٢ ه ط ± ط/٢ أو ٣حـ/٢ = ه ط + ط/٤

اذن حـ = ٤ ه ط ± ط أو ٢/٣ (ه ط + ط/٤)

(مثال ٧) حل المعادلة

جا س + جا ٢ س + جا ٣ س = جتا س + جتا ٢ س + جتا ٣ س

(الحل) نعلم ان جا س + جا ٢ س + جا ٣ س = جتا س + جتا ٢ س + جتا ٣ س

فيكون ٢ جا ٢ س جتا س + جا ٢ س = ٢ جتا ٢ س جتا س + جتا ٢ س

، جا ٢ س (٢ جتا س + ١) = جتا ٢ س (٢ جتا س + ١)

، (جا ٢ س − جتا ٢ س) (٢ جتا س + ١) = ٠

، جا ٢ س = جتا ٢ س أو ٢ جتا س = − ١

، ظا ٢ س = ١ أو جتا س = − ١/٢

، ٢ س = ه ط + ط/٤ أو س = ٢ ه ط ± ٢ط/٣

اذن س = ١/٢ (ه ط + ط/٤) أو ٢ ه ط ± ٢ط/٣

(مثال ٨) حل المعادلة

ظا^{٣} حـ − قا^{٢} حـ = ٤ ظا^{٢} حـ − ٥ ظا حـ

(الحل) نعلم ان ظا^{٣} حـ − قا^{٢} حـ = ٤ ظا^{٢} حـ − ٥ ظا حـ

فيكون ظا^٣ حـ − (١ + ظا^٢ حـ) = ٤ ظا^٢ حـ − ٥ ظا حـ

، ظا^٣ حـ − ١ = ٥ ظا^٢ حـ − ٥ ظا حـ

، (ظا حـ − ١) (ظا^٢ حـ + ظا حـ + ١) = ٥ ظا حـ (ظا حـ − ١)

، (ظا حـ − ١) (ظا^٢ حـ − ٤ ظا حـ + ١) = ٠

اذن ظا حـ − ١ = ٠ أو ظا^٢ حـ − ٤ ظا حـ + ١ = ٠

، ظا حـ = ١ أو ظا حـ = (٤ ± √(١٦ − ٤)) / ٢ = ٢ ± √٣

فتكون الزوايا الأولية هى ط/٤ ، ٥ط/١٢ ، ط/١٢

وتكون حـ = ن ط + ط/٤ أو ن ط + ٥ط/١٢ أو ن ط + ط/١٢

(مثال ٩) حل المعادلة

جتا ٣حـ جا^٣ حـ + جا ٣حـ جتا^٣ حـ = ٠

(الحل) من حيث ان جا ٣حـ = ٣ جا حـ − ٤ جا^٣ حـ ، جتا ٣حـ = ٤ جتا^٣ حـ − ٣ جتا حـ

يكون . جا^٣ حـ = (٣ جا حـ − جا ٣حـ) / ٤ ، جتا^٣ حـ = (جتا ٣حـ + ٣ جتا حـ) / ٤

وبالتعويض تؤول المعادلة الاصلية الى

جتا ٣حـ × (٣ جا حـ − جا ٣حـ) / ٤ + جا ٣حـ × (٣ جتا حـ + جتا ٣حـ) / ٤ = ٠

ويكون ٣ جتا ٣حـ جا حـ − جتا ٣حـ جا ٣حـ + ٣ جا ٣حـ جتا حـ + جا ٣حـ جتا ٣حـ = ٠

، ٣ (جا حـ جتا ٣حـ + جتا حـ جا ٣حـ) = ٠

، جا (٣حـ + حـ) = ٠

، جا ٤حـ = ٠

اذن ٤حـ = ن ط

، حـ = ن ط / ٤

(تمارين ٥)

حل المعادلات الآتية

(١) جا حـ − جتا حـ = − ١   (٢) حا حـ − جتا حـ = ١

(٣) جا ح − √٣ جتا ح = ١

(٤) جا ح + √٣ جتا ح = ١

(٥) جا ح + جتا = √٢

(٦) √٣ جا ح − جتا ح = − ١

(٧) جا ح − جتا ح = − √(٣/٢)

(٨) جا ح − جتا ح = − √٢

(٩) (√٣ + ١) جا ح − (√٣ − ١) جتا ح = ٢

(١٠) √٣ جا ح + جتا ح = (√٣ − ١)/√٢

(١١) جا ح + قتا ح = ٢

(١٢) ظا^٢ ح − (√٣ + ١) ظا ح + √٣ = ٠

(١٣) جتا^٢ ح = جا^٢ ح

(١٤) جتا ح + ظا ح = قا ح

(١٥) جا ح = ظا ح

(١٦) قا^٢ ح = ٤ ظا ح

(١٧) ٢ جا س = √٣ ظتا س

(١٨) ظا^٢ ح − ٤ قا ح + ٥ = ٠

(١٩) جتا ٢ ح + ٢ جا^٢ ٢ ح = ١

(٢٠) ظا ٣ ح = ٣ ظا ح

(٢١) جتا ٢ س = ٢ جا^٢ س

(٢٢) جتا ٣ ح − جتا ٥ ح = جا ح

(٢٣) جتا ٤ ح − جتا ٢ ح = − ١

(٢٤) جا ٦ ح + جا ٤ ح = ٢ جتا ح

(٢٥) ظا^٢ ح + ظتا^٢ ح = ١٠/٣

(٢٦) جا ٣ ح + جا ٢ ح + جا ح = ٠

(٢٧) ظا ٢ ح ظا ٣ ح = ١

(٢٨) جتا ٥ س + جتا ٣ س + جتا س = ٠

(٢٩) ظا ٦ ح + ظتا ٧ ح = ٠

(٣٠) جا ٥ س جتا ٣ س = جا ٩ س جتا ٧ س

(تمارين ٦)

حل المعادلات الآتية

(١) ٤ جتا ح − ٣ قا ح = ٢ ظا ح

(٢) ٢ جتا ح جتا ٣ ح + ١ = ٠

(٣) ٢ √٣ جتا^٢ ح = جا ح

(٤) ٤ جا^٢ ح + جا^٢ ٢ ح = ٣

(٥) ٤ جتا^٢ ح + ٢ جتا ح − ١ = ٠

(٦) ٢ جا^٣ ح + ٣ جتا^٣ ح + جا ح = ٣

(٧) جتا ٢ ح − جا ح = ١/٢

(٨) ٢ + ٤ ظا^٢ ح = ٥ ظا ح قا ح

(٩) ٤ ظا ح − ظتا ح = ٣

(١٠) ظتا ٢ ح − ظتا ح = ٢/√٣

(١١) ٢ ظتا^٢ ح = ١ + ٢ جا^٢ ح

(١٢) جا ٢ ح = ٣ ظا ح جتا ٢ ح

(١٣) ظتا ح − قتا ٢ ح = ١

(١٤) ظتا ٥ ح − ظتا ٢ ح = قتا ٢ ح

(١٥) جتا (١ − جتا ٢ ح) + جا ٢ ح = ٠

(١٦) جا ح + جا ٢ ح + جا ٣ ح + جا ٤ ح = ٠

(١٧) جتا ٣ ح + ٢ جتا ح = ٠

(١٨) جا س (جتا ٢ س + جتا ٤ س + جتا ٦ س + جتا ٨ س) = جا ٤ س

(١٩) جا ٣ س = جا^{٢} س

(٢٠) جا ٧ حـ + جا ٥ حـ − جتا ٢ حـ = ١

(٢١) ظا حـ + جتا ٢ حـ = ١

(٢٢) جتا^{٣} حـ جا ٣ حـ + جا^{٣} حـ جتا ٣ حـ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٨}$

(٢٣) جا^{٢} ٢ حـ − جا^{٢} حـ = $\frac{١}{٢}$ جا ٣ حـ

(٢٤) $\frac{\text{جتا حـ}}{\text{١ + جا حـ}}$ + ظا حـ = ٢

(٢٥) ٢ جا حـ جا ٣ حـ − جا^{٢} ٢ حـ = ٠

(٢٦) جتا^{٣} حـ − جتا حـ جا حـ − جا^{٣} حـ = ١

(٢٧) ظا ٣ حـ − ظا حـ = ٢ جتا حـ قا ٣ حـ

(٢٨) ٢ جا (حـ + ٣ ى) = ١ ، ٢ جا (٣ حـ + ى) = $\sqrt{٣}$

(٢٩) ٢ جتا (٣ س + ٢ ص) = $\sqrt{٣}$ ، ٢ جتا (٢ س + ٣ ص) = ١

(٣٠) ظا (حـ + ٣ ى) = ١ ، ظا (٣ حـ + هـ) = ٠ ، ظا (ى + ٣ هـ) = ٠

الباب الرابع

فى الخطوط البيانية للنسب المثلثية

بند ٢٦ — تقدم فى الباب الثانى من الجزء الاول ان الزاوية فى حساب المثلثات ليس لبيان مقدارها حد معين اذ هى مقدار ما فى الدورات التى يدورها أحد ضلعيها حول رأسها اذا ابتدأ وهو منطبق على ضلعها الثانى حتى يقف ويأخذ وضعاً معيناً

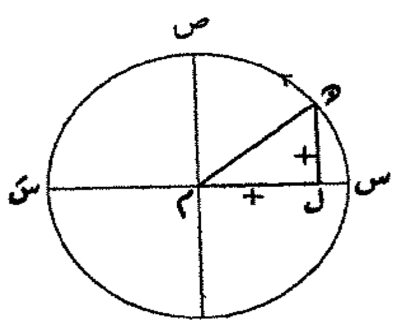
وقد علمنا فى هذا الباب ايضاً ان الوضع الهندسى للزاوية عند ما يكون مقدارها صفراً هو عين وضعها عند ما يكون مقدارها ٤ قوائم (٠ + ٤) وان وضعها عند ما يكون مقدارها قائمة هو عين وضعها عندما يكون مقدارها ٥ قوائم (١ + ٤) وان وضعها عند ما يكون مقدارها قائمتين هو عين وضعها عند ما يكون مقدارها ٦ قوائم (٢ + ٤) وان وضعها عند ما يكون مقدارها ٣ قوائم هو عين وضعها عند ما يكون مقدارها ٧ قوائم (٣ + ٤) وهكذا . . . وذلك لانه باستمرار الضلع الدائر فى الدوران يزيد مقدار الزاوية الحادثة ٤ قوائم فى كل دورة كاملة

بند ٢٧ — فيكفى اذن لمعرفة التغيير الذى يطرأ على مقادير النسب المثلثية لزاوية أخذ مقدارها يزيد الى غير حد ان نعرف التغيير الذى يطرأ على مقادير النسب المثلثية لهذه الزاوية اذا اخذت تزيد من ٠° الى ٣٦٠° وأما ما زاد على ذلك فهو مجرد اعادة لما يسبقه

بند ٢٨ — ولمعرفة هذا التغيير بطريقة هندسية يكفى ان نرسم الزواية فى كل ربع من الارباع الاربعة ونبين اشارات الاضلاع المقابلة والاضلاع المجاورة وان نبين كذلك ما اذا كانت هذه الاضلاع تأخذ فى الكبر أو فى الصغر

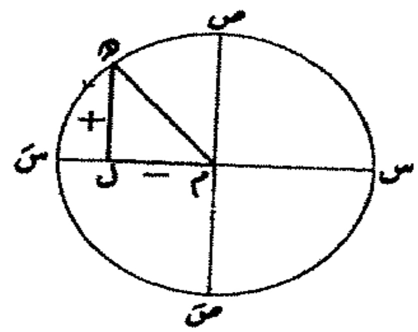
بند ٢٩ — (الحالة الاولى) عند ما تكون الزاوية فى الربع الاول

كما هو مبين بشكل (٢٠) نرى ان ل ه موجب وانه يأخذ فى الكبر من العدم الى ان يساوى م ه بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠° ونرى ان م ل موجب وانه يأخذ فى الصغر من طول يساوى م ه الى العدم بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠°



(شكل ٢٠)

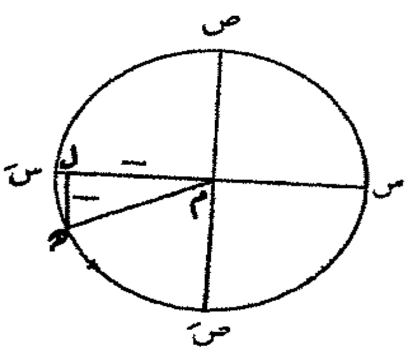
بند ٣٠ — (الحالة الثانية) عند ما تكون الزاوية فى الربع الثانى



(شكل ٢١)

كما هو مبين بشكل (٢١) نرى ان ل ه موجب وانه يأخذ فى الصغر من طول يساوى م ه الى العدم بزيادة مقدار الزاوية من ٩٠° الى ١٨٠° ونرى ان م ل سالب وانه يأخذ فى الكبر (من حيث العدد) من العدم الى ان يساوى م ه بزيادة مقدار الزاوية من ٩٠° الى ١٨٠°

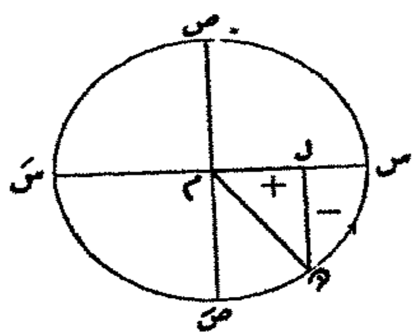
بند ٣١ — (الحالة الثالثة) عند ما تكون الزاوية فى الربع الثالث



(شكل ٢٢)

كما هو مبين بشكل (٢٢) نرى ان ل ه سالب وانه يأخذ فى الكبر (من حيث العدد) من العدم الى ان يساوى م ه بزيادة مقدار الزاوية من ١٨٠° الى ٢٧٠° ونرى ان م ل سالب وانه يأخذ فى الصغر (من حيث العدد) من طول يساوى م ه الى العدم بزيادة مقدار الزاوية من ١٨٠° الى ٢٧٠°

بند ٣٢ — (الحالة الرابعة) عند ما تكون الزاوية فى الربع الرابع



(شكل ٢٣)

كما هو مبين بشكل (٢٣) نرى ان ل ه سالب وانه يأخذ فى الصغر (من حيث العدد) من طول يساوى م ه الى العدم بزيادة مقدار الزاوية من ٢٧٠° الى ٣٦٠° ونرى ان م ل موجب وأنه يأخذ فى الكبر من العدم الى ان يساوى م ه بزيادة مقدار الزاوية من ٢٧٠° الى ٣٦٠°

بند ٣٣ — فاذا رمزنا الى الزاوية بحرف ح

كان جا ح $= \frac{\text{ل ه}}{\text{م ه}}$ ، جتا ح $= \frac{\text{م ل}}{\text{م ه}}$ ، ظا ح $= \frac{\text{ل ه}}{\text{م ل}}$

ثم اذا اعتبرنا التغيرات التى طرأت على الاضلاع المقابلة والاضلاع المجاورة من حيث المقدار والاشارة

امكننا ان نلخص التغيرات التى تطرأ على مقادير النسب المثلثية لاى زاوية حـ اذا أخذ مقدارها يزيد من ٠° الى ٣٦٠°

بند ٣٤ — التغير الذى يطرأ على مقدار جا حـ اذا اخذت حـ تزيد فى المقدار

(اولا) بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠° يزداد مقدار الجيب من ٠ الى ١ ويكون موجباً

(ثانياً) بزيادة مقدار الزاوية من ٩٠° الى ١٨٠° ينقص مقدار الجيب من ١ الى ٠ ويكون موجباً

(ثالثاً) بزيادة مقدار الزاوية من ١٨٠° الى ٢٧٠° ينقص مقدار الجيب من ٠ الى — ١ ويكون سالباً

(رابعاً) بزيادة مقدار الزاويه من ٢٧٠° الى ٣٦٠° يزداد مقدار الجيب من — ١ الى ٠ ويكون سالباً

بند ٣٥ — التغير الذى يطرأ على مقدار جتا حـ اذا اخذت حـ تزيد فى المقدار

(أولا) بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠° ينقص مقدار جيب التمام من ١ الى ٠ ويكون موجباً

(ثانياً) بزيادة مقدار الزاوية من ٩٠° الى ١٨٠° ينقص مقدار جيب التمام من ٠ الى — ١ ويكون سالباً

(ثالثاً) بزيادة مقدار الزاوية من ١٨٠° الى ٢٧٠° يزداد مقدار جيب التمام من — ١ الى ٠ ويكون سالباً

(رابعاً) بزيادة مقدار الزاوية من ٢٧٠° الى ٣٦٠° يزداد مقدار جيب التمام من ٠ الى ١ ويكون موجباً

بند ٣٦ — التغير الذى يطرأ على مقدار ظا حـ اذا أخذت حـ تزيد فى المقدار

(اولا) بزيادة مقدار الزاوية من ٠° الى ٩٠° يزداد مقدار الظل من ٠ الى ∞ ويكون موجباً

(ثانياً) بزيادة مقدار الزاوية من ٩٠° الى ١٨٠° يزداد مقدار الظل من — ∞ الى ٠ ويكون سالباً

(ثالثاً) بزيادة مقدار الزاوية من ١٨٠° الى ٢٧٠° يزداد مقدار الظل من ٠ الى ∞ ويكون موجباً

(رابعاً) بزيادة مقدار الزاوية من ٢٧٠° الى ٣٦٠° يزداد مقدار الظل من — ∞ الى ٠ ويكون سالباً

بند ٣٧ — يمكن الوقوف على التغيرات التي تطرأ على مقادير ظتا حـ وقا حـ وقتا حـ بطرق مماثلة للطرق السابقة

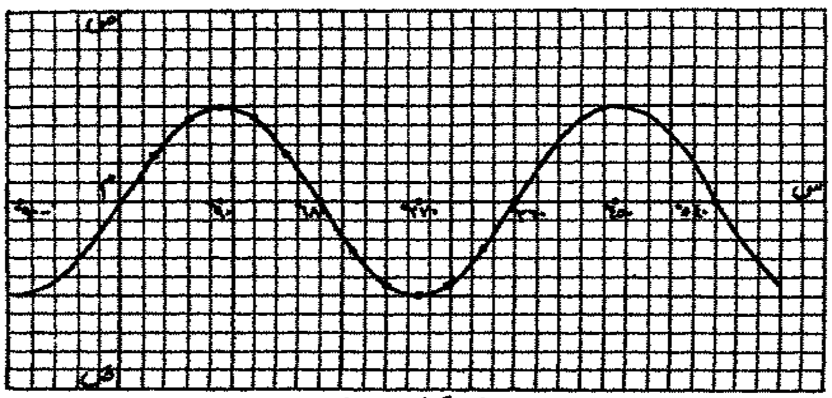
بند ٣٨ — ويمكن تعيين التغيرات التى تطرأ على النسب المثلثية بزيادة الزاوية من ٠° الى ٣٦٠° بواسطة الخطوط البيانية حتى يتسنى مشاهدة هذه التغيرات بمجرد النظر

بند ٣٩ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على جا حـ عند ما تأخذ حـ فى الزيادة من ٠° الى ٣٦٠°

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٤) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٠٫٢ ثم ننشىء جدولا يحتوى على الزوايا المعلومة جيوبها بين ٠° ، ٣٦٠° ونبين فيه مقدار كل زاوية وجيبها بالكيفية الآتية

حـ	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
جا حـ	٠	٠٫٥	٠٫٩	١	٠٫٩	٠٫٥	٠	−٠٫٥	−٠٫٩	−١	−٠٫٩	−٠٫٥	٠

ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ٠) و (٣٠ ، ٠٫٥) و (٦٠ ، ٠٫٩) و .... (٣٣٠ ، − ٠٫٥) و (٣٦٠ ، ٠)



(شكل ٢٤)

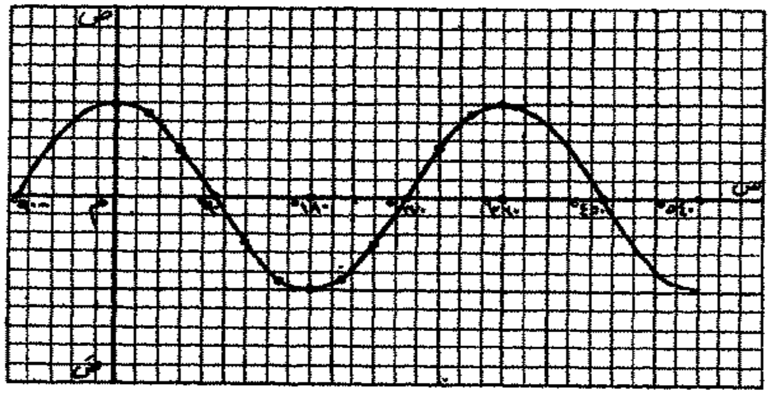
فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

بند ٤٠ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على جتا حـ عنـد ما تأخذ حـ فى الزيادة من ٠° الى ٣٦٠°

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٥) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٠٫٢ ثم ننشىء جدولا يحتوى على الزوايا المعلومة جيوب تمامها من ٠° الى ٣٦٠° ونبين فيه مقدار كل زاوية وجيب تمامها بالكيفية الآتية

حـ	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
جتا حـ	١	٠٫٩	٠٫٥	٠	−٠٫٥	−٠٫٩	−١	−٠٫٩	−٠٫٥	٠	٠٫٥	٠٫٩	١

ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ١) و (٣٠ ، ٠٫٩) و ..... (٣٣٠ ، ٠٫٩) و (٣٦٠ ، ١)



(شكل ٢٥)

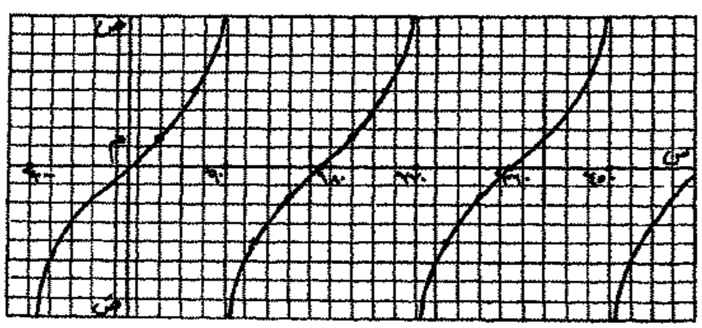
فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

بند ٤١ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على ظا ح عند ما تأخذ ح فى الزيادة من ٠° الى ٣٦٠°

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٦) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٠٫٤ ثم ننشىء جدولا نبين فيه مقادير الزوايا وظلالها بالكيفية الآتية

ح	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
ظا ح	٠	٠٫٥٦	١٫٧	∞	−١٫٧	−٠٫٥٦	٠	٠٫٥٦	١٫٧	∞	−١٫٧	−٠٫٥٦	٠

ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ٠) و (٣٠ ، ٠٫٥٦) و (٦٠ ، ١٫٧) و (٩٠ ، ∞) و . . . . (٣٣٠ ، — ٠٫٥٦) و (٣٦٠ ، ٠)



(شكل ٢٦)

فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

(تنبيه) يلاحظ ان اجزاء الخط البيانى تقرب من الخطوط الرأسية التى تمر بالزوايا ٩٠° ، ٢٧٠° ،

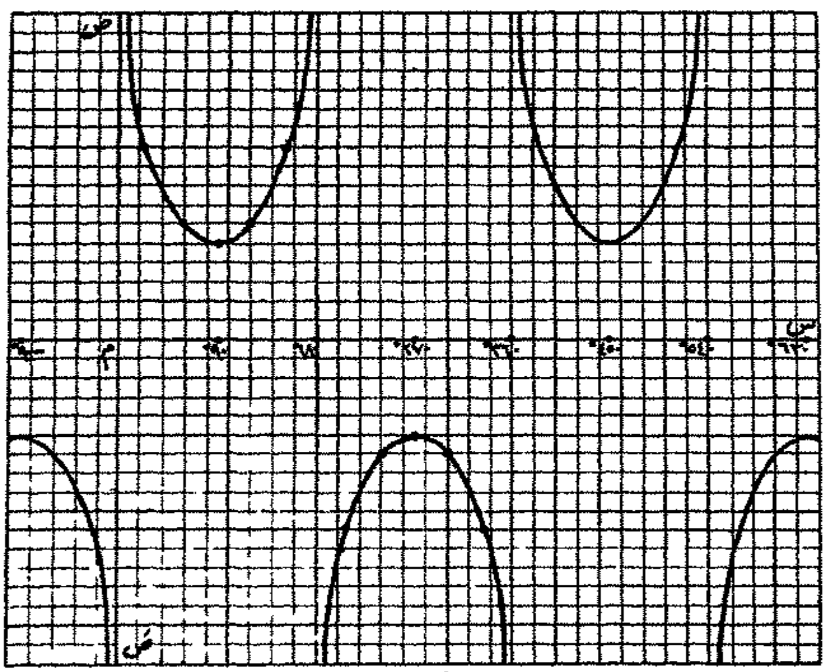
٤٥٠° ، ٠٠٠٠ الخ وفى النهاية تمسها عند ما يكون مقدار ظا حـ = ± ∞

بند ٤٢ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على قتا حـ عند ما تأخذ حـ فى الزيادة من ٠° الى ٣٦٠°

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٧) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٠٫٢ ثم ننشىء جدولا يبين فيه مقادير الزوايا وقواطع تمامها بالكيفية الآتية

حـ	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
قتا حـ	∞	٢	١٫٢	١	١٫٢	٢	∞	−٢	−١٫٢	−١	−١٫٢	−٠٫٢	∞

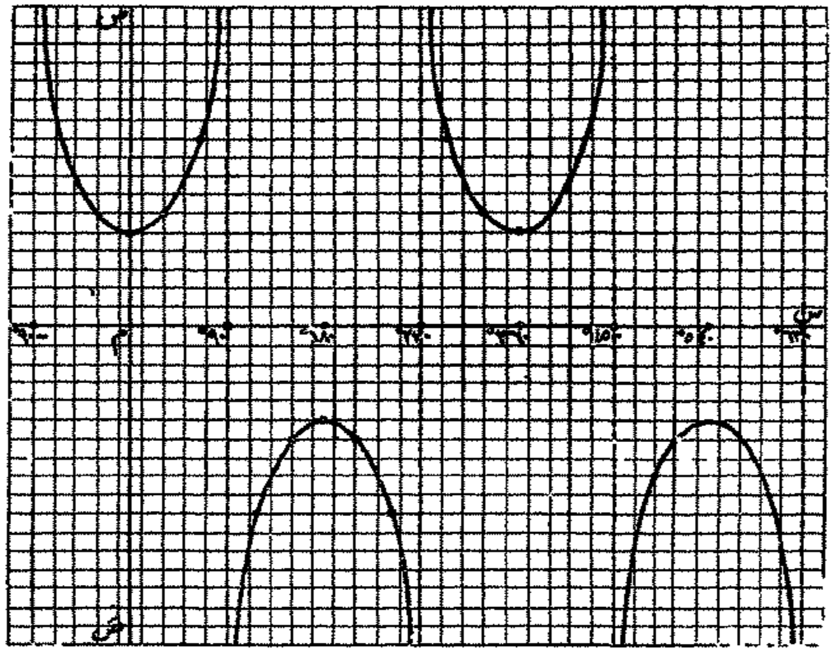
ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ∞) و (٣٠ ، ٢) و (٦٠ ، ١٫٢) و ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ (٣٣٠ ، − ٠٫٢) و (٣٦٠ ، ∞)



(شكل ٢٧)

فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

بند ٤٣ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على قا حـ عند ما تأخذ حـ فى الزيادة من ٠ الى ٣٦٠°



(شكل ٢٨)

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٨) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٢و٠ ثم ننشىء جدولا نبين فيه مقادير الزوايا وقواطعها بالكيفية الآتية

حـ	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠	٣٦٠°
قا حـ	١	١و٢	٢	∞	-٢	-١و٢	-١	-١و٢	-٠و٢	∞	٢	١و٢	١

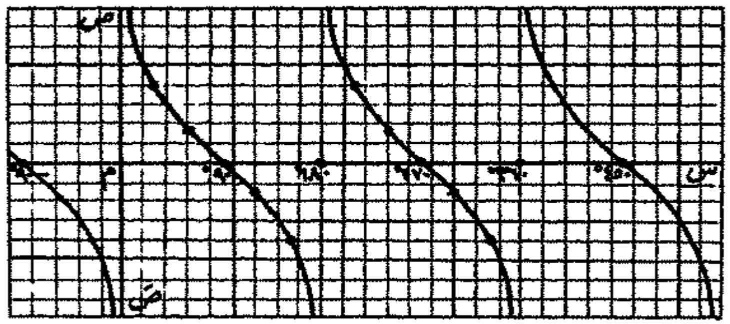
ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ١) و (٣٠ ، ١و٢) و .... (٣٣٠ ، ١و٢) و (٣٦٠ ، ١)
فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

بند ٤٤ — المطلوب رسم الخط البيانى للتغيرات التى تطرأ على ظتا حـ عند ما تأخذ حـ فى الزيادة من ٠° الى ٣٦٠°

(الطريقة) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٢٩) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢٠° وكل قسم صغير من المحور الصادى يمثل ٤و٠ ثم ننشىء جدولا نبين فيه مقادير الزوايا وظلال تمامها بالكيفية الآتية

حـ	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
ظتا حـ	∞	١و٧	٠و٦	٠	-٠و٦	-١و٧	∞	١و٧	٦	٠	-٠و٦	-١و٧	∞

ومن هذه المقادير نعين النقط (٠ ، ∞) و (٣٠ ، ١٫٥٧) و ...... (٣٣٠ ، — ١٫٥٧)
و (٣٦٠ ، ∞)



(شكل ٢٩)

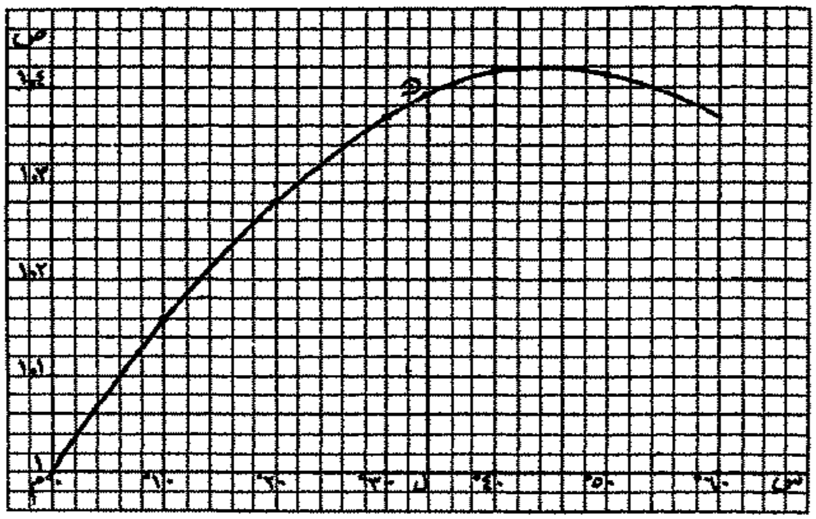
فيكون الخط الجامع لهذه النقط هو الخط البيانى المطلوب

بند ٤٥ — (مثال) اوجد بواسطة الجداول مقادير الكمية جا ح + جتا ح عند ما تكون ح مساوية ٠° ، ١٠° ، ٢٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ٥٠° ، ٦٠° وارسم خطاً بيانياً يبين التغير الذى يطرأ على الكمية جا ح + جتا ح عند ما تأخذ ح فى الزيادة من ٠° الى ٦٠° ثم أوجد من الرسم البيانى مقدار هذه الكمية عند ما تكون ح مساوية ٣٤°

(الطريقة) اولا — ننشىء جدولا يبين مقادير جا ح + جتا ح بالكيفية الآتية

ح	جا ح + جتا ح	
٠°	٠ + ١ = ١	
١٠°	٠٫١٧٣٦ + ٠٫٩٨٤٨ = ١٫١٦	(مقرباً لرقمين عشريين)
٢٠°	٠٫٣٤٢٠ + ٠٫٩٣٩٧ = ١٫٢٨	
٣٠°	٠٫٥٠٠٠ + ٠٫٨٦٦٠ = ١٫٣٧	
٤٠°	٠٫٦٤٢٨ + ٠٫٧٦٦٠ = ١٫٤١	
٥٠°	٠٫٧٦٦٠ + ٠٫٦٤٢٨ = ١٫٤١	
٦٠°	٠٫٨٦٦٠ + ٠٫٥٠٠٠ = ١٫٣٧	

(ثانياً) نرسم المحورين م س ، م ص (شكل ٣٠) ونجعل كل قسم صغير من المحور السينى يمثل ٢° وكل خمسة اقسام صغيرة من المحور الصادى تمثل ٠٫١ ونعين النقط (٠ ، ١) و (١٠ ، ١٫١٦) و .... (٦٠ ، ١٫٣٧)



(شكل ٣٠)

(ثالثاً) نأخذ على م س البعد م ل = ٣٤° فيكون الاحداثى الرأسى ل هـ = ١٫٣٩ تقريباً

اذن جا ٣٤° + جتا ٣٤° = ١٫٣٩

(تمارين ٧)

ارسم الخط البيانى لكل من الكميات الآتية

(١) جا ٢ حـ (من ٠° الى ط) (٥) جتا حـ/٢ (من ٠° الى ٤ ط)

(٢) جتا ٢ حـ (» » » ») (٦) ظا حـ/٢ (من ٠° الى ٤ ط)

(٣) ظا ٢ حـ (» » » ») (٧) عكا حـ (من ٠° الى ٢ ط)

(٤) جا حـ/٢ (من ٠° الى ٤ ط) (٨) عكتا حـ (من ٠° الى ٢ ط)

(٩) جا حـ — جتا حـ من (٠° الى ٥٠°) ثم أوجد مقدار هذه الكمية من الرسم البيانى عند ما تكون حـ مساوية ٢٦°

(١٠) ظا حـ + ظتا حـ من (٠° الى ٥٠°) ثم أوجد مقدار هذه الكمية من الرسم البيانى عند ما تكون حـ مساوية ١٢°

(١١) ظا حـ — ظتا حـ (من ٠° الى ٩٠°)

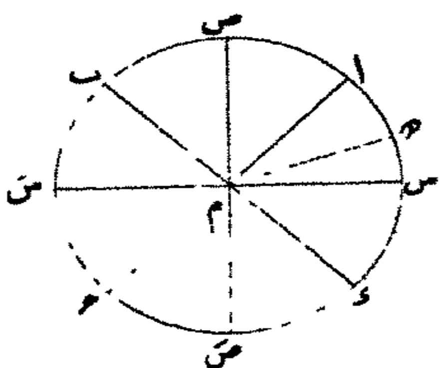
(١٢) (جا حـ/٢ — جا حـ) قا حـ (من ٠° الى ٩٠°)

البـــاب الخامس

فى تعيين الاشارات الجبرية لمقادير بعض كميات مثلثية

بند ٤٦ — تعيين الاشارة الجبرية لمقادير الكمية جا حـ ± جتا حـ

يتوقف تعيين الاشارة الجبرية لهذه الكمية على معرفة اى النسبتين جا حـ ، جتا حـ اكبر من حيث العدد ومعرفة الاشارة الجبرية لكل منهما متى تعين مقدار حـ



(شكل ٣١)

بند ٤٧ — اذا فرضنا دائرة مركزها م (شكل ٣١) وقسمناها الى الارباع س م ص ، ص م سَ ، سَ م صَ ، صَ م س ثم قسمنا بعد ذلك كل ربع الى قسمين متساويين بالمستقيمات م ا ، م ب ، م حـ ، م ء انقسمت الدائرة الى ثمانية اقسام متساوية يسمى كل منها ثمناً

بند ٤٨ — واذا تصورنا مستقيما مثل م ى انطبق على م س ثم اخذ يدور حول نقطة م

فعند ما يكون م ى منطبقاً على م س (بأن كان مقدار الزاوية المرسومة صفراً) يكون مقدار جيب تامها اكبر مقدار عددى يمكن ان يكون لجيب تام زاوية ما وهو الواحد ويكون مقدار جيبها اصغر مقدار عددى يمكن أن يكون لجيب زاوية ما وهو الصفر وكذلك الحال عند ما ينطبق م ى على م سَ (بأن كان مقدار الزاوية المرسومة ١٨٠°) يكون مقدار جيب تامها اكبر مقدار عددى يمكن ان يكون لجيب تام زاوية ما ويكون مقدار جيبها أصغر مقدار عددى يمكن ان يكون لجيب تام زاوية ما الا ان جيب التمام فى هذه الحالة سالب

واذا اخذ الخط الدائر يتحرك من موضعه وهو منطبق على م س نحو م ا أو م ء أخذ المقدار العددى لجيب الزاوية المرسومة فى الزيادة من نهايته الصغرى وأخذ المقدار العددى لجيب تامها فى النقص من نهايته الكبرى ويأتى وقت يتساوى فيه المقداران العدديان للجيب وجيب التمام وذلك عند ما ينطبق م ى على م ا فى جهة وعلى م ء فى الجهة الثانية

واذن فاذا اخذ الخط الدائر للزاوية اى وضع بين م ا ، م ء كان جيب تمام الزاوية المرسومة اكبر من جيبها من حيث العدد وكان موجباً

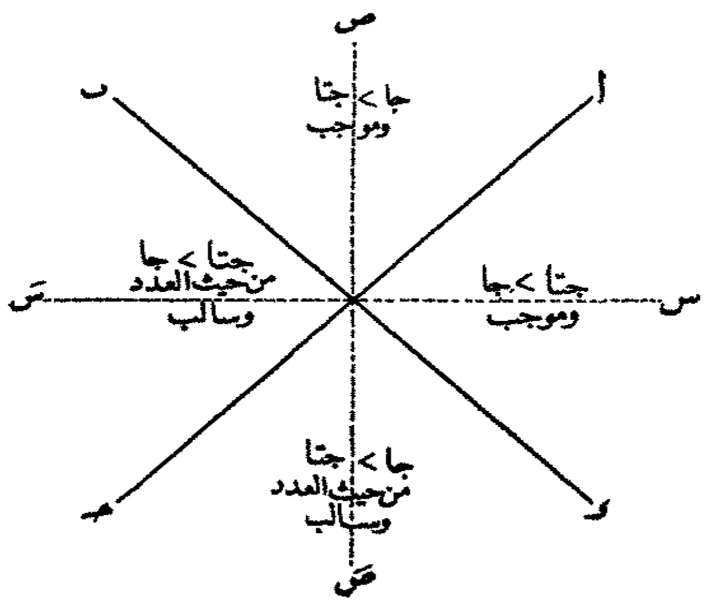
وكذلك يمكن ان نبين انه اذا اخذ الخط الدائر اى وضع بين م ب ، م حـ كان مقدار جيب تمام الزاوية المرسومة اكبر من جيبها من حيث العدد وكان سالباً وعند ما ينطبق م ى على م ص او م صَ (بان كان مقدار الزاوية المرسومة ٩٠° او ٢٧٠°) كان مقدار جيب تامها اصغر مقدار عددى يمكن ان يكون لجيب تمام زاوية ما وهو الصفر وكان مقدار جيبها اكبر مقدار عددى يمكن ان يكون لجيب زاوية

ما وهو الواحد الا انه فى حالة ما ينطبق م ﻫ على م ص′ يكون مقدار الجيب سالباً

واذن فاذا اخذ الخط الدائر للزاوية اى وضع بين م ا ، م ب كان جيب الزاوية المرسومة اكبر من جيب تمامها من حيث العدد وكان موجباً

واذا اخذ الخط الدائر للزاوية اى وضع بين م حـ ، م ء كان جيب الزاوية المرسومة اكبر عددياً من جيب تمامها وكان سالباً

بند ٤٣ – و يسهل معرفة هذه البيانات من الشكل الآتى



(شكل ٣٢)

فعندما يأخذ م ﻫ اى وضع بين م ء ، م ا يكون كل من جتا حـ + جا حـ ، جتا حـ – جا حـ موجباً

« « « « « « « م ا ، م ب « « جا حـ + جتا حـ ، جا حـ – جتا حـ موجباً

« « « « « « « م ب ، م حـ « « جتا حـ + جا حـ ، جتا حـ – جا حـ سالباً

« « « « « « « م حـ ، م ء « « جا حـ + جتا حـ ، جا حـ – جتا حـ سالباً

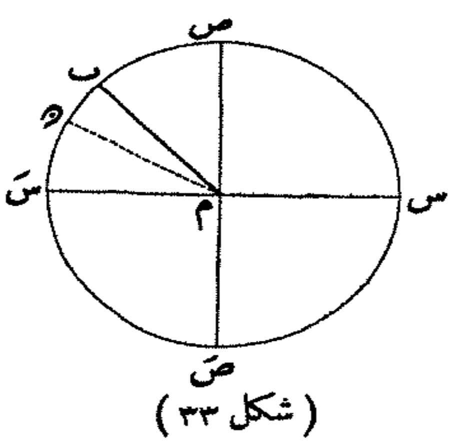
(مثال ١) المطلوب تعيين الاشارة الجبرية لمقدار كل من الكميتين جا حـ + جتا حـ ، جا حـ – جتا حـ اذا فرض ان حـ = ١٦٥°

(العمل) نرسم الزاوية ١٦٥ رسما هندسياً فيقع الخط الدائر فى الثمن الرابع

وفى هذا الثمن جتا حـ > جا حـ من حيث العدد وسالب

اذن جا حـ + جتا حـ سالب

، جا حـ – جتا حـ موجب



(شكل ٣٣)

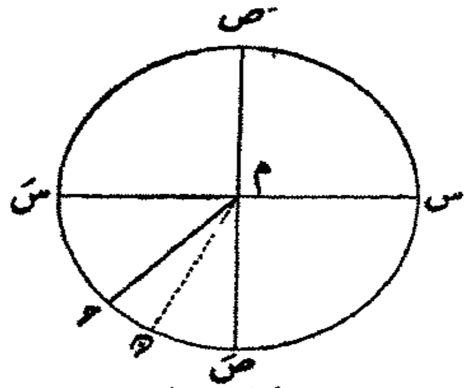
(مثال ٢) المطلوب تعيين الاشارة الجبرية لكل من الكميتين جا ح + جتا ح ، جا ح − جتا ح اذا فرض ان ح = − ١٢٠°

(العمل) نرسم الزاوية (− ١٢٠°) رسماً هندسياً فيقع الخط الدائر فى الثمن السادس

وفى هذا الثمن جا ح > جتا ح من حيث العدد وسالب

اذن جا ح + جتا ح سالب

، جا ح − جتا ح سالب



(شكل ٣٤)

(تمارين ٨)

المطلوب تعيين الاشارة الجبرية لمقدار كل من الكميتين جا ح + جتا ح ، جا ح − جتا ح عند ما تساوى ح المقادير الآتية

(١) ح = ٣٠°	(٤) ح = ٢١٠°	(٧) ح = ٦٩٠°	(١٠) ح = − ٢٤٢°
(٢) ح = ١٢٠°	(٥) ح = ٢٤٠°	(٨) ح = − ٣٥°	(١١) ح = − ٠ط / ٦
(٣) ح = ١٥٠°	(٦) ح = ٣٠٠°	(٩) ح = − ٢١٤°	(١٢) ح = − ٩٨٥°

بند ٤٤ — لايجاد مقدار جا ح ، جتا ح بدلالة جا ٢ ح

نعلم ان جا² ح + جتا² ح = ١

، ٢ جا ح جتا ح = جا ٢ ح

وباضافة المتساوية الاولى الى الثانية أولا وطرحها منها ثانياً

يكون جا² ح + ٢ جا ح جتا ح + جتا² ح = ١ + جا ٢ ح

، جا² ح − ٢ جا ح جتا ح + جتا² ح = ١ − جا ٢ ح

أى ان (جا ح + جتا ح)² = ١ + جا ٢ ح

، (جا ح − جتا ح)² = ١ − جا ٢ ح

وباستخراج الجذر التربيعى لطرفى كل من المتساويتين الأخيرتين

يكون جا ح + جتا ح = ± √(١ + جا ٢ ح) .... (١)

، جا ح − جتا ح = ± √(١ − جا ٢ ح) .... (٢)

وباضافة متساوية (٢) الى (١) أولا وطرحها منها ثانياً ينتج أن

٢ جا ح = ± √(١ + جا ٢ ح) ± √(١ − جا ٢ ح) .... (٣)

، ٢ جتا ح = ± √(١ + جا ٢ ح) ∓ √(١ − جا ٢ ح) .... (٤)

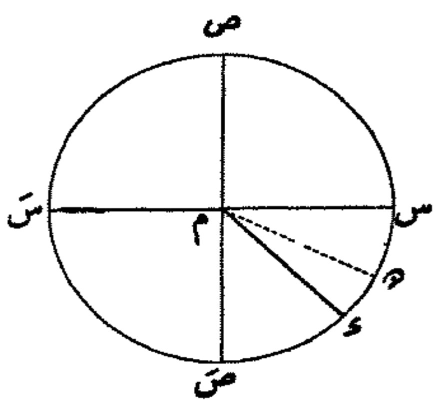
بند ٤٥ — يظهر من متساويتى (٣) ، (٤) ان هناك ابهاماً فى تعيين الاشارة الجبرية لجيب أو جيب تمام زاوية والحقيقة خلاف ذلك فانه متى تعين المقدار الرقمى للزاوية بطل الابهام وصُدرت كل علامة جذرية باشارة جبرية واحدة فقط واليك البيان

(مثال) المطلوب تعيين المقدار الجبرى لكل من جا حـ ، جتا حـ بدلالة جا ٢ حـ اذا فرض ان ٢ حـ = − ٦٦°

(العمل) من حيث ان ٢ حـ = − ٦٦°

تكون حـ = − ٣٣°

ويقع الخط الدائر فى الثمن الثامن



(شكل ٣٥)

وفى هذا الثمن جتا حـ > جا حـ من حيث العدد وموجب

اذن جتا حـ + جا حـ = + √(١ + جا ٢ حـ)

، جتا حـ − جا حـ = + √(١ − جا ٢ حـ)

ويكون ٢ جتا حـ = √(١ + جا ٢ حـ) + √(١ − جا ٢ حـ)

، ٢ جا حـ = √(١ + جا ٢ حـ) − √(١ − جا ٢ حـ)

بند ٤٦ — تقدم فى بند ١١٧ من الجزء الاول أن

٢ جا (حـ/٢) = ± √(١ + جا حـ) ± √(١ − جا حـ)

، ٢ جتا (حـ/٢) = ± √(١ + جا حـ) ∓ √(١ − جا حـ)

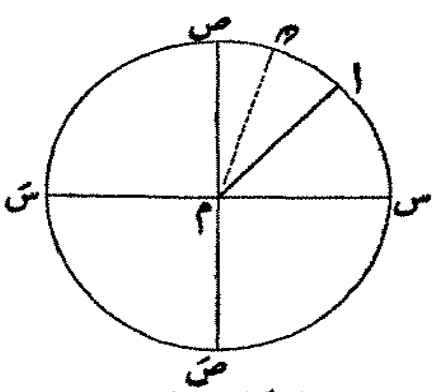
فاذا اريد تعيين المقدار الجبرى للنسبتين جا (حـ/٢) ، جتا (حـ/٢) نتبع الطريقة المبينة بالمثال السابق

(مثال) المطلوب تعيين المقدار الجبرى للنسبتين جا (حـ/٢) ، جتا (حـ/٢) بدلالة جا حـ اذا فرض ان حـ = ١٢٠°

(العمل) من حيث ان حـ = ١٢٠°

تكون حـ/٢ = ٦٠°

ويقع الخط الدائر الذى يحدد زاوية حـ/٢ فى الثمن الثانى



(شكل ٣٦)

وفى هذا الثمن جا (حـ/٢) > جتا (حـ/٢) وموجب

اذن جا (حـ/٢) + جتا (حـ/٢) = + √(١ + جا حـ)

، جا (حـ/٢) − جتا (حـ/٢) = + √(١ − جا حـ)

ويكون ٢ جا (حـ/٢) = √(١ + جا حـ) + √(١ − جا حـ)

، ٢ جتا (حـ/٢) = √(١ + جا حـ) − √(١ − جا حـ)

(تمارين ٩)

المطلوب تعيين المقادير الجبرية لجيوب وجيوب تمام الزوايا الآتية

(١) جا ٤٦° بدلالة ٩٢° (٣) جا ١٨٤° بدلالة ٣٦٨°

(٢) جا — ١٣٨° بدلالة — ٢٧٦° (٤) جا — ٣٣٢° بدلالة — ٦٦٤°

اوجد المقدار الجبرى للنسبتين جا حـ/٢ ، جتا حـ/٢ بدلالة جا حـ عند ما تنحصر حـ بين المقادير الآتية

(٥) بين ٣ط/٢ ، ٢ ط (٧) بين ٩٩٠° ، ١٠٨٠°

(٦) بين — ط/٢ ، — ط (٨) بين — ٣ط/٢ ، — ٢ ط

أوجد مقادير النسب الآتية من الفروض المعينة

(٩) جا ١٥° ، جتا ١٥° اذا علم جا ٣٠°

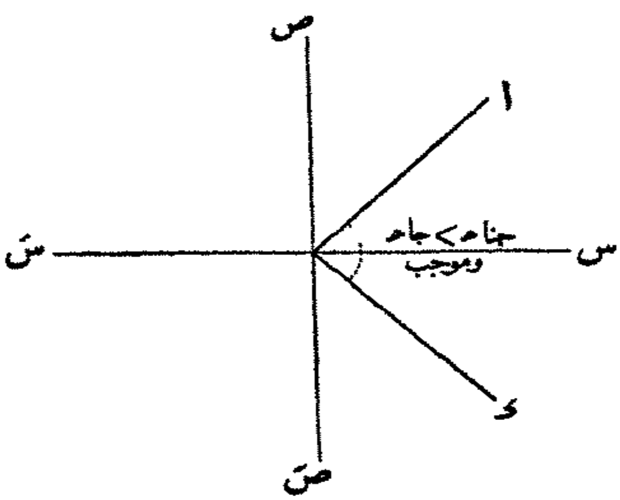
(١٠) جا ٣٠َ ٢٢° ، جتا ٣٠َ ٢٢° اذا علم جا ٤٥°

(١١) جا ٩° ، جتا ٩° اذا علم جا ١٨°

(١٢) جا ٣٠َ ١١٢° ، جتا ٣٠َ ١١٢° اذا علم جا ٢٢٥°

بند ٤٧ — واذا تعين المقدار الجبرى لكل من النسبتين جا حـ ، جتا حـ بدلالة جا ٢ حـ بأن تعينت الاشارات الجبرية التى تسبق علامات الجذور أمكن تحديد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار حـ

(مثال ١) اذا فرض ان ٢ جا حـ = $\sqrt{\text{١ + جا ٢ حـ}}$ — $\sqrt{\text{١ — جا ٢ حـ}}$ فعين النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار حـ



(شكل ٣٧)

(العمل) من حيث ان $\text{٢ جا ح} = \sqrt{\text{١} + \text{جا ٢ ح}} - \sqrt{\text{١} - \text{جا ٢ ح}}$

يكون $\text{جا ح} + \text{جتا ح} = + \sqrt{\text{١} + \text{جا ٢ ح}}$

، $\text{جا ح} - \text{جتا ح} = - \sqrt{\text{١} - \text{جا ٢ ح}}$

أى أن $\text{جتا ح} + \text{جا ح} = + \sqrt{\text{١} + \text{جا ٢ ح}}$

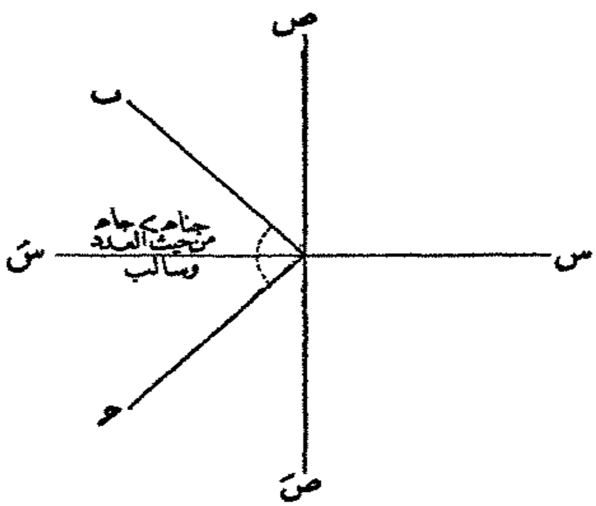
، $\text{جتا ح} - \text{جا ح} = + \sqrt{\text{١} - \text{جا ٢ ح}}$

وهذا لا يتأتى الا اذا كان جتا ح > جا ح وموجب

اذن ح تنحصر بين $-\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ ، $+\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

وبوجه عام ح « « $\text{٢ ن ط} - \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ ، $\text{٢ ن ط} + \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

(مثال ٢) اذا فرض ان $\text{٢ جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} = - \sqrt{\text{١} + \text{جا ح}} - \sqrt{\text{١} - \text{جا ح}}$ فعين النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار ح



(شكل ٣٨)

(العمل) من حيث ان $\text{٢ جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} = - \sqrt{\text{١} + \text{جا ح}} - \sqrt{\text{١} - \text{جا ح}}$

يكون $\text{جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} + \text{جا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} = - \sqrt{\text{١} + \text{جا ح}}$

، $\text{جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} - \text{جا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} = - \sqrt{\text{١} - \text{جا ح}}$

وهذا لا يتأتى الا اذا كان $\text{جتا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}} > \text{جا} \frac{\text{ح}}{\text{٢}}$ من حيث العدد وسالب

اذن $\frac{\text{ح}}{\text{٢}}$ تنحصر بين $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٤}}$

وبوجه عام $\frac{\text{ح}}{\text{٢}}$ « « $\text{٢ ن ط} + \frac{\text{٣ ط}}{\text{٤}}$ ، $\text{٢ ن ط} + \frac{\text{٥ ط}}{\text{٤}}$

واذن ح « « $\text{٤ ن ط} + \frac{\text{٣ ط}}{\text{٢}}$ ، $\text{٤ ن ط} + \frac{\text{٥ ط}}{\text{٢}}$

(تمارين ١٠)

المطلوب تعيين النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار ح في الحالات الآتية

(١) $٢ \text{ جا } ح = + \sqrt{١ + \text{جا } ٢ح} + \sqrt{١ - \text{جا } ٢ح}$

(٢) $٢ \text{ جتا } ح = - \sqrt{١ + \text{جا } ٢ح} - \sqrt{١ - \text{جا } ٢ح}$

(٣) $٢ \text{ جا } ح = - \sqrt{١ + \text{جا } ٢ح} - \sqrt{١ - \text{جا } ٢ح}$

(٤) $٢ \text{ جتا } ح = + \sqrt{١ + \text{جا } ٢ح} + \sqrt{١ - \text{جا } ٢ح}$

(٥) $٢ \text{ جتا } \frac{ح}{٢} = + \sqrt{١ + \text{جا } ح} - \sqrt{١ - \text{جا } ح}$

(٦) $٢ \text{ جا } \frac{ح}{٢} = + \sqrt{١ + \text{جا } ح} - \sqrt{١ - \text{جا } ح}$

(٧) $٢ \text{ جا } \frac{ح}{٢} = - \sqrt{١ + \text{جا } ح} + \sqrt{١ - \text{جا } ح}$

(٨) $٢ \text{ جتا } \frac{ح}{٢} = - \sqrt{١ + \text{جا } ح} - \sqrt{١ - \text{جا } ح}$

بند ٤٨ — لايجاد مقدار $\text{ظا } \frac{ح}{٢}$ بدلالة ظا ح

تقدم في بند ١١٢ من الجزء الاول

ان $$\text{ظا } ح = \frac{٢ \text{ ظا } \frac{ح}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢} \frac{ح}{٢}}$$

اذن $$\text{ظا } ح - \text{ظا } ح \text{ ظا}^{٢} \frac{ح}{٢} = ٢ \text{ ظا } \frac{ح}{٢}$$

و $$\text{ظا } ح \text{ ظا}^{٢} \frac{ح}{٢} + ٢ \text{ ظا } \frac{ح}{٢} - \text{ظا } ح = ٠$$

ويكون $$\text{ظا } \frac{ح}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ٤ \text{ ظا}^{٢} ح}}{٢ \text{ ظا } ح} = \frac{-١ \pm \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢} ح}}{\text{ظا } ح}$$

بند ٤٩ — متى تعين مقدار ح تعين كذلك المقدار الجبرى للنسبة $\text{ظا } \frac{ح}{٢}$ بدلالة ظا ح ولا يكون هناك ابهام في تعيين الاشارة الجبرية التي تسبق علامة الجذر وقبل شرح الطريقة التي نعين بها هذه الاشارة يسلم بأن $\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢} ح}$ اكبر من حيث العدد من الواحد

(مثال ١) المطلوب تعيين المقدار الجبرى للنسبة $\text{ظا } \frac{ح}{٢}$ بدلالة ظا ح اذا فرض ان $ح = ٣٠٠^{\circ}$

(العمل) من حيث ان $ح = ٣٠٠^{\circ}$ يكون ظا ح سالباً

وتكون $\frac{ح}{٢} = ١٥٠^{\circ}$ ويكون $\text{ظا } \frac{ح}{٢}$ سالباً كذلك

علم الآن ان قيمة الكسر $\frac{-١ \pm \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢} ح}}{\text{ظا } ح}$ يجب ان تكون سالبة وان مقامه سالب

كذلك فيحتم ان يكون البسط ($-١ \pm \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح}}$) موجباً وذلك لا يتأتى الا اذا كانت علامة الجذر مسبوقة بعلامة +

$$\text{اذن}\quad \text{ظا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \frac{-١ + \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح}}}{\text{ظا ح}}$$

(مثال ٢) المطلوب تعيين المقدار الجبرى للنسبة ظا $\frac{\text{ح}}{٢}$ بدلالة ظا ح اذا فرض ان ح تنحصر بين ١٨٠° ، ٢٧٠°

(العمل) من حيث ان مقدار ح ينحصر بين ١٨٠° ، ٢٧٠° يكون ظا ح موجباً وينحصر مقدار $\frac{\text{ح}}{٢}$ بين ٩٠° ، ١٣٥° ويكون ظا $\frac{\text{ح}}{٢}$ سالباً

علم الآن ان قيمة الكسر $\frac{-١ \pm \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح}}}{\text{ظا ح}}$ يجب ان تكون سالبة وان مقامه موجب فيتحتم ان يكون البسط ($-١ \pm \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح}}$) سالباً وذلك لا يتأتى الا اذا كانت علامة الجذر مسبوقة بعلامة −

$$\text{اذن}\quad \text{ظا}\,\frac{\text{ح}}{٢} = \frac{-١ - \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ح}}}{\text{ظا ح}}$$

(تمارين ١١)

المطلوب تعيين المقادير الجبرية للنسب الآتية

(١) ظا ٣٠° بدلالة ظا ٦٠°

(٢) ظا ١٠٠° بدلالة ظا ٢٠٠°

(٣) ظا (− ١٠°) بدلالة ظا (− ٢٠°)

(٤) ظا (− ١٥٠°) بدلالة ظا (− ٣٠٠°)

المطلوب تعيين المقدار الجبرى للنسبة ظا $\frac{\text{ح}}{٢}$ بدلالة ظا ح عندما ينحصر مقدار ح بين المقادير الآتية

(٥) بين ٤٥٠° ، ٥٤٠°

(٦) بين − ٣٦٠° ، − ٤٥٠°

(٧) بين ٦٣٠° ، ٧٢٠°

(٨) بين − ٢٧٠° ، − ٣٦٠°

أوجد مقادير النسب الآتية من الفروض المعينة

(٩) ظا ٢٢½° اذا علم ان ظا ٤٥° = ١

(١٠) ظا ٦٠° اذا علم ان ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

(١١) ظا ١٦٥° اذا علم ان ظا ٣٣٠° = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٢) ظا ٣٣٧½° اذا علم ان ظا ٦٧٥° = − ١

الباب السادس

في الدوال الدائرية العكسية

بند ٥٠ — علمنا مما تقدم انه اذا علمت زاوية مثل حـ وكان جا حـ = ل لم تكن حـ هذه الزاوية المفردة التي جيبها يساوى ل بل هناك زوايا اخرى لا نهاية لعددها ترتبط بالزاوية حـ وجيبها يساوى ل كذلك

ولما كان الوضع جا حـ = ل خاصاً بزاوية حـ دون غيرها من الزوايا التي جيبها يساوى ل اصطلح على الوضع جا$^{-1}$ ل ليدل على أصغر زاوية من حيث العدد (موجبة أو سالبة) جيبها يساوى ل

فمثلا اذا كانت الزاوية ٣٠° هي أصغر زاوية من حيث العدد جيبها يساوى ½ كان الوضع جا$^{-1}$ ½ يدل على الزاوية ٣٠° دون غيرها من الزوايا التي جيبها يساوى ½ واذا كانت الزاوية (− ٦٠°) هي أصغر زاوية من حيث العدد جيبها يساوى $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ كان الوضع جا$^{-1}$ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ يدل على الزاوية (− ٦٠°) دون غيرها من الزوايا التي جيبها يساوى $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

بند ٥١ — (ملاحظة) اذا فرض ان جا$^{-1}$ ل = + حـ أو − حـ (بأن تعددت أصغر زاوية من حيث العدد) فللتحديد نقتصر على الزاوية الموجبة ونكون جا$^{-1}$ ل = + حـ لا − حـ

فمثلا اذا كان جيب تمام كل من الزاويتين + ٣٠° ، − ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ كان الوضع جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = + ٣٠° لا − ٣٠°

بند ٥٢ — يراعى اذن ان الوضع جا$^{-1}$ ل هو رمز الى الزاوية لا لنسبة مثلثية ويجب ان نميز بينه وبين الوضع $\frac{1}{\text{جا ل}}$ لأن $\frac{1}{\text{جا ل}}$ = (جا ل)$^{-1}$ لا جا$^{-1}$ ل

بند ٥٣ — يقال للرموز جا$^{-1}$ ل ، جتا$^{-1}$ ل ، ظا$^{-1}$ ل ، ظتا$^{-1}$ ل ، قا$^{-1}$ ل ، قتا$^{-1}$ ل ، عكا$^{-1}$ ل ، عكتا$^{-1}$ ل الدوال الدائرية العكسية

بند ٥٤ — ولا مانع من استعمال الرموز العكسية اذا استعيض عن مقدار النسبة ما يساويها فمثلا اذا فرض ان جا حـ = ل كان جا$^{-1}$ ل = جا$^{-1}$ (جا حـ) = زاوية حـ واذا فرض ان جتا س = م كان جتا$^{-1}$ م = جتا$^{-1}$ (جتا س) = زاوية س وهكذا ويستنتج من هذا ان

حـ = جا$^{-1}$ (جا حـ) = جتا$^{-1}$ (جتا حـ) = ظا$^{-1}$ (ظا حـ) = ... الخ

بند ٥٥ — لما كانت الدوال الدائرية العكسية مجرد رموز الى الزوايا كانت وهى فى شكلها الجديد حافظة لخواص الزوايا من حيث الاستعمال فى حساب المثلثات واليك المثال

(مثال ١) برهن على ان

$$\text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٢} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٣} = ٤٥^\circ$$

(البرهان) من معنى الدوال العكسية نعلم ان

$$\text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٢} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٣} = \text{ظا}^{-1}\frac{\tfrac{١}{٢}+\tfrac{١}{٣}}{١-\tfrac{١}{٢}\times\tfrac{١}{٣}}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\,١$$

$$= ٤٥^\circ \qquad \text{وهو المطلوب}$$

(مثال ٢) برهن على ان

$$\text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٣} + \text{ظتا}^{-1}\,٥ + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٧} + \text{ظتا}^{-1}\,٨ = ٤٥^\circ$$

(البرهان) الكمية الاصلية $= \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٣} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٥} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٧} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{١}{٨}$

$$= \text{ظا}^{-1}\frac{\tfrac{١}{٣}+\tfrac{١}{٥}}{١-\tfrac{١}{٣}\times\tfrac{١}{٥}} + \text{ظا}^{-1}\frac{\tfrac{١}{٧}+\tfrac{١}{٨}}{١-\tfrac{١}{٧}\times\tfrac{١}{٨}}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\tfrac{٤}{٧} + \text{ظا}^{-1}\tfrac{٣}{١١}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\frac{\tfrac{٤}{٧}+\tfrac{٣}{١١}}{١-\tfrac{٤}{٧}\times\tfrac{٣}{١١}}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\,١$$

$$= ٤٥^\circ \qquad \text{وهو المطلوب}$$

(مثال ٣) برهن على ان

$$\text{جا}^{-1}\text{س} + \text{جتا}^{-1}\text{ص} = \text{جا}^{-1}\left(\text{س ص} + \sqrt{١-\text{س}^٢}\,\sqrt{١-\text{ص}^٢}\right)$$

(البرهان) $\text{جا}\left(\text{جا}^{-1}\text{س} + \text{جتا}^{-1}\text{ص}\right)$

$$= \text{جا}\left(\text{جا}^{-1}\text{س}\right)\text{جتا}\left(\text{جتا}^{-1}\text{ص}\right) + \text{جتا}\left(\text{جا}^{-1}\text{س}\right)\text{جا}\left(\text{جتا}^{-1}\text{ص}\right)$$

$$= \text{س ص} + \sqrt{١-\text{س}^٢}\,\sqrt{١-\text{ص}^٢}$$

اذن $\text{جا}^{-1}\text{س} + \text{جتا}^{-1}\text{ص} = \text{جا}^{-1}\left(\text{س ص} + \sqrt{١-\text{س}^٢}\,\sqrt{١-\text{ص}^٢}\right)$

وهو المطلوب

(مثال ٤) برهن على أن

$$\text{جا}^{-1}\tfrac{٣}{٥} - \text{جا}^{-1}\tfrac{٥}{١٣} = \text{جا}^{-1}\tfrac{١٦}{٦٥}$$

(البرهان) $\text{جا}\left(\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٥}-\text{جا}^{-١}\frac{٥}{١٣}\right)$

$$=\text{جا}\left(\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٥}\right)\text{جتا}\left(\text{جا}^{-١}\frac{٥}{١٣}\right)-\text{جتا}\left(\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٥}\right)\text{جا}\left(\text{جا}^{-١}\frac{٥}{١٣}\right)$$

$$=\frac{٣}{٥}\sqrt{١-\frac{٢٥}{١٦٩}}-\sqrt{١-\frac{٩}{٢٥}}\times\frac{٥}{١٣}$$

$$=\frac{٣}{٥}\times\frac{١٢}{١٣}-\frac{٤}{٥}\times\frac{٥}{١٣}$$

$$=\frac{١٦}{٦٥}$$

اذن $\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٥}-\text{جا}^{-١}\frac{٥}{١٣}=\text{جا}^{-١}\frac{١٦}{٦٥}$ وهو المطلوب

(تمارين ١٢)

برهن على ان المتطابقات الآتية صحيحة

(١) $\text{ظا}^{-١}\frac{١}{٢}+\text{ظا}^{-١}\frac{١}{٣}=\frac{\text{ط}}{٤}$

(٢) $\text{ظا}^{-١}\frac{١}{١٠}+\text{ظا}^{-١}\frac{٩}{١١}=\frac{\text{ط}}{٤}$

(٣) $\text{جتا}^{-١}\text{س}+\text{جتا}^{-١}\text{ص}=\text{جا}^{-١}\left(\text{س}\sqrt{١-\text{ص}^{٢}}+\text{ص}\sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)$

(٤) $\text{جا}^{-١}\text{س}-\text{جتا}^{-١}\text{ص}=\text{جتا}^{-١}\left(\text{ص}\sqrt{١-\text{س}^{٢}}+\text{س}\sqrt{١-\text{ص}^{٢}}\right)$

(٥) $\text{ظا}^{-١}\frac{١}{٧}+\text{ظا}^{-١}\frac{١}{١٢}=\text{ظا}^{-١}\frac{١٩}{٨٣}$

(٦) $\text{جا}^{-١}\frac{١}{\sqrt{٥}}+\text{جتا}^{-١}\frac{٣}{\sqrt{١٠}}=٤٥^{\circ}$

(٧) $\text{ظا}^{-١}\frac{٣}{٥}+\text{ظتا}^{-١}\frac{٧}{٣}=\text{ظتا}^{-١}\frac{١٣}{١٨}$

(٨) $\text{ظتا}^{-١}٣+\text{ظتا}^{-١}\frac{٣}{٤}=\text{ظتا}^{-١}\frac{١}{٣}$

(٩) $\text{جتا}^{-١}\frac{٤}{٥}-\text{جتا}^{-١}\frac{١٢}{١٣}=\text{جتا}^{-١}\frac{٦٣}{٦٥}$

(١٠) $\text{ظتا}^{-١}\sqrt{٣}-\text{ظتا}^{-١}\left(\sqrt{٣}+٢\right)=\frac{\text{ط}}{١٢}$

(١١) $\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٥}+\text{جا}^{-١}\frac{٨}{١٧}=\text{جا}^{-١}\frac{٧٧}{٨٥}$

(١٢) $\text{ظا}^{-١}\text{ه}+\text{ظتا}^{-١}\left(\text{ه}+١\right)=\text{ظتا}^{-١}\left(\text{ه}^{٢}+\text{ه}+١\right)$

(١٣) $\text{جا}^{-١}\frac{٣}{٢٥}+\text{جا}^{-١}\frac{٥}{٥}\,\frac{١}{٢}=٩٠^{\circ}$

(١٤) $\text{ظا}^{-١}\left(٢+\sqrt{٣}\right)-\text{ظا}^{-١}\left(٢-\sqrt{٣}\right)=\text{قا}^{-١}٢$

(١٥) $\text{جتا}^{-١}\sqrt{\frac{٢}{٣}}-\text{جتا}^{-١}\frac{\sqrt{٦}+١}{٢\sqrt{٣}}=\frac{\text{ط}}{٦}$

(١٦) $\text{ظا}^{-١}\frac{٣}{٤}+\text{ظا}^{-١}\frac{٣}{٥}-\text{ظا}^{-١}\frac{٨}{١٩}=\frac{\text{ط}}{٤}$

(١٧) $\text{ظتا}^{-١}١+\text{ظتا}^{-١}\frac{١}{٢}+\text{ظتا}^{-١}\frac{١}{٣}=\text{ط}$

(١٨) $\text{جا}^{-1}\sqrt{\frac{١ - \text{س}}{٢}} + \text{جتا}^{-1}\sqrt{\frac{١ + \text{س}}{٢}} = \text{جتا}^{-1}\text{س}$

(١٩) $\text{ظا}^{-1}\frac{٢}{٣} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٤} + \text{ظتا}^{-1}\frac{١١}{١٠} = \frac{\text{ط}}{٢}$

(٢٠) $\text{ظا}^{-1}\frac{١}{٤} + \text{ظا}^{-1}\frac{٢}{٩} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٥} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٨} = \frac{\text{ط}}{٤}$

بند ٥٦ — ويستحسن فى اختصار الكميات المثلثية المشتملة على دوال عكسية تحويل حدودها الى الوضع $\text{ظا}^{-1}\text{ح}$ ما لم تحتو الكمية على حدين فقط كل حد منهما فى الوضع $\text{جا}^{-1}\text{ح}$ أو $\text{جتا}^{-1}\text{ح}$ واليك المثال

(مثال ١) برهن على أن

$$\text{جا}^{-1}\frac{١}{٣} + \text{ظتا}^{-1}\sqrt{٢} = \text{ظا}^{-1}\sqrt{٢}$$

(البرهان) اذا فرض ان جيب زاوية $= \frac{١}{٣}$ كان ظلها $= \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

اذن $\text{جا}^{-1}\frac{١}{٣} + \text{ظتا}^{-1}\sqrt{٢} = \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$$= \text{ظا}^{-1}\frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}{١ - \frac{١}{٤}}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\frac{٣}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٣}$$

$$= \text{ظا}^{-1}\sqrt{٢}$$ وهو المطلوب

(مثال ٢) برهن على ان

$$\text{جتا}^{-1}\frac{٤}{٥} - \text{جا}^{-1}\frac{١}{\sqrt{١٠}} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٣} = \frac{\text{ط}}{٤}$$

(البرهان) اذا فرض ان جيب تمام زاوية $= \frac{٤}{٥}$ كان ظلها $= \frac{٣}{٤}$

واذا « « « « $= \frac{١}{\sqrt{١٠}}$ « « $= \frac{١}{٣}$

اذن $\text{جتا}^{-1}\frac{٤}{٥} - \text{جا}^{-1}\frac{١}{\sqrt{١٠}} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٣} = \text{ظا}^{-1}\frac{٣}{٤} - \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٣} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٣}$

$$= \text{ظا}^{-1}\frac{\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣}} + \text{ظا}^{-1}\frac{١}{٣}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\tfrac{١}{٢} + \text{ظا}^{-١}\,\tfrac{١}{٣}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,١$$

$$= \frac{\text{ط}}{٤}$$ وهو المطلوب

(تمارين ١٣)

برهن على ان المتطابقات الآتية صحيحة

(١) $\text{جتا}^{-١}\sqrt{\frac{\text{ح} - \text{س}}{\text{ح} - \text{ب}}} = \text{جا}^{-١}\sqrt{\frac{\text{س} - \text{ب}}{\text{ح} - \text{ب}}} = \text{ظتا}^{-١}\sqrt{\frac{\text{ح} - \text{س}}{\text{س} - \text{ب}}}$

(٢) $\text{ظا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{جا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{٢٧}{١١}$

(٣) $\text{ظتا}^{-١}\,٣ + \text{قتا}^{-١}\sqrt{٥} = ٤٥^\circ$

(٤) $\text{جا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{جا}^{-١}\,\frac{١٢}{١٣} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{٥٦}{٣٣}$

(٥) $\text{جا}^{-١}\,\frac{٤}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٣}{٤} = ٩٠^\circ$

(٦) $\text{جا}^{-١}\,\frac{٥}{١٣} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٧}{٢٤} = \text{جتا}^{-١}\,\frac{٢٥٣}{٣٢٥}$

(٧) $\text{جتا}^{-١}\,\frac{٥}{١٣} + \text{ظتا}^{-١}\,\frac{١٦}{٦٣} + \text{جا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} = \text{ط}$

(٨) $\text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٢} + \text{ظتا}^{-١}\,\frac{١}{٣} + \text{جا}^{-١}\,\frac{٧}{١٠}\sqrt{٢} = \text{ط}$

(٩) $\text{ظتا}^{-١}\,\frac{١٫٥}{٢} + \text{جا}^{-١}\,\frac{١٫٠٥}{٢٫٠٥} = \frac{\text{ط}}{٢}$

(١٠) $\text{جا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{جا}^{-١}\,\frac{٨}{١٧} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{٧٧}{٣٦}$

بند ٥٧ — أمثلة عامة على الدوال العكسية تشمل مضاعفات وأجزاء الزوايا

(مثال ١) برهن على أن

$$٢\,\text{ظا}^{-١}\,\tfrac{١}{٢} = \text{ظا}^{-١}\,\tfrac{٤}{٣}$$

(البرهان) $٢\,\text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٢} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{٢ \times \frac{١}{٢}}{١ - (\frac{١}{٢})^{٢}}$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{١ - \frac{١}{٤}}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\tfrac{٤}{٣}$$ وهو المطلوب

(مثال ٢) برهن على ان

$$\tfrac{١}{٢}\,\text{جتا}^{-١}\,\tfrac{٤}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\tfrac{١}{٢} = \frac{\text{ط}}{٤}$$

(البرهان) $\frac{١}{٢}\,\text{جا}^{-١}\,\frac{٤}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}\,\text{جتا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣}$

$$= \text{ظا}^{-١} \sqrt{\frac{١ - \frac{٣}{٥}}{١ + \frac{٣}{٥}}} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٢} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,١$$

$$= \frac{\text{ط}}{٤}$$

(مثال ٣) برهن على أن

$$٢\,\text{جتا}^{-١}\,\frac{٣}{\sqrt{١٣}} + \text{ظتا}^{-١}\,\frac{١٦}{٦٣} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}^{-١}\,\frac{٧}{٢٥} = \text{ط}$$

(البرهان) الطرف الايمن من المتساوية $= ٢\,\text{ظا}^{-١}\,\frac{٢}{٣} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٦٣}{١٦} + \text{ظا}^{-١} \sqrt{\frac{١ - \frac{٧}{٢٥}}{١ + \frac{٧}{٢٥}}}$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{\frac{٤}{٣}}{١ - \frac{٤}{٩}} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٦٣}{١٦} + \text{ظا}^{-١} \sqrt{\frac{١٨}{٣٢}}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١٢}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٦٣}{١٦} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٣}{٤}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١٢}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{\frac{٣}{٤} + \frac{٦٣}{١٦}}{١ - \frac{٦٣}{١٦} \times \frac{٣}{٤}}$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١٢}{٥} + \text{ظا}^{-١}\left(-\frac{١٢}{٥}\right)$$

$$= \text{ظا}^{-١}\,\frac{١٢}{٥} + \text{ط} - \text{ظا}^{-١}\,\frac{١٢}{٥}$$

$= \text{ط}$ وهو المطلوب

(تمارين ١٤)

برهن على ان المتطابقات الآتية صحيحة

(١) $٢\,\text{جا}^{-١}\,\frac{٤}{٥} - \text{جا}^{-١}\,\frac{٢٤}{٢٥} = ٠$

(٢) $\text{جتا}^{-١}\,\frac{١}{٢} + ٢\,\text{جا}^{-١}\,\frac{١}{٢} = ١٢٠^{\circ}$

(٣) $٢\,\text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٧} = \frac{\text{ط}}{٤}$

(٤) $٢\,\text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٧} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{٢}{١١} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣}$

(٥) $\frac{١}{٢}\,\text{جتا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} - \text{ظا}^{-١}\,\frac{٢}{٩} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٤}$

(٦) $\frac{١}{٢}\,\text{جتا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{ظتا}^{-١}\,٣ - \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٢} = \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣}$

(٧) $\text{جتا}^{-١}\,\frac{١}{\sqrt{٥}} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{١}{٣} = \text{ظا}^{-١}\,٢$

(٨) $\text{عكا}^{-١}\,\frac{٣}{٥} + \text{عكا}^{-١}\,\frac{١٨}{٢٥} = \text{عكا}^{-١}\,\frac{٨}{٥}$

بند ٥٨ — فى حل المعادلات التى تشتمل على دوال عكسية

(مثال ١) حل المعادلة $\text{جا}^{-١}\sqrt{\text{س}} + \text{جا}^{-١}\sqrt{٤\,\text{س}} = \frac{\text{ط}}{٣}$

(العمل) نأخذ جيب تمام طرفى المعادلة

فيكون $\text{جتا}\left(\text{جا}^{-١}\sqrt{\text{س}} + \text{جا}^{-١}\sqrt{٤\,\text{س}}\right) = \text{جتا}\,\frac{\text{ط}}{٣}$

اى ان $\sqrt{١ - \text{س}} \times \sqrt{١ - ٤\,\text{س}} - \sqrt{\text{س}} \times \sqrt{٤\,\text{س}} = \frac{١}{٢}$

، $\sqrt{١ - \text{س}} \times \sqrt{١ - ٤\,\text{س}} = ٢\,\text{س} + \frac{١}{٢}$

، $١ - ٥\,\text{س} + ٤\,\text{س}^٢ = ٤\,\text{س}^٢ + ٢\,\text{س} + \frac{١}{٤}$

، $٧\,\text{س} = \frac{٣}{٤}$

، $\text{س} = \frac{٣}{٢٨}$

(مثال ٢) حل المعادلة

$$\text{ظا}^{-١}\,\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{\text{س} - ١}{\text{س}} = \text{ظا}^{-١}\,(-٧)$$

(العمل) نأخذ ظل طرفى المعادلة

فيكون $\text{ظا}\left[\text{ظا}^{-١}\,\frac{\text{س}+١}{\text{س}-١} + \text{ظا}^{-١}\,\frac{\text{س}-١}{\text{س}}\right] = \text{ظا}\left[\text{ظا}^{-١}\,(-٧)\right]$

اى ان $$\frac{\dfrac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} + \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}}}{١ - \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} \times \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}}} = -٧$$

، $$\frac{٢\,\text{س}^٢ - \text{س} + ١}{- ١} = -٧$$

، $٢\,\text{س}^٢ - ٨\,\text{س} + ٨ = ٠$

، $\text{س} = ٢$

(مثال ٣) حل المعادلة

$$\text{جا}^{-1}\,٢\text{س} = \text{جا}^{-1}\,\text{س}\sqrt{٣} + \text{جا}^{-1}\,\text{س}$$

(العمل) من حيث ان

$$\text{جا}^{-1}\,\text{س}\sqrt{٣} + \text{جا}^{-1}\,\text{س} = \text{جا}^{-1}\left(\text{س}\sqrt{٣}\,\sqrt{١ - \text{س}^{٢}} + \text{س}\sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}}\right)$$

يكون $\text{جا}^{-1}\,٢\text{س} = \text{جا}^{-1}\left(\text{س}\sqrt{٣}\,\sqrt{١ - \text{س}^{٢}} + \text{س}\sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}}\right)$

اى ان $٢\text{س} = \text{س}\sqrt{٣}\,\sqrt{١ - \text{س}^{٢}} + \text{س}\sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}}$

فتكون اما $\text{س} = ٠$

أو $٢ = \sqrt{٣}\,\sqrt{١ - \text{س}^{٢}} + \sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}}$

ومن المعادلة الاخيرة يكون

$$٢ - \sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}} = \sqrt{٣}\,\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$$

أى ان $٤ + (١ - ٣\text{س}^{٢}) - ٤\sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}} = ٣(١ - \text{س}^{٢})$

، $٤\sqrt{١ - ٣\text{س}^{٢}} = ٢$

، $١٦(١ - ٣\text{س}^{٢}) = ٤$

، $\text{س}^{٢} = \frac{١}{٤}$

، $\text{س} = \pm\frac{١}{٢}$

اذن $\text{س} = ٠$ أو $\pm\frac{١}{٢}$

(تمارين ١٥)

حل المعادلات الآتية

(١) $\text{ظا}^{-1}\,٢\text{س} + \text{ظا}^{-1}\,٣\text{س} = \frac{\text{ط}}{٤}$

(٢) $\text{ظا}^{-1}\,\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} + \text{ظا}^{-1}\,\frac{\text{س} - ١}{\text{س}} = \text{ظا}^{-1}\,(-٩)$

(٣) $\text{حا}^{-1}\,\text{س} + \text{جا}^{-1}\,\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ط}}{٤}$ ؛

(٤) $\text{جتا}^{-1}\,\frac{١}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}} - \text{جتا}^{-1}\,\frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}} = \text{جا}^{-1}\,\frac{١ + \text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

(٥) $\text{جا}^{-1}\,\frac{٥}{\text{س}} + \text{جا}^{-1}\,\frac{١٢}{\text{س}} = \frac{\text{ط}}{٢}$

(٦) $\text{ظا}^{-1}\,\frac{\sqrt{١ + \text{س}} + \sqrt{١ - \text{س}}}{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}} = ٣٠^{\circ}$

(٧) $\text{جا}^{-1}\text{س} + \text{جا}^{-1}(1 - \text{س}) = \text{جتا}^{-1}\text{س}$

(٨) $\text{جا}^{-1}\text{س} + \text{جا}^{-1}\frac{1}{2} = \text{جا}^{-1}\frac{3}{4}$

(٩) $\text{جا}^{-1}\frac{12}{13} + \text{جا}^{-1}\frac{12}{\text{س}} = \frac{\text{ط}}{2}$

(١٠) $\text{ظا}^{-1}(\text{س} + 1) + \text{ظا}^{-1}(\text{س} - 1) = \text{ظا}^{-1}\frac{8}{31}$

(١١) $\text{ظا}^{-1}\text{س} + \text{ظا}^{-1}(1 - \text{س}) = 2\,\text{ظا}^{-1}\sqrt{\text{س} - \text{س}^2}$

(١٢) $\text{ظتا}^{-1}\text{س} - \text{ظتا}^{-1}(\text{س} + 2) = 15^\circ$

(١٣) $\text{ظا}^{-1}\frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 2} + \text{ظا}^{-1}\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 2} = \frac{\text{ط}}{4}$

(١٤) $\text{ظا}^{-1}(\text{س} + 1) + \text{ظتا}^{-1}(\text{س} - 1) = \text{جا}^{-1}\frac{4}{5} + \text{جتا}^{-1}\frac{3}{5}$

(١٥) $\text{ظا}^{-1}\text{س} + 2\,\text{ظتا}^{-1}\text{س} = \frac{2}{3}\,\text{ط}$

(١٦) $\text{جتا}^{-1}\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 1} + \text{ظا}^{-1}\frac{2\,\text{س}}{\text{س}^2 - 1} = \frac{2\,\text{ط}}{3}$

(١٧) $\text{جتا}^{-1}\text{س} + \text{جتا}^{-1}(1 - \text{س}) = \text{جتا}^{-1}(-\text{س})$

(١٨) $\text{ظا}^{-1}\text{س} + \text{ظا}^{-1}3\,\text{س} + \text{ظا}^{-1}2\,\text{س} = \text{ط}$

(١٩) $\text{ظا}^{-1}\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{قا}^{-1}5\,\text{س} = 45^\circ$

(٢٠) $\text{ظا}^{-1}(\text{س} - 2) + \text{ظا}^{-1}(\text{س} + 2) + \text{ظا}^{-1}2\,\text{س} = \text{ظا}^{-1}4\,\text{س}$

الباب السابع

فى الحذف

بند ٥٩ — استخدمنا فى حل المعادلات الآنية فى الجبر طريقة الحذف ويقصد بها حذف بعض المجاهيل من المعادلات الاصلية واستنتاج معادلات جديدة تتحقق بمقادير المجاهيل التى تتحقق بها المعادلات الاصلية

كذلك الحذف فى حساب المثلثات معناه حذف زاوية (أو أكثر) مشتركة بين معادلتين مثلثتين واستنتاج معادلة جديدة لا تحتوى على هذه الزاوية وتتحقق بمقادير الزاوية التى تتحقق بها المعادلتان الاصليتان

ولا يمكن وضع قواعد محدودة لطرق الحذف وانما نورد بعضاً من الامثلة المتنوعة لتكون نموذجاً للطالب فى حل ما يشابهها

(مثال ١) احذف حـ من المعادلتين

$$ل \text{ جتا } حـ + م \text{ جا } حـ = ﻫ$$
$$ل' \text{ جتا } حـ + م' \text{ جا } حـ = ﻫ'$$

(العمل) نبحث عن مقدارى جتا حـ ، جا حـ بالطرق الجبرية المعتادة

$$\text{فيكون} \quad \text{جتا } حـ = \frac{م ﻫ' - م' ﻫ}{م ل' - م' ل} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١)$$

$$، \quad \text{جا } حـ = \frac{ل' ﻫ - ل ﻫ'}{م ل' - م' ل} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٢)$$

و باضافة معادلة (١) الى معادلة (٢) بعد تربيع طرفى كل منهما ينتج ان

$$\text{جتا}^٢ حـ + \text{جا}^٢ حـ = \left(\frac{م ﻫ' - م' ﻫ}{م ل' - م' ل}\right)^٢ + \left(\frac{ل' ﻫ - ل ﻫ'}{م ل' - م' ل}\right)^٢$$

$$\text{اى ان} \qquad ١ = \frac{(م ﻫ' - م' ﻫ)^٢ + (ل' ﻫ - ل ﻫ')^٢}{(م ل' - م' ل)^٢}$$

$$\text{ويكون اذن} \quad (م ل' - م ل')^٢ = (م ﻫ' - م' ﻫ)^٢ + (ل' ﻫ - ل ﻫ')^٢$$

وهو المطلوب

(مثال ٢) احذف حـ من المعادلتين

$$ل \text{ ظا } حـ + م \text{ قا } حـ = ﻫ$$
$$ك \text{ ظا } حـ - و \text{ قا } حـ = س$$

(العمل) نبحث عن مقدارى ظا حـ ، قا حـ بالطرق الجبرية المعتادة

فيكون $\text{ظا ح} = \dfrac{\text{هـ و} + \text{م س}}{\text{ل و} + \text{م ك}}$ .... (١)

و $\text{قا ح} = \dfrac{\text{هـ ك} - \text{ل س}}{\text{م ك} + \text{ل و}}$ .... (٢)

وبطرح معادلة (١) من معادلة (٢) بعد تربيع طرفى كل منهما ينتج أن

$$\text{قا}^2\,\text{ح} - \text{ظا}^2\,\text{ح} = \left(\frac{\text{هـ ك} - \text{ل س}}{\text{م ك} + \text{ل و}}\right)^2 - \left(\frac{\text{هـ و} + \text{م س}}{\text{ل و} + \text{م ك}}\right)^2$$

اى ان $$1 = \frac{(\text{هـ ك} - \text{ل س})^2 - (\text{هـ و} + \text{م س})^2}{(\text{ل و} + \text{م ك})^2}$$

فيكون اذن $(\text{ل و} + \text{م ك})^2 = (\text{هـ ك} - \text{ل س})^2 - (\text{هـ و} + \text{م س})^2$

أو $(\text{ل و} + \text{م ك})^2 + (\text{هـ و} + \text{م س})^2 = (\text{هـ ك} - \text{ل س})^2$

وهو المطلوب

(مثال ٣) احذف ح ، ى من المعادلات

$\text{س جتا ح} + \text{ص جتا ى} = \text{ل}$ .... (١)

$\text{س جا ح} - \text{ص جا ى} = \text{م}$ .... (٢)

$\text{جا}\,\tfrac{1}{2}(\text{ح} + \text{ى}) = \text{هـ}$ .... (٣)

(الحل) باضافة معادلة (١) الى معادلة (٢) بعد تربيع طرفى كل منهما ينتج ان

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\,\text{س ص}\,(\text{جتا ح جتا ى} - \text{جا ح جا ى}) = \text{ل}^2 + \text{م}^2$$

فيكون $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\,\text{س ص جتا}\,(\text{ح} + \text{ى}) = \text{ل}^2 + \text{م}^2$

و $$\text{جتا}\,(\text{ح} + \text{ى}) = \frac{\text{ل}^2 + \text{م}^2 - \text{س}^2 - \text{ص}^2}{2\,\text{س ص}}$$

و $$2\,\text{جا}^2\,\frac{\text{ح} + \text{ى}}{2} = 1 - \frac{\text{ل}^2 + \text{م}^2 - \text{س}^2 - \text{ص}^2}{2\,\text{س ص}}$$

ولكن من معادلة (٣) نعلم ان $2\,\text{جا}^2\,\dfrac{\text{ح} + \text{ى}}{2} = 2\,\text{هـ}^2$

اذن $$2\,\text{هـ}^2 = \frac{2\,\text{س ص} - \text{ل}^2 - \text{م}^2 + \text{س}^2 + \text{ص}^2}{2\,\text{س ص}}$$

ويكون $4\,\text{هـ}^2\,\text{س ص} = (\text{س} + \text{ص})^2 - (\text{ل}^2 + \text{م}^2)$ وهو المطلوب

(تمارين ١٦)

احذف ح من المجموعات الآتية

(١) س = ل جتا ح ، ص = م جا ح

(٢) س = جا ح − قتا ح ، ص = جتا ح − قا ح

(٣) س = جا ح + جتا ح ، ص = ظا ح + ظتا ح

(٤) س = جا ح + ظا ح ، ص = جا ح − ظا ح

(٥) $\text{س جا ح} - \text{ص جتا ح} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ ، $\dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{ح}}{\text{ل}} + \dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\text{ح}}{\text{م}} = \dfrac{١}{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

(٦) $\text{س} = \text{ل ظتا}^{٢}\,\text{ح}$ ، ص = ٢ ل ظا ح

(٧) $\dfrac{\text{س}}{\text{ل}}\,\text{جتا ح} + \dfrac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{جا ح} = ١$ ، $-\dfrac{\text{س}}{\text{ل}}\,\text{جا ح} + \dfrac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{جتا ح} = ١$

(٨) س = ٣ جتا ح + جتا ٣ ح ، ص = ٣ جا ح − جا ٣ ح

(٩) س جتا ح − ٢ س جتا ح جتا ٢ ح = ل ، ص جا ح − ٢ ص جتا ح جا ٢ ح = م

(١٠) ل جتا ح − م جا ح = ن جتا ٢ ح ، ل جا ح + م جتا ح = ٢ ن جا ٢ ح

احذف ح ، ى من المجموعات الآتية

(١١) ل جا ح − م جا ى = ٠ ، ك جتا ح − ن جتا ى = ٠ ، ح − ٢ ى = ٠

(١٢) ظا ح + ظا ى = ل ، ظتا ح + ظتا ى = م ، ح + ى = هـ

(١٣) ظا ح + ظا ى = ل ، ظتا ح + ظتا ى = م ، ح − ى = هـ

(١٤) جتا ح + جتا ى = ل ، ظتا ح + ظتا ى = م ، قتا ح + قتا ى = ن

(١٥) $\dfrac{\text{س جتا ح}}{\text{ل}} + \dfrac{\text{ص جا ح}}{\text{م}} = ١$ ، $\dfrac{\text{س جتا ى}}{\text{ل}} + \dfrac{\text{ص جا ى}}{\text{م}} = ١$ ، ح − ى = ٢ هـ

(١٦) جا ح + جا ى = س ، جتا ح + جتا ى = ص ، جتا (ح − ى) = ع

(١٧) ل جتا ح + م جا ح = ن ، ل جتا ى + م جا ى = ن

، $\dfrac{\text{جتا ح جتا ى}}{\text{س}^{٢}} + \dfrac{\text{جا ح جا ى}}{\text{ص}^{٢}} = ٠$

(١٨) س جتا ح + ص جا ح = ل ، س جتا ى + ص جا ى = ل ، $٢\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ح}}{٢}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ى}}{٢} = ١$

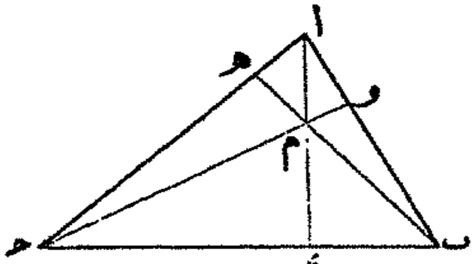
(١٩) $\text{ك جتا}^{٢}\,\text{ح} + \text{ل جا}^{٢}\,\text{ح} = \text{م}$ ، $\text{ل جتا}^{٢}\,\text{ى} + \text{ك جا}^{٢}\,\text{ى} = \text{ن}$ ، ك ظا ح = ل ظا ى

(٢٠) ل جا ح = م جا ى ، ل جتا ح + م جتا ى = ن ، س = ص ظا (ح + ى)

الباب الثامن
فى تتمة خواص المثلث

بند ٦٠ — لايجاد أطوال الابعاد التى بين ملتقى ارتفاعات المثلث و بين رءوسه واضلاعه

(المفروض) ان م ملتقى ارتفاعات المثلث ا ب حـ شكل (٣٩) والمطلوب ايجاد أطوال م ى ، م هـ ، م و ، م ا ، م ب ، م حـ


(شكل ٣٩)

(العمل) — أولا م ى = ب ى ظا م ب ى

= ب ى ظا (٩٠° — حـ)

= ا ب جتا ب ظتا حـ

= (حَ / جا حـ) جتا ب جتا حـ

= ٢ نق جتا ب جتا حـ

وكذلك نبرهن على ان

م هـ = ٢ نق جتا حـ جتا ا

، م و = ٢ نق جتا ا جتا ب

(ثانياً) م ا = ا و قا م ا و

= ا حـ جتا و ا حـ × قا ا ب ى = (بَ / جا ب) . جتا ا

= ٢ نق جتا ا

وكذلك نبرهن على ان

م ب = ٢ نق جتا ب

، م حـ = ٢ نق جتا حـ

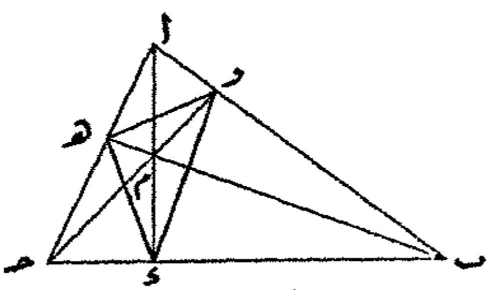
بند ٦١ — لايجاد مقادير أضلاع مثلث المواقع وزواياه

(أولا) نفرض ان المثلث ى هـ و شكل (٤٠) هو مثلث المواقع للمثلث ا ب حـ

فتكون النقط ب ، و ، م ، ى على محيط دائرة واحد

وتكون ∠ م ى و = ∠ م ب و

= ٩٠° — ا


(شكل ٤٠)

وكذلك النقط حـ ، هـ ، م ، ى تكون على محيط دائرة واحد

وتكون ∠ م ى هـ = ∠ م حـ هـ

= ٩٠° − ا

، ∠ و ى هـ = ٩٠° − ا + ٩٠° − ا

= ١٨٠° − ٢ ا

وكذلك نبرهن على ان

∠ ى هـ و = ١٨٠° − ٢ ب

، ∠ هـ و ى = ١٨٠° − ٢ حـ

(ثانياً) النقط ب ، و ، هـ ، حـ على محيط دائرة قطرها ب حـ

فما تقدم فى بند (٢١١) من الجزء الاول يكون

و هـ = ب حـ جا و ب هـ

= اَ جتا ا = ٢ نق جا ا جتا ا

= نق جا ٢ ا

وكذلك نبرهن على ان

و ى = بَ جتا ب = نق جا ٢ ب

، ى هـ = حـَ جتا حـ = نق جا ٢ حـ

(نتيجة ١) مساحة المثلث ى هـ و

= ½ و ى × و هـ × جا ى و هـ

= ½ نق جا ٢ ب × نق جا ٢ ا × جا(١٨٠° − ٢ حـ)

= ½ نق² جا ٢ ا جا ٢ ب جا ٢ حـ

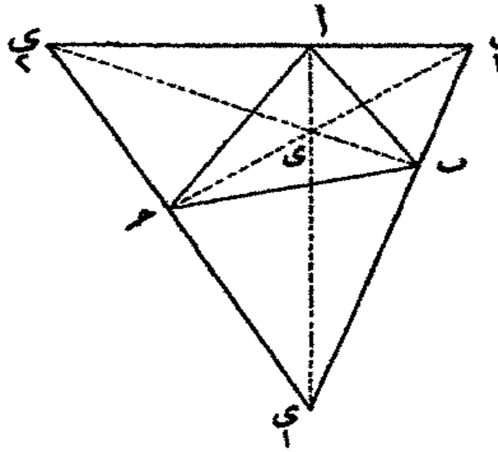
(نتيجة ٢) نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث ى هـ و

= أحد أضلاعه / ٢ جا (الزاوية المقابلة لهذا الضلع)

= و هـ / ٢ جا و ى هـ = نق جا ٢ ا / ٢ جا ٢ ا

= نق / ٢

بند ٦٢ — لايجاد مقادير أضلاع المثلث الذى رءوسه هى مراكز الدوائر التى تمس مثلثاً معلوماً من الخارج ثم ايجاد مقادير زوايا هذا المثلث



(شكل ٤١)

(المفروض) ان $\text{ى}_{١}$ مركز الدائرة التى تمس ب حـ فى المثلث ا ب حـ شكل (٤١) وان $\text{ى}_{٢}$ هى مركز الدائرة التى تمس ا حـ وان $\text{ى}_{٣}$ هى مركز الدائرة التى تمس ا ب والمطلوب ايجاد مقادير اضلاع المثلث $\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}$

(العمل) — أولا — من حيث ان منتصفى الزاويتين المتكاملتين متعامدان

يكون $\text{ى}_{١}$ ا عمودا على $\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{٢}$ ، $\text{ى}_{٢}$ ب عمودا على $\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١}$ ، $\text{ى}_{٣}$ حـ عمودا على $\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}$

ويكون المثلث ا ب حـ بمثابة مثلث المواقع للمثلث $\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}$

وتكون $\angle\,\text{ب ا حـ} = ١٨٠^\circ - ٢\angle\,\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}$

اذن $\angle\,\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢} = ٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢}$

وكذلك نبرهن على ان

$$\angle\,\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣} = ٩٠^\circ - \frac{\text{ب}}{٢}$$

$$،\quad \angle\,\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١} = ٩٠^\circ - \frac{\text{حـ}}{٢}$$

(ثانياً) $\text{ب حـ} = \text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}\ \text{جتا}\ \text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}$

أى ان $\text{ا}' = \text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}\ \text{جتا}\left(٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢}\right)$

فيكون $\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣} = \dfrac{\text{ا}'}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{٢}} = \dfrac{٢\ \text{نق جا ا}}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{٢}} = ٤\ \text{نق جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}$

وكذلك نبرهن على ان

$$\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا}\frac{\text{ب}}{٢}} = ٤\ \text{نق جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}$$

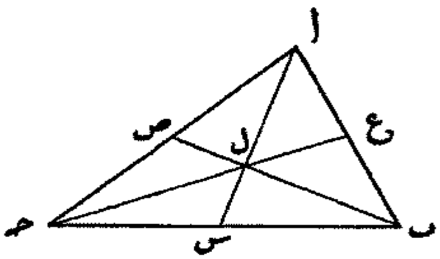
$$،\quad \text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢} = \frac{\text{حـ}'}{\text{جا}\frac{\text{حـ}}{٢}} = ٤\ \text{نق جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}$$

(نتيجة ١) مساحة المثلث $\text{ى}_١ \text{ى}_٢ \text{ى}_٣ = \frac{١}{٢} \text{ى}_١ \text{ى}_٣ \times \text{ى}_١ \text{ى}_٢ \times \text{جا}\ \text{ى}_٣ \text{ى}_١ \text{ى}_٢$

$= \frac{١}{٢} \times ٤\ \text{نق}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢} \times ٤\ \text{نق}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} \times \text{جا}\ (٩٠^\circ - \frac{\text{ا}}{٢})$

$= ٨\ \text{نق}^٢\ \text{جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}$

(نتيجة ٢) من حيث ان الدائرة التى ترسم خارج المثلث ا ب حـ هى دائرة النقط التسع المثلث $\text{ى}_١ \text{ى}_٢ \text{ى}_٣$ يكون نصف قطر الدائرة المرسومة على △ $\text{ى}_١ \text{ى}_٢ \text{ى}_٣$ يساوى قطر الدائرة المرسومة على △ ا ب حـ ويكون نصف قطر الدائرة المرسومة على △ $\text{ى}_١ \text{ى}_٢ \text{ى}_٣ = ٢$ نق



(شكل ٤٢)

بند ٦٣ — لايجاد أطوال المستقيمات المتوسطة للمثلث

نفرض ان ا ب حـ مثلث ما شكل (٤٢) وان ا س ، ب ص ، حـ ع مستقيماته المتوسطة وانها تتلاقى فى نقطة واحدة ل تسمى ملتقى المستقيمات المتوسطة

ففى المثلث ا ب س

$$\overline{\text{ا س}}^٢ = \overline{\text{ا ب}}^٢ + \overline{\text{ب س}}^٢ - ٢\ \text{ا ب} \cdot \text{ب س}\ \text{جتا ب}$$

$$= \text{حـ}'^٢ + \frac{\text{ا}'^٢}{٤} - \text{ا}'\ \text{حـ}'\ \text{جتا ب}$$

ولكن $\text{ب}'^٢ = \text{ا}'^٢ + \text{حـ}'^٢ - ٢\ \text{ا}'\ \text{حـ}'\ \text{جتا ب}$

اذن

$$٢\ \overline{\text{ا س}}^٢ - \text{ب}'^٢ = ٢\ \text{حـ}'^٢ + \frac{\text{ا}'^٢}{٢} - ٢\ \text{ا}'\ \text{حـ}'\ \text{جتا ب} - \text{ا}'^٢ - \text{حـ}'^٢ + ٢\ \text{ا}'\ \text{حـ}'\ \text{جتا ب}$$

$$= \text{حـ}'^٢ - \frac{\text{ا}'^٢}{٢}$$

$$، \quad ٢\ \overline{\text{ا س}}^٢ = \text{ب}'^٢ + \text{حـ}'^٢ - \frac{\text{ا}'^٢}{٢}$$

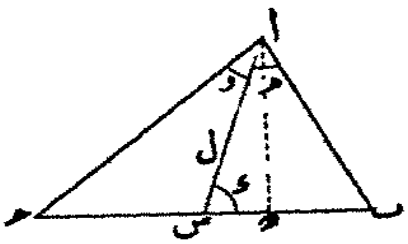
، $\text{ا س} = \frac{١}{٢} \sqrt{٢\ \text{ب}'^٢ + ٢\ \text{حـ}'^٢ - \text{ا}'^٢}$ أو يساوى $\frac{١}{٢} \sqrt{\text{ب}'^٢ + \text{حـ}'^٢ + ٢\ \text{ب}'\ \text{حـ}'\ \text{جتا ا}}$

وكذلك نبرهن على أن

$\text{ب ص} = \frac{١}{٢} \sqrt{٢\ \text{حـ}'^٢ + ٢\ \text{ا}'^٢ - \text{ب}'^٢}$ » » $\frac{١}{٢} \sqrt{\text{حـ}'^٢ + \text{ا}'^٢ + ٢\ \text{حـ}'\ \text{ا}'\ \text{جتا ب}}$

، $\text{حـ ع} = \frac{١}{٢} \sqrt{٢\ \text{ا}'^٢ + ٢\ \text{ب}'^٢ - \text{حـ}'^٢}$ » » $\frac{١}{٢} \sqrt{\text{ا}'^٢ + \text{ب}'^٢ + ٢\ \text{ا}'\ \text{ب}'\ \text{جتا حـ}}$

بند ٦٤ — لايجاد مقادير الزوايا التي يصنعها المستقيم المتوسط مع اضلاع المثلث


(شكل ٤٣)

(العمل) تفرض ان ا س هو المستقيم المتوسط للمثلث ا ب ح شكل (٤٣) وان ∠ ب ا س = هـ ، ∠ ح ا س = و ، ∠ ا س ب = ء

ففي المثلث ا ب س

يكون $$\frac{\text{جا هـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا}'}{\text{٢ ا س}}$$

ويكون $$\text{جا هـ} = \frac{\text{ا}'\,\text{جا ب}}{\text{٢ ا س}} = \frac{\text{ا}'\,\text{جا ب}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}$$

$$\text{، هـ} = \text{جا}^{-\text{١}}\left(\frac{\text{ا}'\,\text{جا ب}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}\right)$$

وفي المثلث س ا ح

$$\frac{\text{جا و}}{\text{جا ح}} = \frac{\text{س ح}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا}'}{\text{٢ ا س}}$$

فيكون $$\text{جا و} = \frac{\text{ا}'\,\text{جا ح}}{\text{٢ ا س}} = \frac{\text{ا}'\,\text{جا ح}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}$$

$$\text{، و} = \text{جا}^{-\text{١}}\left(\frac{\text{ا}'\,\text{جا ح}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}\right)$$

وفي المثلث ا ب س

$$\frac{\text{جا ء}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ح}'}{\text{ا س}}$$

فيكون $$\text{جا ء} = \frac{\text{ح}'\,\text{جا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{٢ ح}'\,\text{جا ب}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}$$

$$\text{، ء} = \text{جا}^{-\text{١}}\left(\frac{\text{٢ ح}'\,\text{جا ب}}{\sqrt{\text{٢ ب}'^{\text{٢}} + \text{٢ ح}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}}\right)$$

بند ٦٥ — ويمكن ايجاد مقدار زاوية ء طريقتين اخريين زيادة على الطريقة المتقدمة

(أولا) نرسم ا ه عموداً على ب ح

فيكون $$\text{ظتا ء} = \frac{\text{س ه}}{\text{ا ه}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ح ه} - \text{ب ه})}{\text{ا ه}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{هـ حـ}}{\text{ا هـ}} - \frac{\text{هـ ب}}{\text{ا هـ}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{ظتا حـ} - \text{ظتا ب}\right)$$

وتكون $$\text{ى} = \text{ظتا}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\text{ظتا حـ} - \text{ظتا ب}\right)\right\}$$

(ثانياً) $$\text{ظتا ى} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{س ب} - \text{هـ ب}}{\text{ا هـ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ا}'}{2} - \text{حـ}'\,\text{جتا ب}}{\text{حـ}'\,\text{جا ب}}$$

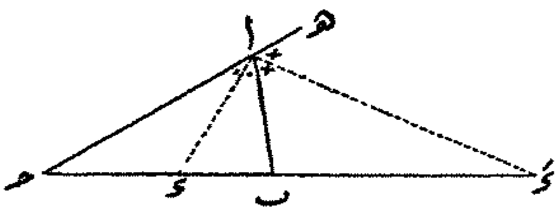
$$= \frac{\text{ا}'^{2} - 2\,\text{ا}'\,\text{حـ}'\,\text{جتا ب}}{2\,\text{ا}'\,\text{حـ}'\,\text{جا ب}}$$

$$= \frac{\text{ا}'^{2} - \left(\text{ا}'^{2} + \text{حـ}'^{2} - \text{ب}'^{2}\right)}{2\,\text{ا}'\,\text{حـ}'\,\text{جا ب}}$$

$$= \frac{\text{ب}'^{2} - \text{حـ}'^{2}}{4\triangle}$$

اذن $$\text{ى} = \text{ظتا}^{-1}\left(\frac{\text{ب}'^{2} - \text{حـ}'^{2}}{4\triangle}\right)$$

بند ٦٦ لايجاد أطوال منصفات الزوايا الداخلة والخارجة للمثلث



(شكل ٤٤)

(العمل) نفرض ان ا ب حـ مثلث شكل(٤٤) وان ا ى منصف زاوية ب ا حـ الداخلة ، ا ى' منصف زاوية ب ا هـ الخارجة

فمن الشكل

$$\triangle\,\text{ا ب ى} + \triangle\,\text{ا ى حـ} = \triangle\,\text{ا ب حـ}$$

اى أن $$\frac{1}{2}\,\text{ا ب}\cdot\text{ا ى جا}\,\frac{\text{ا}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{ا ى}\cdot\text{ا حـ جا}\,\frac{\text{ا}}{2} = \frac{1}{2}\,\text{ا ب}\cdot\text{ا حـ جا ا}$$

، $$\text{ا ى}\left(\text{حـ}' + \text{ب}'\right)\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{2} = \text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{جا ا}$$

، $$\text{ا ى} = \frac{\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{جا ا}}{\left(\text{حـ}' + \text{ب}'\right)\text{جا}\,\frac{\text{ا}}{2}}$$

$$= \frac{2\,\text{ب}'\,\text{حـ}'}{\text{ب}' + \text{حـ}'}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ا}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

ولايجاد طول ا ى َ نقول

من الشكل

$\triangle$ ا حـ ى َ − $\triangle$ ا ب ى َ = $\triangle$ ا ب حـ

اى ان $\frac{1}{2}$ ا حـ . ا ى َ جا ى َ ا حـ − $\frac{1}{2}$ ا ب . ا ى َ جا ى َ ا ب = $\frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ جا ا

6 ا ى َ . ب َ جا (٩٠° + $\frac{ا}{٢}$) − ا ى َ . حـ َ جا (٩٠° − $\frac{ا}{٢}$) = ب َ حـ َ جا ا

6 ا ى َ (ب َ − حـ َ) جتا $\frac{ا}{٢}$ = ب َ حـ َ جا ا

6 ا ى َ = $\frac{\text{ب َ حـ َ جا ا}}{\text{(ب َ − حـ َ) جتا } \frac{ا}{٢}}$

= $\frac{\text{٢ ب َ حـ َ}}{\text{ب َ − حـ َ}}$ جا $\frac{ا}{٢}$ .... (٢)

(ملاحظة) بقسمة متساوية (١) على متساوية (٢) ينتج أن

$\frac{\text{ب َ − حـ َ}}{\text{ب َ + حـ َ}}$ ظتا $\frac{ا}{٢}$ = $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ى َ}}$ = ظتا ا ى ى َ

= ظتا (حـ + $\frac{ا}{٢}$)

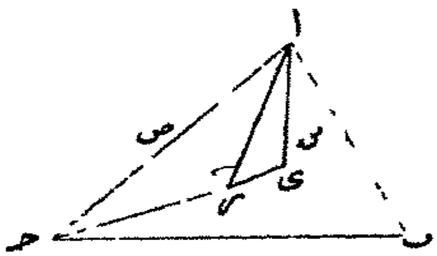
= ظا $\frac{\text{ب − حـ}}{٢}$

(لان حـ + $\frac{ا}{٢}$ + $\frac{\text{ب − حـ}}{٢}$ = $\frac{\text{ا + ب + حـ}}{٢}$ = ٩٠°)

وهذا هو القانون الذى سبقت البرهنة على صحته بطريقة أخرى فى بند (١٨١) من الجزء الاول

بند ٦٧ − لايجاد طول المسافة التى بين مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث والدائرة المرسومة داخله

(العمل) نفرض ان ى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ شكل (٤٥) وان م مركز الدائرة المرسومة خارجه وان م ص عمود على ا حـ



(شكل ٤٥)

فتكون $\angle$ ى ا ص = $\frac{ا}{٢}$

6 $\angle$ ا م حـ = ٢ $\angle$ ب

6 $\angle$ ا م ص = $\angle$ ب

6 $\angle$ م ا ص = ٩٠° − $\angle$ ا م ص = ٩٠° − ب

6 $\angle$ ى ا م = $\angle$ ى ا ص − $\angle$ م ا ص = $\frac{ا}{٢}$ − ٩٠ + ب

= $\frac{\text{ا − ١٨٠° + ٢ ب}}{٢}$ = $\frac{\text{ا − (ا + ب + حـ) + ٢ ب}}{٢}$

= $\frac{\text{ب − حـ}}{٢}$

$\therefore\ \text{ا م} = \text{نق}$

$\therefore\ \text{ا ى} = \dfrac{\text{نـه}}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{2}} = \dfrac{4\ \text{نق جا}\frac{\text{ا}}{2}\ \text{جا}\frac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\frac{\text{ح}}{2}}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{2}} = 4\ \text{نق جا}\frac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\frac{\text{ح}}{2}$ (بند ٢١٢ جزء اول)

وفى المثلث ى م ا

$$\overline{\text{م ى}}^2 = \overline{\text{ا م}}^2 + \overline{\text{ا ى}}^2 - 2\ \text{ا م} \cdot \text{ا ى جتا ى ا م}$$

$$= \text{نق}^2 + 16\ \text{نق}^2\ \text{جا}^2\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}^2\tfrac{\text{ح}}{2} - 2\ \text{نق} \times 4\ \text{نق جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2} \times \text{جتا}\tfrac{\text{ب}-\text{ح}}{2}$$

$$= \text{نق}^2 + 16\ \text{نق}^2\ \text{جا}^2\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}^2\tfrac{\text{ح}}{2} - 8\ \text{نق}^2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\left(\text{جتا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\tfrac{\text{ح}}{2} + \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\right)$$

$$= \text{نق}^2 + 8\ \text{نق}^2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\left[2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2} - \text{جتا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\tfrac{\text{ح}}{2} - \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\right]$$

$$= \text{نق}^2 + 8\ \text{نق}^2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\left[\text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2} - \text{جتا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\tfrac{\text{ح}}{2}\right]$$

$$= \text{نق}^2 - 8\ \text{نق}^2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\left[\text{جتا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\tfrac{\text{ح}}{2} - \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\right]$$

$$= \text{نق}^2 - 8\ \text{نق}^2\ \text{جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\ \text{جتا}\tfrac{\text{ب}+\text{ح}}{2}$$

$$= \text{نق}^2 - 2\ \text{نق} \times 4\ \text{نق جا}\tfrac{\text{ب}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ح}}{2}\ \text{جا}\tfrac{\text{ا}}{2}$$

اذن $\overline{\text{م ى}}^2 = \text{نق}^2 - 2\ \text{نق نـه}$

$\therefore\ \text{م ى} = \sqrt{\text{نق}^2 - 2\ \text{نق نـه}}$

بند ٦٨ — لايجاد طول المسافة التى بين مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث والدائرة التى تمس أحد أضلاعه من الخارج

(العمل) نفرض ان ى_1 مركز الدائرة التى تمس الضلع ا' من الخارج شكل (٤٦)

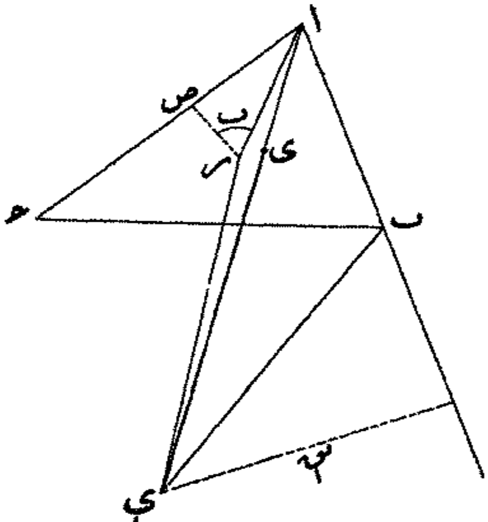
فمن حيث ان ى_1 على منصف $\angle$ ا

تكون $\angle\ \text{ى}_1\ \text{ا م} = \dfrac{\text{ب} - \text{ح}}{2}$

$\therefore\ \text{ا ى}_1 = \dfrac{\text{نـه}_1}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{2}}$

$= \dfrac{4\ \text{نق جا}\frac{\text{ا}}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{ح}}{2}}{\text{جا}\frac{\text{ا}}{2}}$

$= 4\ \text{نق جتا}\frac{\text{ب}}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{ح}}{2}$



(شكل ٤٦)

وفى المثلث ى_1 م ا

$\overline{\text{س ى}_1}^{\,٢} = \overline{\text{ا س}}^{\,٢} + \overline{\text{ا ى}_1}^{\,٢} - ٢\ \text{ا س}\ .\ \text{ا ى}_1\ \text{جتا ى}_1\ \text{ا س}$

$= \text{نق}^٢ + ١٦\ \text{نق}^٢\ \text{جتا}^٢ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}^٢ \frac{\text{ح}}{٢} - ٢\ \text{نق} \times ٤\ \text{نق جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} \times \text{جتا} \frac{\text{ب} - \text{ح}}{٢}$

$= \text{نق}^٢ + ١٦\ \text{نق}^٢ \text{جتا}^٢ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا}^٢ \frac{\text{ح}}{٢} - ٨\ \text{نق}^٢ \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} \left(\text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} + \text{جا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جا} \frac{\text{ح}}{٢}\right)$

$= \text{نق}^٢ + ٨\ \text{نق}^٢ \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} \left[٢\ \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} - \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} - \text{جا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جا} \frac{\text{ح}}{٢}\right]$

$= \text{نق}^٢ + ٨\ \text{نق}^٢\ \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} \left[\text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢} - \text{جا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جا} \frac{\text{ح}}{٢}\right]$

$= \text{نق}^٢ + ٨\ \text{نق}^٢ \text{جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢}$

$= \text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق} \times ٤\ \text{نق جتا} \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جتا} \frac{\text{ح}}{٢}\ \text{جا} \frac{\text{ا}}{٢}$

اذن $\overline{\text{س ى}_1}^{\,٢} = \text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق نه}_1$

، $\text{س ى}_1 = \sqrt{\text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق نه}_1}$

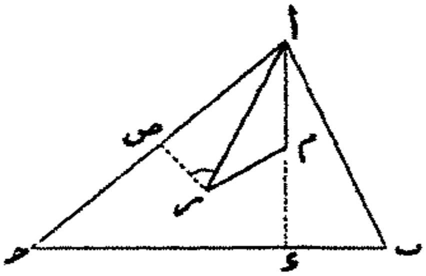
وكذلك نبرهن على ان

$\overline{\text{س ى}_2}^{\,٢} = \text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق نه}_2$ ، $\text{س ى}_2 = \sqrt{\text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق نه}_2}$

، $\overline{\text{س ى}_3}^{\,٢} = \text{نق}^٢ + ٢\ \text{نق نه}_3$ ، $\text{س ى}_3 = \sqrt{\text{نق}^٢ + ٢\ \text{ق نه}_3}$

بند ٦٩ — لايجاد طول المسافة التى بين مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث وملتقى ارتفاعاته

(العمل) نفرض ان س مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب ح شكل (٤٧) وان م ملتقى ارتفاعاته وان س ص عمود على ا ح



(شكل ٤٧)

فتكون $\angle$ س ا ص $= ٩٠^\circ -$ ب (بند ٦٧)

، $\angle$ م ا ص $= ٩٠^\circ - \angle$ ا ح ى $= ٩٠^\circ -$ ح

، $\angle$ م ا س $= \angle$ م ا ص $- \angle$ س ا ص

$= ٩٠^\circ -$ ح $- ٩٠^\circ +$ ب

$=$ ب $-$ ح

، ا س $=$ ق

، ا م $= ٢$ ق جتا ا

في المثلث م ا س

$$\overline{\text{م س}}^{\,٢} = \overline{\text{ا س}}^{\,٢} + \overline{\text{ا م}}^{\,٢} - ٢\ \text{ا س} \times \text{ا م جتا م ا س}$$

$$= \text{نق}^{٢} + ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\ \text{ا} - ٢\ \text{نق} \times ٢\ \text{نق جتا ا} \times \text{جتا}\,(\text{ب} - \text{ح})$$

$$= \text{نق}^{٢} + ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\ \text{ا} - ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا جتا}\,(\text{ب} - \text{ح})$$

$$= \text{نق}^{٢} + ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا}\ [\ \text{جتا ا} - \text{جتا}\,(\text{ب} - \text{ح})\ ]$$

$$= \text{نق}^{٢} + ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا}\ [\ - \text{جتا}\,(\text{ب} + \text{ح}) - \text{جتا}\,(\text{ب} - \text{ح})\ ]$$

$$= \text{نق}^{٢} - ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا}\ [\ \text{جتا}\,(\text{ب} + \text{ح}) + \text{جتا}\,(\text{ب} - \text{ح})\ ]$$

$$= \text{نق}^{٢} - ٤\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا} \times ٢\ \text{جتا ب جتا ح}$$

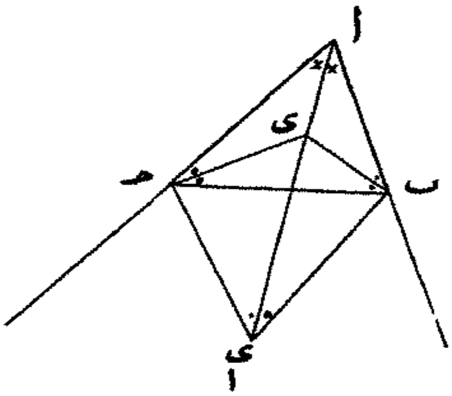
$$= \text{نق}^{٢} - ٨\ \text{نق}^{٢}\ \text{جتا ا جتا ب جتا ح}$$

اذن $\overline{\text{م س}}^{\,٢} = \text{نق}^{٢}\ [\ ١ - ٨\ \text{جتا ا جتا ب جتا ح}\ ]$

و $\text{م س} = \text{نق}\ \sqrt{١ - ٨\ \text{جتا ا جتا ب جتا ح}}$

بند ٧٠ -- (مثال محلول) برهن على أن

$$\frac{\overline{\text{ى ى}_{١}}^{\,٢}}{\text{نق}_{١} - \text{نق}} = ٤\ \text{نق}$$



(شكل ٤٨)

(العمل) $\angle\,\text{ب ى ح} = ٩٠^{\circ} - \frac{\text{ا}}{٢}$

و $\angle\,\text{ى ب ى}_{١} = \angle\,\text{ى ح ى}_{١} = ٩٠^{\circ}$

والشكل الرباعي $\text{ب ى ح ى}_{١}$ يمكن رسمه داخل دائرة قطرها $\text{ى ى}_{١}$

اذن $\text{ب ح} = \text{ى ى}_{١}\ \text{جا ب ى ح}$

$$= \text{ى ى}_{١}\ \text{جا}\,(٩٠^{\circ} - \tfrac{\text{ا}}{٢})$$

$$= \text{ى ى}_{١}\ \text{جتا}\ \tfrac{\text{ا}}{٢}$$

و $\text{ى ى}_{١} = \dfrac{\text{ا}'}{\text{جتا}\ \frac{\text{ا}}{٢}}$ .... (١)

(ثانيا) $\text{جا}\ \frac{\text{ا}}{٢} = \dfrac{\text{نق}_{١}}{\text{ا ى}_{١}} = \dfrac{\text{نق}}{\text{ا ى}} = \dfrac{\text{نق}_{١} - \text{نق}}{\text{ى ى}_{١}}$ .... (٢)

ولكن $\quad ٤\,\text{نق} = \dfrac{٢\,\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{أ}'}{\text{جتا}\frac{\text{أ}}{٢}} \cdot \dfrac{١}{\text{جا}\frac{\text{أ}}{٢}}$

وبعد التعويض يكون $٤\,\text{نق} = \text{ى ى}_{١} \cdot \dfrac{\text{ى ى}_{١}}{\text{ع}_{١} - \text{ع}}$

$$= \dfrac{\overline{\text{ى ى}_{١}}^{\,٢}}{\text{ع}_{١} - \text{ع}}$$

(تمـارين ١٧)

اذا فرض أن س مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ ، ى مركز الدائرة المرسومة داخله ، $\text{ى}_{١}$ مركز الدائرة التى تمس الضلع ا' من الخارج ، $\text{ى}_{٢}$ مركز الدائرة التى تمس الضلع ب' من الخارج ، $\text{ى}_{٣}$ مركز الدائرة التى تمس الضلع حـ' من الخارج ، م ملتقى الارتفاعات ، ل ملتقى المستقيمات المتوسطة فبرهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(١) $\dfrac{\text{ى ى}_{١}}{\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}} = \text{ظا}\dfrac{\text{أ}}{٢}$

(٢) $\text{ى ا} \times \text{ى ب} \times \text{ى حـ} = ٤\,\triangle\,\text{نق ظا}\frac{\text{ا}}{٢}\,\text{ظا}\frac{\text{ب}}{٢}\,\text{ظا}\frac{\text{حـ}}{٢}$

(٣) $\dfrac{\text{ى ا} \times \text{ى ب}}{\text{ى حـ}} = ٤\,\text{نق جا}^{٢}\dfrac{\text{حـ}}{٢}$

(٤) $\dfrac{\text{ى}_{١}\text{ا} \times \text{ى}_{١}\text{ب}}{\text{ى}_{١}\text{حـ}} = ٤\,\text{نق جتا}^{٢}\dfrac{\text{حـ}}{٢}$

(٥) $\text{ى ى}_{١} \times \text{ى ى}_{٢} \times \text{ى ى}_{٣} = ١٦\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$

(٦) $\overline{\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}}^{\,٢} = ٤\,\text{نق}\,(\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{٣})$

(٧) $\overline{\text{ى ى}_{١}}^{\,٢} + \overline{\text{ى}_{٢}\,\text{ى}_{٣}}^{\,٢} = \overline{\text{ى ى}_{٢}}^{\,٢} + \overline{\text{ى}_{٣}\,\text{ى}_{١}}^{\,٢} = \overline{\text{ى ى}_{٣}}^{\,٢} + \overline{\text{ى}_{١}\,\text{ى}_{٢}}^{\,٢}$

(٨) $\frac{\text{ى ى}_1 \times \text{ى}_2\,\text{ى}_3}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ى ى}_2 \times \text{ى}_3\,\text{ى}_1}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ى ى}_3 \times \text{ى}_1\,\text{ى}_2}{\text{جا حـ}}$

(٩) ى ا × ى ب × ى حـ = ٤ نق نو^2

(١٠) $(\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}')\ \text{ى ى}_1 \cdot \text{ى ى}_2 \cdot \text{ى ى}_3 = ٨\ \text{نق ا}'\,\text{ب}'\,\text{ب}'$

(١١) اذا فرض ان س′ ، ص′ ، ع′ هى أطوال الاعمدة النازلة من م على أضلاع المثلث فبرهن على ان $\frac{\text{ا}'}{\text{س}'} + \frac{\text{ب}'}{\text{ص}'} + \frac{\text{حـ}'}{\text{ع}'} = ١$

(١٢) $\frac{\text{نو}_1\,\text{نو}_2\,\text{نو}_3}{\text{نو}^3} = \frac{(\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}')^3}{(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ا}')(\text{حـ}' + \text{ا}' - \text{ب}')(\text{ا}' + \text{ب}' - \text{حـ}')}$

(١٣) $\frac{\text{مساحة } \triangle\ \text{ى}_2\,\text{ى}_3\,\text{ى}_1}{\text{مساحة } \triangle\ \text{ى ى}_3\,\text{ى}_1} = \frac{\text{نو}_2}{\text{نو}}$

(١٤) $\text{مساحة } \triangle\ \text{ى}_1\,\text{ى}_2\,\text{ى}_3 = \frac{\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'}{٢\ \text{نو}}$

(١٥) نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث المواقع = ٢ نق جتا ا جتا ب جتا حـ

(١٦) ا′ × ب م × حـ م + ب′ × حـ م × ا م + حـ′ × ا م × ب م = ا′ ب′ حـ′

(١٧) اذا فرض ان ا ى ، ب هـ ، حـ و هى الاعمدة النازلة من رءوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها فبرهن على أن

(ا) محيط المثلث ى هـ و = ٤ نق جا ا جا ب جا حـ

(ب) $\frac{١}{\text{ا ى}} + \frac{١}{\text{ب هـ}} + \frac{١}{\text{حـ و}} = \frac{١}{\text{نو}_1} + \frac{١}{\text{نو}_2} + \frac{١}{\text{نو}_3}$

(١٨) برهن على أن انصاف اقطار الدوائر المرسومة خارج المثلثات ب م حـ ، حـ م ا ، ا م ب ، ا ب حـ متساوية

(١٩) اذا فرض ان الاعمدة النازلة من رءوس المثلث ا ب حـ على الاضلاع المقابلة لها تقابل محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث فى س ، ص ، ع فبرهن على أن

مساحة المثلث س ص ع = ٨ △ جتا ا جتا ب جتا حـ

(٢٠) اذا فرض ان الدائرة المرسومة داخل المثلث تمس ب ح فى ء وان العمود النازل من ا على ب ح يقابله فى هـ فبرهن على ان

$$\text{ء هـ} = \frac{(\text{ب}' - \text{ح}')(\text{ب}' + \text{ح}' - \text{ا}')}{\text{٢ ا}'}$$

(٢١) اذا فرض ان المستقيم الذى يصل ر ، م يصنع مع ب ح زاوية مثل ك فبرهن على ان

$$\text{ظا ك} = \frac{\text{٣} - \text{ظا ب ظا ح}}{\text{ظا ح} - \text{ظا ب}}$$

(٢٢) اذا فرض ان المستقيم الذى يصل ر ، ى يصنع مع ب ح زاوية مثل ك فبرهن على ان

$$\text{ظتا ك} = \frac{\text{جا ب} - \text{جا ح}}{\text{جتا ب} + \text{جتا ح} - \text{١}}$$

(٢٣) اذا فرض ان س منتصف ب ح وان ء موقع العمود النازل من ا على ب ح وكان ب' > ح'

فبرهن على ان $\text{ء س} = \dfrac{\text{ب}'^{\text{٢}} - \text{ح}'^{\text{٢}}}{\text{٢ ا}'}$

(٢٤) اذا فرض ان △ب تدل على مساحة المثلث الناتج من ايصال نقط تماس الدائرة المرسومة داخل مثلث وان △١ ، △٢ ، △٣ تدل على مساحات المثلثات الناتجة من ايصال نقط تماس الدوائر التى تمس المثلث من الخارج فبرهن على ان

(ا) ع △ب = (ع − ا') △١ = (ع − ب') △٢ = (ع − ح') △٣

(ب) △١ + △٢ + △٣ − △ب = ٢ △

(٢٥) $\overline{\text{ى م}}^{\text{٢}}$ = ٢ نق٢ − ٤ نق٢ جتا ا جتا ب جتا ح

(٢٦) $\overline{\text{ى ر}}^{\text{٢}}$ = نق٢ (٣ − ٢ جتا ا − ٢ جتا ب − ٢ جتا ح)

(٢٧) $\overline{\text{ر ل}}^{\text{٢}}$ = نق٢ − ١/٢ (ا'٢ + ب'٢ + ح'٢)

(٢٨) $\overline{\text{ى ا}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى١ ا}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى٢ ا}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى٣ ا}}^{\text{٢}}$ = ١٦ نق٢

(٢٩) $\overline{\text{ى ر}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى١ ر}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى٢ ر}}^{\text{٢}}$ + $\overline{\text{ى٣ ر}}^{\text{٢}}$ = ١٢ نق٢

(٣٠) $\overline{\text{٩ ا ل}}^{\text{٢}}$ = ٢ △ (٤ ظتا ا + ظتا ب + ظتا ح)

(٣١) $\overline{\text{ر م}}^{\text{٢}}$ = ٢ ق٢ (٣/٢ + جتا ٢ ا + جتا ٢ ب + جتا ٢ ح)

(٣٢) اذا فرض ان ك مركز الدائرة المرسومة على المثلث ب م حـ فبرهن على أن

$$\overline{\text{ى ك}}^{٢} = (\text{نق} + \text{نو})^{٢} + \text{نو}^{٢} - \frac{٢\,\triangle^{٢}}{\text{نو}_{٢}\,\text{نو}_{٣}}$$

(٣٣) مساحة المثلث ى ر م $= -\,٢\,\text{نق}^{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$

(٣٤) مساحة المثلث ى م ل $= -\,\frac{٤}{٣}\,\text{نق}^{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$

(٣٥) اذا فرض أن ﻫ مركز دائرة النقط التسع فبرهن على أن

(ا) $\text{ا ﻫ} = \frac{\text{نق}}{٢}\sqrt{١ + ٨\,\text{جتا ا جا ب جا حـ}}$

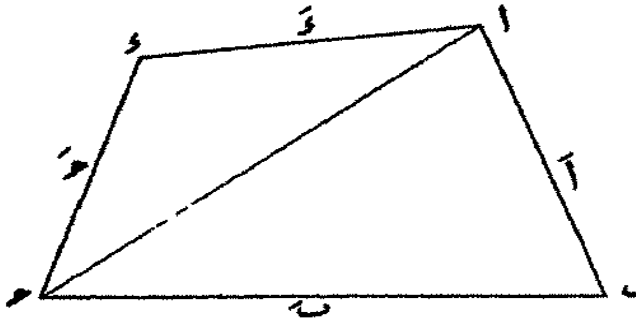
(ب) $\text{ى ﻫ} = \frac{١}{٢}\,\text{نق} - \text{نو}$

الباب التاسع

في الاشكال الرباعية والمضلعات المنتظمة

بند ٧١ — لايجاد مساحة الشكل الرباعي أيا كان

(العمل) نرمز الى الضلع ا ب بالرمز اَ والضلع ب حـ بالرمز بَ والضلع حـ ء بالرمز حـَ والضلع ء ا بالرمز ءَ ومساحة الشكل الرباعي بالرمز س ومحيطه بالرمز ٢ ع



(شكل ٤٩)

فيكون $\overline{ا حـ}^{٢} = ا'^{٢} + ب'^{٢} - ٢ ا' ب' \text{جتا}\, ب$

، $\overline{ا حـ}^{٢} = حـ'^{٢} + ء'^{٢} - ٢ حـ' ء' \text{جتا}\, ء$

اذن $ا'^{٢} + ب'^{٢} - ٢ ا' ب' \text{جتا}\, ب = حـ'^{٢} + ء'^{٢} - ٢ حـ' ء' \text{جتا}\, ء$

، $ا'^{٢} + ب'^{٢} - حـ'^{٢} - ء'^{٢} = ٢ ا' ب' \text{جتا}\, ب - ٢ حـ' ء' \text{جتا}\, ء \quad \cdots \quad (١)$

ولكن مساحة الشكل الرباعي $= \triangle\, ا ب حـ + \triangle\, ا حـ ء$

اذن $س = \frac{١}{٢} ا' ب' \text{جا}\, ب + \frac{١}{٢} حـ' ء' \text{جا}\, ء$

، $٤ س = ٢ ا' ب' \text{جا}\, ب + ٢ حـ' ء' \text{جا}\, ء \quad \cdots\cdots \quad (٢)$

وبتربيع كل من متساويتي (١) ، (٢) واضافة احداهما الى الاخرى ينتج ان

$(ا'^{٢} + ب'^{٢} - حـ'^{٢} - ء'^{٢})^{٢} + ١٦ س^{٢}$

$= ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} \text{جتا}^{٢} ب + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} \text{جتا}^{٢} ء - ٨ ا' ب' حـ' ء' \text{جتا}\, ب \,\text{جتا}\, ء$

$+ ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} \text{جا}^{٢} ب + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} \text{جا}^{٢} ء + ٨ ا' ب' حـ' ء' \text{جا}\, ب \,\text{جا}\, ء$

$= ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} (\text{جا}^{٢} ب + \text{جتا}^{٢} ب) + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} (\text{جا}^{٢} ء + \text{جتا}^{٢} ء)$

$+ ٨ ا' ب' حـ' ء' (\text{جا}\, ب \,\text{جا}\, ء - \text{جتا}\, ب \,\text{جتا}\, ء)$

$= ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} - ٨ ا' ب' حـ' ء' \text{جتا} (ب + ء)$

$= ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} - ٨ ا' ب' حـ' ء' (٢ \text{جتا}^{٢} \frac{ب + ء}{٢} - ١)$

$= ٤ ا'^{٢} ب'^{٢} + ٤ حـ'^{٢} ء'^{٢} + ٨ ا' ب' حـ' ء' - ١٦ ا' ب' حـ' ء' \text{جتا}^{٢} \frac{ب + ء}{٢}$

$= ٤ (ا' ب' + حـ' ء')^{٢} - ١٦ ا' ب' حـ' ء' \text{جتا} \frac{١}{٢} (ب + ء)$

وإذن $16\,\text{س}^2 = 4(\text{ا}'\text{ب}' + \text{حـ}'\text{ء}')^2 - (\text{ا}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2 - \text{ء}'^2)^2$

$$- 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$= (2\text{ا}'\text{ب}' + 2\text{حـ}'\text{ء}' + \text{ا}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2 - \text{ء}'^2)(2\text{ا}'\text{ب}' + 2\text{حـ}'\text{ء}'$$

$$- \text{ا}'^2 - \text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 + \text{ء}'^2) - 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ء})$$

$$= \left\{(\text{ا}' + \text{ب}')^2 - (\text{حـ}' - \text{ء}')^2\right\}\left\{(\text{حـ}' + \text{ء}')^2 - (\text{ا}' - \text{ب}')^2\right\}$$

$$- 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$= (\text{ا}' + \text{ب}' + \text{حـ}' - \text{ء}')(\text{ا}' + \text{ب}' - \text{حـ}' + \text{ء}')$$

$$(\text{حـ}' + \text{ء}' + \text{ا}' - \text{ب}')(\text{حـ}' + \text{ء}' - \text{ا}' + \text{ب}')$$

$$- 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$= (2\text{ع} - 2\text{ء}')(2\text{ع} - 2\text{حـ}')(2\text{ع} - 2\text{ب}')(2\text{ع} - 2\text{ا}')$$

$$- 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$= 16(\text{ع} - \text{ء}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{ا}')$$

$$- 16\,\text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$\therefore \text{س}^2 = (\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ء}') - \text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء})$$

$$\therefore \text{س} = \sqrt{(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ء}') - \text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}'\ \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ء})}$$

(نتيجة ١) عند ما يكون $\text{ء}' =$ صفراً يتحول الشكل الرباعى الى مثلث ويكون

$$\text{س}^2 = (\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - 0) - \text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}' \times 0 \times \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ء})$$

$$= \text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')$$

$$\therefore \text{س} = \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

وهذا هو عين قانون بند (٢١٠) من الجزء الاول

(نتيجة ٢) وعند ما يمكن رسم الشكل الرباعى داخل دائرة

يكون $\angle\text{ب} + \angle\text{ء} = 180^\circ$

$$\therefore \frac{\text{ب} + \text{ء}}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء}) = 0$$

$$\therefore \text{جتا}^2\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ء}) = 0$$

ويكون $\text{س}^2 = (\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ء}') - \text{ا}'\text{ب}'\text{حـ}'\text{ء}' \times 0$

$$= (\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ء}')$$

$$\therefore \text{س} = \sqrt{(\text{ع} - \text{ا}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')(\text{ع} - \text{ء}')}$$

(نتيجة ٣) وعندما يمكن رسم الشكل الرباعى داخل دائرة يكون $\text{ب} + \text{ى} = 180^\circ$

ويكون $\text{جتا ب} = -\text{جتا ى}$ ، $\text{جا ب} = \text{جا ى}$

وتؤول معادلة (١) من بند ٧١ الى

$$\text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{ح}'^{2} - \text{ى}'^{2} = 2\,(\text{ا}'\,\text{ب}' + \text{ح}'\,\text{ى}')\ \text{جتا ب}$$

$$\text{ويكون}\quad \text{جتا ب} = \frac{\text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{ح}'^{2} - \text{ى}'^{2}}{2\,(\text{ا}'\,\text{ب}' + \text{ح}'\,\text{ى}')}$$

وتؤول معادلة (٢) من بند ٧١ الى

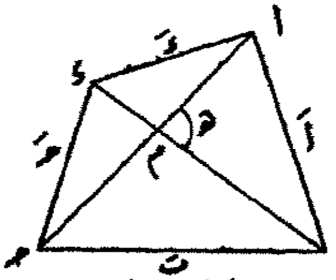
$$4\,\text{س} = 2\,(\text{ا}'\,\text{ب}' + \text{ح}'\,\text{ى}')\ \text{جا ب}$$

$$\text{ويكون}\quad \text{جا ب} = \frac{2\,\text{س}}{\text{ا}'\,\text{ب}' + \text{ح}'\,\text{ى}'}$$

بند ٧٢ — لايجاد مساحة الشكل الرباعى بدلالة قطريه والزاوية التى بينهما

(العمل) نفرض ان مساحة الشكل الرباعى تساوى س

وان $\angle\,\text{ا م ب} = \text{هـ}$

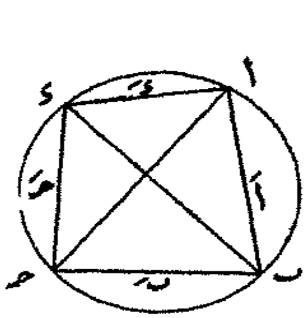


(شكل ٥٠)

$$\text{فيكون}\ 2\,\text{س} = 2\,\triangle\,\text{ا م ب} + 2\,\triangle\,\text{ب م ح}$$
$$+\,2\,\triangle\,\text{ا م ى} + 2\,\triangle\,\text{ى م ح}$$
$$= \text{ا م}\cdot\text{م ب جا هـ} + \text{ب م}\cdot\text{م ح جا}\,(\text{ط} - \text{هـ})$$
$$+\,\text{ا م}\cdot\text{م ى جا}\,(\text{ط} - \text{هـ}) + \text{ى م}\cdot\text{م ح جا هـ}$$
$$= \text{ا م}\cdot\text{م ب جا هـ} + \text{ب م}\cdot\text{م ح جا هـ} + \text{ا م}\cdot\text{م ى جا هـ} + \text{ى م}\cdot\text{م ح جا هـ}$$
$$= \text{ا م جا هـ}\,(\text{م ب} + \text{م ى}) + \text{م ح جا هـ}\,(\text{م ب} + \text{م ى})$$
$$= \text{ا م}\cdot\text{ى ب جا هـ} + \text{م ح}\cdot\text{ى ب جا هـ}$$
$$= \text{ى ب جا هـ}\,(\text{ا م} + \text{م ح})$$
$$= \text{ا ح}\cdot\text{ى ب جا هـ}$$

$$\text{اذن}\quad \text{س} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا ح}\cdot\text{ى ب جا هـ}$$

بند ٧٣ — لايجاد كل من قطرى الشكل الرباعى الذى يمكن رسمه داخل دائرة وايجاد نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه مارة برءوسه



(شكل ٥١)

(أولا) علمنا ان $\overline{\text{ا ح}}^{2} = \text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} - 2\,\text{ا}'\,\text{ب}'\ \text{جتا ب}$

$$\text{وان}\quad \text{جتا ب} = \frac{\text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{ح}'^{2} - \text{ى}'^{2}}{2\,(\text{ا}'\,\text{ب}' + \text{ح}'\,\text{ى}')}$$

يكون $\overline{اح}^{2} = ا'^{2} + ب'^{2} - 2\,ا'ب' \times \frac{ا'^{2} + ب'^{2} - ح'^{2} - ى'^{2}}{2\,(ا'ب' + ح'ى')}$

$$= ا'^{2} + ب'^{2} - \frac{ا'ب'(ا'^{2} + ب'^{2}) - ا'ب'(ح'^{2} + ى'^{2})}{ا'ب' + ح'ى'}$$

$$= \frac{ا'ب'(ا'^{2}+ب'^{2}) + ح'ى'(ا'^{2}+ب'^{2}) - ا'ب'(ا'^{2}+ب'^{2}) + ا'ب'(ح'^{2}+ى'^{2})}{ا'ب' + ح'ى'}$$

$$= \frac{ح'ى'(ا'^{2} + ب'^{2}) + ا'ب'(ح'^{2} + ى'^{2})}{ا'ب' + ح'ى'}$$

$$= \frac{(ا'ح' + ب'ى')(ا'ى' + ب'ح')}{ا'ب' + ح'ى'}$$

ويكون $اح = \sqrt{\frac{(ا'ح' + ب'ى')(ا'ى' + ب'ح')}{ا'ب' + ح'ى'}}$

وكذلك يمكن البرهنة على ان

$$\overline{بى}^{2} = \frac{(ا'ب' + ح'ى')(ا'ح' + ب'ى')}{ا'ى' + ب'ح'}$$

، $بى = \sqrt{\frac{(ا'ب' + ح'ى')(ا'ح' + ب'ى')}{ا'ى' + ب'ح'}}$

(ثانياً) من حيث ان الدائرة المرسومة خارج الشكل الرباعى ا ب ح ى هى الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب ح فبفرض ان نصف قطرها = نق

يكون $\text{نق} = \frac{اح}{2\,\text{جا}\,ب}$

ولكن $اح = \sqrt{\frac{(ا'ح' + ب'ى')(ا'ى' + ب'ح')}{ا'ب' + ح'ى'}}$

، $\text{جا}\,ب = \frac{2\,س}{ا'ب' + ح'ى'}$

اذن $\text{نق} = \sqrt{\frac{(ا'ح' + ب'ى')(ا'ى' + ب'ح')}{ا'ب' + ح'ى'}} \cdot \frac{ا'ب' + ح'ى'}{4\,س}$

$$= \frac{1}{4\,س}\sqrt{(ا'ب' + ح'ى')(ا'ح' + ب'ى')(ا'ى' + ب'ح')}$$

بند ٧٤ — أمثلة محلولة للتطبيق على قوانين الاشكال الرباعية

(مثال١) برهن على ان مساحة الشكل الرباعى الذى يمكن رسم دائرة داخله وأخرى خارجه تساوى √(ا َ ب َ حـ َ ء َ)

(البرهان) نفرض ان الدائرة المرسومة داخل الشكل الرباعى تمس ا ب فى هـ ، ب حـ فى و ، حـ ء فى س ، ء ا فى ح

فيكون ا هـ = ا ح ، ب هـ = ب و

، حـ و = حـ س ، ء س = ء ح

، ا هـ + ب هـ + حـ س + ء س

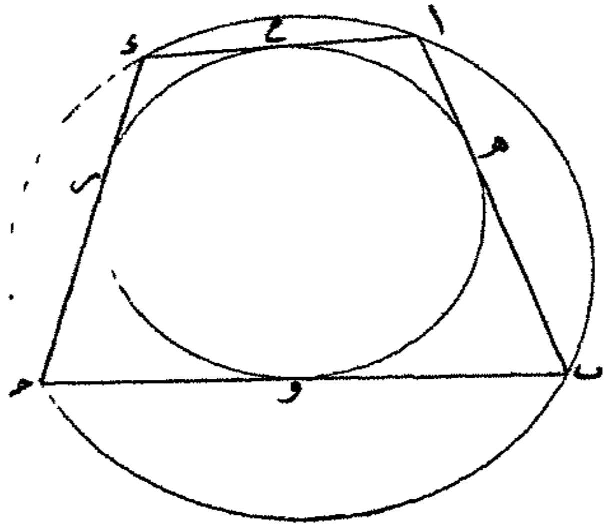
= ا ح + ب و + حـ و + ء ح

اى ان ا ب + حـ ء = ب حـ + ء ا

، ا َ + حـ َ = ب َ + ء َ

اذن ح = (ا َ + ب َ + حـ َ + ء َ) / ٢

= ا َ + حـ َ = ب َ + ء َ



(شكل ٥٢)

ويكون ح − ا َ = حـ َ ، ح − ب َ = ء َ ، ح − حـ َ = ا َ ، ح − ء َ = ب َ

ومن حيث ان الشكل الرباعى يمكن رسمه داخل دائرة يكون

س = √((ح − ا َ)(ح − ب َ)(ح − حـ َ)(ح − ء َ))

= √(حـ َ . ء َ . ا َ . ب َ) = √(ا َ ب َ حـ َ ء َ) وهو المطلوب

(مثال ٢) أوجد مساحة شكل رباعى يمكن رسمه داخل دائرة مع العلم بأن أطوال اضلاعه هى ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ سنتيمترات

(العمل) ح = (٤ + ٥ + ٧ + ٨) / ٢ = ١٢ سنتيمتراً

ولكن س = √((ح − ا َ)(ح − ب َ)(ح − حـ َ)(ح − ء َ))

= √((١٢ − ٤)(١٢ − ٥)(١٢ − ٧)(١٢ − ٨)) من السنتيمترات المربعة

= √(٨ × ٧ × ٥ × ٤) من السنتيمترات المربعة

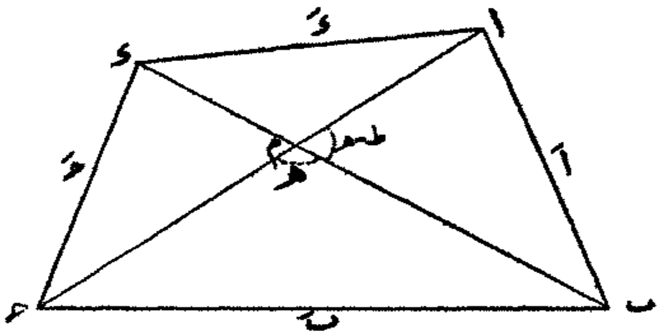
= ٤ √٧٠ » » »

= ٣٣٫٤٦ » » »

(مثال ٣) اذا فرض ان ا َ ، ب َ ، حـ َ ، ء َ هى اضلاع الشكل الرباعى ا ب حـ ء وكانت

زاوية قطرية التى تقابل الضلع ب′ هى هـ فبرهن على أن مساحة الشكل الرباعى تساوى

$$\tfrac{1}{4}\left(\text{ا}'^{2}+\text{ح}'^{2}-\text{ب}'^{2}-\text{ء}'^{2}\right)\ \text{ظا هـ}$$



(شكل ٥٣)

(البرهان) $2\,\text{م ح}\cdot\text{م ب}\ \text{جتا هـ}$

$=\overline{\text{م ح}}^{2}+\overline{\text{م ب}}^{2}-\text{ب}'^{2}$

، $2\,\text{م ا}\cdot\text{م ب}\ \text{جتا}\,(\text{ط}-\text{هـ})$

$=\overline{\text{م ا}}^{2}+\overline{\text{م ب}}^{2}-\text{ا}'^{2}$

وبطرح المتساوية الثانية من الاولى بعد وضع − جتا هـ بدل جتا (ط − هـ)

يكون $2\,\text{م ح}\cdot\text{م ب}\ \text{جتا هـ}+2\,\text{م ا}\cdot\text{م ب}\ \text{جتا هـ}=\overline{\text{م ح}}^{2}-\overline{\text{م ا}}^{2}-\text{ب}'^{2}+\text{ا}'^{2}$

، $2\,\text{م ب}\ \text{جتا هـ}\,(\text{م ح}+\text{م ا})=\overline{\text{م ح}}^{2}-\overline{\text{م ا}}^{2}-\text{ب}'^{2}+\text{ا}'^{2}$

، $2\,\text{ا ح}\cdot\text{م ب}\ \text{جتا هـ}=\overline{\text{م ح}}^{2}-\overline{\text{م ا}}^{2}-\text{ب}'^{2}+\text{ا}'^{2}\quad\cdots\ (1)$

ومن المثلثين م ح ء ، م ء ا يمكن ان نبرهن كذلك على ان

$2\,\text{ا ح}\cdot\text{م ء}\ \text{جتا هـ}=\overline{\text{م ا}}^{2}-\overline{\text{م ح}}^{2}-\text{ء}'^{2}+\text{ح}'^{2}\quad\cdots\cdots\ (2)$

وباضافة متساوية (١) الى متساوية(٢) يكون

$2\,\text{ا ح}\cdot\text{ب ء}\ \text{جتا هـ}=\text{ا}'^{2}+\text{ح}'^{2}-\text{ب}'^{2}-\text{ء}'^{2}\quad\cdots\cdots\ (3)$

ومن بند ٧٧ نعلم أن $2\,\text{ا ح}\cdot\text{ب ء}\ \text{جا هـ}=4\,\text{س}\quad\cdots\cdots\ (4)$

وبقسمة متساوية (٤) على (٣) ينتج ان

$$\text{ظا هـ}=\frac{4\,\text{س}}{\text{ا}'^{2}+\text{ح}'^{2}-\text{ب}'^{2}-\text{ء}'^{2}}$$

واذن $\text{س}=\tfrac{1}{4}\left(\text{ا}'^{2}+\text{ح}'^{2}-\text{ب}'^{2}-\text{ء}'^{2}\right)\ \text{ظا هـ}$

(تمارين ١٨)

(١) أوجد مساحة الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة اذا كانت اضلاعه هى

(أولا) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ٦ سنتيمترات

(ثانياً) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ »

(ثالثاً) ٧ ، ١٠ ، ٥ ، ٢ »

(٢) اذا فرض ان اضلاع الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة هى ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ سنتيمترات فأوجد طول كل من قطريه وطول نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

(٣) اذا فرض ان اضلاع الشكل الرباعى هى ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ سنتيمترات وكان مجموع زاويتين متقابلتين فيه هو ١٢٠° فبرهن على أن مساحته = $\text{٣}\sqrt{\text{٣٠}}$ من السنتيمترات المربعة

(٤) اذا فرض ان ٢ هـ يساوى مجموع زاويتين متقابلتين فى شكل رباعى يمكن رسمه خارج دائرة فبرهن على أن مساحته تساوى $\sqrt{\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{ء}'}$ جا هـ

(٥) برهن على ان نصف قطر الدائرة المرسومة داخل شكل رباعى يمكن رسم دائرة خارجه يساوى

$$\frac{\text{٢}\sqrt{\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{ء}'}}{\text{ا}'+\text{ب}'+\text{حـ}'+\text{ء}'}$$

(٦) برهن على أن مساحة الشكل الرباعى الذى يمكن رسم دائرة داخله تساوى

$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{س}'^{\text{٢}}\,\text{ص}'^{\text{٢}}-(\text{ا}'\,\text{حـ}'-\text{ب}'\,\text{ء}')^{\text{٢}}\right]^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ بفرض ان س′ ، ص′ هما قطراه

(٧) برهن على ان مساحة اى شكل رباعى تساوى

$\frac{\text{١}}{\text{٤}}\left[\text{٤}\,\text{س}'^{\text{٢}}\,\text{ص}'^{\text{٢}}-(\text{ب}'^{\text{٢}}+\text{ء}'^{\text{٢}}-\text{ا}'^{\text{٢}}-\text{حـ}'^{\text{٢}})^{\text{٢}}\right]^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ بفرض ان س′ ، ص′ هما قطراه

(٨) فى الشكل الرباعى ا ب حـ ء الذى يمكن رسمه داخل دائرة برهن على ان

$$\text{ظا}\,\frac{\text{ب}}{\text{٢}}=\sqrt{\frac{(\text{ع}-\text{ا}')(\text{ع}-\text{ب}')}{(\text{ع}-\text{حـ}')(\text{ع}-\text{ء}')}}$$

(٩) اذا فرض ان س′ ، ص′ هما قطرا شكل رباعى وكانت هـ مجموع زاويتين متقابلتين فيه فبرهن على ان $\text{س}'^{\text{٢}}\,\text{ص}'^{\text{٢}}=\text{ا}'^{\text{٢}}\,\text{حـ}'^{\text{٢}}+\text{ب}'^{\text{٢}}\,\text{ء}'^{\text{٢}}-\text{٢}\,\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{ء}'$ جتا هـ

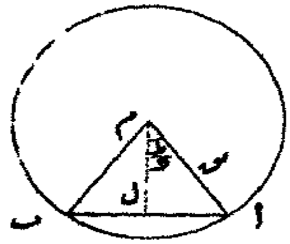
(١٠) ا ب حـ ء شكل رباعى يمكن رسم دائرة داخله والمطلوب البرهنة على ان

$$\text{ا ب جا}\frac{\text{ا}}{\text{٢}}\,\text{جا}\frac{\text{ب}}{\text{٢}}=\text{حـ ء جا}\frac{\text{حـ}}{\text{٢}}\,\text{جا}\frac{\text{ء}}{\text{٢}}$$

فى المضلعات المنتظمة

بند ٧٥ — لايجاد مساحة المضلع المنتظم وطول نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

(العمل) نفرض ان ا ب ضلع من اضلاع المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ن شكل (٥٤) ثم نرسم من م المستقيم م ل عموداً على ا ب فتكون نقطة ل منتصف ا ب



(شكل ٥٤)

واذا رمزنا الى ا م بالرمز نق والى ا ب بالرمز ا′ يكون

نق = ا ل قتا ا م ل

$$= \frac{\text{ا}'}{٢}\ \text{قتا}\ \frac{١}{٢} \cdot \frac{٢\text{ط}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{ا}'}{٢}\ \text{قتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \qquad \text{.............................} \qquad (١)$$

ومساحة المضلع = ن × مساحة المثلث ا م ب

$$= \text{ن} \times \frac{١}{٢}\ \text{ا ب} \cdot \text{م ل}$$

$$= \text{ن} \times \frac{\text{ا}'}{٢} \times \text{ا ل}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{ن ا}'}{٢} \times \frac{\text{ا}'}{٢}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{ن ا}'^{٢}}{٤}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \qquad \text{.............................} \qquad (٢)$$

بند ٧٦ — (ملاحظة) لايجاد مساحة المضلع بدلالة نو نستخرج ما تساويه ا′ بدلالة نو من متساوية (١) ونعوضه فى متساوية (٢) فتكون

$$\text{مساحة المضلع} = \frac{١}{٢}\ \text{ن نق}^٢\ \text{جا}\ \frac{٢\text{ط}}{\text{ن}}$$

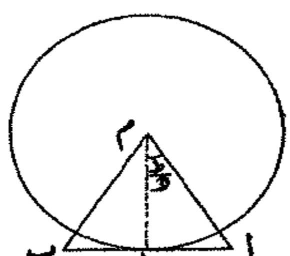
بند ٧٧ — لايجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مضلع منتظم ومساحة المضلع بدلالة نصف القطر

(العمل) نفرض ان ا ب ضلع من اضلاع المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ن شكل (٥٥) ثم نصل بين م ونقطة التماس ل فيكون م ل عموداً على ا ب ، ا ل = ل ب

وإذا رمزنا الى م ل بالرمز نو والى ا ب بالرمز ا′ يكون

نو = ا ل ظتا ا م ل

$$= \frac{\text{ا}'}{٢}\ \text{ظتا}\ \frac{١}{٢} \cdot \frac{٢\text{ط}}{\text{ن}}$$



(شكل ٥٥)

$$= \frac{\text{ا}'}{٢}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \qquad \text{.............................} \qquad (٣)$$

وقد تقدم فى البند السابق ان مساحة المضلع بدلالة أحد اضلاعه

$$= \frac{\text{ن ا}'^{٢}}{٤}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \qquad \text{.............................} \qquad (٢)$$

فلايجاد مساحة المضلع بدلالة نصف قطر الدائرة المرسومة داخله نستخرج ما يساويه أ´ بدلالة نو من متساوية (٣) ونعوضه فى متساوية (٢) فتكون

مساحة المضلع = ن نو^{٢} ظا $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ .... (٤)

بند ٧٨ — (مثال) اذا فرض ان طول أحد أضلاع المضلع المنتظم ذى الخمسة الاضلاع هو ٤ سنتيمترات فأوجد مساحته وطول نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

(أولا) نق = $\frac{٤}{٢}$ قتا $\frac{\text{ط}}{٥}$

= ٢ قتا ٣٦°

= ٢ × ١٫٧٠١٣ = <u>٣٫٤٠٢٦</u> من السنتيمترات

(ثانياً) مساحة المضلع = $\frac{٥ \times ٤^{٢}}{٤}$ ظتا $\frac{\text{ط}}{٥}$

= ٢٠ ظتا ٣٦°

= ٢٠ × ١٫٣٧٦٤ = <u>٢٧٫٥٢٨</u> من السنتيمترات المربعة

(تمارين ١٩)

(١) اوجد مساحة المسدس المنتظم الذى طول أحد اضلاعه يساوى ١٠ سنتيمترات ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخله

(٢) أوجد محيط المثمن المنتظم المرسوم خارج دائرة نصف قطرها يساوى قدمين

(٣) أوجد طول ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها يساوى ٥ سنتيمترات

(٤) أوجد مساحة المعشر المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها يساوى ٦ سنتيمترات

(٥) اذا كان محيط المثلث المتساوى الاضلاع يساوى محيط المسدس المنتظم فاثبت ان نسبة مساحة الاول الى مساحة الثانى كنسبة ٢ : ٣

(٦) اذا فرض ان مساحة المسدس المنتظم هى ٢٣٥ سنتيمترا مربعاً فأوجد طول أحد أضلاعه لاقرب مليمتر

(٧) اذا فرض أن محيط مضلع منتظم يساوى محيط مضلع منتظم آخر وكان عدد أضلاع الاول ن وعدد أضلاع الثانى ٢ ن فبرهن على ان نسبة مساحة الاول الى مساحة الثانى كنسبة

٢ جتا $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$: ١ + جتا $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$

(٨) اذا فرضت دائرة ورسم داخلها وخارجها مضلعان منتظمان عدد اضلاع كل منهما ن فبرهن على أن نسبة محيط المضلع الخارج الى محيط الدائرة الى محيط المضلع الداخل كنسبة

قا $\frac{ط}{ن}$: $\frac{ط}{ن}$ قتا $\frac{ط}{ن}$: ١

وان نسبة مساحتى المضلعين كنسبة جتا² $\frac{ط}{ن}$: ١

(٩) اذا كان محيط المخمس المنتظم يساوى محيط المعشر المنتظم فاثبت ان نسبة مساحة الاول الى مساحة الثانى كنسبة ٢ : $\sqrt{5}$

(١٠) اذا فرضت دائرة ورسم داخلها وخارجها مضلعان منتظمان متساويان فى عدد الاضلاع وكانت مساحة المضلع الخارج ٤ أمثال المضلع الداخل فأوجد عدد الاضلاع

(١١) اذا فرضت دائرة ورسم خارجها مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ثم رسم داخلها مضلع منتظم عدد اضلاعه ٢ ن وكانت نسبة مساحة المضلع الخارج الى مساحة المضلع الداخل كنسبة ٢ : $\sqrt{3}$ فأوجد مقدار ن

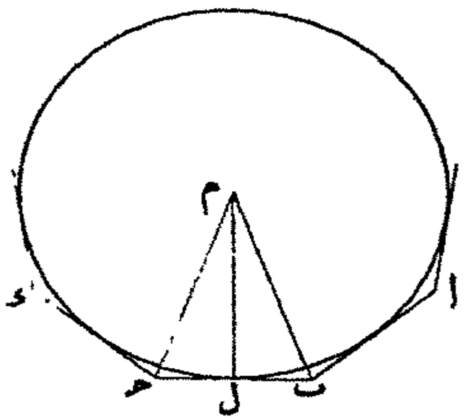
(١٢) أوجد الفرق بين مساحة المثمن المنتظم ومساحة المسدس المنتظم اذا كان محيط كل منهما ٢٤ قدماً

(١٣) برهن على أن مجموع نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخل وخارج مضلع منتظم عدد اضلاعه ن هو $\frac{ا'}{٢}$ ظتا $\frac{ط}{٢ن}$ بفرض ان ا′ ضلع من أضلاع المضلع .

(١٤) أوجد عدد اضلاع كل من مضلعين منتظمين اذا علم ان عدد اضلاع الاول ضعف عدد اضلاع الثانى وان النسبة بين زاوية فى المضلع الاول وزاوية فى المضلع الثانى كنسبة ٩ : ٨

الباب العاشر

فى مساحة الدائرة والقطعة والقطاع



(شكل ٥٦)

بند ٧٩ — لايجاد مساحة الدائرة

(العمل) نفرض دائرة مركزها م ونصف قطرها نق شكل (٥٦) ونرسم خارجها مضلعاً منتظماً ا ب حـ ى ... عدد اضلاعه ن ونفرض ان ب حـ يمس الدائرة فى ل ثم نصل م ب ، م حـ ، م ل فيكون م ل عموداً على ب حـ وتكون مساحة المضلع المنتظم = ن فى مساحة △ ب م حـ

= ن × ½ ب حـ . م ل

= ½ م ل × ن . ب حـ

= ½ م ل × محيط المضلع

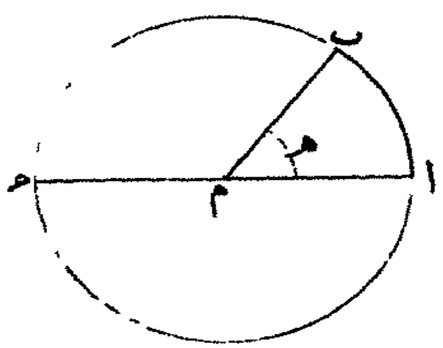
ولكن بازدياد عدد اضلاع المضلع بالتدريج يصغر طول الضلع ويكثر عدد الاضلاع وفى النهاية يقرب محيط المضلع من محيط الدائرة ويكون الفرق بينهما صغيرا جداً لدرجة أنه يمكن اعتبار محيط المضلع محيط الدائرة وتكون مساحة الدائرة ومساحة المضلع متساويتين

اى أن مساحة الدائرة = ½ م ل × محيط الدائرة

= ½ نق × ٢ ط نق

= ط نق^{2}

بند ٨٠ — لايجاد مساحة القطاع



(شكل ٥٧)

(العمل) نفرض القطاع ا م ب الذى مركز دائرته م (شكل ٥٧) ونفرض ان مقدار الزاوية المركزية ا م ب يساوى هـ من الزوايا النصف القطرية ثم نمد ا م الى ان يقابل محيط الدائرة فى حـ فيكون ا ب حـ نصف دائرة

ومن حيث ان نسبة اى قطاع الى آخر تساوى النسبة بين زاويتيهما المركزيتين

تكون مساحة القطاع ا م ب : مساحة نصف الدائرة ا ب حـ

= ∠ ا م ب : زاويتين قائمتين

= هـ : ط

ولكن مساحة نصف الدائرة ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ط نق^{٢}

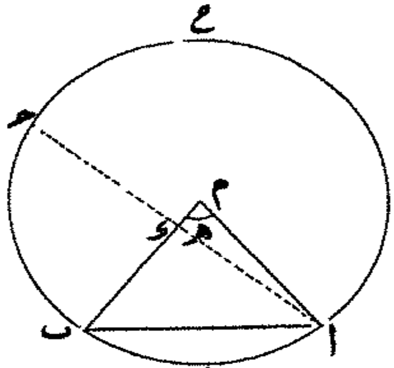
اذن مساحة القطاع ا م ب = $\frac{١}{٢}$ هـ نق^{٢}

بند ٨١ — (ملاحظة) من حيث ان هـ = $\frac{\text{طول القوس ا ب}}{\text{نق}}$

تكون مساحة القطاع ا م ب = $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{طول القوس ا ب}}{\text{نق}}$ × نق^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ طول القوس ا ب × نق

وهذا هو القانون الهندسى لمساحة القطاع



(شكل ٥٨)

بند ٨٢ — لايجاد مساحة القطعة

(العمل) نفرض القطعة ا و ب المحصورة بين الوتر ا ب والقوس ا و ب (شكل ٥٨) ونفرض ان مقدار الزاوية المركزية ا م ب = هـ من الزوايا النصف القطرية ثم نرسم ا هـ عموداً على م ب ونمده الى أن يقابل محيط الدائرة فى حـ فيكون القوس ا ب حـ ضعف القوس ا و ب ويكون ا ى يساوى نصف الوتر ا حـ

من الشكل نرى ان مساحة القطعة ا و ب = مساحة القطاع ا م ب و — مساحة △ ا م ب

= $\frac{١}{٢}$ هـ نق^{٢} — $\frac{١}{٢}$ ا ى . م ب

= $\frac{١}{٢}$ هـ نق^{٢} — $\frac{١}{٢}$ نق جا هـ × نق

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ — جا هـ)

بند ٨٣ — (ملاحظة) من حيث ان مساحة القطاع ا م ب و = $\frac{١}{٢}$ طول القوس ا و ب × نق

تكون مساحة القطعة ا و ب = $\frac{١}{٢}$ طول القوس ا و ب × نق — $\frac{١}{٢}$ ا ى . نق

= $\frac{١}{٢}$ نق (طول القوس ا و ب — ا ى)

= $\frac{١}{٢}$ نق (طول القوس ا و ب — $\frac{١}{٢}$ وتر قوس يساوى ضعف القوس ا و ب)

وهذا هو القانون الهندسى لمساحة القطعة

بند ٨٤ — أمثلة محلولة

(مثال ١) أوجد مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها يساوى ٨ سنتيمترات (ط = ٣,١٤١٦)

(الحل) مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

= ٣,١٤١٦ × ٨^{٢}

= ٢٠١,٠٦٢٤ من السنتيمترات المربعة

(مثال ٢) أوجد مساحة القطعة التى قوسها يساوى ٣٠° وطول نصف قطر دائرتها يساوى ٤ سنتيمترات (ط = ٣٫١٤١٦)

(الحل) مساحة القطعة = ½ نق² (هـ − جا هـ)

= ½ × ٤² (ط/٦ − جا ط/٦)

= ٨ (٠٫٥٢٣٦ − ٠٫٥)

= ٨ × ٠٫٠٢٣٦

= ٠٫١٨٨٨ من السنتيمترات المربعة

(تمارين ٢٠)

(تنبيه) فى المسائل الآتية اجعل المقدار الرقمى للنسبة ط ٣٫١٤١٦ ما لم يذكر مقدار آخر برأس المسألة

(١) أوجد مساحات الدوائر التى انصاف اقطارها هى

كيلومتران ، ٣ سنتيمترات ، ٥ أمتار ، ٦ أميال

(٢) أوجد مساحات الاقطعة التى فى دائرة نصف قطرها ١٠ سنتيمترات مع العلم بأن مقادير زواياها المركزية هى

١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ١٨° ، ٢٢٥°

(٣) أوجد مساحات القِطَع التى فى دائرة نصف قطرها يساوى متراً واحداً مع العلم بان مقادير اقواسها هى

٣٠° ، ١٢٠° ، ٤٥° ، ٧٥° ، ١٨°

(٤) أوجد مساحة القطاع الذى طول قوسه يساوى ١٥ سنتيمتراً وطول نصف قطر دائرته يساوى ٦ سنتيمترات

(٥) أوجد مساحة الدائرة التى طول محيطها يساوى ٣٠ سنتيمتراً

(٦) بركة مستديرة قطرها يساوى ٦٠ متراً فى وسطها جزيرة مستديرة مركزها يتحد مع مركز البركة وطول نصف قطرها ٥ أمتار والمطلوب معرفة مساحة قطعة الارض التى يغمرها الماء

(٧) أوجد مساحة الجزء المحصور بين محيط دائرة ومحيط مسدس منتظم مرسوم داخلها اذا فرض أن نصف قطر هذه الدائرة يساوى ٢٠ سنتيمتراً

(٨) اوجد النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المسدس المنتظم المرسوم داخلها ومساحة المربع المرسوم داخلها

(٩) اذا رسمت ثلاث دوائر متساوية وكانت تمس بعضها بعضاً فأوجد مساحة الجزء المحصور بين محيطات هذه الدوائر بفرض ان نصف قطر كل دائرة يساوى ٥ سنتيمترات

(١٠) مثلث زواياه الثلاث هى ٣٠° ، ٤٥° ، ١٠٥° وأصغر اضلاعه يساوى ١٠ سنتيمترات والمطلوب معرفة مساحة الجزء المحصور بين كل ضلع من أضلاع المثلث ومحيط الدائرة المرسومة خارجه

(١١) برهن على ان النسبة بين مساحة اى مثلث ومساحة الدائرة المرسومة داخله كنسبة

$$\text{ظتا}\frac{أ}{٢}\ \text{ظتا}\frac{ب}{٢}\ \text{ظتا}\frac{ح}{٢} : ط$$

(١٢) اذا فرض ان ص مساحة الدائرة المرسومة داخل مثلث وان $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ مساحات الدوائر التى تمس اضلاعه من الخارج فبرهن على أن

$$\frac{١}{\sqrt{ص_{١}}} + \frac{١}{\sqrt{ص_{٢}}} + \frac{١}{\sqrt{ص_{٣}}} = \frac{١}{\sqrt{ص}}$$

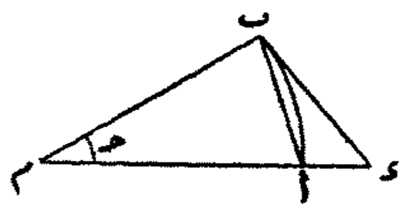
الباب الحادى عشر

فى النسب المثلثية للزوايا الصغيرة

بند ٨٥ — اذا فرض ان هـ عدد الزوايا النصف القطرية التى تحتوى عليها زاوية ينحصر مقدارها بين ٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$ كانت مقادير الكميات جا هـ ، هـ ، ظا هـ ذات ترتيب صعودى اى ان

$$\text{جا هـ} < \text{هـ} < \text{ظا هـ}$$

(البرهان) نفرض ان م مركز دائرة نصف قطرها نق شكل (٥٨) وان م ا ، م ب نصفا قطرين تنحصر بينهما زاوية أقل من قائمة وتساوى هـ من الزوايا النصف القطرية ثم نصل ب ا ونرسم ب ى عموداً على م ب بحيث يقابل امتداد م ا فى ى



(شكل ٥٩)

فمن الشكل نرى ان مقادير مساحة △ ا م ب ، مساحة القطاع ا م ب ، مساحة △ ى م ب ذات ترتيب صعودى

فيكون ½ م ا × م ب جا هـ ، ½ م ا فى القوس ا ب ، ½ م ب × ب ى ذات ترتيب صعودى

اى ان $\text{م ب جا هـ} < \text{القوس ا ب} < \text{ب ى}$

و بقسمة كل كمية على م ب لا يتغير التباين السابق و يكون

$$\text{جا هـ} < \frac{\text{القوس ا ب}}{\text{م ب}} < \frac{\text{ب ى}}{\text{م ب}}$$

اى ان $\text{جا هـ} < \text{هـ} < \text{ظا هـ}$ وهو المطلوب

بند ٨٦ — اذا كان مقدار الزاوية صغيرا جدا كان كل من جيبها وظلها مساويا بوجه التقريب عدد الزوايا النصف القطرية التى تحتوى عليها هذه الزاوية

(البرهان) تقدم فى البند السابق ان

$$\text{جا هـ} < \text{هـ} < \text{ظا هـ}$$

و بقسمة كل كمية على جا هـ يكون

$$١ < \frac{\text{هـ}}{\text{جا هـ}} < \frac{١}{\text{جتا هـ}}$$

اذن $\frac{\text{هـ}}{\text{جا هـ}}$ ينحصر بين ١ ، $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

ولكن اذا صغر مقدار هـ الى غير حد يقرب مقدار جتا هـ من الواحد

وكذلك يقرب مقدار $\frac{\text{١}}{\text{جتا هـ}}$ من الواحد وينحصر مقدار $\frac{\text{هـ}}{\text{جا هـ}}$ بين ١ وعدد يقرب من الواحد

وعلى ذلك اذا كان مقدار الزاوية صغيرا جدا امكن ان نعتبر ان

$$\frac{\text{هـ}}{\text{جا هـ}} = \text{١}$$

ويكون $\text{جا هـ} = \text{هـ}$ وهو المطلوب

ومن حيث ان $\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ونعلم أنه اذا كان مقدار الزاوية صغيرا جدا

يكون $\text{جا هـ} = \text{هـ}$ ، $\text{حتا هـ} = \text{١}$ بوجه التقريب

فيكون $\text{ظا هـ} = \frac{\text{هـ}}{\text{١}} = \text{هـ}$ وهو المطلوب

بند ٨٧ — برهن على أن $\text{جتا هـ} > \text{١} - \frac{\text{هـ}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ اذا فرض ان مقدار هـ ينحصر بين ٠ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

(البرهان) من بند (٨٥) نعلم ان

$$\text{جا}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}} < \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$$

ولكن $\text{جتا هـ} = \text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

فيكون $\text{جتا هـ} > \text{١} - \text{٢}\left(\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}$

، $\text{جتا هـ} > \text{١} - \frac{\text{هـ}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ وهو المطلوب

ومن ذلك نستنتج أنه عند ماينحصر مقدار هـ بين ٠ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ ينحصر جتا هـ بين $\text{١} - \frac{\text{هـ}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ ، ١

بند ٨٨ — برهن على أن $\text{جا هـ} > \text{هـ} - \frac{\text{هـ}^{\text{٣}}}{\text{٤}}$ اذا فرض ان مقدار هـ ينحصر بين ٠ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

(البرهان) من بند (٨٥) نعلم أن

$$\text{ظا}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}} > \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$$

وبضرب طرفى المتباينة فى $\text{٢ جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

يكون $\text{٢ جا}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\,\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}} > \text{٢} \times \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\,\text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

اى ان $\quad \text{جا}\ \text{ه} > \text{ه} \left(١ - \text{جا}^{٢}\ \frac{\text{ه}}{٢} \right)$

$$> \text{ه} \left(١ - \frac{\text{ه}^{٢}}{٤} \right)$$

$$> \text{ه} - \frac{\text{ه}^{٣}}{٤}$$ وهو المطلوب

ومن ذلك نستنتج انه عند ما ينحصر مقدار ه بين ٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$ ينحصر جا ه بين ه $- \frac{\text{ه}^{٣}}{٤}$ ، ه .

بند **٨٩** — اذا علم مقياس الزاوية بأى تقدير خلاف التقدير الدائرى يجب قبل تطبيق القوانين السابقة تحويل هذا المقياس المعلوم الى زوايا نصف قطرية فمثلا اذا فرض ان الزاوية = س° تؤول القوانين السابقة الى

$$\text{جا}\ \text{س}^{\circ} < \frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} < \text{ظا}\ \text{س}^{\circ}$$ (بند ٨٥)

$$\left. \begin{aligned} \text{جا}\ \text{س}^{\circ} &= \frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} \\ \text{ظا}\ \text{س}^{\circ} &= \frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} \end{aligned} \right\}$$ (بند ٨٦)

$$\text{جتا}\ \text{س}^{\circ} > ١ - \tfrac{١}{٢} \left(\frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} \right)^{٢}$$ (بند ٨٧)

$$\text{جا}\ \text{س}^{\circ} > \frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} - \tfrac{١}{٤} \left(\frac{\text{ط}\ \text{س}}{١٨٠} \right)^{٣}$$ (بند ٨٨)

بند **٩٠** — أمثلة محلولة للتطبيق على القوانين السابقة

(مثال ١) أوجد مقدار جا ١٠′ ، جتا ١٠′ [ط = ٣٫١٤١٥٩]

(العمل) بما ان $١٠' = \tfrac{١}{٦}^{\circ} = \frac{\text{ط}}{١٨٠ \times ٦}$ من الزوايا النصف القطرية

يكون أولا $\text{جا}\ ١٠' = \text{جا} \left(\frac{\text{ط}}{١٨٠ \times ٦} \right)^{\text{ء}} = \frac{\text{ط}}{١٨٠ \times ٦}$ (بند ٨٦)

$$= \frac{٣٫١٤١٥٩}{١٨٠ \times ٦} = \underline{\underline{٠٫٠٠٢٩٠٨٩}}\ \text{تقريباً}$$

ثانياً   جتا ١٠´ = $\sqrt{\text{١ − جا}^{٢}\ \text{١٠´}}$

= $[\text{١ − ٠٫٠٠٠٠٠٠٨٤٦٨}]^{\frac{١}{٢}}$

= ١ − $\frac{١}{٢}$ [٠٫٠٠٠٠٠٠٨٤٦٨]   مقرباً من نظرية ذات الحدين

= ١ − ٠٫٠٠٠٠٠٠٤٢٣٤

= ٠٫٩٩٩٩٩٩٥٨ تقريباً

(مثال ٢) حل المعادلة جا هـ = ٠٫٥٢ حلا تقريبياً

(الحل) من حيث ان ٠٫٥٢ تزيد قليلا على ٠٫٥

تكون هـ ازيد قليلا من $\frac{\text{ط}}{٦}$

فاذا فرض ان هـ = ($\frac{\text{ط}}{٦}$ + س) وكانت س صغيرة جداً .

يكون ٠٫٥٢ = جا ($\frac{\text{ط}}{٦}$ + س)

= جا $\frac{\text{ط}}{٦}$ جتا س + جتا $\frac{\text{ط}}{٦}$ جا س

= $\frac{١}{٢}$ جتا س + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س

ومن حيث ان س صغيرة جداً يكون

جتا س = ١ ، جا س = س تقريباً

واذن ٠٫٥٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × س

، س = ٠٫٠٢ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ من الزوايا النصف القطرية

= $\frac{\sqrt{٣}}{٧٥}$ء = ١٫٣٢° تقريباً

اذن هـ = ٣٠° + ١٫٣٢° = ٣١° ١٩´ تقريباً

(مثال ٣) أوجد مقدار اصغر زاوية فى مثلث قائم الزاوية اذا فرض ان أحد ضلعى القائمة يساوى متراً وضلعها الثانى يساوى ١٫٥ من الكيلومترات [ط = $\frac{٢٢}{٧}$]

(الحل) أصغر زاوية فى هذا المثلث هى التى تقابل الضلع الذى طوله يساوى متراً وهذه الزاوية صغيرة جداً فاذا فرض ان قياسها الدائرى يساوى هـ

يكون هـ = ظا هـ = $\frac{\text{متراً واحداً}}{\text{١٫٥ من الكيلومترات}}$ (بند ٨٦)

اذن $هـ = \frac{١}{١٥٠٠}$ من زاوية نصف قطرية

$$= \frac{١٨٠ \times ٧ \times ٦٠'}{٢٢ \times ١٥٠٠} = \frac{١٢٦'}{٥٥}$$

$$= \underline{\underline{٢{,}٢٩'}}$$

(مثال ٤) أوجد المقدار النهائى للكمية $\frac{\text{جا}\,٢هـ\ \text{جا}\,٣هـ\ (١ - \text{جتا}\,٥هـ)}{(١ - \text{جتا}\,هـ)(١ - \text{جتا}\,٣هـ)}$

عند ما تقرب هـ من الصفر

(العمل) الكمية الاصلية $= \frac{\text{جا}\,٢هـ\ \text{جا}\,٣هـ \times ٢\,\text{جا}^{٢}\,\frac{٥هـ}{٢}}{٢\,\text{جا}^{٢}\,\frac{هـ}{٢} \times ٢\,\text{جا}^{٢}\,\frac{٣هـ}{٢}}$

فيكون المقدار النهائى $= \frac{٢هـ \times ٣هـ \times ٢ \times \left(\frac{٥هـ}{٢}\right)^{٢}}{٢ \times \left(\frac{هـ}{٢}\right)^{٢} \times ٢ \times \left(\frac{٣هـ}{٢}\right)^{٢}}$

$$= \frac{٢ \times ٣ \times ٢ \times \frac{٢٥}{٤}}{٢ \times \frac{١}{٤} \times ٢ \times \frac{٩}{٤}}$$

$$= \underline{\underline{٣٣\frac{١}{٣}}}$$

(تمارين ٢١)

[ط = ٣٫١٤١٥٩ ، $\frac{١}{ط}$ = ٠٫٣١٨٣١]

أوجد مقادير النسب الآتية الى ستة أرقام عشرية

(١) جا ٧′ (٣) قا ٤٠′ (٥) جا ١′ (٧) قا ٥′

(٢) جتا ١٥′ (٤) قتا ١′ (٦) جتا ٣٠′ ٣٠″ (٨) قتا ١٥′

حل المعادلات الآتية حلا تقريبياً

(٩) جا هـ = ٠٫٠١ (١١) جا هـ = ٠٫٤٨ (١٣) جتا هـ = ٠٫٩٩٩

(١٠) جا$\left(\frac{ط}{٣} + هـ\right)$ = ٠٫٨٧ (١٢) جتا$\left(\frac{ط}{٣} + هـ\right)$ = ٠٫٤٩ (١٤) جتا$\left(\frac{ط}{٣} - هـ\right)$ = ٠٫٥١

(١٥) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ فيه حـ ب = ٨٨٠ مترا ، ∠ ب = ٥١′ والمطلوب ايجاد طول ا حـ لاقرب سنتيمتر ($ط = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٦) أبصر شخص جرفاً فوقه سارية علم من نقطة تبعد عن موقعه بمقدار ٣٥٠ متراً فوجد ان الفرق بين زاويتى ارتفاع قمة السارية وقمة الجرف يساوى ٠٫٠٣٥ من زاوية نصف قطرية والمطلوب ايجاد طول السارية لاقرب ديسيمتر اذا كان ارتفاع الجرف ١٨٠ متراً

أوجد المقدار النهائى لكل من الكميات الآتية عند ما تقرب هـ من الصفر وذلك بوضع

$$\text{جا هـ} = \text{هـ} \quad ، \quad \text{جتا هـ} = ١ - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}$$

(١٧) $\frac{\text{جا ٤ هـ}}{\text{جا ٣ هـ}}$ (١٨) $\frac{٣\ \text{جا}^{٣}\ \text{هـ}}{\text{هـ جا}^{٢}\ ٢\ \text{هـ}}$ (١٩) $\frac{١ - \text{جتا هـ}}{٢\ \text{هـ}^{٢}}$

(٢٠) $\frac{٤\ \text{جا}^{٢}\ \text{هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$ (٢١) $\frac{\text{جا}^{٢}\ \text{هـ}}{\text{عكا هـ}}$ (٢٢) $\frac{\text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ \text{ظا هـ}}{\text{عكا هـ قا ٢ هـ}}$

(٢٣) $\frac{\text{هـ} - \text{جا هـ}}{٣\ \text{هـ}^{٣}}$ (٢٤) $\frac{٢\ \text{جا}^{٢}\ \frac{\text{هـ}}{٨}}{١ - \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}}$ (٢٥) $\frac{\text{جتا م هـ جا}\ (\text{ن} - ١)\ \text{هـ}}{\text{جا هـ}}$

(٢٦) $\frac{\text{جا هـ جا ٥ هـ عكا ٦ هـ}}{\text{عكا ٤ هـ عكا}\frac{\text{هـ}}{٢}}$ (٢٧) $\frac{\text{عكا م هـ} - \text{عكا ن هـ}}{\text{هـ}\ (\text{جا م هـ} - \text{جا ن هـ})}$

(٢٨) برهن على أن

$$\text{جا هـ} = \text{هـ}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}} \cdots\cdots \text{الى ما لا نهاية له}$$

(البرهان) $\text{جا هـ} = ٢\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢}$

$$= ٢^{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}$$

$$= ٢^{٣}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= ٢^{\text{ن}}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}} \cdots\cdots \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}}$$

$$= ٢^{\text{ن}}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}} \times \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}} \cdots\cdots \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}}$$

ولكن عند ما تكبر ن الى غير حد يكون مقدار $\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}}$ صغيراً جداً

ويكون $٢^{\text{ن}}\ \text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}} = ٢^{\text{ن}} \times \frac{\text{هـ}}{٢^{\text{ن}}} = \text{هـ}$

اذن $\text{جا هـ} = \text{هـ}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٢}}\ .\ \text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢^{٣}} \cdots\cdots$ الى ما لا نهاية له

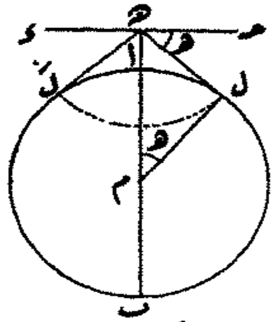
وهو المطلوب

(تنبيه) هذه نظرية أويلر وسيأتى الكلام عليها فى كتاب حساب المثلثات التحليلى

الباب الثانى عشر

فى ميل الأفق

بند ٩١ — اذا فرضت نقطة مثل ﻫ تبعد عن سطح الارض مسافة معينة (شكل ٦٠) وفرض أن ا موقع نقطة ﻫ على سطح الارض ثم رسم من ﻫ مماسات لسطح الارض مثل ﻫ ل ، ﻫ لَ ، .... فهذه المماسات تكوّن مخروطاً رأسه ﻫ وتمس محيط الارض فى دائرة (يمثل الخط المنقوط فى الشكل جزءا منها)



(شكل ٦٠)

وتسمى هذه الدائرة بالافق المرئى لانها هى حد الجزء الذى يراه انسان من سطح الارض اذا كان فى ﻫ وتسمى الزاوية ل ﻫ حـ التى يصنعها أحد المماسات المرسومة من ﻫ (ﻫ ل فى هذه الحالة) مع المستوى الافقى حـ ﻫ ء بميـل الافق

واذا فرض ان م مركز الارض يمر امتداد ﻫ ا بنقطة م واذا مد ا م الى أن يقابل محيط الارض فى ب ووصل م ل كانت ∠ حـ ﻫ ل = ∠ ﻫ م ل وهى فى جميع الاحوال العملية صغيرة جداً ويعبر عن ل ا بمسافة الافق وهى فى جميع الاحوال العمليـة تقرب من ﻫ ل ولذا يبحث دائماً عن طول المماس عند ايجاد طول مسافة الافق

بند ٩٢ — لايجاد طول مسافة الافق

(العمل) تفرض ان ﻫ ا (شكل ٦٠) يساوى ع وان نصف قطر الارض يساوى نق

فمن حيث ان ‾ﻫ ل‾² = ﻫ ا . ﻫ ب

يكون ‾ﻫ ل‾² = ع (ع + ٢ نق)

= ع² + ٢ نق ع

، ﻫ ل = √(ع² + ٢ نق ع)

ولكن فى جميع الاحوال العمليـة مقدار ع صغير جداً ولا يزيد على بضعة مئات من الامتار أو الاقدام مع أن نصف قطر الكرة الارضيـة يقرب من ٤٠٠٠ ميل فى الطول ولذلك يصرف النظر فى الحسابات العملية عن ع² ويكتفى بالمقدار ٢ نق ع ويكون

ﻫ ل = √(٢ نق ع)

بند ٩٣ — (مثال) أوجد طول مسافة الافق من قمة قلع سفينة يبعد ١٢٠ قدماً عن سطح الماء بفرض ان نصف قطر الكرة الارضية يساوى ٤٠٠٠ ميل

(الحل) اذا فرض ان طول المماس المرسوم من قمة السفينة الى محيط الارض يساوى س كان هو طول مسافة الافق بوجه التقريب (بند ٩١)

ويكون س $= \sqrt{٢ \text{ نق } ع}$

$$= \sqrt{\frac{٢ \times ٤٠٠٠ \times ١٢٠}{١٧٦٠ \times ٣}} \quad \text{من الاميال}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٠٠٠}{١١}}$$

ويكون لو س $= \frac{١}{٢}$ (لو ٢٠٠٠ − لو ١١)

$= \frac{١}{٢}$ (٣٫٣٠١٠ − ١٫٠٤١٤) = ١٫١٢٩٨

اذن س = ١٣٫٤٨ من الاميال

بند ٩٤ — لايجاد مقدار ميل الافق

(العمل) علمنا من بند (٩١) أن ∠ ل ه ح هى ميل الافق وانها تساوى ∠ ه م ل

ومن حيث أن هذه الزاوية صغيرة جداً فى الاحوال العملية

تكون ∠ ل ه ح = ظا ل ه ح

$$= \text{ظا ه م ل} = \frac{\text{ه ل}}{\text{م ل}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢ \text{ نق } ع}}{\text{نق}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢ ع}{\text{نق}}} \quad \text{من الزاويا النصف القطرية}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{٢ ع}{\text{نق}}} \times \frac{١٨٠}{ط}\right)^{\circ}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{٢ ع}{\text{نق}}} \times \frac{١٨٠ \times ٦٠}{ط}\right)' \quad \text{وهكذا}$$

بند ٩٥ — (مثال) اوجد ميل الافق من قمة منارة ترتفع ٢٦٤ قدماً عن سطح البحر مع العلم بان نصف قطر الكرة الارضية يساوى ٤٠٠٠ ميل

(الحل) اذا رمزنا الى زاوية الميل بالرمز هـ كان

$$ه = \sqrt{\frac{٢\,ع}{نه}}$$ من الزوايا النصف القطرية

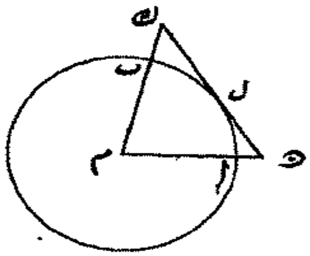
$$= \sqrt{\frac{٢ \times ٢٦٤}{٣ \times ١٧٦٠ \times ٤٠٠٠}} = \sqrt{\frac{١}{٤٠٠٠٠}} = \frac{١}{٢٠٠}$$ من الزوايا النصف القطرية

اذن $$ه = \left(\frac{١}{٢٠٠} \times \frac{١٨٠ \times ٦٠}{ط}\right)' = \left(\frac{٥٤}{ط}\right)'$$

$$= ١٧'\ ١١''$$

بند ٩٦ — مثال محلول

رجل ينظر من قمة قلع سفينة يرتفع ٧٠ قدماً عن سطح البحر وجد ان قصارى نظره الضوء المنبعث من منارة ارتفاعها ١٤٥ قدماً والمطلوب ايجاد المسافة بين السفينة والمنارة مع العلم بأن نصف قطر الكرة الارضية يساوى ٤٠٠٠ ميل



(شكل ٦١)

(الحل) نفرض ان ك ب المنارة وان ه ا السفينة (شكل ٦١) فن حيث ان قصارى نظر الرجل الذى ينظر من ك الضوء المنبعث من ه يجب أن يمس كل من المماسين المرسومين من ك ، ه فى المستوى ك م ه محيط الارض فى نقطة واحدة ولتكن ل ويكون ه ل على استقامة ل ك

والقوس ا ل = ه ل تقريباً

$$= \sqrt{٢\,نه\,ع}$$

$$= \sqrt{\frac{٢ \times ٤٠٠٠ \times ٧٠}{٣ \times ١٧٦٠}} = \sqrt{\frac{٣٥٠٠}{٣٣}}$$ من الاميال

ويكون $$لو\ ا\,ل = \tfrac{١}{٢}\,(لو\ ٣٥٠٠ - لو\ ٣٣)$$

$$= \tfrac{١}{٢}\,(٣٫٥٤٤١ - ١٫٥١٨٥) = ١٫٠١٢٨$$

اذن ا ل = ١٠٫٣٠ من الاميال

والقوس ب ل = ك ل تقريباً

$$= \sqrt{٢\,نه\,ع}$$

$$= \sqrt{\frac{٢ \times ٤٠٠٠ \times ١٤٥}{٣ \times ١٧٦٠}} = \sqrt{\frac{٧٢٥٠}{٣٣}}$$ من الاميال

ويكون لوب ل = ½ (لو ٧٢٥٠٠ − لو ٣٣)

= ½ (٣٫٨٦٠٣ − ١٫٥١٨٥) = ١٫١٧٠٩

اذن ب ل = ١٤٫٨٢ من الاميال

وتكون المسافة ا ب = ا ل + ل ب

= ١٠٫٣٠ + ١٤٫٨٢ من الاميال

= ٢٥٫١٢ من الاميال

(تمارين ٣٢)

[نصف قطر الكرة الارضية = ٤٠٠٠ ميل ، ط = $\frac{٢٢}{٧}$]

(١) أوجد طول مسافة الافق المنظور من قمة تل يرتفع ٣٥٠ قدماً عن سطح الارض

(٢) أوجد مقدار ميل الافق من قمة منارة ترتفع ١٧٦ قدماً عن سطح البحر

(٣) اذا كان ارتفاع مصباح منارة ٢٠٠ قدم فما طول المسافة التي يرى فيها

(٤) رجل ينظر من قمة منارة ارتفاعها ١٥٠ قدماً وجد ان قصارى نظره الضؤ المنبعث من منارة أخرى ارتفاعها ٢٠٠ قدم والمطلوب ايجاد المسافة التقريبية بين المنارتين

(٥) رجل ينظر من قمة قلع سفينة يرتفع ٧٠ قدماً عن سطح البحر وجد أن قصارى نظره الضؤ المنبعث من منارة وبعد ان سارت السفينة ساعة اتجاه المنارة أمكنه رؤية المصباح من سطح السفينة الذى يرتفع ٢٠ قدما عن سطح البحر والمطلوب ايجاد سرعة السفينة فى الساعة

(٦) رجل ينظر من قمة قلع سفينة يرتفع ٨٠ قدماً عن سطح البحر وجد ان قصارى نظره الضؤ المنبعث من منارة تبعد عن السفينة بمقدار ٣٠ ميلا والمطلوب ايجاد ارتفاع المنارة

(٧) اذا كان مقدار ميل افق منطاد مرتفع فوق سطح الارض هو ١° فأوجد ارتفاع المنطاد عن سطح الارض

(٨) رجل ينظر من قمة قلع سفينة يرتفع ٤٤ قدماً عن سطح البحر وجد أن قصارى نظره الضؤ المنبعث من منارة وبعد أن سارت السفينة ١٥ دقيقة اتجاه المنارة أمكنه رؤية المصباح من سطح السفينة الذى يرتفع ١١ قدماً عن سطح البحر والمطلوب ايجاد سرعة السفينة فى الساعة

الباب الثالث عشر

فى جمع حدود بعض متسلسلات مثلثية سهلة

٩٧ — لايجاد مجموع جيوب سلسلة زوايا ذات توال عددى

(العمل) نفرض ان ح ، $\text{ح}+\text{ى}$ ، $\text{ح}+٢\text{ى}$ ، .... ، $\{\text{ح}+(\text{ن}-١)\text{ى}\}$

هى الزوايا المعلومة ونرمز الى مجموع جيوبها بالرمز م

$$\text{فيكون } \text{م} = \text{جا}\,\text{ح} + \text{جا}\,(\text{ح}+\text{ى}) + \text{جا}\,(\text{ح}+٢\text{ى}) + \cdots\cdots + \text{جا}\,\{\text{ح}+(\text{ن}-١)\text{ى}\}$$

وبضرب حدى المتساوية فى $٢\,\text{جا}\,\frac{\text{ى}}{٢}$

$$\text{يكون } ٢\,\text{م}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = ٢\,\text{جا}\,\text{ح}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} + ٢\,\text{جا}\,(\text{ح}+\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} + ٢\,\text{جا}\,(\text{ح}+٢\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} + \cdots$$
$$+\,٢\,\text{جا}\,\{\text{ح}+(\text{ن}-١)\text{ى}\}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١)$$

$$\text{ولكن} \quad ٢\,\text{جا}\,\text{ح}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = \text{جتا}\,(\text{ح}-\frac{\text{ى}}{٢}) - \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{\text{ى}}{٢})$$
$$،\quad ٢\,\text{جا}\,(\text{ح}+\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{\text{ى}}{٢}) - \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٣\text{ى}}{٢})$$
$$،\quad ٢\,\text{جا}\,(\text{ح}+٢\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٣\text{ى}}{٢}) - \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٥\text{ى}}{٢})$$

. . . .

$$،\quad ٢\,\text{جا}\,\{\text{ح}+(\text{ن}-١)\text{ى}\}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٢\text{ن}-٣}{٢}\text{ى}) - \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٢\text{ن}-١}{٢}\text{ى})$$

وبتعويض حدود الطرف الايسر من معادلة (١) بما تساويه واختصار الحدود المتشابهة

$$\text{يكون } ٢\,\text{م}\,\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢} = \text{جتا}\,(\text{ح}-\frac{\text{ى}}{٢}) - \text{جتا}\,(\text{ح}+\frac{٢\text{ن}-١}{٢}\text{ى})$$

$$= ٢\,\text{جا}\,(\text{ح}+\frac{\text{ن}-١}{٢}\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ن}\text{ى}}{٢}$$

$$\text{اذن} \qquad \text{م} = \frac{\text{جا}\,(\text{ح}+\frac{\text{ن}-١}{٢}\text{ى})\,\text{جا}\frac{\text{ن}\text{ى}}{٢}}{\text{جا}\frac{\text{ى}}{٢}}$$

بند ٩٨ — لايجاد مجموع جيوب تمام سلسلة زوايا ذات توال عددى

(العمل) نفرض ان ح ، $\text{ح}+\text{ى}$ ، $\text{ح}+٢\text{ى}$ ، .... ، $\{\text{ح}+(\text{ن}-١)\text{ى}\}$

هى الزوايا المعلومة ونرمز الى مجموع جيوب تمامها بالرمز ع

فيكون ع = جتا ح + جتا (ح + ى) + جتا (ح + ٢ ى) + ...

+ جتا { ح + (ه − ١) ى }

ويضرب حدى المتساوية فى ٢ جا $\frac{ى}{٢}$

يكون ٢ ع جا $\frac{ى}{٢}$ = ٢ جتا ح جا $\frac{ى}{٢}$ + ٢ جتا (ح + ى) جا $\frac{ى}{٢}$ + ٢ جتا (ح + ٢ ى) جا $\frac{ى}{٢}$ + ...

+ ٢ جتا { ح + (ه − ١) ى } جا $\frac{ى}{٢}$ .... (١)

ولكن ٢ جتا ح جا $\frac{ى}{٢}$ = جا (ح + $\frac{ى}{٢}$) − جا (ح − $\frac{ى}{٢}$)

، ٢ جتا (ح + ى) جا $\frac{ى}{٢}$ = جا (ح + $\frac{٣ى}{٢}$) − جا (ح + $\frac{ى}{٢}$)

، ٢ جتا (ح + ٢ ى) جا $\frac{ى}{٢}$ = جا (ح + $\frac{٥ى}{٢}$) − جا (ح + $\frac{٣ى}{٢}$)

. . . .

، ٢ جتا { ح + (ه − ١) ى } جا $\frac{ى}{٢}$ = جا (ح + $\frac{٢ه − ١}{٢}$ ى) − جا (ح + $\frac{٢ه − ٣}{٢}$ ى)

وبتعويض حدود الطرف الايسر من معادلة (١) بما تساويه واختصار الحدود المتشابهة

يكون ٢ ع جا $\frac{ى}{٢}$ = جا (ح + $\frac{٢ه − ١}{٢}$ ى) − جا (ح − $\frac{ى}{٢}$)

= ٢ جتا (ح + $\frac{ه − ١}{٢}$ ى) جا $\frac{ه ى}{٢}$

اذن ع = $\frac{\text{جتا (ح + } \frac{ه − ١}{٢} \text{ ى) جا } \frac{ه ى}{٢}}{\text{جا } \frac{ى}{٢}}$

بند ٩٩ — يراعى ان قانون جيوب التمام لا يختلف عن قانون الجيوب الا فى الحد الاول من البسط وان ه عدد حدود المتسلسلة وان الزاوية (ح + $\frac{ه − ١}{٢}$ ى) تساوى نصف مجموع الزاوية الاولى والزاوية الاخيرة من سلسلة الزوايا المعلومة اى انها تساوى $\frac{١}{٢}$[ح + { ح + (ه − ١) ى }]

بند ١٠٠ الحد جا $\frac{ه ى}{٢}$ = صفراً اذا كان $\frac{ه ى}{٢}$ = ك ط أى انه اذا كانت ى = $\frac{٢ ك ط}{ه}$ (بفرض ان ك عدد صحيح أياً كان)

واذا كان جا $\frac{ه ى}{٢}$ = صفراً يكون كل من مقدارى م ، ع السابقين = صفراً

ولزيادة الايضاح يمكن ان نقول ان مجموع جيوب أو جيوب تمام زوايا ذات توال عددي وعددها ن يساوى صفرا عند ما يكون اساس المتوالية العددية مكرراً المقدار $\frac{2\,\text{ط}}{\text{ن}}$

فمثلا $\text{جتا}\,\text{ح} + \text{جتا}\left(\text{ح} + \frac{2\,\text{ط}}{\text{ن}}\right) + \text{جتا}\left(\text{ح} + \frac{4\,\text{ط}}{\text{ن}}\right) + \cdots$ الى ن من الحدود $= 0$

و $\text{جا}\,\text{ح} + \text{جا}\left(\text{ح} + \frac{4\,\text{ط}}{\text{ن}}\right) + \text{جا}\left(\text{ح} + \frac{8\,\text{ط}}{\text{ن}}\right) + \cdots$ الى ن من الحدود $= 0$

بند ١٠١ — أمثلة محلولة للتطبيق على القانونين السابقين

(مثال ١) المطلوب ايجاد مقدار المتسلسلة الآتية

$\text{جا}\,\text{ح} + \text{جا}\,3\,\text{ح} + \text{جا}\,5\,\text{ح} + \cdots$ الى ن من الحدود

(العمل) بتطبيق قانون الجيوب تكون

المتسلسلة المذكورة $= \dfrac{\text{جا}\left(\text{ح} + \frac{\text{ن}-1}{2}\,2\,\text{ح}\right)\,\text{جا}\,\text{ن}\,\frac{2\,\text{ح}}{2}}{\text{جا}\,\frac{2\,\text{ح}}{2}}$

$= \dfrac{\text{جا}^2\,\text{ن}\,\text{ح}}{\text{جا}\,\text{ح}}$

(مثال ٢) المطلوب ايجاد مقدار المتسلسلة الآتية

$\text{جتا}\,\frac{\text{ط}}{17} + \text{جتا}\,\frac{3\,\text{ط}}{17} + \cdots + \text{جتا}\,\frac{15\,\text{ط}}{17}$

(العمل) بتطبيق قانون جيوب التمام تكون

المتسلسلة المذكورة $= \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{17} + \frac{7}{2}\cdot\frac{2\,\text{ط}}{17}\right)\,\text{جا}\,\frac{8\,\text{ط}}{17}}{\text{جا}\,\frac{\text{ط}}{17}}$

$= \dfrac{\text{جتا}\,\frac{8\,\text{ط}}{17}\,\text{جا}\,\frac{8\,\text{ط}}{17}}{\text{جا}\,\frac{\text{ط}}{17}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\text{جا}\,\frac{16\,\text{ط}}{17}}{\text{جا}\,\frac{\text{ط}}{17}}$

$= \frac{1}{2}$

(مثال ٣) أوجد مقدار المتسلسلة الآتية

$\text{جا}\,\text{ح}\,\text{جتا}\,5\,\text{ح} + \text{جا}\,3\,\text{ح}\,\text{جتا}\,7\,\text{ح} + \text{جا}\,5\,\text{ح}\,\text{جتا}\,9\,\text{ح} + \cdots$ الى ن من الحدود

(العمل) نفرض ان مجموع هذه الحدود يساوى م

فيكون ٢ م = ٢ جا حـ جتا ٥ حـ + ٢ جا ٣ حـ جتا ٧ حـ + ٢ جا ٥ حـ جتا ٩ حـ + ٠٠٠٠ الى ن من الحدود

= (جا ٦ حـ − جا ٤ حـ) + (جا ١٠ حـ − جا ٤ حـ) + (جا ١٤ حـ − جا ٤ حـ) + ٠٠٠

= (جا ٦ حـ + جا ١٠ حـ + جا ١٤ حـ + ٠٠٠) − (جا ٤ حـ + جا ٤ حـ + جا ٤ حـ + ٠٠٠)

= جا (٢ ن حـ + ٤ حـ) جا ٢ ن حـ / جا ٢ حـ − ن جا ٤ حـ

(مثال ٤) أوجد مقدار المتسلسلة الآتية

جتا² حـ + جتا² (حـ + ء) + جتا² (حـ + ٢ ء) + ٠٠٠٠٠ الى ن من الحدود

(العمل) من حيث أن ٢ جتا² حـ = ١ + جتا ٢ حـ

يكون ٢ ع = {١ + جتا ٢ حـ} + {١ + جتا ٢ (حـ + ء)}

+ {١ + جتا ٢ (حـ + ٢ ء)} + ٠٠٠٠٠٠

= ن + جتا ٢ حـ + جتا (٢ حـ + ٢ ء) + جتا (٢ حـ + ٤ ء) + ٠٠٠٠

= ن + جتا {٢ حـ + (ن − ١) ء} جا ن ء / جا ء

(مثال ٥) أوجد مقدار المتسلسلة الآتية

جا³ حـ + جا³ ٣ حـ + جا³ ٥ حـ + ٠٠٠٠ الى ن من الحدود

(العمل) من حيث أن ٤ جا³ حـ = ٣ جا حـ − جا ٣ حـ

يكون ٤ م = (٣ جا حـ − جا ٣ حـ) + (٣ جا ٣ حـ − جا ٩ حـ)

+ (٣ جا ٥ حـ − جا ١٥ حـ) + ٠٠٠٠٠٠٠٠

= ٣ (جا حـ + جا ٣ حـ + جا ٥ حـ + ٠٠٠٠)

− (جا ٣ حـ + جا ٩ حـ + جا ١٥ حـ + ٠٠٠٠٠٠٠٠)

= ٣ جا² ن حـ / جا حـ − جا² ٣ ن حـ / جا ٣ حـ

(تمارين ٢٣)

اجمع حدود المتسلسلات الآتية الى ن من الحدود

(١) جا ٢ حـ + جا ٥ حـ + جا ٨ حـ + ٠٠٠٠٠٠٠٠

(٢) جتا حـ + جتا ٣ حـ + جتا ٥ حـ + ٠٠٠٠٠٠٠٠

(٣) جتا $\frac{\text{ح}}{\text{٣}}$ + جتا $\frac{\text{٤ ح}}{\text{٣}}$ + جتا $\frac{\text{٧ ح}}{\text{٣}}$ + ...

(٤) جا ى + جا (ى + $\frac{\text{٢ ط}}{\text{ن}}$) + جا (ى + $\frac{\text{٤ ط}}{\text{ن}}$) + ...

(٥) جتا هـ + جتا (هـ + $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$) + جتا (هـ + $\frac{\text{٢ ط}}{\text{ن}}$) + ...

(٦) جا $\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$ + جا هـ + جا $\frac{\text{٣ هـ}}{\text{٢}}$ + ...

برهن على ان المتساويات الآتية صحيحة

(٧) $\frac{\text{جا ى + جا ٢ ى + جا ٣ ى + ... + جا ن ى}}{\text{جتا ى + جتا ٢ ى + ... جتا ن ى}}$ = ظا $\frac{\text{ن + ١}}{\text{٢}}$ ى

(٨) $\frac{\text{جا ى + جا ٣ ى + جا ٥ ى + ... + جا (٢ ن − ١) ى}}{\text{جتا ى + جتا ٣ ى + جتا ٥ ى + ... + جتا (٢ ن − ١) ى}}$ = ظا ن ى

(٩) $\frac{\text{جا ى − جا (ى + هـ) + جا (ى + ٢ هـ) − .... الى ن من الحدود}}{\text{جتا ى − جتا (ى + هـ) + جتا (ى + ٢ هـ) − .... الى ن من الحدود}}$

= ظا {ى + $\frac{\text{ن − ١}}{\text{٢}}$ (ط + هـ)}

اجمع حدود المتسلسلات الآتية

(١٠) جا $\frac{\text{ط}}{\text{٢١}}$ + جا $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٢١}}$ + جا $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٢١}}$ + ... + جا $\frac{\text{١٩ ط}}{\text{٢١}}$

(١١) جتا $\frac{\text{ط}}{\text{٢٣}}$ + جتا $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٢٣}}$ + جتا $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٢٣}}$ + ... + جتا $\frac{\text{٢١ ط}}{\text{٢٣}}$

(١٢) جا $\frac{\text{ط}}{\text{٢ ن − ١}}$ + جا $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٢ ن − ١}}$ + جا $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٢ ن − ١}}$ + ... الى ن من الحدود

(١٣) جتا ح − جتا (ح + ى) + جتا (ح + ٢ ى) − ...... الى ٢ ن من الحدود

(١٤) جا هـ + جا $\frac{\text{ن − ٤}}{\text{ن − ٢}}$ هـ + جا $\frac{\text{ن − ٦}}{\text{ن − ٢}}$ هـ + ... الى ن من الحدود

(١٥) جا ى − جا ٢ ى + جا ٣ ى − ..... الى ن من الحدود

(١٦) جتا ٢ ى − جتا ٤ ى + جتا ٦ ى − ..... الى ن من الحدود

(١٧) جا ٢ ھ − جا (٢ ھ + $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$) + جا (٢ ھ + $\frac{\text{٢ ط}}{\text{ن}}$) − .... الى ن من الحدود

(١٨) جتا ٣ ھ − جتا (٣ ھ − $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$) + جتا (٣ ھ − $\frac{\text{٢ ط}}{\text{ن}}$) − .... الى ن من الحدود

(١٩) جا ى جا ٣ ى + جا ٣ ى جا ٥ ى + جا ٥ ى جا ٧ ى + ... الى ن من الحدود

(٢٠) جتا ى جتا ٣ ى + جتا ٣ ى جتا ٥ ى + جتا ٥ ى جتا ٧ ى + ... الى ن من الحدود

(٢١) جا ى جتا ٤ ى + جا ٣ ى جتا ٦ ى + جا ٥ ى جتا ٨ ى + ... الى ن من الحدود

(٢٢) جا^{٢} حـ + جا^{٢} (حـ + ى) + جا^{٢} (حـ + ٢ ى) + ... الى ن من الحدود

(٢٣) جتا^{٢} ٢ حـ + جتا^{٢} ٣ حـ + جتا^{٢} ٤ حـ + ... الى ن من الحدود

(٢٤) جا^{٢} ى + جا^{٢} (ى + $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$) + جا^{٢} (ى + $\frac{\text{٢ ط}}{\text{ن}}$) + ... الى ن من الحدود

(٢٥) جتا^{٣} ى + جتا^{٣} (ى + ھ) + جتا^{٣} (ى + ٢ ھ) + ... الى ن من الحدود

(٢٦) جا^{٣} حـ + جا^{٣} ٢ حـ + جا^{٣} ٣ حـ + ... الى ن من الحدود

(٢٧) جا^{٤} حـ + جا^{٤} ٢ حـ + جا^{٤} ٣ حـ + ... الى ن من الحدود

(٢٨) جتا^{٤} حـ + جتا^{٤} ٣ حـ + جتا^{٤} ٥ حـ + ... الى ن من الحدود

« تمّ والحمد لله »