

كتاب
الاصول الهندسية
وهو مشتمل على
كتب اقليدس الستة
ومضافات في مربع الدائرة
وهندسة الاجسام
واصول قياس المثلثات المستوية والكروية
ترجمة
كهريليوس فان ديك

مقدمة

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الأوهام. وهو المنزه عن
مقادير الأشكال ومساحة الأجسام. أما بعد فيقول العبد
الفقير إلى ربه القدير كرنيلس فان ديك الأمير كاني أنني
لما رايت افتقار المدارس في هذه البلاد إلى الكتب الهندسية
التي بها تتم الفائدة المقصودة منها اعنيت بترجمة هذا
الكتاب المفيد وهو مشتمل على كتب اقليدس الستة
ومضافات أخرى في تربيعة الدائرة وهندسة الأجسام
وأصول قياس المثلثات المستوية والكروية. والله المسؤل
ان ينفع به الطالبين ويفيد الراغبين ويجعله
مخلصاً لوجهه الكريم وهو ارحم
الراحمين

نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية عاش في بلاد مصر ق م نحو ٢٨٠ سنة في عصر الملك بطليموس لاغوس. قيل ولد في الاسكندرية وقيل مولده مجهول وصار معلم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسه. قيل سألهُ الملك يوماً ألا يوجد سبيل اسهل لمعرفة التعاليم فقال لا توجد سكة سلطانية لذلك. وله مؤلفات في علم الهيئة والبصريات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تنزل الى ايامنا هذه افضل ما صنّف في هذا الفن. غير انه قد دخل عليها بعض التغيرات والنقائص على تماذي الاجيال. وقد رجّعها الى اصلها المعلم سيمسون الاسكوتسي ثم اضاف اليها بعض المعلمين عدّة قضايا لكي تضير بذلك اكثر مناسبة لحال التعاليم في هذا العصر. واحسن نسخها واكثرها فائدة

النسخة التي اغنى بها المعلم بلايفار الاسكوتسي وهي

المعول عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق

اصول الهندسة

الكتاب الاول

ايضاح الاصطلاحات والعلامات

- ١ الهندسة علم موضوعه قياس المقادير. والمقدار هو كل ما له واحد من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق
- ٢ قد استعملت في علم الهندسة اصطلاحات شتى كالمحد والقضية والاولية والنظرية والعملية والسابقة والتعليقة والفرع وغير ذلك مما سترى
- ٣ المحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحية. ويجب ان يكون تاماً لا اشكال فيه وان تكون الناطقة المفردة اعني اديّة مفهومة
- ٤ الاولية قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولهم الكل اعظم من جزءه
- ٥ النظرية قضية محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولهم ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين
- ٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية ويسمى ايضاً البرهان الايجابي
- ٧ الدهان الغير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محالية فسادها ويسمى ايضاً الدهان السلبي والتحويل الى المحال
- ٨ العملية هي قضية حاوية عملاً مطلوباً اتمامه كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخره وان تقسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٩ ~~العملية~~ العملية هو استخراج جوابها. فان عيّر عن ذلك باعداد سمي حلاً عددياً او بمبادى هندسية فهندسية. وان تم بواسطة امتحانات فيمكنها او صناعياً
- ١٠ السابقة قضية استعدادية ذكرت قبل اخرى لكي يختصر بها

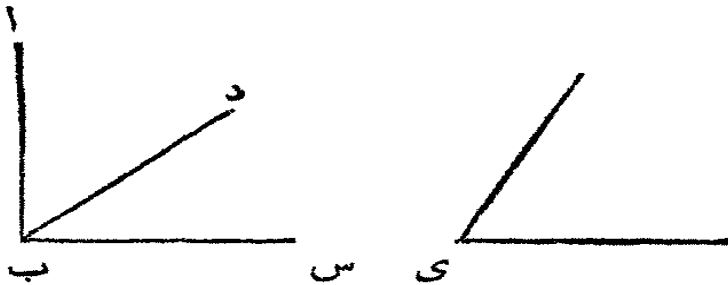
- ١١ الفرع نتيجة تُستنتج بالاستقامة من قضية سابقة لها
 ١٢ التعليقة قول مبني على قضية سبقته
 ١٣ الافتراض هو ان يسلم بحجة قضية لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى
 ١٤ المنتضيات او الممكنات عمليات يسلم بامكان عملها من اول وهلة
 ١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيب ملاسب للبحث
 عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير
 ١٦ التحليل هو استعمال صحة قضية بالتأخر من القضية نفسها الى مبداء معلوم
 ويسمى ايضا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة
 ١٧ التركيب هو التقدم شيئا فشيئا من مبداء معلوم بسيط الى النتيجة
 ويسمى ايضا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة
 ١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد تقدم شرحها في كتاب علم الجبر
 والمقابلة فعليك بالمراجعة

حدود

- ١ النقطة شيء له وضع فقط وليس له طول ولا عرض ولا عمق
 ٢ الخط طول بدون عرض او عمق
 فرع: نهايتا خط تقطبان وموضع تقاطع خطين نقطة
 ٣ خطان لا يتوافقان في تقطبين منها بدون ان يتوافقا بالكلية
 يُسميان مستقيمين. وقيل ايضا الخط المستقيم هو البعد الاقرب
 بين تقطبين
 فرع: خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحة ولا يتطابقان في جزء
 منها ان لم يتطابقا بالكلية
 ٤ السطح او البسيط ما كان له طول وعرض بدون عمق
 فرع: نهايات سطح خطوط. وموضع تقاطع سطحين خط

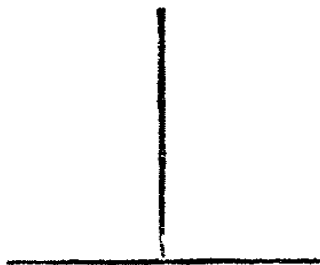
٥ السطح المستوي هو سطح اذا فرضت فيه نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح

٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطين مستقيمين التقيا بنقطة وليسط على استقامة واحدة

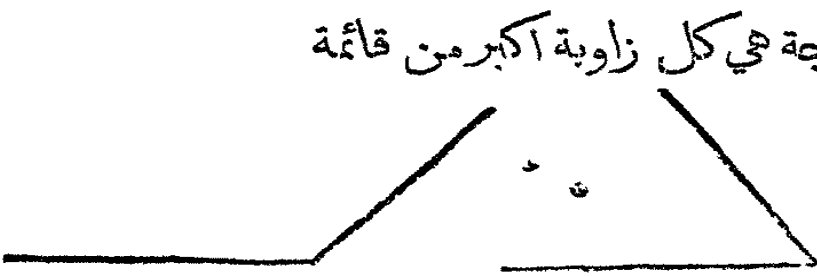


تنبيه. متى التقت زاويتان فاكثر في نقطة واحدة كما يرى عند ب فكل واحدة منها تتعين

بثلاثة احرف اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط اب وخط دب تسمى زاوية اب د او دب ا والواقعة بين دب وس ب تسمى دب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيدل عليها بحرف واحد كالزاوية عند ي



٧ اذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم واحداث زاويتين متساويتين على جانبيه فالخط القائم يسمى عموداً وكل زاوية منها قائمة

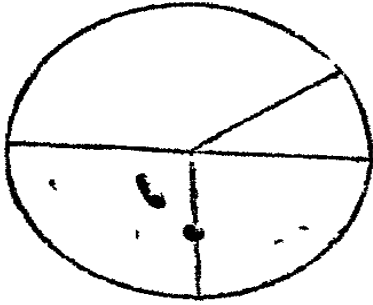


٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة

٩ الزاوية الحادة

هي كل زاوية اصغر من قائمة

١٠ الشكل هيئة محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المنحصرة



في حدوده بدون نظر الى ماهية تلك الحدود
 ١١ الدائرة شكل مستوي يحيط به خط
 واحد ويسمى المحيط. وفي وسطه نقطة جميع
 الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط
 متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قُطْرُ الدائرة خط مستقيم ماراً بمركزها ونهايتاه في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط

المقطوع بالقطر

١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي الحدود بخطوط مستقيمة

١٦ المثلث شكل يحيط به ثلاثة خطوط

تنبية. المثلث المستوي هو ما احاط به ثلاثة خطوط مستقيمة

والكروي ما احاط به ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط به اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط به اكثر من اربعة

خطوط مستقيمة



١٩ المثلث

المتساوي الاضلاع

هو ما كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعه

الثلثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلثة غير

متساوية

٢٢ المثلث

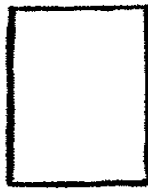


القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



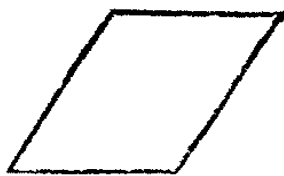
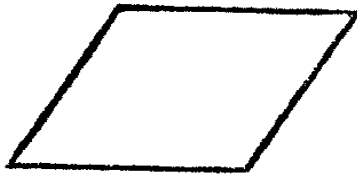
٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعاؤ المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفاً

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستو

ولا تلتقي ولو أُخرجت في جهتها الى غير نهاية

مقتضيات او إمكانات

- ١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او غير مستقيم
- ٢ يمكن ان يُخرج خطاً مستقيماً محدوداً على استقامته في جهتيه الى حد ما يُراد
- ٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركزٍ فرض وعلى اي بُعدٍ فرض منه

اوليات

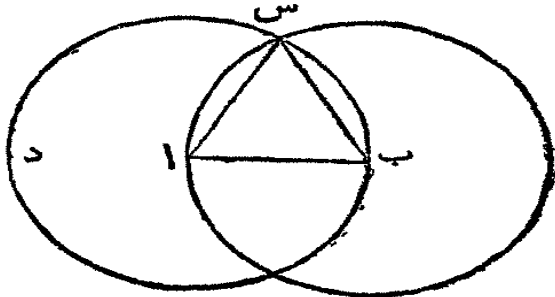
- ١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
- ٢ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٣ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٤ اذا اضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية
- ٥ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون البقايا غير متساوية
- ٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحد هي متساوية
- ٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية
- ٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

- ٩ الكل اعظم من جزءه
 ١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية
 ١١ اذا تقاطع خطان مستقيمان لا يكونان موازيين لخط آخر

مستقيم

القضية الاولى. عملية

علينا ان نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع على خط مستقيم محدود مفروض
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرسم عليه مثلثاً متساوي الاضلاع.



اجعل ا مركزاً و ا ب بُعداً وارسم دائرة
 ب س د ثم اجعل ب مركزاً و ب ا بُعداً
 وارسم دائرة ا س ر (حسب ثالثة
 الممكنات) ثم من س اي نقطة تقاطع
 الدائرتين ارسم خطاً الى ا و آخر الى ب

(حسب اولي الممكنات) فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع

فالنقطة ا هي مركز الدائرة ب س د ولذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب
 الحد الحادي عشر) و ب مركز الدائرة ا س ر ولذلك ب ا يعدل ب س وقد تبرهن
 ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
 (اولية اولي) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي
 متساوية فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع وقد رسم على ا ب وذلك ما كان
 علينا ان نعله

القضية الثانية. ع

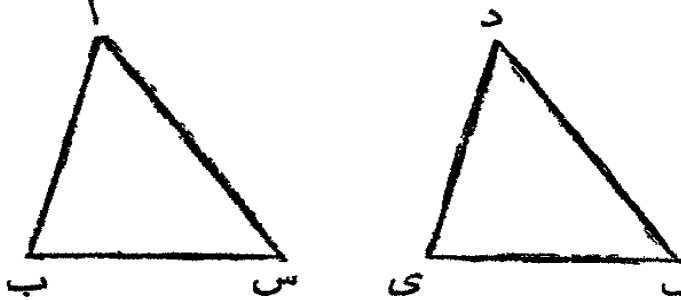
علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يعدل خطاً اخر مستقيماً

مفروضاً

لكن النقطة المفروضة و ب س الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرسم من

احدها عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد
يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزويتان
الاخريان من الواحد تعدلان الاخرين من الآخر

ليكن ا ب س دى ف مثلثين. والضلعان ا ب اس من الواحد يعدلان دى دى دى



من الاخر كل واحد يعدل نظيره
والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى
د ف فحينئذ القاعدة ب س تعدل
القاعدة دى ف. والمثلث ا ب س
يعدل المثلث دى ف. وبقيت الزوايا

ايضاً متساوية اي التي نقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها. اي ا ب
س تعدل دى ف. و ا س ب تعدل دى ف

لانه اذا وُضع المثلث ا ب س على المثلث دى ف حتى تقع النقطة ا على النقطة
د والمخط ا ب على المخط دى فالنقطة ب تقع على النقطة دى لان ا ب يعدل دى.
واذا وقع ا ب على دى فحينئذ ا س يقع على د ف لان الزاوية ب ا س تعدل الزاوية
دى د ف والنقطة س تقع على النقطة ف لان ا س يعدل د ف. وقد تبرهن ان النقطة
ب تقع على النقطة دى فالقاعدة ب س تقع على القاعدة دى ف وتعد لها (فرع حد ٣)
وكذلك كل المثلث ا ب س يقع على كل المثلث دى ف ويكونان متساويين. والزويتان
الاخريان من الواحد تقع على الاخرين من الآخر. وكل واحدة تعدل نظيرها اي
ا ب س تعدل دى ف و ا س ب تعدل دى ف. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

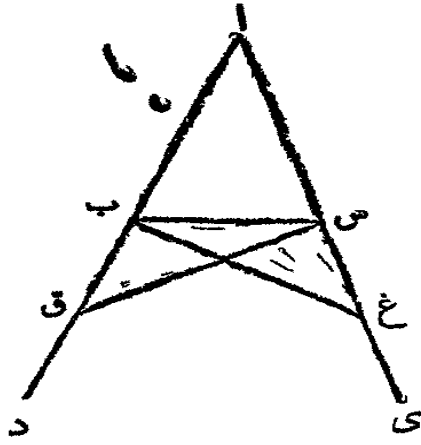
القضية الخامسة. ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان.
واذا أُخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادتان على الجانب
الآخر من القاعدة متساويتان ايضاً

ليكن ا ب س مثلثاً متساوي الساقين اي الساق ا ب يعدل الساق ا س. وليخرج

الضلع اب الى د والضلع اس الى ع. فالزاوية اب س تعدل الزاوية اس ب
والزاوية س ب د تعدل الزاوية ب س ع

عين اي نقطة شئت في ب د كالنقطة ق مثلاً. ومن اي اطول خطين اقطع اغ



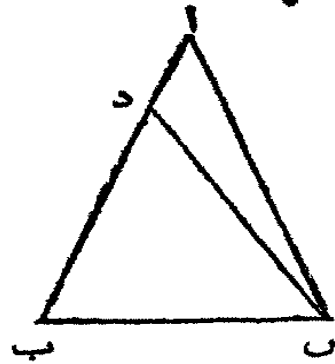
حتى يعدل اق اقصرهما (حسب ق ٢ ك ١) وارسم
الخط ق س والخط غ ب. فالخط اق يعدل اغ
وكذلك اب يعدل اس. فالخطان ق ا اس
يعدلان غ ا اب وبينهما الزاوية ق اغ المشتركة
بين المثلثين اق س اغ ب فالقاعدة ق س
تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ٤ ك ١) والمثلث
اق س يعدل المثلث اغ ب فبقية الزوايا من
الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر (ق ٤ ك ١)

كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تحاذيها الاضلاع المتساوية اي الزاوية اس ق
تعدل اب غ والزاوية اق س تعدل اغ ب. وقد تقدم ان اق يعدل اغ وان
اب يعدل اس فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان
ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبرهن ان
الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب
(ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها
الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق
تعدل الزاوية س ب غ وقد تبرهن ان كل الزاوية اس ق تعدل الكل اب غ وان
الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية اس ب تعدل البقية اب س وهما
الزاويتان عند قاعدة المثلث اب س وقد تبرهن ان الزاوية ق ب س تعدل غ س ب
وهما الزاويتان على الجانب الاخر من القاعدة. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه
فرج. اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضاً

القضية السادسة. ن

اذا كانت زاويتان من مثلث متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانها
هما متساويان ايضاً

ليكن $ا ب س$ مثلثاً له زاويتان $ا ب س$ $ا س ب$ متساويتان فضلعاه $ا ب$ $ا س$ هما متساويان ايضاً



والأفاحدها اطول من الاخر. فلنفرض $ا ب$ اطولها ولنقطع منه جزءاً $د ب$ يعدل $ا س$ اقصرها (ق ٣ ك ١) فلنا في المثلثين $د ب س$ $ا ب س$ ضلع من الواحد $د ب$ يعدل ضلعاً من الآخر $ا س$ والقاعدة $ب س$ مشتركة بينهما فالضلعان $د ب$ $ب س$ يعدلان $ا س$ $ب س$ كل واحد

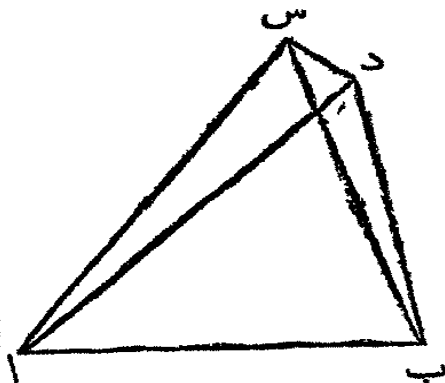
نظيرة. والزاوية $د ب س$ تعدل $ا س ب$ فالقاعدة $د س$ تعدل القاعدة $ا ب$ والمثلث $د ب س$ يعدل المثلث $ا ب س$ (ق ٤ ك ١) اي الصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا يمكن ان يكون $ا ب$ $ا س$ غير متساويين بل هما متساويان. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

فرع. كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضاً

القضية السابعة. ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الآخر متساويان ايضاً

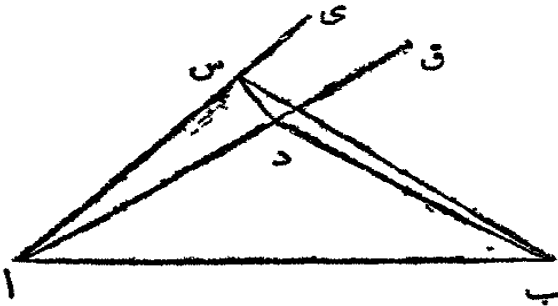
ليكن $ا س ب$ $ا د ب$ مثلثين على قاعدة واحدة $ا ب$ وعلى جانب واحد منها والضلعان $ا س$ $ا د$ المنتهيان في ا متساويان فالمنتهيان في $ب$ الطرف الآخر من القاعدة لا يكونان متساويين



ارسم الخط $س د$ (حسب اولى المكملات) فاذا كان $ب س$ $ب د$ متساويين وكان راس احد المثلثين خارج الاخر فلنا $ا س$ $ا د$ متساويان فالزاوية $ا س د$ تعدل الزاوية $ا د س$ (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية $ا س د$ دائما هي اكبر من الزاوية $ب س د$ فالزاوية $ا د س$ ايضاً اكبر من $ب س د$ وبالاخرى الزاوية $ب د س$ اكبر من $ب س د$ وعلى

ما قُرِضَ ان س ب يعدل د ب فالزاوية ب د س تعدل ب س د (ق ه ك ا)
وقد تبرهن انها اكبر من ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الاخر اس ب . فاخرج اس الى
واخرج ا د الى ق فبا ان اس ا د متساويان فالزاويتان س د ق د س
على الجانب الاخر من القاعدة س د ها متساويتان (ق ه ك ا) والزاوية س د
انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ق د س ايضاً اكبر من ب س د وبالاخرى
ب د س اكبر من ب س د واذا كان ب د ب س متساويين فالزاوية ب د س



تعدل الزاوية ب س د (ق ه ك ا)
وقد تبرهن ان ب د س اكبر من
ب س د وذلك محال . وهكذا اذا
وقع راس احد المثلثين بجانب الاخر
فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة

وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان الى طرفها الاخر متساويان ايضاً

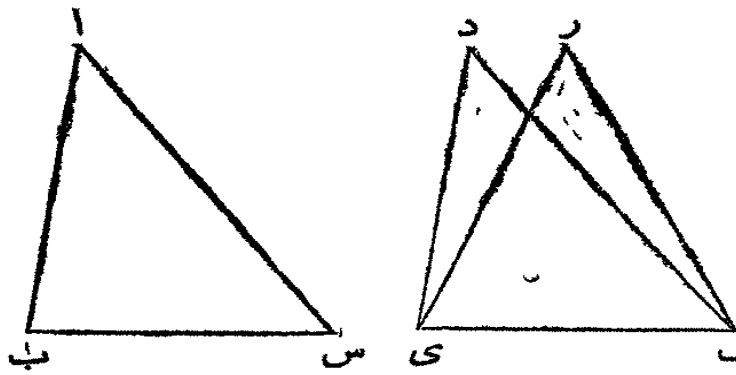


القضية الثامنة . ن

اذا عدل ضلعاً مثلثٍ ضلعي مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين
ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعي الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي
الآخر

ليكن ا ب س د ي ف مثلثين والضلعان ا ب اس يعدلان د ي د ف كل
واحد يعدل نظيره . والقاعدة ب س تعدل القاعدة س ي فالزاوية ب اس تعدل
الزاوية س د ف

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث د ي ف حتى تقع النقطة ب على النقطة س
والخط ب س على الخط س ي ف فالنقطة س تقع على النقطة ف لان الخط ب س يعدل

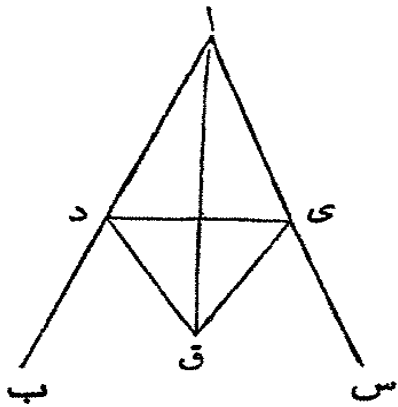


ي ف واذا ذاك فالخط ب ا
يقع على الخط ي د والخط
اس يقع على د ف والـ
فلنفرض وقوعها على ي ر
ر ف فعند ذلك يكون
على قاعدة واحدة وعلى ف

جانباً واحدٍ منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان في طرفها الاخر متساويان ايضاً وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١)
فاذا طبق ب س على ي ف فالخطان ب ا س يطبقان على ي د د ف والزاوية
ب ا س تطبق على الزاوية ي د ف وتعد لها (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

النضية التاسعة .ع

علينا ان ننصف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان تقسمها الى
قسمين متساويين



ليكن ب ا س الزاوية المفروض ان نصفها
عين آية نقطة شئت في الخط ا ب ك النقطة د
ومن اس اطول خطين اقطع جزءا لـ ع حتى
يعدل ا د اقصرها (ق ٢ ك ١) ارسم الخط د ي
وان عليه مثلثاً متساوي الاضلاع د ق ع
(ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصف الزاوية
ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ي والخط ا ق

مشارك بين المثلثين د ا ق ي ا ق فالضلعان د ا ا ق يعدلان الضلعين ي ا ا ق
كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ي فالزاوية د ا ق تعدل
الزاوية ي ا ق (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك
ما كان علينا ان نعلمه

تعليقة . على هذه الكيفية تنصّف كلا النصفين ذاق ي ا ق وعلى هذا السق
يقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهم جزءاً

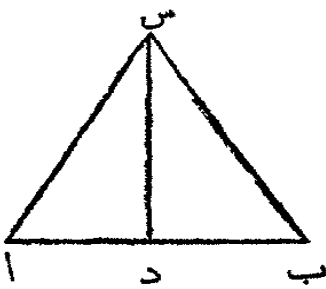
القضية العاشرة . ع

علينا ان ننصّف خطاً مستقيماً محدوداً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين

متساويين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان

ننصفه



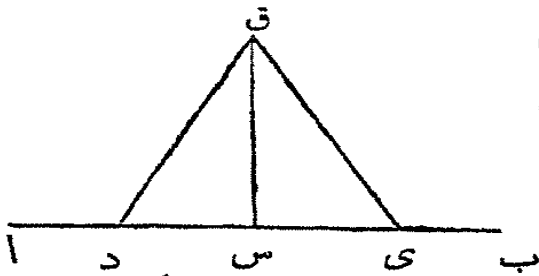
ارسم على الخط ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا س ب
(ق ١ ك ١) ونصّف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د
(ق ٢ ك ١) فالخط ا ب قد انصف في النقطة د

فلأنّ الخطّ ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د
ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د
تعدل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) فقد
انصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطاً

مستقيماً يُجَدِّث مع الاول زاويتين قائمتين



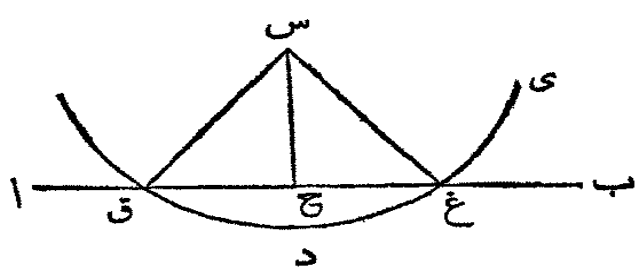
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض و
النقطة المفروضة فيه . فعلياً ان نرسم من
النقطة س خطاً مستقيماً يُجَدِّث مع ا ب
قائمتين

عَيِّنْ اَيَّةَ نِقْطَةٍ شِئْتَ فِي ا س كَالنِقْطَةِ د مِثْلاً وَمِنْ س ب اِقْطَعْ جِزْأَ س ي حَتَّى
يَعْدِلَ س د (ق ٢ ك ١) وَعَلَى د ي اِبْنِ مِثْلَتَا مِثْلاوِي الْاَضْلَاعِ (ق ١ ك ١) د ق ي

ثم ارسم الخط ق س فهو يحدّث مع ا ب قائمتين
 فلان د س يعدل ي س والخط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق
 ي س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ي س س ق كل واحد يعدل
 نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ي ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ي س ق
 (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. واذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين
 المتواليتين متساويتين فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧) فكل واحدة من د س ق
 ي س ق هي قائمة. فقد رُسم من النقطة المفروضة س خط ق س وهو يحدّث مع ا ب
 قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خط مستقيم مفروض غير محدود
 وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك الخط



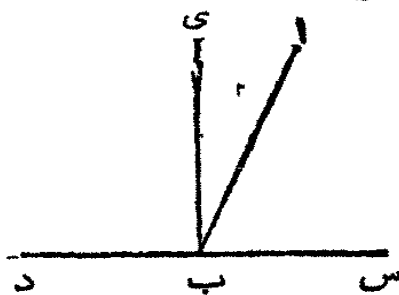
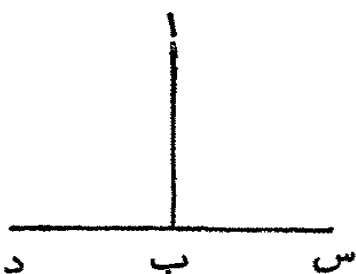
ليكن ا ب خطاً مستقيماً
 يمكن اخراجه الى جهتيه الى غير
 نهاية. وليكن س نقطة خارجة
 فعلياً ان نرسم من س خطاً
 عمودياً على ا ب

عَيِّن اية نقطة شئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزاً
 وس د بعداً وارسم الدائرة ي غ ق (ثلاثة المكات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ
 وق. نصف ق غ في ح (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ح فهو عمودي على ا ب. ارسم
 س ق س غ ولان ق ح يعدل ح غ والخط س ح مشترك بين المثلثين ق ح س
 غ ح س فالضلعان ق ح س يعدلان الضلعين غ ح س كل واحد يعدل
 نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١) فالزاوية ق ح س تعدل
 الزاوية غ ح س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. فالخط س ح عمودي على ا ب (حد ٧)
 وقد رُسم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة عشرة . ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم اب على الخط المستقيم دس حتى تحدث الزاويتان اب د اب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين



فاذا كان اب د اب س متساويتين فهما قائمتان (حد ٧) والافمن النقطة ب ا رسم الخط ب بي

عمودياً على دس (ق ١١ ك ١) فالزاويتان ي ب د ي ب س قائمتان والزاوية س ب ي تعدل س ب ا مع اب ي اضعف الى كل واحدة منها الزاوية ي ب د فالزاويتان س ب ي ي ب د تعدلان الثلاث زوايا س ب ا اب ي ي ب د (اولية ٢) والزاوية دب ا تعدل دب ي مع ي ب ا اضعف الى كل واحدة منها اب س فالزاويتان دب ا اب س تعدلان الثلاث دب ي ي ب ا اب س وقد تبرهن ان دب ي س ب ي تعدل هذه الثلاث زوايا ايضاً. والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض (اولية ١) اي الزاويتان س ب ي دب ي تعدلان الزاويتين دب ا اب س ولكن س ب ي ي ب د هما قائمتان فالزاويتان دب ا اب س تعدلان قائمتين

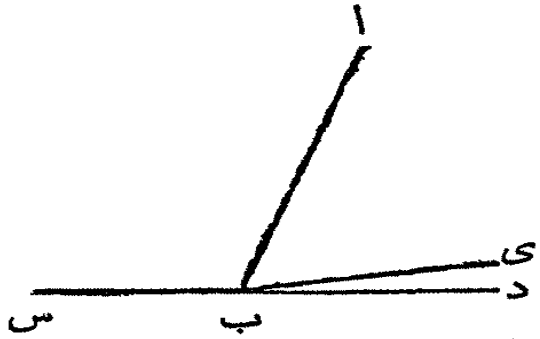
فرع . مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من دس يعدل قائمتين لانه يعدل مجتمع المتواليتين دب ا اب س

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خط آخر مستقيم عن

جانبيه واحدا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة واحدة كأنها خط واحد

ليقع خطان س ب ب د على النقطة ب من الخط ا ب من جانبيه وليحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطان س ب ب د على استقامة واحدة كأنها خط واحد

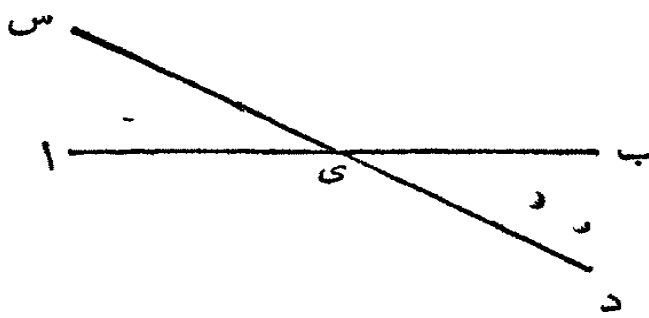


والا فارسم ب ي حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خط اخر مستقيم س ي على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ي تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١)

ولكن قد فرض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ي تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ي تعدل الباقية ا ب د (اولية ٢) اي الجزء يعدل الكل وذلك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ي على استقامة واحدة. وهكذا في كل خط غير د فالخطان س ب ب د الحدثان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية الخامسة عشرة. ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية



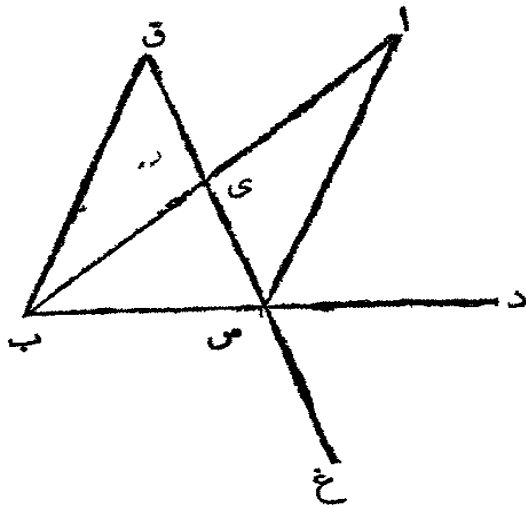
ليكن ا ب خطا مستقيما وليقطعه خط اخر س د في النقطة ي فالزاوية س ي ا تعدل ب ي د والزاوية س ي ب تعدل ا ي د لان الزاويتين س ي ا ا ي د

المحادثتين من وقوع ا ي على س د تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) و ا ي د د ي ب المحادثتان من وقوع د ي على ا ب ايضا تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان

س ي ا اى د تعدلان اى د دى ب اطرح المشتركة اى د فالباقية س ي ا تعدل
 الباقية دى ب (اولية ٢) وهكذا ايضاً يبرهن ان س ي ب تعدل اى د
 فرع اول. يتضح من هذه القضية ان مجتمع جميع الزوايا الحادثة من تقاطع
 خطين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة
 فرع ثان. مجتمع الزوايا الحادثة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة يعدل
 اربع زوايا قائمة

القضية السادسة عشرة. ن

اذا أُخْرِجَ ضَلْعٌ مِنْ مِثْلٍ فَالزَاوِيَةُ الْخَارِجَةُ الْحَادِثَةُ مِنْ ذَلِكَ هِيَ اكْبَرُ
 مِنْ احْدَى الدَّاخِلِيَيْنِ الْمُتَقَابِلَتَيْنِ

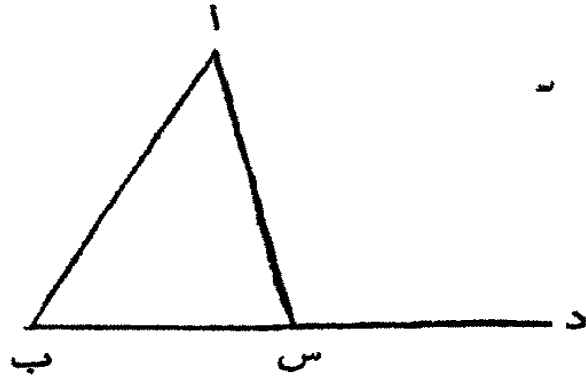


ليكن ق ب س مثلثاً وليخرج الضلع
 ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي
 اكبر من احدي الداخلتين المتقابلتين
 س ب ق ب ق س
 نصّف ق س في ي (ق ١٠ ك ١)
 ارسم ب ي واخرجه الى ا واجعل ي ا
 حتى يعدل ب ي (ق ٢ ك ١) ارسم اس
 واخرج ق س الى غ

فَلأَنَّ ق ي يعدل ي س و ب ي يعدل ي ا فالخطان ق ي ي ب يعدلان
 اى ي س كل واحد يعدل نظيرة. والزاوية ق ي ب تعدل اى س (ق ١٥ ك ١)
 فالقاعدة ق ب تعدل القاعدة اس (ق ٤ ك ١) والمثلث ق ي ب يعدل المثلث
 اى س ونقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر. يعني التي تقابلها
 الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ق ي تعدل الزاوية ي س ا والزاوية ي س د او
 ق س د هي اكبر من ي س ا فهي ايضاً اكبر من ب ق ي او ب ق س وعلى هذا
 النسق اذا نُصِّفَ ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ او ق س د (ق ١٥ ك ١)
 هي اكبر من ق ب س

القضية السابعة عشرة. ن

زاويتان من مثلث هما معاً اصغر من قائمتين



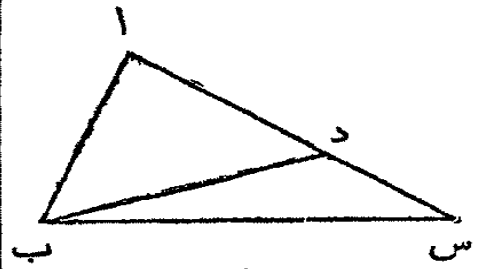
ليكن اب س مثلثا فزاويتان منه
معاً اصغر من قائمتين

اخرج ب س الى د فالزاوية
الخارجة اس د هي اكبر من الداخلة
اب س (ق ١٦ ك ١) اضع الى كل
واحدة منهما اس ب فالزاويتان اس د

اس ب معاً اكبر من اب س اس ب معاً ولكن اس د اس ب معاً تعدلان
قائمتين (ق ١٣ ك ١) واذا كانا زاويتان اب س اس ب معاً اصغر من قائمتين.
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان اب س اس ب معاً و اب س اب س معاً اصغر
من قائمتين

القضية الثامنة عشرة. ن

الضلع الاطول من كل مثلث تقابله الزاوية الكبرى

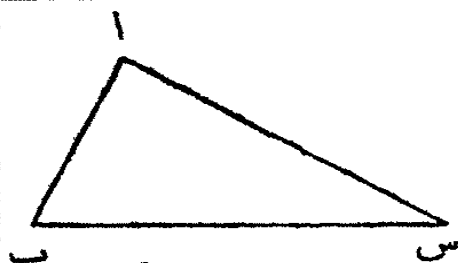


ليكن اب س مثلثا وليكن الضلع اس اطول
من الضلع اب فتكون الزاوية اب س اكبر
من الزاوية ب س ا

من اس اقطع اد حتى يعدل اب (ق ١٦ ك ١) وارسم ب د ففي المثلث ب د س الزاوية الخارجة اد ب هي اكبر من الداخلة
د س ب ولكن اد ب تعدل اب (ق ١٥ ك ١) فالزاوية اب د ايضا اكبر من
د س ب وبالاخرى اب س اكبر من د س اي اب س ب

القضية التاسعة عشرة. ن

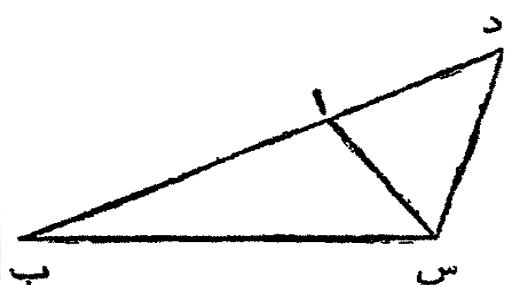
الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن ا ب س مثلثا ولتكن الزاوية ا ب س
أكبر من ا س ب فيكون الضلع ا س اطول من
ا ب والّا فالضلع ا س يعدل ا ب او هو اقصر
منه ولا يمكن ان يعدل ا ب لانه عند ذلك
كانت الزاويتان ا س ب ا ب س متساويتين (ق ٥ ك ١) وقد فُرض ان ا ب س أكبر
من ا س ب ولو كانت اقصر لكانت ا ب س اصغر من ا س ب (ق ١٨ ك ١)
فبالضرورة يكون ا س اطول من ا ب

القضية العشرون ن

ضلعان من مثلث هما معاً اطول من ضلعه الثالث



ليكن ا ب س مثلثا فضلعان منه معاً
اطول من ضلعه الثالث. اي الضلعان
ب ا ا س معاً اطول من ب س و ا ب
ب س معاً اطول من ا س و ب س س ا
معاً اطول من ا ب

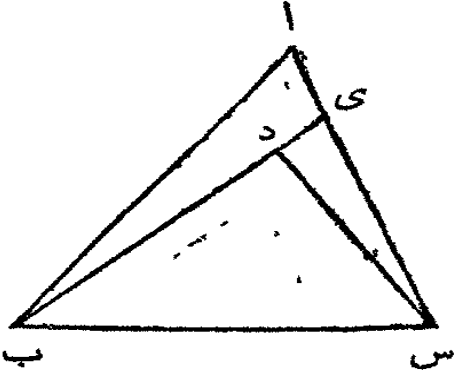
اخرج ب ا الى د واجعل ا د يعدل ا س (ق ٢ ك ١) وارسم د س فبما
ان ا د يعدل ا س فالزاوية ا د س تعدل ا س د (ق ٥ ك ١) و ب س د هي
أكبر من ا س د فهي ايضاً أكبر من ا د س فيكون الضلع ب د اطول من ب س
(ق ١٩ ك ١) ولكن ب د يعدل ب ا مع ا س فالضلعان ب ا ا س معاً اطول
من ب س وهكذا في كل ضلعين من المثلث

تعليقة. يبرهن ذلك بدون اخراج ضلع من المثلث لان ب س هو البعد
الاقرب بين النقطة ب والنقطة س فيكون ب س اقصر من ب ا ا س اي ب ا
ا س معاً اطول من ب س

القضية الحادية والعشرون ن

اذا رُسم من طرفي ضلع مثلث خطان مستقيمان الى نقطة داخل المثلث

فهما أقصر من ضلعي المثلث الآخرين ولكن يحيطان بزاوية أكبر من التي بين الآخرين

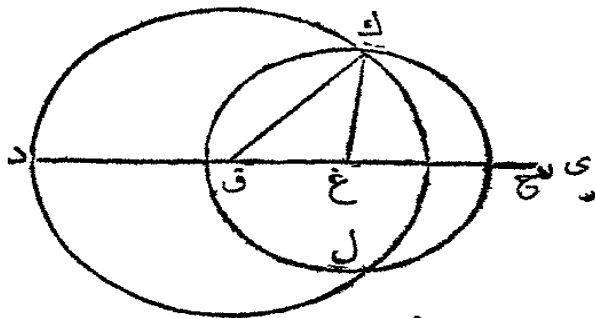


ليكن ا ب س مثلثاً، وليرسم من طرفي ب س خطان الى النقطة د داخل المثلث مثل ب د س د فهما أقصر من ب ا س ولكن الزاوية ب د س هي أكبر من ب ا س. اخرج ب د الى ي. فالضلعان ب ا ي معاً من المثلث ب ا ي هما أطول من ب ي (ق ٢٠ ك ١) اضعف

لها ي س فالضلعان ب ا س أطول من ب ي ي س وفي المثلث س ي د الضلعان س ي ي د هما معاً أطول من س د. اضعف لها د ب فالضلعان س ي ب معاً أطول من س د د ب. وقد تبرهن ان ب ا س هما معاً أطول من ب ي س فيبلاخرى ب ا س أطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من المثلث س د ي هي أكبر من الداخلة س ي د (ق ١٦ ك ١) ولذات هذا السبب س ي د هي أكبر من ي ا ب ا ب وس ا ب وقد تبرهن ان س د ب هي أكبر من س ي ب فيبلاخرى هي أكبر من س ا ب

القضية الثانية والعشرون ع

علينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة وكل اثنين منها معاً أطول من الثالث



ليكن ا ب وس الخطوط المستقيمة المفروضة كل اثنين منها معاً أطول من الثالث. فعلينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل هذه الخطوط الثلاثة خذ خطاً مستقيماً ينتهي في نقطة د

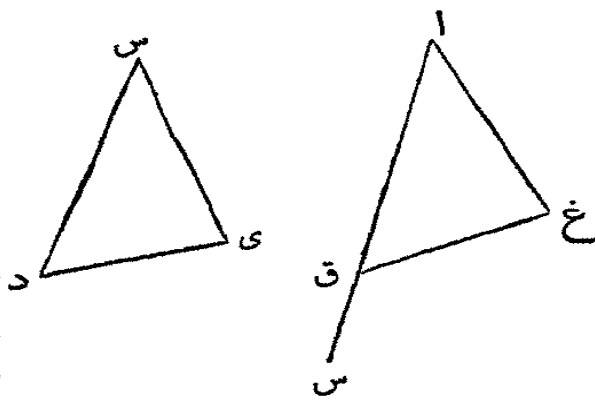
وغير محدود من جهة ي واقطع منه د ق حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) وق غ حتى

يعدل ب و غ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزاً وق د بعداً (ثلاثة الممكنات)
 وارسم دائرة د ك ل واجعل غ مركزاً و غ ح بعداً وارسم دائرة ك ح ل (ثلاثة الممكنات)
 ومن ك اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب
 و اضلاعه تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا و ب و س . فقد جعلنا ق غ حتى يعدل
 ب ومن حيث ان النقطة ق هي مركز الدائرة د ك ل فالخط ق ك يعدل ق د
 (حد ١١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضاً . ومن حيث ان النقطة
 غ هي مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حد ١١) ولكن غ ح يعدل
 س ولذلك غ ك يعدل س ايضاً فقد رُسم مثلث اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط
 مستقيمة مفروضة

تعليقة . لو كان احد الاضلاع اطول من مجتمع الآخرين لما تقاطعت الدائرتان
 والقضية صحيحة كل ما كان مجتمع ضلعين اطول من الثالث

القضية الثالثة والعشرون . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية
 مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة

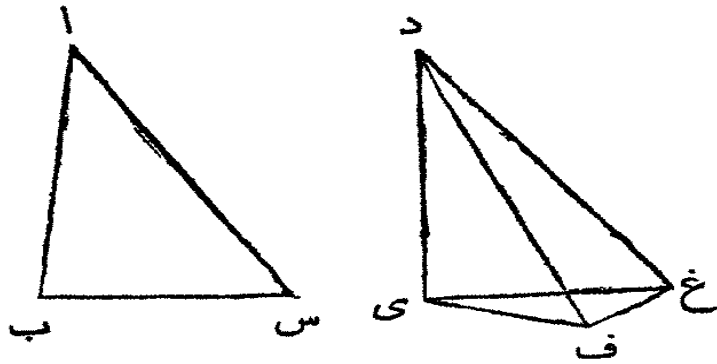


ليكن ا س الخط المستقيم
 المفروض و النقطة المفروضة منه
 و د س ي الزاوية البسيطة المفروضة
 فعلينا ان نرسم من النقطة ا زاوية
 بسيطة تعدل د س ي . في س د
 عين اية نقطة شئت مثل د . كذلك
 عين ي في س ي . ارسم د ي وارسم

المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث س ق د (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل
 س د والضلع ا غ يعدل س ي والضلع ق غ يعدل د ي فبما ان الضلعين ق ا
 ا غ يعدلان د س ي والقاعدة ق غ تعدل القاعدة د ي فالزاوية ق ا غ تعدل
 الزاوية د س ي (ق ٨ ك ١) وقد رُسمت من النقطة ا في الخط المفروض ا س

القضية الرابعة والعشرون

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الاخر وكانت
الزاوية المحاذية بين ضلعي الاول اكبر من المحاذية بين ضلعي الاخر
فان الذي له الزاوية الكبرى له ايضا القاعدة الطولى

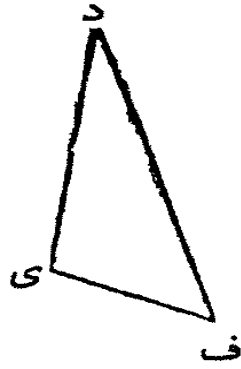
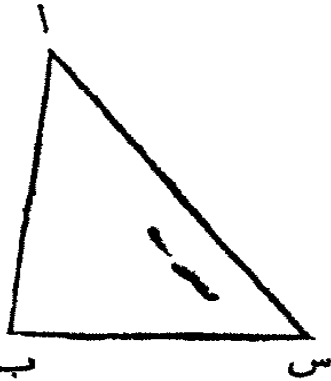


ليكن ا ب س دى ف
مثلثين ولنفرض ان الضلع
ا ب يعدل دى والضلع ا س
يعدل د ف ولكن الزاوية
ب ا س اكبر من دى د ف
فتكون القاعدة ب س اطول
من القاعدة دى ف

ليكن د ف اطول من دى ومن النقطة د ا رسم الزاوية دى د غ حتى تعدل
ب ا س (ق ٢٢ ك ١) واجعل د غ حتى يعدل ا س او د ف ا رسم دى غ ف غ
فمن حيث ان ا ب يعدل دى و ا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل
دى د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة دى غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل
د غ فالزاوية د ف غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من
دى غ ف فتكون د ف غ ايضا اكبر من دى غ ف فكم بالاحرى تكون دى غ ف اكبر
من دى غ ف وفي المثلث دى غ ف ف من حيث ان الزاوية دى غ ف هي اكبر من دى غ
ف فيكون الضلع دى غ اطول من دى ف (ق ١٩ ك ١) ولكن دى غ يعدل ب س
فالقاعدة ب س اطول من القاعدة دى ف

القضية الخامسة والعشرون

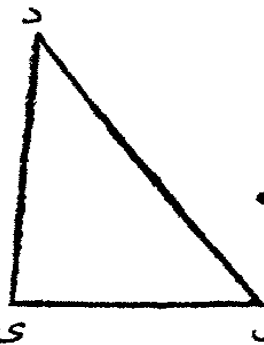
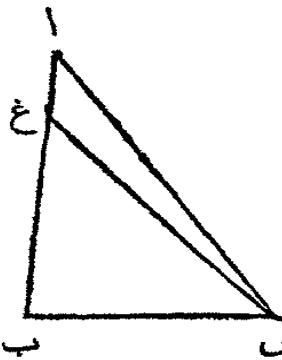
اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر ولكن كانت قاعدة احدها
اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب
اس عدلا ضلعين من الاخر د ي
د ف ولكن القاعدة ب س اطول من
القاعدة ي ف فتكون الزاوية ب ا س
اكبر من الزاوية ي د ف والافاما ان
تعدها او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ي د ف لانه عند ذلك كانت
القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ا) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن
ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ي ف (ق ٢٤
ك ا) وقد فرض ب س اكبر وقد تبهرن انها لا تعدها فبالضرورة تكون الزاوية
ب ا س اكبر من الزاوية ي د ف

القضية السادسة والعشرون

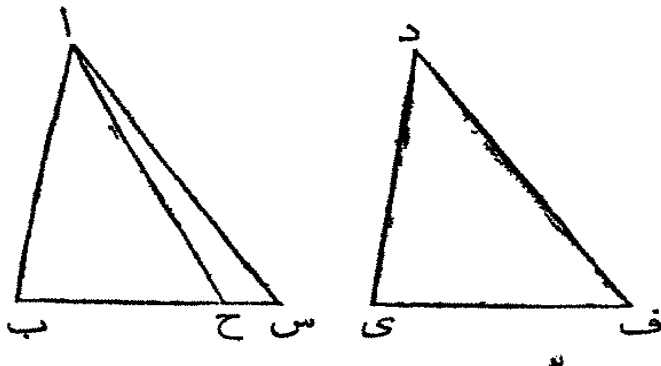
اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر اي كل واحدة
عدلت نظيرها. وضلع من الواحد عدل ضلعا من الآخر ان كانا
المتواليين للزاويا المتساوية او المتقابلين لها فالضلعان الاخران من
الواحد يعدلان الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل
الثالثة من الآخر



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
والزاوية ا ب س فلتعدل د ي ف
والزاوية ب س ا فلتعدل ي ف د
والضلع ب س فليعدل ي ف وهما
المتواليان للزاويا المتساوية
فالضلعان الاخران من الواحد ف
ا ب اس يعدلان الاخرين من الاخر د ي د ف والزاوية الثالثة من الواحد

ب ا س تعدل الثالثة من الاخرى د ف
 وان لم يكن ا ب و دى متساويين فيا لضرورة يكون احدهما اطول من الاخر
 فلنفرض اب الاطول ولنفصل منه ب غ حتى يعدل دى (ق ٢ ك ١) ولنرسم غ س
 فمن حيث ان غ ب يعدل دى وب س يعدل دى ف فالضلعان غ ب ب س
 يعدلان المتساويين دى ب س ف كل واحد يعدل نظيره والزاوية غ ب س تعدل
 دى ب س ف القاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث غ ب س يعدل
 المثلث دى ب س وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر كل واحدة
 تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية غ س ب تعدل دى ب س
 وقد فرض ان دى ب س تعدل ا س ب فالزاوية غ س ب ايضا تعدل ا س ب اي
 الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب و دى غير متساويين
 اي هما متساويان وب س يعدل دى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين
 دى ب س والزاوية ا ب س تعدل دى ب س ف القاعدة ا س تعدل القاعدة د ف
 (ق ٤ ك ١) والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى ب س

ثم لفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين
 يعني ان ا ب يعدل دى فعلى هذا المفروض ايضا لنا مساواة بقية الاضلاع يعني
 ا س يعدل د ف وب س يعدل دى ف والزاوية الثالثة من الواحد ب ا س



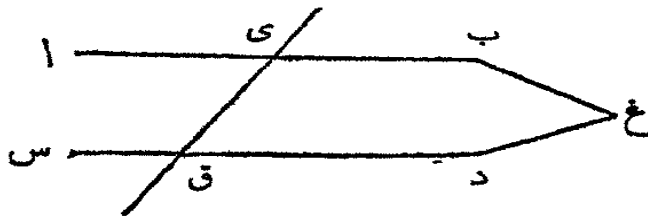
تعدل الثالثة من الاخرى د ف
 فان لم يكن ب س وي ف
 متساويين فليكن ب س اطولها.
 افصل منه ب ح حتى يعدل دى
 ف (ق ٢ ك ١) وارسم ا ح فمن
 حيث ان ب ح يعدل دى ف وا
 ب يعدل دى فالضلعان ا ب

ب ح يعدلان الضلعين دى ب س والزاوية ا ب ح تعدل دى ب س ف القاعدة ا ح
 تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث دى ب س وبقيت
 الزوايا ايضا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ح ا تعدل
 دى ب س و لكن دى ب س تعدل ب س ا فالزاوية ب س ا تعدل ب ح ا اي الزاوية

المحارجة اح ب تعدل الداخلة المتقابلة اس ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا
 يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين اي هما متساويان و اب يعدل دى
 فالضلعان اب ب س يعدلان دى وى ف والزاوية اب س تعدل دى ف
 فالقاعدة اس تعدل القاعدة د ف والزاوية الثالثة ب اس تعدل الثالثة دى ف

القضية السابعة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين
 المتبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان

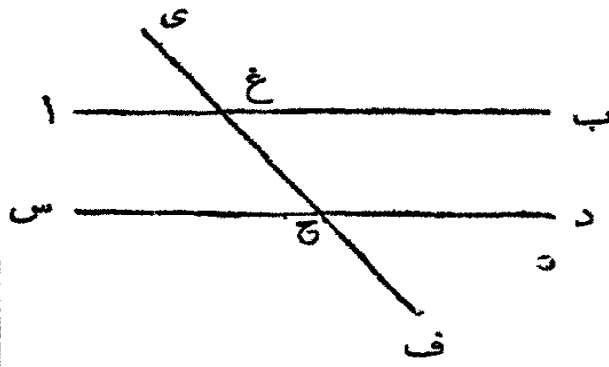


ليقع الخط المستقيم ق على
 الخطين المستقيمين اب س د
 وليجعل معها الزاويتين المتبادلتين
 اى قى ق د متساويتين فالخطان
 اب س د متوازيان

والا فيلتقيان اذا اخرجنا. فلنفرض النقطتهما في النقطة غ فيكون غى ق مثلثا
 وزاوية المحارجة اى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة دى ق غ (ق ١٦ ك ١) وقد
 فرض مساواتهما فلا تكون احدها اكبر من الاخرى فلا يلتقي اب وس د اذا اخرجنا
 الى جهة ب ود وهكذا يبرهن انهما لا يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة اوس فهما اذا
 متوازيان (حد ٣٠)

القضية الثامنة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين مستقيمين واحده زاوية خارجة
 تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منه او داخلتين على جانب
 واحد منه تعدلان معا قائمتين فالخطان متوازيان

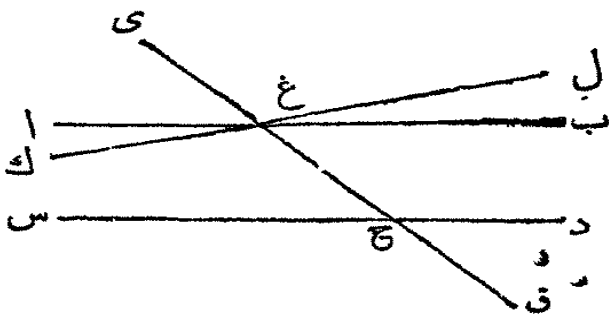


ليقع الخط المستقيم ي ف على
الخطين المستقيمين اب س د وليجعل
معها الزاوية الخارجة ي غ ب ا ف
تعديل الداخلة المتقابلة على ذلك
الجانب غ ح د او ليجعل الداخلتين
على جانب واحد ب غ ح د ان

تعديلاً قائمتين فالخطان اب س د متوازيان . فمن حيث ان ي غ ب تعديل غ ح د
وتعدل ايضاً ا غ ح (ق ١٥ ك ١) فالزاوية ا غ ح تعديل غ ح د وهما متبادلتان
ولذلك (ق ٢٧ ك ١) اب يوازي س د وايضاً من حيث ان ب غ ح غ ح د تعديلان
قائمتين حسب المفروض واغ ح ب غ ح تعديلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان
ب غ ح ا غ ح تعديلان ب غ ح غ ح د اطرح المشتركة ب غ ح فالباقية ا غ ح
تعديل الباقية غ ح د وهما متبادلتان . ولذلك اب وس د متوازيان
فرع . اذا ان كان خطان مستقيمان عموديين على خط مستقيم ثالث فهما متوازيان

القضية التاسعة والعشرون . ن

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فالزاويتان
المتبادلتان الحادتان متساويتان والزاوية الخارجة تعديل الداخلة
المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعديلان قائمتين



ليقع الخط المستقيم ي ق على
المتوازيين اب س د فالزاويتان
المتبادلتان ا غ ح غ ح د
متساويتان والخارجة ي غ ب
تعديل الداخلة المتقابلة على ذلك

الجانب غ ح د والداخلتان على جانب واحد ب غ ح غ ح د تعديلان قائمتين
فان لم تكن ا غ ح غ ح د متساويتين فليبرسم الخط ك غ حتى ان ك غ ح تعديل
غ ح د واخرج ك غ الى ل فالخط ك ل يوازي س د (ق ٢٧ ك ١) و اب ايضاً

بوازي س د فقد رسم خطان مستقيمان ماران بنقطة واحدة غ بوازيان س د من غير ان يتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان اغ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية ي غ ب تعدل اغ ح (ق ١٥ ك ١) ولذلك ي غ ب ايضاً تعدل غ ح د (اولية اولى) اضف اليهما ب غ ح فالزاويتان ي غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ي غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضاً

فرع اول. اذا جعل المخطان ك ل س د مع ي ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معاً اصغر من قائمتين فالخطان ك غ س ح يلتقيان على ذلك الجانب من ي ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والأفهما متوازيان. او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق ولكنهما غير متوازيين. والألكانت ك غ ح غ ح س معاً تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق والألكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح ح غ ل س ح غ ح غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٢ ك ١) واثنان منها اي ك غ ح غ ح س ها بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخران ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان ك ل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل و د فبالضرورة يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ك و س

فرع ثان. اذا كان ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضاً قائمة فالخط العمودي على احد خطين متوازيين هو عمودي على الاخر ايضاً

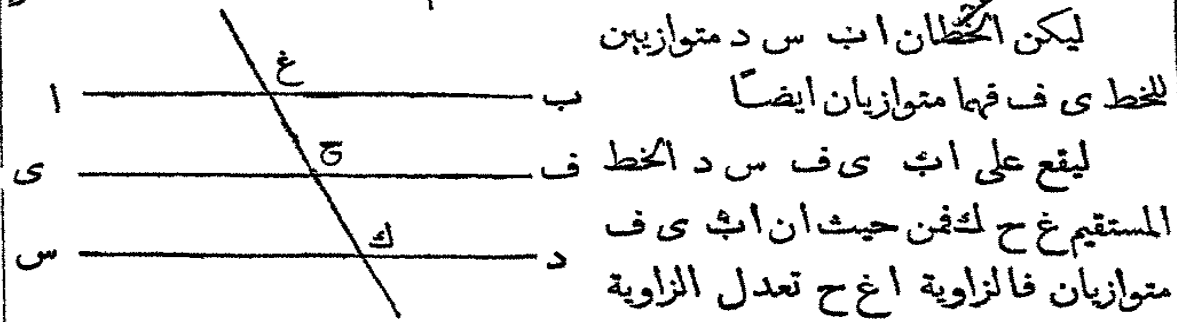
فرع ثالث. من حيث ان اغ ي = ب غ ح و د ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا المحاذة اغ ي ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية. وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ي غ ب اغ ح غ ح د س ح ق هي ايضاً متساوية. واذا اضيفت احدى المحاذات الى احدى المنفرجات فال مجموع يعدل قائمتين

تعليقة. الزوايا المذكورة لها اسماء مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د ها الداخلتان على جانب واحد وكذلك اغ ح غ ح س. والزاويتان اغ ح غ ح د ها الداخلتان المتبادلتان او المتبادلتان فقط. وكذلك ب غ ح غ ح س. والزاويتان ي غ ب غ ح د ها الخارجة والداخلة وكذلك ي غ ا غ ح س

والزاويتان ي غ ب س ح ق هما الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ي د ح ق

القضية الثلثون . ن

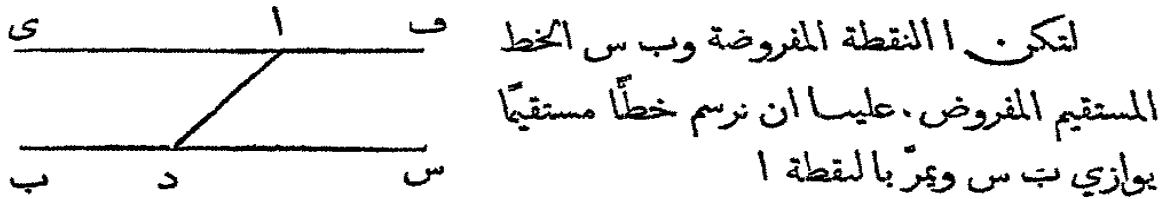
الخطوط المستقيمة المتوازية للخط واحد مستقيم هي متوازية بعضها لبعض



غ ح ف (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ي ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف
تعدل غ ك د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبرهن ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح
تعدل غ ك د ايضاً وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

القضية الحادية والثلاثون . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً يمر في نقطة مفروضة ويوازي خطاً مستقيماً
مفروضاً

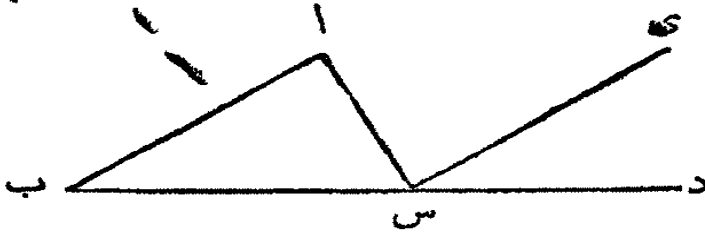


عين اية نقطة شئت في ب س كالنقطة د مثلاً . ارسم ا د وفي النقطة ا من الخط
ا د ارسم الزاوية د ا ي واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٢ ك ١) واخرج
ي الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يلاقي الخطين المستقيمين ي ف ب س ويجعل
معها الزاويتين المتبادلتين ي ا د ا د س متساويتين فالخط ي ف يوازي ب س
(ق ٢٧ ك ١) وقد رسم حتى يمر في النقطة ا المفروضة

القضية الثانية والثلاثون

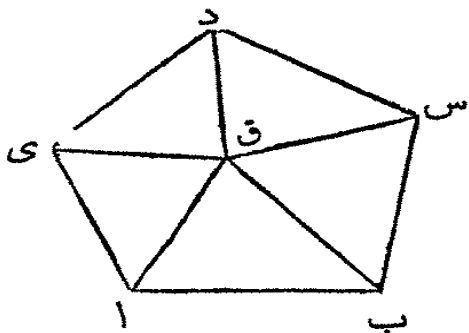
إذا أُخرج ضلعٌ من اضلاعٍ مثلثٍ فالزاوية الخارجة تعدل الداخلتين المتقابلتين. والزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين.



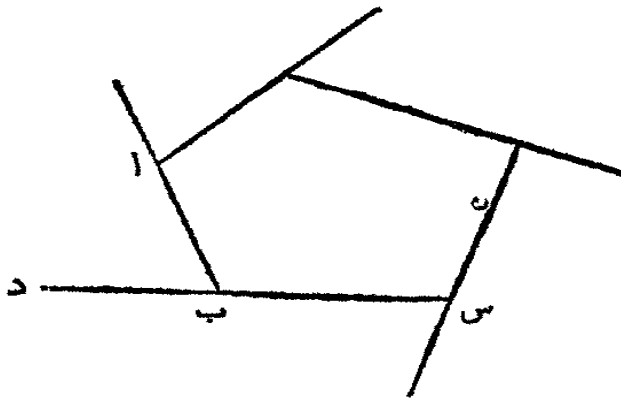
ليكن ا ب س مثلثاً
ويخرج منه الضلع ب س الى د
فالزاوية الخارجة اس د تعدل
الداخلتين المتقابلتين س ا ب

ا ب س والزوايا الثلاث الداخلة ا ب س ا س ا ب س ب س ا س ا ب معاً تعدل قائمتين من النقطة س ا رسم الخط المستقيم س ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١) فمن حيث ان الخط ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س ي فالزاويتان المتبادلتان ا س ي ب ا س متساويتان (ق ٢٠٩ ك ١) ومن حيث ان ب د يلاقي المتوازيين ا ب س س ي فالزاوية الخارجة س د تعدل الداخلة المتقابلة ا ب س وقد تبرهن ان ا س ي تعدل ب ا س فكل الخارجة ا س د تعدل الداخلتين المتقابلتين ب ا س ا ب س. اضع الى هذه الزوايا الزاوية ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب تعدلان الثلاث زوايا ا ب س ب ا س ا س ب ولكن ا س د ا س ب معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزوايا الثلاث ا ب س ب ا س ا س ب ايضاً تعدل قائمتين

فرع اول. جميع الزوايا الداخلة في كل شكل ذي اضلاع مستقيمة تعدل من الزوايا القائمة ما يماثل مضاعف عدد اضلاع الشكل الأربعة زوايا قائمة



لان كل شكل ذي اضلاع مستقيمة مثل ا ب س د ي ينقسم الى مثلثات تماثل عدد اضلاعه برسم خط مستقيم من كل زاوية الى نقطة داخلة مثل ق فحسب هذه القضية زوايا كل مثلث تعدل قائمتين فجميع زوايا جميع المثلثات يعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل ولكن الزوايا عدد ق تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٥ ك ١ فرع ٢) فزوايا الشكل تعدل قائمتين في عدد



اضلاع الشكل الأربعة زوايا قائمة
 فرع ثانٍ . مجتمع الزوايا
 الخارجة من كل شكل ذي
 اضلاع مستقيمة يعدل اربع
 زوايا قائمة . لان كل زاوية
 داخلية ا ب س مع الخارجة
 المتوالية ا ب د تعدل قائمتين
 (ق ١٢ ك ١) فجميع الداخلة

مع جميع الخارجة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في
 عدد اضلاع الشكل الأربعة قائمات حسب الفرع الاول فالخارجة تعدل اربع قائمات
 فرع ثالث . اذا فرضت زاويتان من زوايا مثلث او مجموعها فتستعلم الثالثة
 بطرح المجتمع من قائمتين

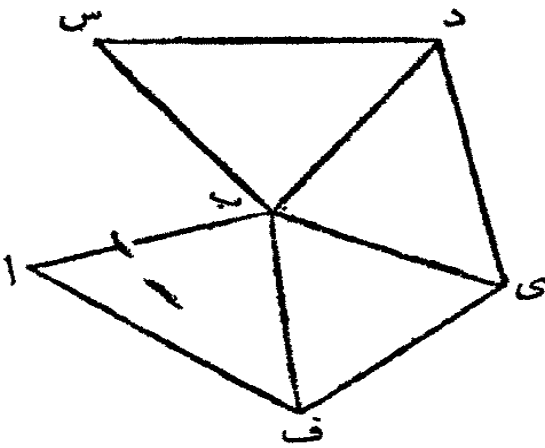
فرع رابع . اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من
 الواحد تعدل الثالثة من الاخر والمثلثان متساويا الزوايا

فرع خامس . لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة . لانه لو كانت له
 قائمتان لكانت الثالثة لاشيء . وبالاخرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة منفرجة
 فرع سادس . في كل مثلث قائم الزاوية مجتمع الحادتين يعدل قائمة
 فرع سابع . من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا ايضا
 (فرع ق ٥ ك ١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثلث قائمتين او ثلثي قائمة

فرع ثامن . مجتمع زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ - ٢ اي اربع
 قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحد الخامس

والعشرين والسادس والعشرين

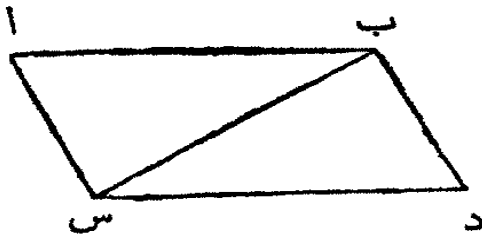
فرع تاسع . مجتمع زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ - ٢ اي ست
 قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خمس ست قائمات اي ٦ قائمة
 فرع عاشر . مجتمع زوايا ذي ستة اضلاع تعدل ٢ × (٦ - ٢) اي ثمان قائمات
 فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٨ قائمة



تعليقة . متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لها زوايا متداخلة مثل ا ب س فيجب ان تحسب كل متداخلة اكبر من قائمتين واذا رسم ب د ب ي ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لها ثنائي قائمات اي قائمتان في عدد الاضلاع الا اثنين

القضية الثالثة والثلاثون . ن

المخطان المستقيمان الموصولان بين اطراف خطين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن ا ب و س د خطين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافها بالخطين المستقيمين ا س ب د فهذان المخطان ايضاً متوازيان ومتساويان

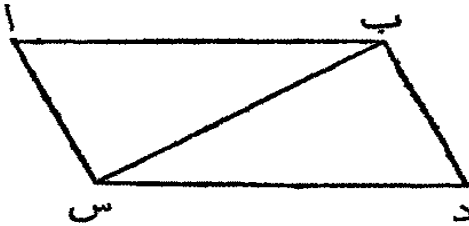
ارسم ب س فمن حيث ان ب س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ا ب يعدل س د والخط ب س مشترك بين المثلثين ا ب س ب س د فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالقاعدة ا س تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي ا س ب تعدل س ب د . ومن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين ا س ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين ا س ب ب س د متساويتين فالمخطان ا س ب د متوازيان (ق ٢٧ ك ١) وقد تبرهن انها متساويان فرع اول . في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية فرع ثان . كل ذي اربعة اضلاع ضلعاه المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

فرع ثالث. في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية تكون
الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

القضية الرابعة والثلاثون

في شكلٍ كمي اضلاعٍ متوازيةٍ المتقابلة والزوايا المتقابلة هي
متساوية. والقطر ينصفه اى يقسمه الى جزئين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطره فالاضلاع المتقابلة والزوايا
المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفه



فمن حيث ان الخط ب س يلاقي
الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان
المتبادلتان ا ب س ب س د متساويتان

(ق ٢٩ ك ١) وايضاً لان ب س يلاقي المتوازيين ا س ب د فالمتبادلتان ا س ب
س ب د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد
تعد لان زاويتين من الاخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران
من الواحد يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل
الثالثة من الاخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د و ا س يعدل ب د والزاوية
ب ا س تعدل س د ب و لان الزاوية ا ب س تعدل ب س د و ا س ب تعدل
س ب د فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبرهن ان ب ا س
تعدل ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي
متساوية وايضاً القطر ينصفه فلان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين
والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد انتصف
الشكل بالقطر

فرع اول. خطان متوازيان بين خطين متوازيين متساويان

فرع ثانٍ. خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابداً

فرع ثالث. مجتمع زاويتين متواليين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

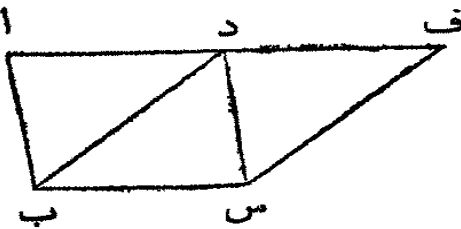
القضية الخامسة والثلاثون . ن

اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين

هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

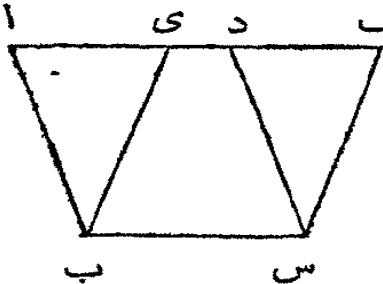
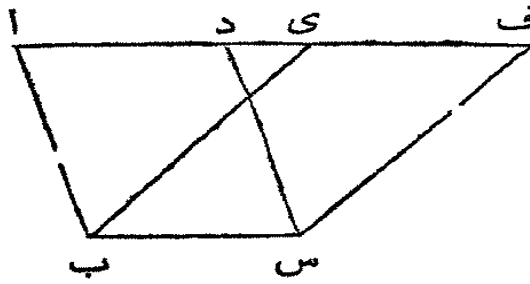
ليكن ا ب س د وى ب س ف شكلين متوازيين الاضلاع على قاعدة واحدة



ب س وبين خطين متوازيين ا ف ب س
فالشكل ا ب س د يعدل الشكل
ى ب س ف. اذا انتهى الضلعان ا د د ف
من الشكلين ا ب س د د ب س ف

المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامر واضح ان كل واحد من الشكلين
انما هو مضاعف المثلث ب د س (ق ٣٤ ك ١) واذا ذاك فهما متساويان وان لم يتوا
في نقطة واحدة الضلعان ا د ى ف من الشكلين ا ب س د ى ب س ف المتقابلان

للقاعدة ب س



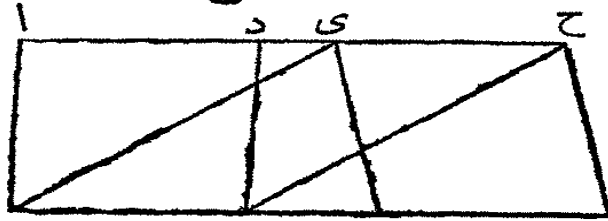
فتم من
حيث ان
ا ب س د
متوازيين
الاضلاع

فالضلع ا د يعدل ب س (ق ٣٤ ك ١) ولهذا السبب ايضا ى ف يعدل ب س
ولذلك ا د يعدل ى ف (اولية اولى) ودى مشترك فالكل او البقية ا ى يعدل
الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) و ا ب يعدل د س فالضلعان ى ا ا ب
يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيره والزوايا الخارجة ف د س
تعدل الداخلة المتقابلة ى ا ب (ق ٣٤ ك ١) فالقاعدة ى ب تعدل القاعدة ف س
والمثلث ى ا ب يعدل المثلث ف د س (ق ٤ ك ١) اطرح المثلث ف د س من
الشكل ا ب س ف واطرح منه ايضا ى ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية ٣) ا ى
الشكل ا ب س د يعدل الشكل ى ب س ف

القضية السادسة والثلاثون . ن

اشكال ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د وى ف غ ح شكليين متوازيين الاضلاع على قاعدتين



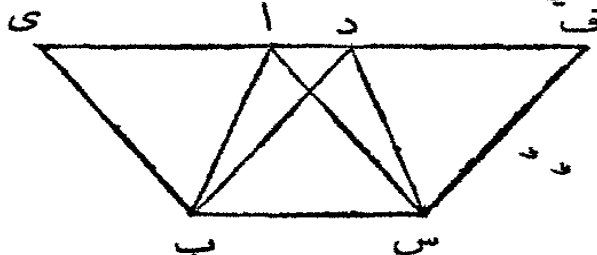
متساويتين ب س و ف غ وبين خطين متوازيين ا ح و ب غ فهما متساويان

ارسم بى وس ح فىن حيث ان ب س يعدل ف غ و ف غ يعدل حى ح (ق ٢٤ ك ١) فلذلك حى ح يعدل ب س ايضاً وهما متوازيان وقد اُوصل بينهما الى جهة واحدة بالخطين بى س ح والخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية ومتساوية (ق ٢٢ ك ١) فالخطان بى س ح متساويان متوازيان والشكل حى ب س ح متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل ا ب س د (ق ٢٥ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س ا ح ولهذا السبب ايضاً الشكل حى ف غ ح يعدل حى ب س ح فالشكلان ا ب س د وى ف غ ح متساويان

القضية السابعة والثلاثون . ن

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د ب س مثلثين على قاعدة واحدة ب س وبين خطين



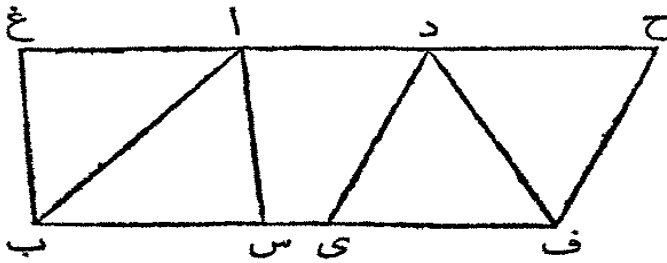
متوازيين ا د و ب س فهما متساويان اخرج ا د الى الجهتين الى ف وى ومن ب ارسم بى حتى يوازي اس (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم س ف حتى يوازي ب د فكل واحد من الشكلين ا ب س د ب س ف متوازيين الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين

متوازيين ا د و ب س فهما متساويان اخرج ا د الى الجهتين الى ف وى ومن ب ارسم بى حتى يوازي اس (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم س ف حتى يوازي ب د فكل واحد من الشكلين ا ب س د ب س ف متوازيين الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين

متوازيين $ي$ $ف$ و $ب$ $س$ والمثلث $ا ب س$ هو نصف الشكل $ا ي ب س$ لان
 القطر $ا ب$ ينصفه (ق ٢٤ ك ١) والمثلث $د ب س$ هو نصف الشكل $د ب س ف$
 لان القطر $د س$ ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧)
 فالمثلث $ا ب س$ يعدل المثلث $د ب س$

القضية الثامنة والثلاثون . ن

مثلثات على قواعد متساوية وبين خطين متساويين هي متساوية



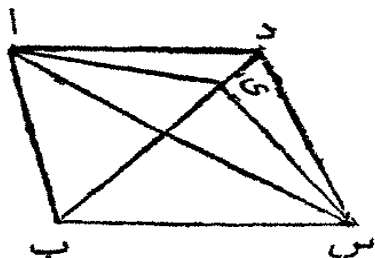
ليكن $ا ب س$ و $د ي ف$ مثلثين
 على قاعدتين متساويتين $ب س$
 $ي ف$ وبين خطين متوازيين $ا د$
 و $ب ف$ فهما متساويان

اخرج $ا د$ الى الجهتين الى $ح$ و $غ$ وارسم $ب غ$ حتى يوازي $ا س$ (ق ٢١ ك ١)
 ومن $ف$ ارسم $ف ح$ حتى يوازي $د ي$ فكل واحد من الشكلين $ا غ ب س$
 $د ي ف ح$ متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) لانها على قاعدتين
 متساويتين $ب س$ $ي ف$ وبين خطين متوازيين $غ ح$ $ب ف$ والمثلث $ا ب س$ هو
 نصف الشكل $ا غ ب س$ (ق ٢٤ ك ١) لان القطر $ا ب$ ينصفه و $د ي ف$ هو نصف
 الشكل $د ي ف ح$ (ق ٢١ ك ١) لان القطر $د ف$ ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي
 متساوية (اولية ٧) فالمثلث $ا ب س$ يعدل المثلث $د ي ف$

القضية التاسعة والثلاثون . ن

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين

خطين متوازيين



ليكن $ا ب س$ و $د ب س$ مثلثين متساويين
 على قاعدة واحدة $ب س$ وعلى جانب واحد منها
 فهما بين خطين متوازيين
 ارسم $ا د$ فالخط $ا د$ يوازي $ب س$ والا ف

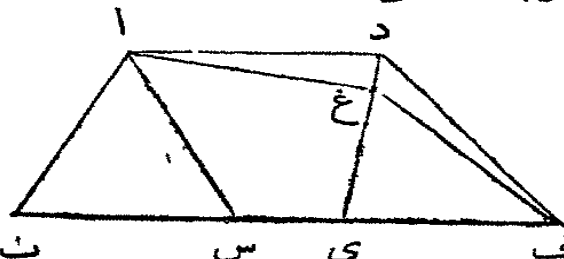
النقطة ا رسم اى حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٢٢ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س اى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س واي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س واى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الا الخط ا د فهو يوازي ب س



القضية الاربعون

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة

ليكن ا ب س دى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى



استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منها فهما بين خطين متوازيين

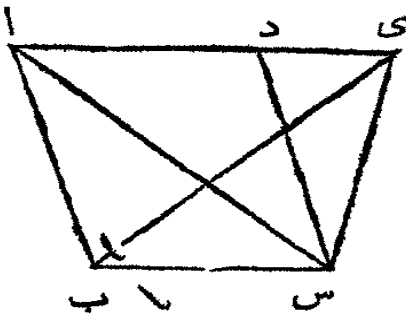
ارسم ا د فهو يوازي ب س والا ف ا ر س م ا غ حتى يوازي ب س ف (ق ٢١ ك ١) وارسم غ ف ف المثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٢٨ ك ١) لانها على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ب س اى ف ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف فلذلك المثلث دى ف يعدل المثلث غ ى ف اي الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب س ف وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب س



القضية الحادية والاربعون

اذا كان شكل ذو اضلاع متوازية ومثلث على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث

ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة



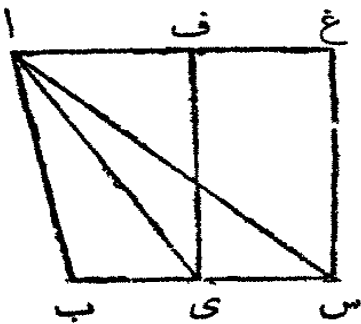
واحدة ب س وبين خطين متوازيين اى ب س
فالشكل اب س د مضاعف المثلث اى ب س
ارسم اس فالمثلث اب س يعدل المثلث
اى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة
ب س وبين خطين متوازيين اى ب س ولكن
الشكل اب س د هو مضاعف المثلث اب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر اس
ينصفه فالشكل اب س د هو مضاعف المثلث اى ب س ايضا

القضية الثانية والاربعون ع

علينا ان نرسم شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً

وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن اب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرسم



شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث

اب س وزاوية من زواياه تعدل

نصيف ب س في اى (ق ١٠ ك ١)

ارسم اى ومن النقطة اى في الخط المستقيم

اى س اجعل الزاوية س اى ف حتى تعدل

د (ق ٢٢ ك ١) ومن ا رسم اغ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم

س غ حتى يوازي اى ف فالشكل س اى ف غ متوازي الاضلاع فمن حيث ان

ب اى يعدل اى س فالمثلث اب اى يعدل المثلث اى س (ق ٢٨ ك ١) لانها

على قاعدتين متساويتين ب اى س وبين خطين متوازيين اغ ب س ولذلك

المثلث اب س هو مضاعف المثلث اى س والشكل ف اى س غ ايضا مضاعف

المثلث اى س (ق ٤١ ك ١) لانها على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل

ف اى س غ يعدل المثلث اب س وله الزاوية س اى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د

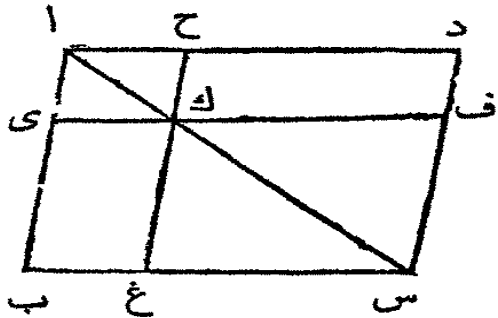
فرع. اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل ف اى س غ قائم الزوايا ويعدل

المثلث اب س فبنات هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً زاوية قائمة

القضية الثالثة والاربعون

الاجزاء الممتمة لاشكال متوازية الاضلاع واقعة على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكن راب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطرة وي ح وغ ف شكلين



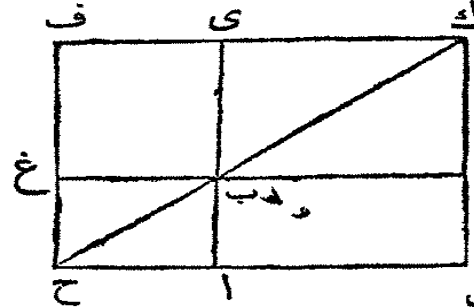
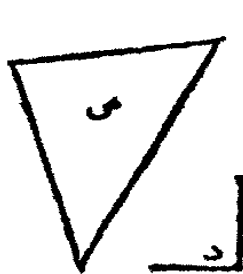
متوازي الاضلاع على جانبي القطر اس وليكن ب ك وك د الشكلين الاخرين الممتين لكل الشكل اب س د فالتم ب ك يعدل الممت ك د فمن حيث ان اب س د متوازي الاضلاع واس قطرة فالثلث اب س يعدل المثلث

ا د س (ق ٢٤ ك ١) ومن حيث ان اى ك ح متوازي الاضلاع فالثلث اى ك يعدل المثلث اح ك ولهذا السبب ايضاً المثلث ك غ س يعدل المثلث ك ف س فالثلث اى ك مع ك غ س يعدل المثلث اح ك مع ك ف س والكل اب س يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٢)

القضية الرابعة والاربعون

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن اب النخط المستقيم المفروض وس المثلث المفروض ود الزاوية المفروضة



علينا ان نرسم على النخط اب شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل س وزاوية من زواياه تعدل ارسم الشكل

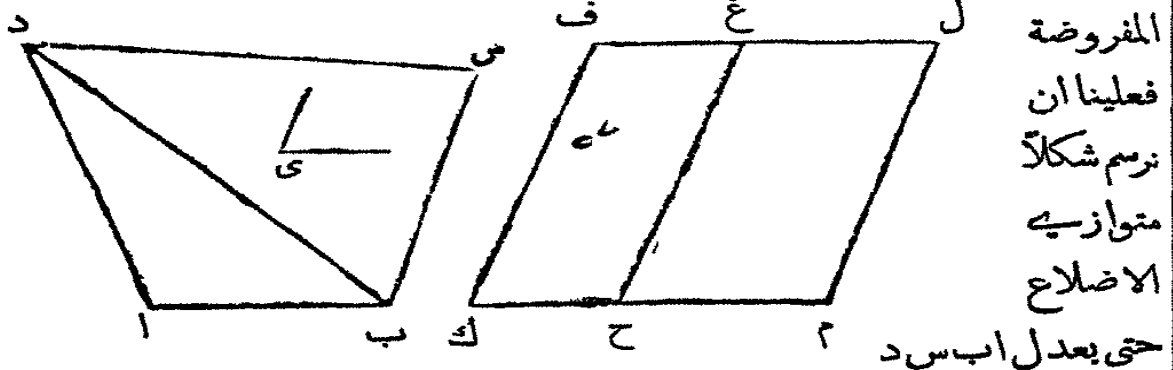
المتوازي الاضلاع ب ي ف غ حتى يعدل المثلث س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية ي ب غ منه تعدل الزاوية د واجعل ضلعة ي ب والنخط اب على استقامة

واحدة واخرج ف غ الى ح ومن الرسم ا ح حتى يوازي ب غ او ي ف (ق ٢١ ك ١)
 وارسم ح ب . فمن حيث ان الخط المستقيم ح ف يلاقي المتوازيين ح ا ف ي فالزاويتان
 ا ح ف ح ف ي معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح ف ي
 معاً اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ح ب و ف ي اذا أُخرج (ق ٢٩ ك ١)
 فرج (١) اخرجها حتى يلتقيا في ك ومن ك ارسم كل ح حتى يوازي ي ا او ف ح واخرج
 ح ا الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطره ح ك
 والشكلان ا غ و م ي هما متوازي الاضلاع على جانبي القطر ح ك . ول ب وب ف
 هما المثلثان فالتم ل ب يعدل المثلث ب ف (ق ٤٣ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث
 س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضاً والزاوية غ ب ي تعدل الزاوية ا ب م
 (ق ١٥ ك ١) ولكن ي ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل د ايضاً فالشكل
 ل ب قد رُسم على الخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية
 ا ب م منه تعدل الزاوية المفروضة د

فرج . على هذا الاسلوب يتحول مثلث الى شكل ذي زوايا قائمة مفروض طول
 ضلع من اضلاعه . لانه اذا كانت د قائمة و ا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل
 يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

القضية الخامسة والاربعون . ع

علينا ان نرسم شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلاً مفروضاً ذا
 اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة
 ليكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة



المفروضة
 فعلينا ان
 نرسم شكلاً
 متوازي
 الاضلاع

حتى يعدل ا ب س د

وزاوية من زواياه تعدل الزاوية ي

ارسم د ب ثم ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٢ ك ١) حتى يعدل
المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منه تعدل الزاوية ي وعلى الخط المستقيم
غ ح ارسم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعله يعدل المثلث
د ب س والزاوية غ ح م تعدل الزاوية ي

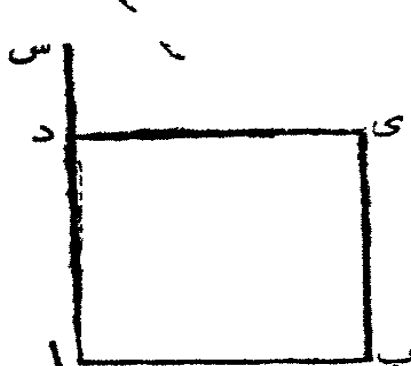
فمن حيث ان الزاوية ي تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح
تعدل غ ح م. اضف الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك
تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ ح م معا تعدلان قائمتين
(ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح
يجعل مع ك ح م الزاويتين المتواليتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م
هما على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقى
المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ ح غ ف متساويتان (ق ٢٩
ك ١) اضف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ ح غ ل تعدلان
الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ ح غ ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)
ولذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ ل هما على استقامة
واحدة. ومن حيث ان ك ف يوازي ح غ و ح غ يوازي ل م فالخط ك ف يوازي
الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م يوازي ل ف فالشكل ك م ل ف متوازي
الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب س يعدل الشكل
غ م فالكل ا ب س د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رسم شكل متوازي الاضلاع
ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب س د والزاوية ف ك م منه تعدل
الزاوية المفروضة ي

فرع. على هذا الاسلوب يبني على خط مستقيم مفروض شكل متوازي الاضلاع
له زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة ا ب
يبني اولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د
(ق ٤٤ ك ١) وزاوية من زواياه تعدل الزاوية المفروضة

القضية السادسة والاربعون ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ab المخط المستقيم المفروض، علينا ان نرسم عليه مربعاً



من النقطة a ارسم المخط as عموداً على ab

(ق ١ ك ١) واقطع ad حتى يعدل ab (ق ٢ ك ١)

ومن d ارسم $دي$ حتى يوازي ab (ق ٢١ ك ١)

ومن b ارسم $بي$ حتى يوازي ad ، فالشكل

$ادي$ ب متوازي الاضلاع والمخط ab يعدل

$دي$ والمخط ad يعدل $بي$ (ق ٢٤ ك ١) ولكن

ab يعدل ad فالخطوط الاربعة ab $ادي$ $بي$ هي متساوية والشكل المتوازي

الاضلاع ab $بي$ $دو$ متساوي الاضلاع ايضاً وزواياه قائمة لان ad الذي يلاقي

المتوازيين $دي$ $اب$ يجعل الزاويتين $باد$ $ادي$ تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)

وقد جعلت $باد$ قائمة فتكون $ادي$ ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية

تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فالزاويتان $اب$ $بي$ $دها$

ايضاً قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهننا مساواة الاضلاع وقد رُسم على

المخط المفروض ab

فرغ. كل ذي متوازي الاضلاع له قائمة واحدة تكون جميع زواياه قائمات

القضية السابعة والاربعون ن

في كل مثلث ذي قائمة مربع الوتر يعدل مربعي الساقين

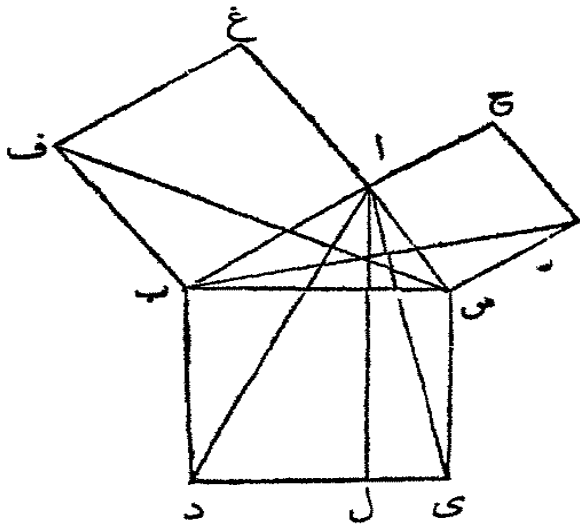
ليكن ab $س$ مثلثاً ذا قائمة $ب$ $اس$ فمربع الوتر $ب$ $س$ يعدل مربع $اب$ مع

مربع $اس$

ارسم على $ب$ $س$ المربع $ب$ $دي$ $س$ (ق ٤٦ ك ١) وعلى $ب$ المربع $ب$ $غ$ وعلى

$اس$ المربع $س$ $ح$ ومن $ال$ ارسم $ال$ حتى يوازي $ب$ $دا$ و $سي$ (ق ٢١ ك ١) ارسم $اد$

و $فس$ ، الزاوية $باس$ قائمة و $باغ$ كذلك (حد ٢٥) فالخط المستقيم $با$



يجعل مع المخطئين المستقيمين اس اغ
 الزاويتين المتوالتين با اس با غ
 تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة
 واحدة (رق ١٤ ك ١) ولهذا السبب ك
 الخطان با اح ايضاً على استقامة
 واحدة. والزاوية دب س تعدل الزاوية
 ف با لانهما قائمتان. اصف الى كل
 واحدة اب س فكل الزاوية دب ا تعدل

الكل ف ب س (اولية ٢) والضلعان اب ب د يعدلان الضلعين ف ب ب س كل
 واحد يعدل نظيره. والزاوية اب د تعدل الزاوية ف ب س فالقاعدة ا د تعدل
 القاعدة ف س (ق ٤ ك ١) والمثلث اب د يعدل المثلث ف ب س. والشكل المتوازي
 الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث اب د (ق ٤ ك ١) لانها على قاعدة واحدة
 ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف ب س
 لانها على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة
 اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا
 رسم ب ك واي يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب د س
 يعدل المربعين ب غ وح س

فرع اول. مربع ساق مثلث ذي قائمة يعدل مربع الوتر الا مربع الساق الاخر
 اي $اب^2 = ب س^2 + اس^2$

فرع ثان. اذا فرض $اب = اس$ اي اذا كان اب س متساوي الساقين فلنا
 $ب س^2 = اس^2 = اب^2 = اب س$ وب س $اب = ب س$

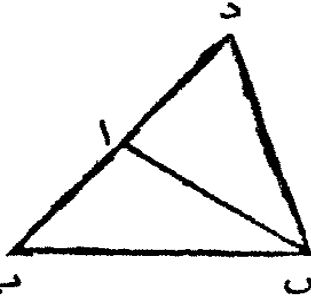
فرع ثالث. في مثلثين قائمي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين
 من الاخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الاخر



القضية الثامنة والاربعون . ن

اذا عدل مربع ضلع مثلث مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولنفرض ان مربع ب س يعدل مربعي ب ا ك ا س فتكون ب ا س قائمة



من الرسم ا د عمودا على ا س (ق ١١ ك ١) واجعل ا د يعدل ا ب وارسم د س

فمن حيث ان د ا يعدل ا ب فمربع د ا يعدل مربع ا ب اضف الى كل واحد منهما مربع ا س فمربع د ا

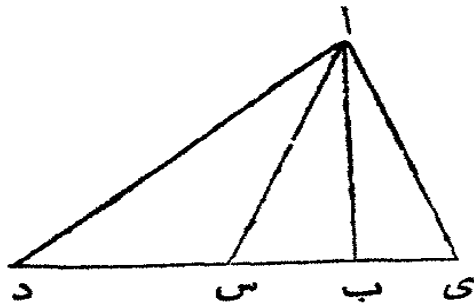
مع مربع ا س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع ب س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س . فمربع د س يعدل مربع ب س والضلع د س يعدل الضلع ب س ولان د ا يعدل ا ب و ا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س والقاعدة ب س تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية ب ا س (ق ٨ ك ١) و د ا س قائمة فتكون ب ا س قائمة ايضا

مضافات الى الكتاب الاول

قضية ا . ن

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطين مائلين واقعين على جانبي العمود خارجين من نقطة واحدة وفاصلين جزئين متساويين من الخط الذي يقعان عليه متساويان ومن كل خطين اخرين مائلين فاصلين جزئين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولها

ليكن اب اس ا د الى اخره المخطوط المرسومة من النقطة المفروضة الى



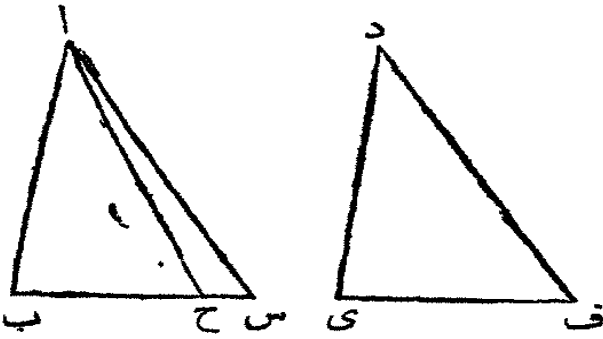
المخط المستقيم الغير المهدود دى وليكن اب عموداً فهو اقصر من اس واس اقصر من اد وهم جزيان لان الزاوية اب س قائمة فالزاوية اس ب حادة (ق ١٧ ك ١) واصغر من اب س والزاوية الصغرى من كل مثلث

قابليها الضلع الاقصر (ق ١٩ ك ١) فالضلع اب اقصر من الضلع اس. ثم اذا كان ب س وب س متساويين يكون المثلثان المائلان اس اى متساويين ايضاً. لان الزاوية اب س = اب س والضلع اب مشترك بين المثلثين اب س اب س فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) والضلع اس = اى. ولان الزاوية اس ب حادة فالزاوية اس د منفرجة لانها معانعد لان قائمتين (ق ١٢ ك ١) والزاوية اد س حادة لان اب د قائمة فالزاوية اس د هي اكبر من اد س فالضلع اد اطول من الضلع س (ق ١٩ ك ١)

فرع اول. العمود هو قياس حقيقي للبعد بين نقطة وخط لانه البعد الاقرب بينهما
 فرع ثان. كل نقطة في عمود على نقطة انتصاف خط هي على بعد واحد من طرفي الخط
 فرع ثالث. من نقطة واحدة لا يمكن رسم ثلاثة خطوط متساوية الى خط واحد
 والا لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

قضية ب. ن

اذا عدل وتر مثلث قائم الزاوية وساق من ساقيه وتر مثلث آخر قائم الزاوية وساقاً من ساقيه فالمثلثان متساويان
 لنفرض الوتر اس = د ف والضلع اب = دى فالمثلث القائم الزاوية اب س



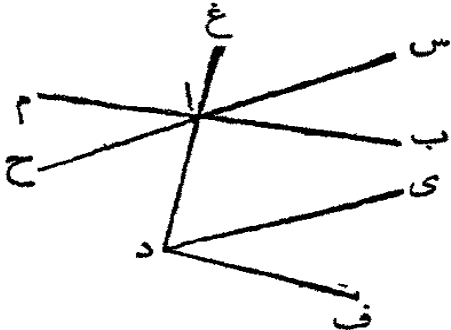
= القائم الزاوية دى ف. فلو قُرِصَتْ
مساواة الضلع الثالث منها لكانت
مساواة المثلثين ظاهرة. وان لم يكن
الضلعان الاخران متساويين فخذ
جزءاً من ب س مثل ب ح حتى
يعدل دى ف (ق ٢ ك ١) ارم اح

فالمثلث اب ح = دى ف (ق ٤ ك ١) لان اب = دى وب ح = دى ف والزاوية
اب ح = دى ف لانها قائمتان فلذلك اح = د ف ولكن قد قُرِص ان اس =
د ف فالنتيجة ان اح = اس ولكن حسب القضية الماضية الأبعد عن العمود هو
اطول من الاقرب اليه فلا يمكن ان اح = اس ولا يمكن ان ب س لا يعدل دى ف
فالمثلثان اب س دى ف متساويان

قضية ج. ن

اذا كان ضلعاً زاويةً موازيين ضلعي زاوية اخرى وكان انفراجهما الى
جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

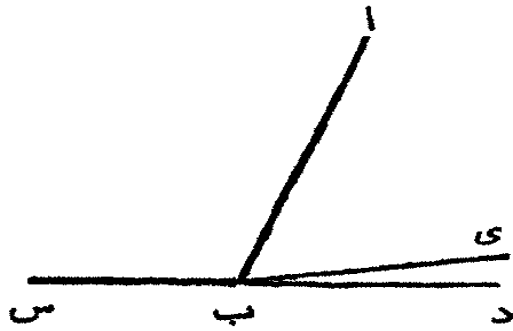
لنفرض ان اب يوازي د ف و اس يوازي دى فالزاوية س اب = دى ف
ارسم غ اد على رأسهما. فلان اب يوازي د ف
فالزاوية الخارجة غ اب = غ د ف (ق ٢٩ ك ١)
ولهذا السبب غ اس = غ دى فالبقية
س اب = البقية دى ف
فرغ. اذا اخرج ب الى م وس الى ح



فلنا ب اس = ح ام واذا ذاك فالزاوية ح ام = دى ف ايضا
تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخططين الى جهة واحدة لان في
الزاوية س ام س اب يوازي دى ف و ام يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين
وس ام وى د ف معاً تعدلان قائمتين

قضية د.ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



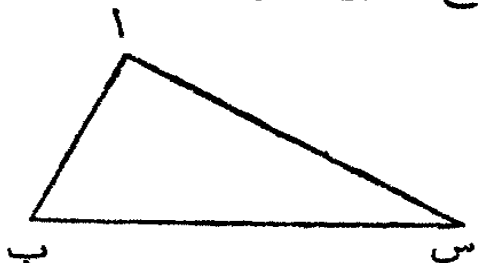
ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة منه مثل ب اجعل الزاوية س ب ا حتى تعدل واحدة من الزاويتين المفروضتين والزاوية ا ب ي حتى تعدل الاخرى فالباقية س ب د تعدل الثالثة لان هذه الثلاث زوايا تعدل قائمتين (فرع ق ١٢ ك ١)

قضية ه.ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضع من اضلاعه فعلينا ان نرسم المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان الموائيتين ضلع المفروض او تكون احدها متوالية له والاخرى متقابلة له. ففي الحالة الثانية استعمل الثالثة حسب القضية الماضية فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم الخط المستقيم ب س حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل الزاوية س ب ا تعدل احدى المتوائيتين وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعدل الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض



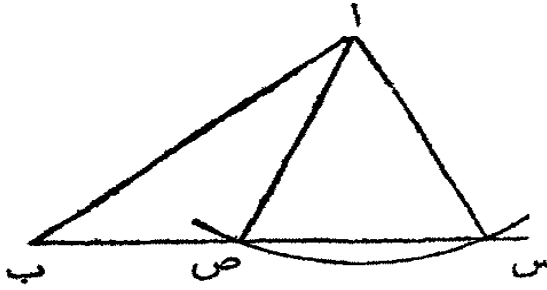
لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعدلان معاً قائمتين ولم تكونا زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

قضية و.ع

مفروض ضلعان من اضلاع مثلثٍ وزاويةً متقابلة لاحدها فعلينا ان

نرسم المثلث

لهذه العملية حالتان احدها متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة. اجعل الزاوية



ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل

ص ا يعدل الضلع الذي يوالي

الزاوية المفروضة فلو جعلت النقطة ا

مركزاً والضلع الاخر ا ب بعداً ورسم

قوسٍ لقطع ب س على جانبي ص فلا

يمكن ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث

ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرسم مثلثان لكن كان الوتران يقطعان ب س على

بعد واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادة والضلع المتقابل اطول من

المتوالي فالعمل فيها كما تقدم. اجعل ب س ا تعدل المفروضة و ا س يعدل

الضلع المتوالي ثم اجعل ا مركزاً والضلع الاخر طولاً فاذا كان طول ا ب فالقوس

يقطع س ب في ب. ا رسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة

حادة والضلع المتقابل اقصر من الاخر فاجعل س ب ا تعدل المفروضة واجعل

ب ا يعدل الضلع المفروض المتوالي ثم اجعل ا مركزاً و ا س بعداً فالقوس يقطع

ب س في س و ص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س وكل

واحد منها مستوفٍ شروط العمل

تعليقة. في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا

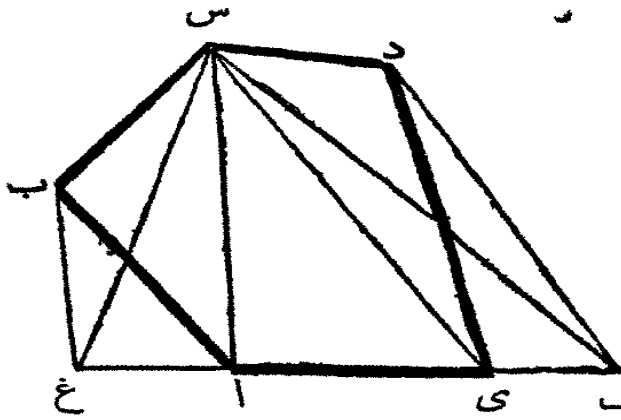
الى ب س لحدث مثلث قائم الزاوية. ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا

على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال

قضية ز.ع

علينا ان نجد مثلثا يعدل شكلا مفروضا اذا اضلاع مستقيمة

ليكن ا ب س دى الشكل المفروض . ارسم القطر س ي الذي يفصل من



الشكل المثلث س دى . ارسم د ف

حتى يوازي س ي واخرج اى الى ف

ثم ارسم س ف فالشكل ا ب س دى

يعدل الشكل ا ب س ف لان

المثلثين س دى س ف ي ها على

قاعدة واحدة س ي وبين خطين

متوازيين س ي د ف فهما متساويان

(ق ٢٧ ك ١) ثم ارسم القطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج ي الى غ وارسم

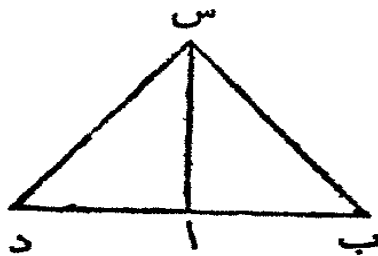
س غ فالشكل ا ب س دى قد تحول الى مثلث يعدله غ س ف

فرع . من حيث ان المثلث يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

فبا لضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

قضية ح.ع

علينا ان نستعلم ضلع مربع يعدل مجتمع مربعين



ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س

احدهما عموديه على الاخر . ثم اقطع ا ب حتى يعدل

ضلعاً من احد المربعين المفروضين واس الاخر . ارسم

ب س فلان ب ا س قائمة فربع ب س = مربع ب ا

مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١)

تعليقة . هكذا يرسم مربع يعدل مجتمع ابي مربعات فرضت وذلك بتحويل ثلثة

منها الى اثنين واثنين الى واحد وهلم جرا

قضية ط.ع

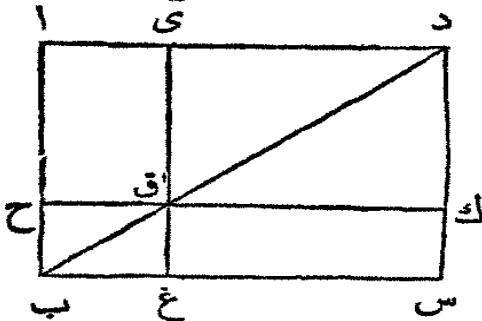
علينا ان نجد ضلع مربع يعدلُ فضلة مربعين مفروضين

ارسم كما في القضية السابقة اس ا د احدها عموداً على الاخر واجعل اس
يعدل ضلع اصغر المربعين ثم اجعل س مركزاً وضلع المربع الاخر بعداً وارسم قوساً
يقطع ا د في د فالربع المرسوم على ا د يعدل فضلة مربعي س د و اس لان د اس
قائمة و ا د' = س د' - اس (ق ٤٧ ك ١ فرع اول)

قضية ي.ع

مفروض شكل ذو زوايا قائمة وعلينا ان نرسم اخر مثله له ضلع
مفروض

ليكن اى ق ح الشكل المفروض. اخرج ضلعاً من اضلاعه مثل اح حتى يصير



ح ب على الطول المفروض. اخرج اى وارسم
ب ق واخرجه حتى يلاقي اى في د ثم اخرج
ى ق واجعل ق غ يعدل ح ب وارسم
ب غ س وح ق ك حتى يوازي ا د ومن د
ارسم د ك س حتى يوازي اب او ى غ

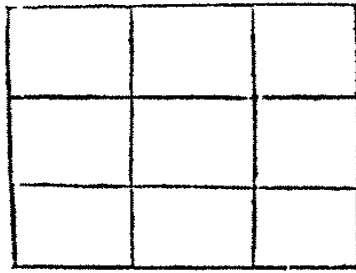
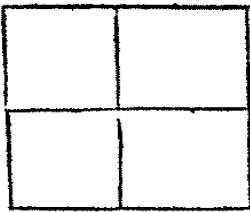
فالشكل غ ق ك س يعدل اح ق ى (ق ٤٢ ك ١) وله ق غ الضلع المفروض
فرع. شكل ذو اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله وله
ضلع مفروض

اصول الهندسة

الكتاب الثاني

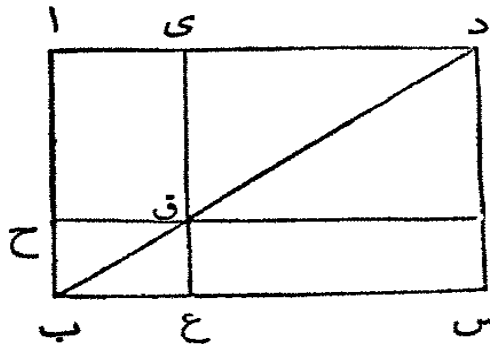
حدود

١ كل شكل متواري الاصلاح قائم الزوايا يُعَدُّ عنه بالاضلعين المحيطين باحدى قائماته فالشكل اس المتوازي الاصلاح القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا الذي يحيط به ا د و د س او ا د و ب وهكذا الى اخره ولاجل الاختصار يقال القائم الزوايا ا د في د س او ا د \times د س او ا د . د س حاصل خطين او مسطّهما في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منها



مع ما يواربها. وقد تستعمل هذه العبارة ايضاً في علم الحساب وعلم الجبر والمقابلة حيث يدل على حاصل كيتين غير متماثلتين. وادا كانتا متماثلتين فمسطّهما مربع اي

كمية في ذاتها. فربعات الاعداد ١ ٢ ٣ الى اخره هي ١ ٤ ٩ الى اخره والمربع المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته. والمرسوم على ثلثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخط ذاته

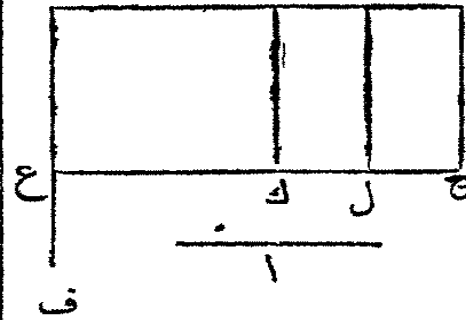


٢ شكل من الاشكال الواقعة على جابي القطر في كل شكل متواري الاصلاح مع المتين يسمى علم فالشكل ح ع مع المتين ا ق ق س هو علم الشكل اس وكذلك ك ي ك مع ا ق وق س. ولاجل الاختصار يسمى الاول العلم ا ع ك او ي ح س

القضية الاولى . ن

اذا فرض خطان مستقيمان وانقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم
 الزوايا مسطحا يعدل مجموع القائمات الزوايا مسطحات الخط الغير
 المقسوم في اقسام المقسوم

ليكن ب س خطاً مستقيماً وا خطاً اخر مستقيماً وليقسم ب س الى اقسام في د
 وى فالقائم الزوايا $a \times b$ س يعدل القائمات س ي د س ي د



الزوايا $a \times b$ د مع $a \times d$ ي مع $a \times y$ س
 من النقطة ب ا رسم الخط ب ف عموداً
 على ب س (ق ١١ ك ١) واقطع منه ب ع
 حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) ومن ع ا رسم ع ح
 حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن النقط

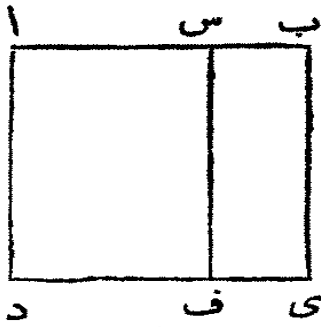
الثلاث د ي س ا رسم المخطوط د ك ي ل س ح حتى توازي ب غ فالاشكال
 ب ح ب ك د ل ي ح هي قائمات الزوايا وب ح = ب ك + د ل + ي ح

ولكن ب ح = ب ع = ب س = ا \times ب س لان ب ع = ا وب ك = ب غ
 \times ب د = ا \times ب د لان ب ع = ا ود ل = د ك \times د ي = ا \times د ي لان د ك =
 ب غ = ا (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضا ي ح = ا \times ي س فاذا $a \times b = س$
 $+ ا \times د ي + ا \times ي س$ اية القائم الزوايا او المسطح $a \times ب س$ يعدل مجموع
 القائمات الزوايا $a \times ب د + ا \times د ي + ا \times ي س$

تعليقة . خصائص اقسام المخطوط المرهنة في هذا الكتاب تستعلم ايضا بسهولة
 من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضية اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود
 فلما $a \times (ب + س + د) = ا ب + ا س + ا د$

القضية الثانية . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين والقائمات الزوايا مسطحا كل الخط في
 كروا د س س مية ، د ل م س ربع كل الخط



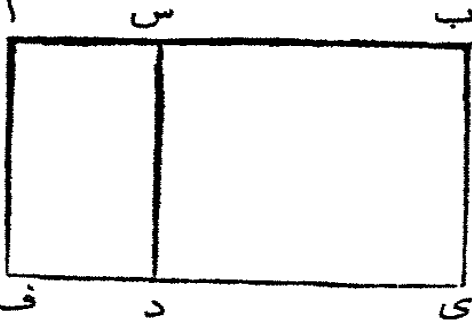
لينقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم
 الزوايا اب \times ب س مع القائم الزوايا اب \times اس يعدلان
 مربع اب اي اب \times ب س + اب \times اس = اب^٢
 ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) ومن
 س ارسم س ف حتى يوازي اداو ب ي (ق ٢١ ك ١)

فلنا ف + س ي = اي ولكن اف = اد \times اس = اب \times اس لان اد = اب
 والشكل س ي = ب ي \times ب س = اب^٢ = اب \times س واي = اب^٢ فاذا اب \times
 اس + اب \times ب س = اب^٢

تعليقة . وهكذا بالحبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وس ب = د فلنا ا =
 ب + د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا^٢ = اب + اد

القضية الثالثة . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في
 احد قسميه يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور
 يُقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم الزوايا اب \times ب س يعدل



القائم الزوايا اس \times ب س مع مربع ب س
 ارسم على ب س المربع س دي ب
 (ق ٤٦ ك ١) واخرج ي د الى ف ومن ا
 ارسم اف حتى يوازي س داو ب ي (ق ٢١
 ك ١) فالشكل اي = اد + س ي ولكن

اي = اب \times ب ي = اب \times ب س لان ب ي = ب س واد = اس \times س د =
 اس \times س ب وس ي = ب س فاذا اب \times ب س = اس \times س ب + ب س^٢
 تعليقة . وهكذا بالحبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وس ب = س فلنا
 ا = ب + س اضرب الجانبيين في س فلنا اس = س ب + س^٢

القضية الرابعة . ن

اذا اتقسم خط مستقيم الى قسمين فمربع الخط كله يعدل مربعي القسمين
مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فمربع اب يعدل مربع اس مع مربع
س ب مع مضاعف القائم الزوايا اس في س ب اي $اب^2 = اس^2 + س ب^2 + ٢ اس ب$

ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) وارسم ب د ومن س ارسم س غ

ف حتى يوازي اداوب ي (ق ٢١ ك ١) ومن غ ارسم
ح ك حتى يوازي اب اودي

فن حيث ان س ف يوازي ا د ويلاقيها ب د
فالزاوية الخارجة ب غ س تعدل الداخلة المتقابلة
اد ب (ق ٢٩ ك ١) ولكن اد ب = اب د (ق ٥

ك ١) لان ب ا = ا د لانها ضلعا مربع . فالزاوية س ع ب = س ب غ و ب س =
س غ (ق ٦ ك ١) ولكن س ب = غ ك (ق ٢٤ ك ١) و س غ = ب ك فالشكل
ب س غ ك متساوي الاضلاع وهو متساوي الزوايا ايضا لان س ب ك قائمة
فتكون بقية زوايا الشكل س غ ك ب قائمات (فرع ق ٤٦ ك ١) فهو مربع على
الضلع س ب وهكذا ايضا يبرهن ان ح ف مربع وهو على الضلع غ ح الذي
يعدل اس فالشكلان ح ف س ك هما مربعان اس س ب ولان المثلث اغ يعدل
المثلث غ ي (ق ٤٣ ك ١) واغ = اس \times س غ = اس \times س ب فلذلك ايضا غ ي
= اس \times س ب واغ + غ ي = اس \times س ب ولكن ح ف = اس \times س ب
= س ب فاذا ح ف + س ك + اغ + غ ي = اس \times س ب + اس \times س ب
ولكن ح ف + س ك + اغ + غ ي = الشكل اي او اب فاذا اب = اس \times س ب

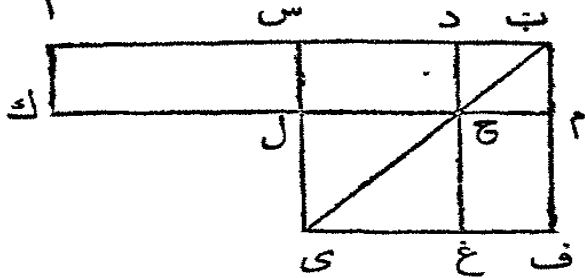
فرع . يتضح من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر
مربع هي ايضا مربعات

تعليقة . هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كمية ثنائية في الجبر فاذا فرض القسم
 ا و ب فلنا $(ا + ب)^2 = ا^2 + ٢ ا ب + ب^2$

القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فالقائم الزوايا مسطح القسمين الغير المتماثلين مع مربع القسم
 الواقع بين تقطبي الانقسام يعدل مربع نصف الخط

ليقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فالقائم



الزوايا ا د × د ب مع مربع س د يعدل
 مربع س ب اي ا د × د ب + س د = س ب^٢

ارسم على س ب المربع س ي ف ب

(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب ي ومن د ا رسم د ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازيه
 س ي ا و ب ف ومن ح ا رسم ك ل م حتى يوازي س ب ا و ي ف ومن ا ا رسم ا ك
 حتى يوازي س ل ا و ب م

فن حيث ان س ح = ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منهما د م لنا س م =
 د ف ولكن ا ل = س م (ق ٢٦ ك ١) فاذا ا ل = د ف . اضيف الى كل واحد منهما
 س ح فلنا ا ح = العلم س م غ . واح = ا د × د ح = ا د × د ب لان د ح = د ب
 (فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ = ا د × د ب . اضيف الى كل واحد منهما ل غ =
 س د فالعلم س م غ + ل غ = ا د × د ب + س د^٢ ولكن س م غ + ل غ = ب س^٢
 فاذا ا د × د ب + س د = ب س^٢

فرغ . يتضح من هذه القضية ان فضلة مربعي خطين غير متماثلين ا س د
 يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمعا في فضلتها اي ان ا س^٢ - س د = (ا س + س د)
 < (ا س - س د)

تعليقة . في هذه القضية لنفرض ا س = ا و س د = ب فلنا ا د = ا + ب و د ب

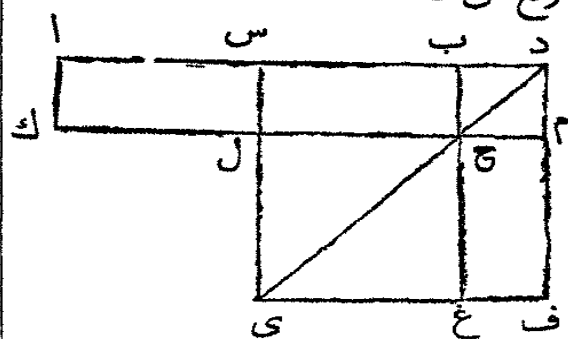
$a - b$ وبالجبر $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ ب^٢ ا^٢ ب^٢ مسطح مجتمع كميتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعهما



القضية السادسة . ن

اذا تنصّف خطّ مستقيم ثم أخرج على استقامته الى نقطة ما فالقائم الزوايا مسطح الخط كله بعد اخراجه في الجزء الذي قد زيد عليه مع مربع نصف الخط الذي قد تنصف يعدل مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيد

لنقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س ثم لنخرج الى د فالقائم الزوايا ا د \times د ب مع مربع س ب يعدل مربع س د .



ارسم على س د المربع س ي ف د (ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر د ي ومن ب ارسم ب ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازي د ف او س ي ومن ح ارسم ك ل م حتى يوازي ا د او ي ف ومن

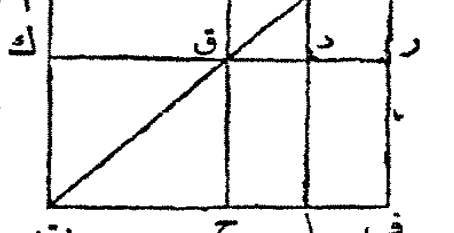
ا ارسم ا ك حتى يوازي س ل او د م . فمن حيث ان ا س = س ب فالقائم الزوايا ا ل = القائم الزوايا س ح (ق ٢٦ ك ١) ولكن س ح = ح ف (ق ٤٢ ك ١) فاذا ا ل = ح ف . أضف الى كل واحد منها س م فالكل ا م = العلم س م غ و ا م = ا د \times د م = ا د \times د ب لان د م = د ب فالعلم س م غ = القائم الزوايا ا د \times د ب وس م غ + ل غ = ا د \times د ب + س ب + س ب + ل غ = س ف = س د فاذا ا د \times د ب + س ب = س ب + س د

تعليقة . وهكذا بالجبر . لنفرض ا ب = ١٢ و ب د = ١٣ فلنا ا د = ١٢ + ١٣ وس د = ا + ب وب الضرب ب \times (١٢ + ب) = ا ب + ١٢ ب + ب^٢ . أضف الى الجانبيين ا فلنا ب \times (١٢ + ب) + ا = ا + (١٢ + ب) \times ب + ا ب + ١٢ ب + ب^٢ = ا + (١٢ + ب) \times ب

القضية الثامنة. ن

إذا انقسم خط مستقيم إلى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل الخط في احد القسمين مع مربع القسم الاخر يعدل مربع الخط المركب من الكل مع القسم الاول

ليقسم الخط المستقيم اج الى قسمين في س فاربعة امثال القائم الزوايا اج × ج س مع مربع اس يعدل مربع الخط المركب من اج مع ج س



اخرج اج الى ذ واجعل ج ذ يعدل ج س وعلى ا ذ ا رسم المربع ات ف ذ وارسم شكلين مثل ما في القضية السابقة. فمن حيث ان ب ي = س ج (ق ٤٤ ك ١) وس ج = ج ذ

وج ذ = ن ي فلذلك ب ي = ن ي ولهذا السبب ايضا ق د = درولان س ج = ج ذ وب ي = ي ن فالقائم الزوايا س ي وج ن متساويان وكذلك ايضا ب د = د ي ولكن س ي = ي ر (ق ٤٣ ك ١) لانها متماثل الشكل س ر فاذا ج ن = ب د والقائمات الزوايا الاربعة س ي ج ن ي ر ب د متساوية وهي معا = ع س ي وايضا لان س ج = ج ذ وج ذ = ج ي (فرع ق ٤٤ ك ٢) اوس ب ولان س ج = ب ي اوب ق فلذلك س ب = ب ق ولان س ب = ب ق وق د = در فالقائم الزوايا اب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق ٤٣ ك ١) لانها متماثل فاذا اب = د ف فالاربعة اب م ق ق ل د ف متساوية وهي معا تعدل ع اب وقد تبرهن ان س ي ب د ج ن ي ر معا = ع س ي فباضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية يكون كل العلم ارح = ع ا ي و ا ي = ج ي = اج × ج ي = اج × ج س و ع ا ي = اج × ج س فالعلم ارح = اج × ج س. اضع الى الجانبيين ك ح او اس (فرع ق ٤٤ ك ٢) فالعلم ارح + ك ح = اج × ج س + اس ولكن ارح + ك ح = اف = اذ فاذا اذ = اج × ج س + اس

فرع اول. من حيث ان اذ هو مجتمع الخطبين اج ج س واس فضلتهما

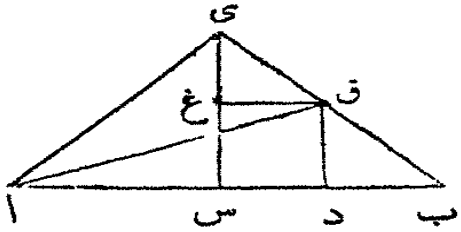
فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح خطين مع مربع فصلتها يعدل مربع مجتمع الخطين
 فرع ثان. بما انه قد تبرهن من هذه القضية ان مربع س ذو اربعة امثال
 مربع س ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصفه

تعليقة. لنفرض ا ج = ا و س = س و س ج = ب و ا ذ = س + ٢ ب و ا =
 ب + س. اضرب الجانبين في ٤ فلنا ٤ ا ب = ٤ ب + ٤ ب س اضف س^٢
 الى الجانبين فلنا ٤ ا ب + س = س + ٤ ب س + ٤ ب س اي
 ٤ ا ب + س = (س + ٢ ب)^٢

القضية التاسعة. ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فمربعاً القسمين الغير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع
 نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين نقطتي الانقسام

ليقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متانين في س وغير متانين في د فمربعاً
 ا د ب معاً يعدلان مضاعف مربعي



اس س د
 من س رسم س ي (ق ا ا ك ا)
 عموداً على ا ب واجعل س ي يعدل اس

اوس ب. رسم ا ي و ي ب ومن دارسم د ق (ق ا ٢ ك ا) حتى يوازيه س ي.
 ومن ق رسم ق غ حتى يوازيه ا ب وارسم ا ق. فمن حيث ان اس يعدل س ي
 فالزاوية ي ا س تعدل الزاوية ا ي س (ق ٧ ك ا) وهما معاً قائمة لان اس ي
 قائمة (فرع ٤ ق ٢٢ ك ا) ولهذا السبب ايضاً كل واحدة من الزاويتين س ي ب
 س ب ي نصف قائمة. فالكل ا ي ب قائمة. ومن حيث ان غ ي ق نصف قائمة
 وي غ ق قائمة لانها تعدل الداخلة المتقابلة ي س ب (ق ٢٦ ك ا) فالباقية ي ق غ
 تعدل نصف قائمة. فالزاوية غ ي ق تعدل ي ق غ والضلع ي غ يعدل الضلع
 غ ي (ق ٦ ك ا) وايضاً لان الزاوية عند ب هي نصف قائمة وق د ب قائمة لانها تعدل

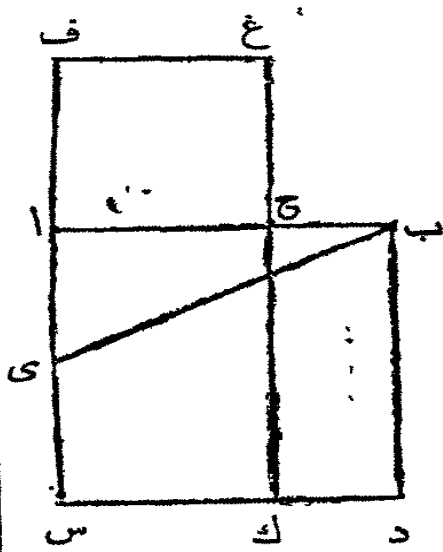
= ا س (ق ٥ ك ١) و ا س ي قائمة فكل واحدة من س ا ي س ي ا هي نصف قائمة (ق ٢٢ ك ١ فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ي ب س ب ي ايضاً نصف قائمة فتكون ا ي ب قائمة. ومن حيث ان ي ب س نصف قائمة فالزاوية د ب غ ايضاً نصف قائمة (ق ١٥ ك ١) لانها متقابلتان وب د غ قائمة لانها تعدل المتبادلة د س ي (ق ٢٤ ك ١) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع ب د يعدل الضلع د غ (ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ي غ ف نصف قائمة والزاوية عند ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ي س د (ق ٢٤ ك ١) فالباقية ف ي غ نصف قائمة وتعدل ي غ ف فالضلع ف ي يعدل الضلع ف غ (ق ٦ ك ١) ولان ي س يعدل س ا ي س = س ا و ي س = س ا + س ا = س ا و ي س ي (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا ي = ا س و لان ي ف = ف غ ي ف = ف غ و ي ف + ف غ = ف ي غ (ق ٤٧ ك ١) و ي ف = س د فاذا ي غ = ا س د وقد تبهرن ان ا ي = ا س فاذا ا ي + ي غ = ا س + س د و ا غ = ا ي + ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ = ا س + س د و ا غ = ا ي + ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا د + د ب = ا س + س د

تعليقة. اذا فرضنا ان ا س = ا و ب د = ب و ا د = ا ب + ب و س د = ا + ب فلنا (ب + ا ب) = ب + ا + ا ب + ا ب + ا ب ولكن ا ب + ا ب = ا ب + ا ب + ا ب فاذا (ب + ا ب) = ب + ا + ا ب + ا ب + ا ب

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان تقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح الكل في احد القسمين مربع القسم الآخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نقسمه الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح ا ب في احد قسميه مربع القسم الآخر. ارسم على ا ب المربع ا ب د س (ق ٤٦ ك ١) وتصف ا س في ي (ق ١٠ ك ١) ارسم ب ي واخرج س ا الى ف واجعل ي ف حتى يعدل ي ب (ق ٢ ك ١) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



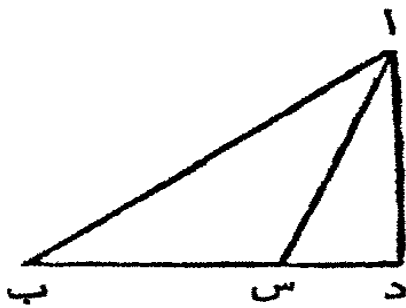
(ق ٤٦ ك ١) فقد انقسم اب في ح حتى يعدل
 القائم الزوايا اب × ب ح مربع اح
 أخرج غ ح الى ك. فمن حيث ان اس قد
 تنصف في ي ثم أخرج الى ف فالقائم الزوايا
 س ف × ف ا مع مربع اى يعدل مربع ي ف
 (ق ٦ ك ٢) ولكن ي ف يعدل ي ب فالقائم
 الزوايا س ف × ف ا مع مربع اى يعدل مربع
 ي ب ولكن مربع ي ب يعدل مربع ب ا مع
 مربع اى (ق ٤٧ ك ١) لأن ب اى قائمة فالقائم

الزوايا س ف × ف ا مع مربع اى يعدل مربع ب ا مع مربع اى. اطرح المشترك مربع
 اى فالباقي القائم الزوايا س ف × ف ا يعدل مربع اب وس ف × ف ا يعدل الشكل
 ف ك لأن ف ا = ف غ واد يعدل مربع اب فالشكل ف ك يعدل ا د اطرح
 الجزء المشترك ا ك فالباقي ف ح يعدل الباقي ح د ولكن ح د = ا ب × ب ح لأن
 ا ب = ب د و ف ح هو مربع اح فالقائم الزوايا اب × ب ح يعدل مربع اح فقد
 انقسم اب الى قسمين في ح والقائم الزوايا اب × ب ح يعدل مربع اح

القضية الثانية عشرة . ن

في كل مثلث ذي زاوية منفرجة اذا رُسم عمود من احدى الحادتين
 على الضلع المقابل بعد اخراجه فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة
 هو اكبر من مربعي المحيطين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطح
 الضلع الذي وقع عليه العمود في الجزء المزيد اى الواقع بين المنفرجة
 والعمود

ليكن اب س مثلثا ذا زاوية منفرجة اس ب وليقع عمود من اية ا د على



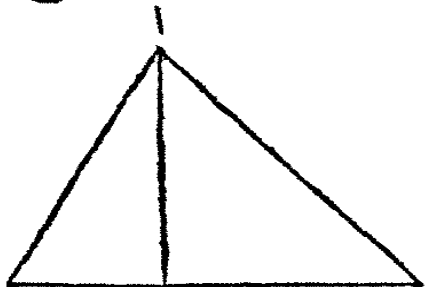
ب س بعد اخراجه الى د (ق ١٢ ك ١) فمربع
 ا ب هو اكبر من مربعي اس وس ب بمضاعف
 القائم الزوايا ب س \times س د
 فين حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين
 في س فلنا (ق ٤ ك ٢) $ب د = د س + س ب$

س د $+ ٢ ب س \times س د$ اضف ا د الى الجانبين فلنا $ب د + ا د = ب س + س د + ٢ ب س \times س د$
 $س د + ا د + ٢ ب س \times س د$ ولكن $ا ب = ب د + ا د$ (ق ٤٧ ك ١) واس
 $= س د + ا د$ فاذا $ا ب = ب س + اس + ٢ ب س \times س د$ واس داي ا ب هو اكبر
 من ب س $+ اس$ بمسطح $٢ ب س \times س د$

القضية الثالثة عشرة من

في كل مثلث مربع الضلع المقابل احدي الزوايا الحادة هو اصغر من
 مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد
 هذين الضلعين في الجزء منه الواقع بين الزاوية الحادة وعمود عليه من
 الزاوية المقابلة

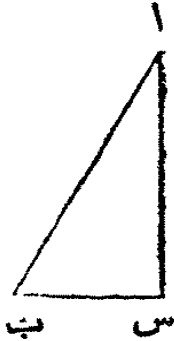
ليكن ا ب س مثلثا وتكن الزاوية عند ب احده زوايا الحادة وليقع على



الضلع ب س منه عمود ا د من الزاوية المقابلة
 (ق ١٢ ك ١) فمربع الضلع ا س الذي يقابل الزاوية
 عند ب هو اصغر من مربعي س ب ب ا بمضاعف
 القائم الزوايا س ب \times ب د

اولا يقع العمود ا د داخل المثلث ا ب س
 فلان الخط المستقيم س ب قد انقسم في د فلنا (ق ٧ ك ٢) $ب س + س ب = ب د + د س$
 $٢ ب س \times س د + س د$ اضف الى الجانبين ا د فلنا $ب س + س ب + ا د = ب د + د س + ا د + ٢ ب س \times س د$
 $٢ ب س \times س د + س د + ا د$ ولكن $ب د + ا د = ا ب$ وس $ب د + ا د = ا ب$
 اس (ق ٤٧ ك ١) فاذا $ب س + اس = ا ب$ $= ٢ ب س \times س د + اس$ اي اس هو

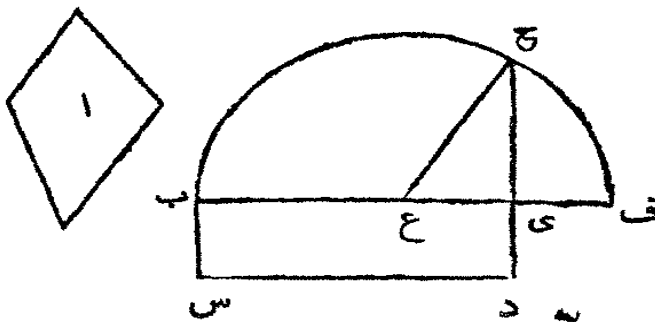
اصغر من $\text{ب س}^2 + \text{ا ب}^2$ بمسطح ا ب س^2 \times ب د
 ثانياً ليضع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن
 حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١)
 و $\text{ا ب}^2 = (\text{ق ١٢ ك ٢}) \text{ا س}^2 + \text{ب س}^2 + \text{ا ب س}^2 \times \text{ب د}$ ااضف الى الجانبين ب س^2
 فلنا $\text{ا ب}^2 + \text{ب س}^2 = \text{ا س}^2 + \text{ب س}^2 + \text{ا ب س}^2 \times \text{ب د}$ ومن حيث ان الخط
 ب د قد انقسم في س فلنا (ق ٢ ك ٢) $\text{ب س}^2 + \text{ب س}^2 \times \text{ب د} = \text{ب س}^2 \times \text{ب د} + \text{ب س}^2 \times \text{ب د}$
 و $\text{ا ب س}^2 + \text{ب س}^2 \times \text{ب د} = \text{ا س}^2 + \text{ب س}^2 \times \text{ب د}$ فاذا $\text{ا ب}^2 + \text{ب س}^2 = \text{ا س}^2$
 $+ \text{ا ب س}^2 \times \text{ب د}$ و ا س^2 هو اصغر من $\text{ا ب}^2 + \text{ب س}^2$ بمسطح $\text{ا ب د} \times \text{ب س}$



ثالثاً ليكن الضلع ا س عموداً على ب س فيكون ب س
 الجزء بين العمود والزاوية الحادة عند ب والامر واضح (ق ٤٧
 ك ١) ان $\text{ا ب}^2 + \text{ب س}^2 = \text{ا س}^2 + \text{ا ب س}^2 \times \text{ب د}$
 $\times \text{ب س}$

القضية الرابعة عشرة ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة
 ليكن الشكل المفروض، علينا ان نرسم مربعاً يعدل الشكل ا. ارسم شكلاً اذا



زوايا قائمة ب ي د س واجعله
 يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان
 ضلعا ب ي ي د متساويين
 فهو المربع المطلوب والا فخرج
 ب ي الى ف واجعل ي ف
 يعدل ي د وتَصِفْ ب ف في

غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف او غ ب ارسم دائرة ب ج ف واخرج د ي الى
 ح وارسم ح غ فلان الخط المستقيم ب ف قد انقسم الى قسمين متساويين في غ وغير
 متساويين في ي فالقائم الزوايا ب ي ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ف

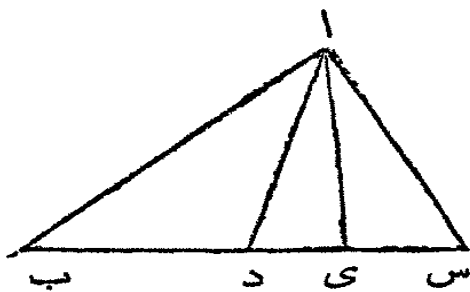
(ق ٥ ك ٢) و غ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ي \times ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ب ي \times ي ف مع مربع غ ي يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ اطرح المشترك مربع ي غ فللباقى القائم الزوايا ب ي \times ي ف يعدل مربع ح ي وب د يعدل ب ي \times ي ف لان ي د = ي ف فالشكل ب د يعدل مربع ح ي وب د يعدل الشكل ا ف مربع ح ي يعدل الشكل ا فاذا رسم على ح ي مربع فهو يعدل الشكل المفروض

مضافات

قضية ١٠ ن

اذا تنصّف ضلعٌ من اضلاعٍ مثلثٍ فمجموع مربعي الضلعين الآخرين يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المتنصف مع مضاعف مربع الخط المرسوم من نقطة الاتصاف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثا ولينصف الضلع ب س سمة في د وارسم دا الى الزاوية المقابلة فمجموع مربعي با اس يعدل مضاعف مربعي ب د دا



من الرسم اى عمودا على ب س فمن حيث ان ب ي اقائمة اب (ق ٤٧ ك ١) = ب ي^٢ + س ي^٢ = س ي^٢ + ا ي^٢ + ا ب^٢ + اس^٢

= ب ي^٢ + س ي^٢ + ا ي^٢ ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى قسمين متساويين في د وغير متساويين في ي فلنا (ق ٩ ك ٢) ب ي^٢ + س ي^٢ = ٢ ب د^٢ + ٢ د ي^٢ فاذا اب^٢ + اس^٢ = ٢ ب د^٢ + ٢ د ي^٢ + ا ي^٢ + ا ب^٢ + اس^٢ ولكن د ي^٢ + ا ي^٢ = ا د^٢ (ق ٤٧ ك ١) و ٢ د ي^٢ + ا ي^٢ = ٢ ا د^٢ فاذا اب^٢ + اس^٢ = ٢ ب د^٢ + ٢ ا د^٢

اصول الهندسة

الكتاب الثالث

حدود

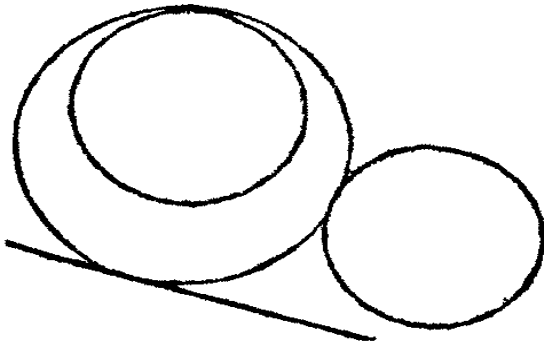
١. نصف قطر دائرة هو خطٌ مستقيمٌ مرسومٌ من المركز الى المحيط

١. حاسٌ دائرةٍ هو خطٌ مستقيمٌ

يلاقي المحيط في نقطة واحدة واذا أُخرج

فلا يقطعها، وتلك النقطة تسمى نقطة

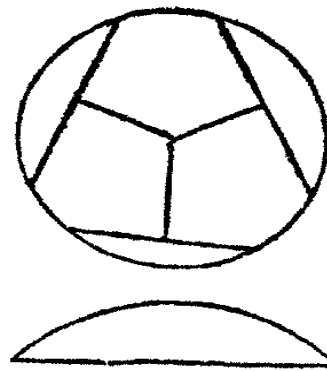
الماسة



٢. اذا التقى محيطا دائرتين

بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة

الواحدة تمس الاخرى



٣. خطوط مستقيمة على بُعد واحدٍ من مركز

دائرة هي التي كانت العموديات منها الى المركز

متساوية

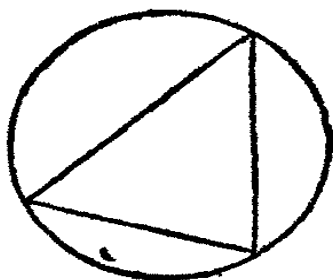
٤. والخط المستقيم الذي يقع عليه العمود

الاطول هو الابعد عن المركز

ب. القوس هو جزء من محيط دائرة، والخط

المستقيم الموصل بين طرفي قوسٍ يسمى وترًا

ج. متى كان طرفا خطٍ مستقيمٍ في محيط دائرة قيل انه مرسوم في الدائرة

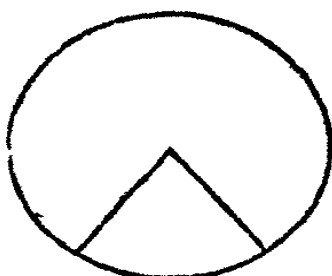


وكل خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطتين يسمى قاطعاً
٥. كل جزء من دائرة يحيط به قوسٌ ووتره
يسمى قِطْعَةً

٦. زاويةٌ في قِطْعَةٍ هي الحادثة بين خطين
مستقيمين مرسومين من اية نقطة كانت من القوس

الى طرفي الوتر، ومثلثٌ في دائرة هو ما كانت زواياهُ الثلاث في المحيط، وعلى الاطلاق
كل شكل في دائرة هو ما كانت زواياهُ في المحيط، ويقال ان الدائرة تحيط به

٧. الزاوية عند المركز هي التي يحيط بها خطان
مستقيمان من المركز الى المحيط



٨. قِطَاع دائرة هو الشكل الذي يحيط به خطان مستقيمان من المركز الى
المحيط والقوسُ الواقع بين طرفيهما

٩. القِطَع المتشابهة هي ما
كانت الزوايا الحادثة فيها متساوية



القضية الاولى. ع

علينا ان نجد مركز دائرة مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة، علينا ان نجد مركزها

ارسم فيها خطاً مستقيماً مثل ا ب ونصِّفه في د

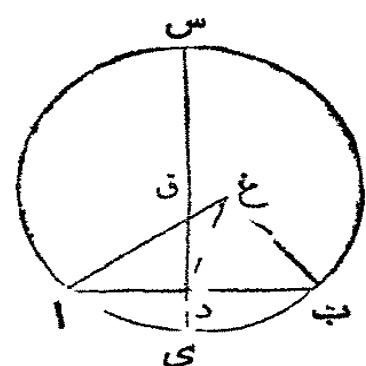
(ق ١٠ ك ١) ارسم د س عموداً على ا ب (ق ١١

ك ١) واخرجه الى س ونصِّف س ي في ق فتكون

النقطة ق مركز الدائرة ا ب س

والا فتلكن النقطة غ مركزها وارسم غ ا غ د

غ ب، فمن حيث ان دا = دب ودغ مشترك بين



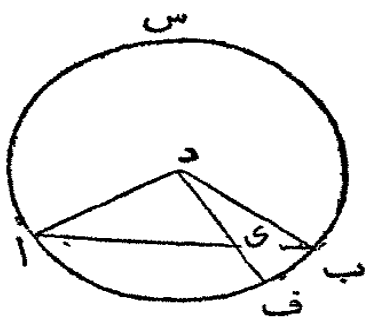
المثلثين غ دا غ دب فالضلعان ا د دغ يعدلان الضلعين ب د دغ اي كل

واحد يعدل نظيره والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منهما نصف قطر من دائرة واحدة فالزاوية ادغ = غ دب (ق ٨ ك ١) فتكون كل واحدة منهما قائمة (جد ٢ ك ١) فاذا غ دب قائمة ولكن ق دب قائمة فاذا غ دب = ق دب اية الاصغر يعدل الاكبر وذاك مجال فلا تكون النقطة غ مركز الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذا مركز الدائرة ا ب س
 فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان خط عمودياً على اخر في دائرة وتَصَفَّه فالمرکز في المخط المُنَصِّف

القضية الثانية. ن

اذا قُرِضَتْ تقطتان في محيط دائرة فالخط المستقيم الموصل بينهما واقع داخل الدائرة

لتكن ا ب س دائرة ولتفرض في محيطها تقطتان مثل اوب وليوصل بينهما بالخط المستقيم ا ب فهو داخل الدائرة



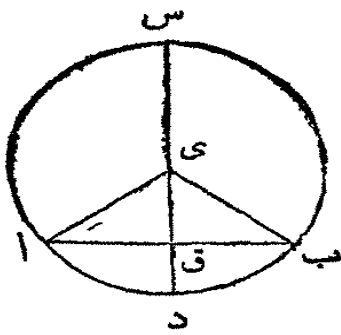
في الخط ا ب افرض اية نقطة كانت مثل ي واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك ٢) وارسم الخطوط المستقيمة ا د ب د ي واخرج د ي حتى يلاقي المحيط في ف فمن حيث ان دا = دب فالزاوية دا ب = الزاوية دب ا (ق ٥ ك ١) ومن حيث

ان ا ي ضلع من المثلث د ي ا وقد اُخرج الى ب فالزاوية الخارجة د ي ب هي اكبر من د ا ي (ق ١٦ ك ١) فهي اكبر من دب ايضا او دب ي والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا دب هو اطول من د ي ولكن دب = د ف فاذا د ف هو اطول من د ي اي النقطة ي هي داخل الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة في الخط ا ب فهو اذا داخل الدائرة
 فرع. كل نقطة في ما يزداد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة . ن

كل خط مستقيم ماراً بمركز دائرة اذا نصّف خطاً آخر مستقيماً داخل
الدائرة غير ماراً بالمركز فانه يُجَدِّثُ معه قائمتين . واذا احدث معه
قائمتين ينصفه

لتكن ا ب س دائرة وس د خطاً مستقيماً ماراً بمركزها ولينصف الخط المستقيم
ا ب الذي لا يمر بالمركز في النقطة ق فانه يُجَدِّثُ معه
قائمتين



استعلم مركز الدائرة ي (ق ا ك ٢) وارسم ا ي
ب ي فمن حيث ان ا ق = ق ب و ي ق مشترك بين
المثلثين ا ق ي ب ق ي فضلعان من الواحد يعدلان
ضلعين من الاخر والقاعدة ا ي تعدل القاعدة ي ب

والزاوية ا ق ي تعدل الزاوية ب ق ي (ق ا ك ١) فكل واحدة منها قائمة (حد ٧
ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمر بمركز الدائرة والذي ينصف الغير المار بالمركز
ا ب يحدث معه قائمتين

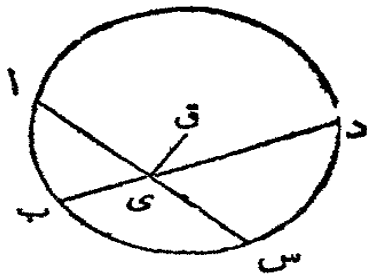
ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع ا ب قائمتين فهو ينصفه ايضا اي
ا ق يعدل ق ب . ثم الشكل حسبنا تقدم فمن حيث ان ا ي يعدل ي ب فالزاوية
ي ا ق تعدل ي ب ق (ق ه ك ١) والقائمة ا ق ي تعدل القائمة ب ق ي والضلع
ي ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي وهو يقابل الزاويتين المتساويتين
(ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الاخر
اي ا ق = ق ب

فرع اول . العمود على نصف الوتر يمر بالمركز
فرع ثان . العمود على نصف الوتر اذا أُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيه فهو
قطر . ونقطة انصافه هي مركز الدائرة

القضية الرابعة. ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمران بالمركز فلا يتنصفان معاً

لتكن ا ب س د دائرة واس ب د خطين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة
ي ولكن لا يمران بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً والاً



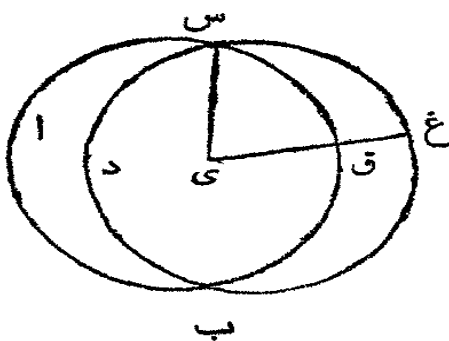
فاذا كان يمكن ليكن ا ي س مساويين وب ي
ي كذلك. فان مرّ احدها بالمركز فالامر واضح انه
لا يتنصف بالآخر الذي لا يمر بالمركز. وان لم يمر
احدها بالمركز فاستعلم المركز ق (ق ك ٢) وارسم ق

ي فمن حيث ان الخط المارّ بالمركز ق ي ينصف اخر الذي لا يمرّ بالمركز اس فيحدث
معه قائمتين (ق ك ٢) فتكون ق ي قائمة. ومن حيث ان ق ي ينصف ب د
الذي لا يمرّ بالمركز فيحدث معه قائمتين (ق ك ٢) فتكون ق ي ب قائمة وق ي ا
تعديل ق ي ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فاذا ا س ب د لا ينصف
بعضهما بعضاً

القضية الخامسة. ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لتكن ا ب س س د غ دائرتين ولتتقاطعا في س وب فليس لهما مركز واحد
والاً فلنكن النقطة ي مركزها. ارسم س ي



وارسم خطاً آخر مثل ي ق غ يلاقي المحيطين في
ق و غ

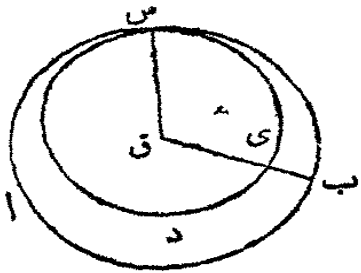
فمن حيث ان ي مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطري س يعدل نصف القطري ق
وايضاً من حيث ان ي مركز الدائرة س د غ

فنصف القطري س يعدل نصف القطري غ. وقد تبرهن ان س ي يعدل ي ق

فإذا ي ق يعدل ي غ اي الجزء يعدل الكلّ وذاك محال فلا يمكن ان تكون
النقطة ي مركز الدائرتين

القضية السادسة . ن

اذا مست دائرة دائرة اخرى من داخلها فلا يكون لهما مركز واحد
لتكن ا ب س د ي س دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في س فلا يكون لهما
مركز واحد



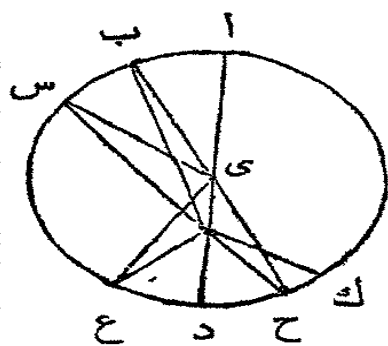
والا فلنكن النقطة ق مركزها . ارسم ق س
وارسم خطاً آخر مثل ق ي ب يلاقي المحيطين في ي
وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فنصف
القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب . وايضاً لان

ق مركز الدائرة د ي س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ي . وقد تبهرن
ان ق س يعدل ق ب فاذا ق ي يعدل ق ب اية الجزء يعدل الكل وذاك
محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين

القضية السابعة . ن

اذا فرضت نقطة في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة
التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيه المركز اي
قسم من القطر . واقصرها هو القسم الاخر من القطر واما بقية الخطوط
التي ترسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر
المار بالمركز هو الاطول ولا يرسم من تلك النقطة الى المحيط اكثر من
خطين متساويين اية واحد على الجانب الواحد من القطر
والاخر على الجانب الاخر منه

لتكن ا ب س ك دائرة وا د قطرها ولفرض فيه نقطة ف غير المركز وتكن ي
 المركز فيبين كل المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى
 المحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصر ومن
 البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول
 من ف غ وهلم جرا. ا رسم ب ي س ي غ ي فمن
 حيث ان ضلعين من اضلاع مثلث هما معاً اطول من
 الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ي ي ف هما



اطول من ب ف و ا ي يعدل ب ي فاذا ا ي ي ف يعني ا ف اطول من ب ف
 وايضاً من حيث ان ب ي يعدل س ي و ي ف مشترك بين المثلثين ب ي ف
 س ي ف فالضلعان ب ي ي ف يعدلان س ي ي ف ولكن الزاوية ب ي ف
 هي اكبر من س ي ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١)
 ولهذا السبب س ف اطول من ع ف. وايضاً من حيث ان غ ف ف ي هما معاً
 اطول من غ ي (ق ٢٠ ك ١) و ي غ يعدل ي د فاذا غ ف ف ي معاً هما اطول
 من د ي اطرح الجزء المشترك ف ي فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذا ف ا
 هو اطول المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول
 من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرا

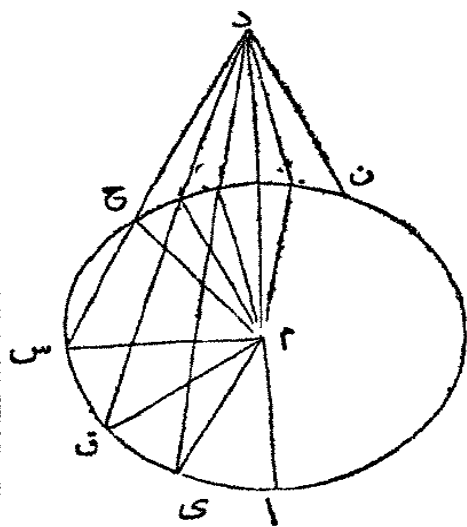
كذلك لا يمكن ان يرسم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين
 متساويين. عند ي اجعل الزاوية ف ي ح حتى تعدل غ ي ف وارسم ف ح. فمن
 حيث ان غ ي يعدل ي ح و ي ف مشترك بين المثلثين غ ي ف ح ي ف
 فالضلعان غ ي ي ف معاً يعدلان ح ي ي ف والزاوية غ ي ف تعدل ح ي ف
 فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يرسم خط اخر غير
 ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والا فليكن ذلك الخط الآخرف ك فمن
 حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذا ف ك يعدل ف ح اي
 الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل البعد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانه

القضية الثامنة. ن

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

ومرّ احدها بالمركز فاطول الخطوط الواقعة على مقعر الدائرة هو المارّ
 بالمركز ومن البقية فالاقرب الى المار بالمركز هو اطول من الابعد عنه
 ومن الخطوط الواقعة على محدّب الدائرة فالاقصر هو المرسوم من
 النقطة المفروضة الى القطر واما البقية فالاقرب الى الاقصر هو
 اقصر من الابعد عنه. ولا يرسم اكثر من خطين متساويين من النقطة
 المفروضة الى المحيط وذلك على جانبي الخط الاقصر

لتكن اس ن دائرة ود نقطة مفروضة خارجها ولترسم الخطوط المستقيمة دا



دي دق دس الى المحيط وليمرّ الخط دا
 بالمركز. فمن الخطوط الواقعة على مقعر المحيط
 اعني ي ق س فالاطول هو ا د والاقرب الى
 ا د يعني ي د هو اطول من ق د وق د اطول
 من س د. ومن الخطوط الواقعة على محدّب
 المحيط ح ل ك غ فالاقصر هو د ع بين النقطة
 المفروضة د والقطر ا غ والاقرب الى هذا يعني
 د ك هو اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح
 وهلمّ جراً

استعلم مركز الدائرة (ق الك ٢) وارسم م ي م ق م س م ح م ل م ك. فمن
 حيث ان م ا يعدل م ي فاذا أضيف م د الى كل واحد منهما لما دا يعدل د م مع
 م ي و د م وم ي هما معاً اطول من د ي (ق ٢٠ ك ١) فاذا دا هو ايضاً اطول من
 د ي. ومن حيث ان م ي يعدل م ق وم د مشترك بين المثلثين د م ي د م ق
 فالضلعان د م م ي يعدلان الضلعين د م م ق ولكن الزاوية د م ي انما هي اكبر
 من الزاوية د م ق فالقاعدة د ي اطول من القاعدة د ق (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضاً
 يبرهن ان د ق اطول من د س. فاذا دا هو اطول هذه الخطوط و د ي هو اطول
 من د ق ود ق اطول من د س. ثم من حيث ان م ك ك دها معاً اطول من م د
 (ق ٢٠ ك ١) وم غ يعدل م ك فالبقية ك د هي اطول من البقية غ د (اولية ٥)

اعني دغ هو اقصر من دك ومن حيث ان م ك دك قد رُسمت الى النقطة ك داخل المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتيه م د فالخطان م ك ك د معاً هما اقصر من م ل ل د معاً (ق ٢١ ك ١) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية ل د وهكذا يبرهن ان د ل هو اقصر من د ح فاذا دغ هو اقصر هذه الخطوط ودك اقصر من دل ودل اقصر من دح وهلم جراً

كذلك لا يرسم الا خطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر فعند النقطة م من الخط م د اجعل الزاوية د م ب حتى تعدل د م ك وارسم د ب فلما في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م ك م والضلع المشترك د م والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب (ق ٤ ك ١) ولا يرسم خط اخر غير د ب حتى يعدل دك اعني من د الى المحيط وان كان ممكناً فليكن د ن ذلك الخط فمن حيث ان د ن يعدل دك ودك يعدل د ب فاذا د ن يعدل د ب يعني الاقرب الى دغ يعدل الابدع عنه وقد تبرهن ان ذاك غير ممكن



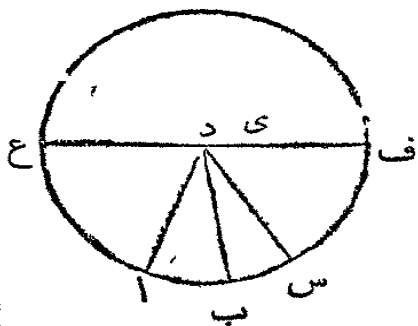
القضية التاسعة . ن

اذا فُرِضَتْ داخل دائرة تقطة يرسم منها الى المحيط اكثر من خطين مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

لتفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين

مستقيمين متساويين د ا د ب د س فالنقطة د هي مركز الدائرة ، والا فلتكن النقطة ي المركز . ارسم د ي واخرجه الى المحيط في ف ونح فيكون الخط ف غ قطراً ومن حيث انه قد تعين في القطر نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالخط د ف هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من تلك

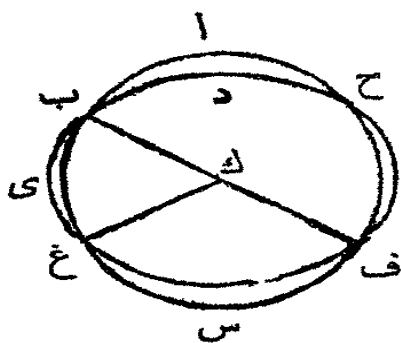
النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٢) ود س هو اطول من د ب ود ب اطول من د ا



وقد فرضت مساويتها فذاك محال فاذا لا يمكن ان تكون ي المركز وهكذا يبرهن في كل نقطة غير د. فهي المركز

القضية العاشرة . ن

لا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى في اكثر من نقطتين ان كان ممكناً ليقطع المحيط ف اب المحيط دى ف في اكثر من نقطتين اعني

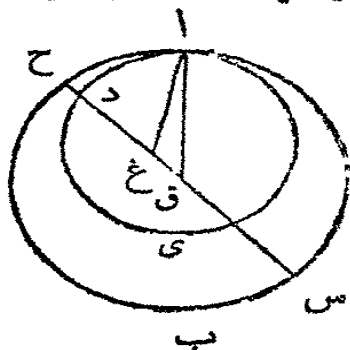


في ب و غ وف . استعلم ك مركز الدائرة اب س وارسم ك ب ك غ ك ف . فمن حيث انه قد تعينت النقطة ك داخل الدائرة دى ف و وقع منها على المحيط اكثر من خطين مستقيمين متساويين اعني ك ب ك غ ك ف فهي اعني ك مركز الدائرة دى ف (ق ٩ ك ٢) وهي ايضا مركزا ب س اي دائرة تقطع دائرة اخرى ولها مركز واحد وذاك لا يمكن (ق ٥ ك ٢) فلا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى في اكثر من نقطتين

القضية الحادية عشرة . ن

اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من داخلها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيهما اذا اخرج يمر بنقطة المماسّة

لتكن اب س ادى دائرتين ولتمس احدها الاخرى في النقطة ا وليكن ق



مركز الدائرة اب س و غ مركز الدائرة ادى فالخط الموصل بين ق و غ اذا اخرج يمر بنقطة المماسّة ا والا فليقع على نقطة اخرى ان كان ممكناً مثل الخط ق غ د ح . ثم ارسم اغ اق . فمن حيث ان الضلعين اغ غ ق هما معاً اطول من اق (ق ٢٠ ك ١) او ق ح لان ق ح ق ا نصف قطر لدائرة واحدة فاذا

طرح الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ج ولكن اغ يعدل غ د فاذا غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال . فالخط الموصل بين المركزين لا يمكن وقوعه مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع على النقطة ا

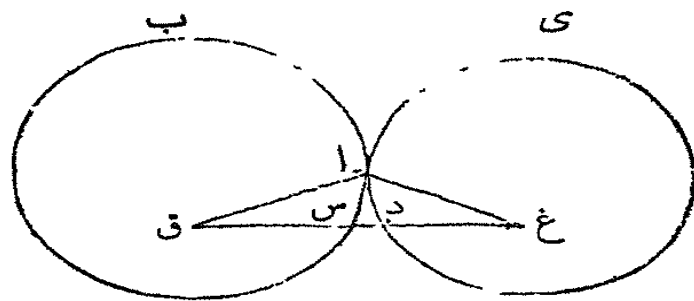
فرع اول . اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيهما يعدل فضلة نصفي قطريهما لان المحيطين يمران بنقطة واحدة في الخط الموصل بين المركزين

فرع ثان . بالقلب اذا عدل البعد بين المركزين فضلة نصفي القطرين فاللدايرة الواحدة تمس الاخرى من داخلها

القضية الثانية عشرة . ن

اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيهما يمر بنقطة المماسّة

لكن اب س ادى دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في ا وليكن ق مركز



الدائرة اب س وليكن غ مركز الدائرة ادى فالخط المستقيم الموصل بين ق و غ يمر بنقطة المماسّة

والأفليقع على غير نقطة

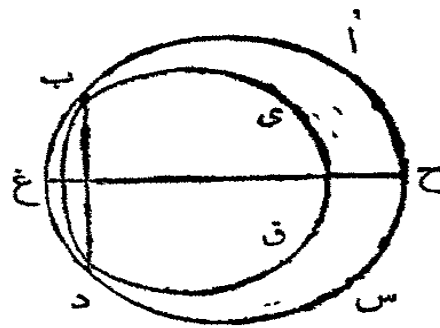
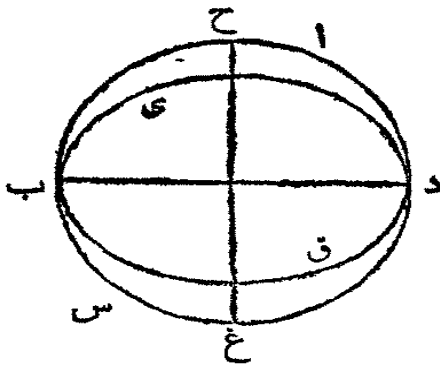
المماسّة مثل الخط ق س د غ ا رسم ق ا غ ا فن حيث ان ق مركز الدائرة اب س فالخط ق س يعدل ق ا و غ مركز ادى فالخط غ د يعدل غ ا فاذا غ ا ق معاً يعدلان ق س غ د معاً فالكل ق غ اطول من ق ا غ معاً وذلك لا يمكن (ق ٢٠ ك ا) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمر بنقطة المماسّة

فرع . اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيهما يعدل مجتمع نصفي قطريهما وبالقلب اذا عدل بعد مركزيهما مجتمع قطريهما فالواحدة تمس الاخرى من خارجها

القضية الثالثة عشرة . ن

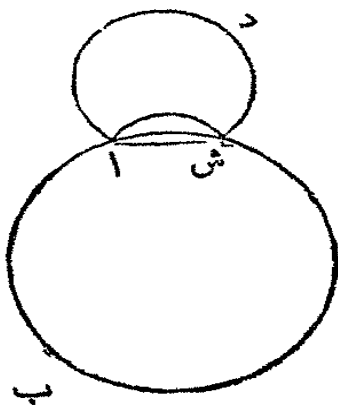
دائرة لا تمس أخرى في أكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او من خارج

ان كان يمكن لمس الدائرة ب ب ق الدائرة ا ب س في أكثر من نقطة واحدة وأولاً



من داخل في
ب ود ا رسم
المخط ب د
وارسم ح غ
عموداً عليه
(ق ٧ وق ١١
ك ١) ولينصفه

ايضاً . فمن حيث ان ب ود هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالمخط المستقيم ب د واقع داخل كل واحدة منهما (ق ٢ ك ٣) ومركزها في المخط العمودي عليه المنصفه (فرع ق ١ ك ٢) فاذا غ ح يمر بنقطة الماسة (ق ١١ ك ٣) وهو لا يمر بهما لان ب ود خارجتان عن المخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في أكثر من نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج . فان كان يمكن فتمس الدائرة

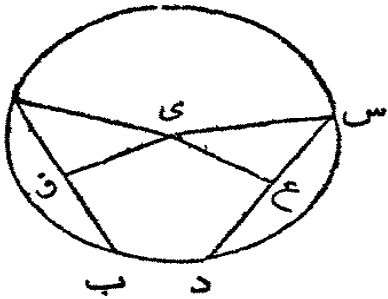


اش د الدائرة اش ب في ا وش ا رسم اش فالنقطتان
ا وش هما في محيط الدائرة اش د فيكون المخط اش كلة
داخل اش د واش د خارج اش ب فيكون اش
خارج اش ب ايضاً ومن حيث ا وش هما في محيط اش
ب فالمخط اش هو داخل اش ب (ق ٢ ك ٣) وقد
تبين انه خارجها وذلك محال فلا تمس دائرة دائرة
اخرى من خارج في أكثر من نقطة واحدة

القضية الرابعة عشرة. ن

خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز.
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن ا ب وس د خطين مستقيمين متساويين في الدائرة ا ب د س فهما على



بعد واحد من المركز. استعمل المركز ي (ق ا ك ٢)

وارسم ي ق ي غ عمودين على ا ب وس د وارسم

ايضاً ا ي وس ي. فمن حيث ان الخط المستقيم الما

بالمركز اعني ي ق يجعل مع ا ب الذي لا يمر بالمركز

زاوية قائمة فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فاذا ا ق

يعدل ق ب اعني ا ب هو مضاعف ا ق. وهكذا ايضاً يبرهن ان س د مضاعف

س غ. و ا ب يعدل س د فاذا ا ق يعدل س غ. ومن حيث ان ا ي يعدل ي س

فمربع ا ي يعدل مربع ي س ومجتمع مربعي ا ق ق ي يعدل مربع ا ي (ق ٤٧ ك ١)

لان ا ق ي قائمة وهكذا ايضاً مجتمع مربعي س غ غ ي يعدل مربع س ي. فمربع ا ق

ق ي يعدل ا ن مربعي س غ غ ي ومربع س غ يعدل مربع ا ق لان س غ يعدل ا ق

فاذا مربع الباقي غ ي يعدل مربع الباقي ي ق اعني غ ي يعدل ي ق فاذا ا ب

وس د هما على بعد واحد من المركز (حد ٢ ك ٢)

ثم اذا فرض انهما على بعد واحد من المركز اعني ان ق ي يعدل غ ي فهما

متساويان لانه يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان ا ب مضاعف ا ق وس د

مضاعف س غ وان مجتمع مربعي ا ق ق ي يعدل مجتمع مربعي س غ غ ي ومربع

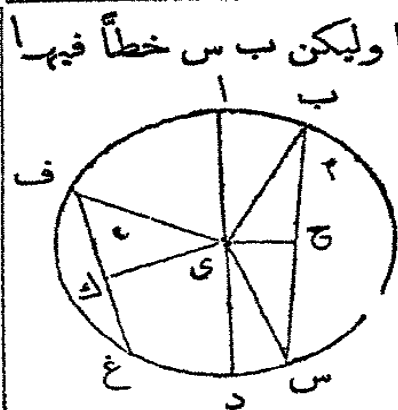
ق ي يعدل مربع غ ي فمربع الباقي ا ق يعدل مربع الباقي س غ و ا ق يعدل س غ

و ا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ فاذا ا ب يعدل س د

القضية الخامسة عشرة. ن

القطر هو اطول الخطوط التي ترسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى

المركز اطول من الابدع عنه والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر



لتكن ا ب س د دائرة واد قطرها وى مركزها وليكن ب س خطأ فيها
وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ فالقطر ا د
اطول من اى خط آخر رسم في الدائرة وب س
اطول من ف غ

ارسم ح عموداً على ب س وى ك عموداً
على ف غ وارسم ي ف ي ب ي س . فمن حيث
ان اى يعدل ب ي وى د يعدل ي س فالكل

ا د يعدل ب ي مع ي س وب ي مع ي س اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١)
فاذا ا د اطول من ب س

ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمودى ح اقصر من
العمودى ك (حد ٤ ك ٢) وب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٢) وف غ مضاعف
ف ك ومجتمع مربعي ب ح ح ي يعدل مجتمع مربعي ف ك ك ي ومربع ي ح اصغر
من مربع ي ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذا ب ح اطول من ك ف
وب س ايضاً اطول من ف غ

ثم ليُفرض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضاً اقرب الى المركز من حيث
ان ب س اطول من ف غ فاذا ب ح اطول من ف ك ومجتمع مربعي ف ك ك ي
يعدل مجتمع مربعي ب ح ح ي ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربع ي ح
اصغر من مربع ي ك اعني ي ح اقصر من ي ك فاذا (حد ٤ ك ٢) ب س اقرب
الى المركز من ف غ

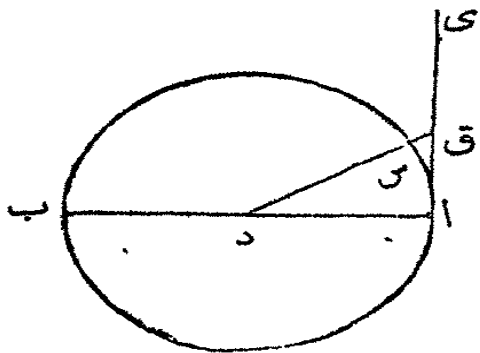
فرغ . الوتر الاقصر هو الابدع عن المركز وبالقلب الوتر الابدع عن المركز هو
الاقصر

القضية السادسة عشرة . ن

الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقع خارج الدائرة
ولا يرسم خطاً مستقيماً من طرف القطر بين ذلك العمود ومحيط الدائرة
بدون ان يقطع المحيط

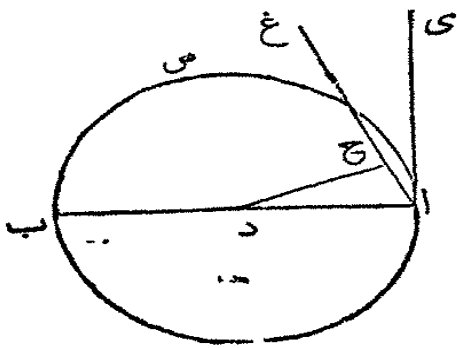
لتكن ا ب س دائرة ود مركزها و ا ب قطرها وليرسم اى عموداً على ا ب من

النقطة ا فهو واقع خارج الدائرة



عين في اى اية نقطة شئت مثل ق وارسم ق د الذي يقطع المحيط في س . فمن حيث انب دا ق قائمة فهي اكبر من ا ق د (ق ٢٢ ك ١) والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا د ق اطول من دا ودا يعدل د س

فاذا د ق اطول من د س فالنقطة ق واقعة خارج الدائرة وهي اية نقطة كانت من المحيط اى فهو اذا خارج الدائرة



كذلك لا يرسم بين اى ا والمحيط خط مستقيم من النقطة ا الذي لا يقطع المحيط . ارسم غ ا في الزاوية داى . وارسم د ح عموداً على ا غ . فمن حيث ان د ح ا قائمة ود ا ح اصغر من قائمة فالضلع د ح اقصر من الضلع دا (ق ١٩ ك ١) فالنقطة ح هي داخل الدائرة فالخط ا غ قاطع الدائرة

فرع اول . الخط العمودي على طرف قطر دائرة هو ممس الدائرة ويمسها في نقطة واحدة فقط لانه لو لاقاها في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢ ك ٢) ولا يكون اكثر من مماس واحد في نقطة واحدة من الدائرة

فرع ثان . العمود على طرف القطر هو مماس للدائرة وبالقرب المماس هو عمودي على طرف القطر

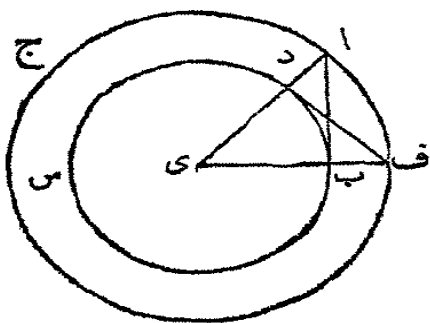
فرع ثالث . مماسان من طرفي القطر هما متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقرب مماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

القضية السابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج المحيط حتى يماس دائرة مفروضة

اولاً لتكن النقطة المفروضة خارج الدائرة ب س د فعلينا ان نرسم منها خطاً مستقيماً يماس الدائرة

استعلم المركزي (ق ١ ك ٢) وارسم اى واجعل اى مركزاً وى انصف قطري وارسم الدائرة ا ف ج ومن د ارسم د ف عموداً على اى (ق ١ ك ١) وارسم اى ب ف وايضاً ا ب فالخط ا ب يماس الدائرة



لان اى مركز الدائرتين ب س د ا ف ج فنصف القطري ا يعدل اى ب ف وى د يعدل اى ب فالضلعان اى ب ي عدلان الضلعين ف اى د ولها الزاوية عند اى المشتركة بين المثلثين اى ب ف اى د فالقاعدة ا ب تعدل

القاعدة د ف والمثلث اى ب يعدل المثلث اى د ف وبقية زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الآخر (ق ٤ ك ١) فالزاوية اى ب ا تعدل اى د ف ولكن اى د ف قائمة فاذا اى ب ا قائمة ايضاً والخط اى ب قد رُسم من المركز و ا ب عمود عليه فهو اذاً مماس (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢) وقد رُسم من النقطة المفروضة

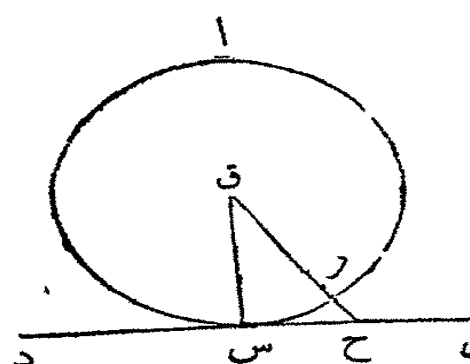
ثم اذا كانت النقطة المفروضة في محيط الدائرة مثل د فارسم دى الى المركز اى وارسم د ف عموداً على طرفه فهو مماس (فرع اول ق ١٦ ك ٢)

تعليقة. متى كانت النقطة ا خارج المحيط يرسم مماسان متساويان منها لانه اذا أُخرج المماس ف د حتى يلاقى المحيط ا ج ثم اذا رُسم خط من المركز الى نقطة الملاقاة و آخر من ا الى موضع تقاطع الخط الاول والمحيط ب د س يحدث مثلث ذو قائمة يعدل ا ب اى

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا مسَّ خطٌ مستقيم دائرةً فالخط المستقيم المرسوم من المركز الى نقطة المماس هو عمودٌ على الخط المماس

لتكن ا س ب دائرة وليمسها الخط المستقيم دى في س. استعلم المركزي وارسم

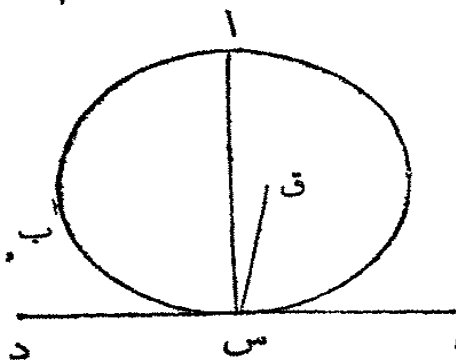


ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على
دي والآن ق ارسم ق ب ج عموداً على
دي فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق
حادّة (ت ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل
الزاوية الكبرى (ق ١٩ ك ١) فالضلع ق س
اطول من الضلع ق ج ولكن ق س به بدل
ق ب فاذا ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كله وذلك محال فلا يمكن
ان يكون ق ج عموداً على دي وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ق س فهو عمود
على دي

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا مسّ خطٌ مستقيم دائرة ورُسم من نقطة الماسة خطٌ مستقيم عموداً
على الماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي

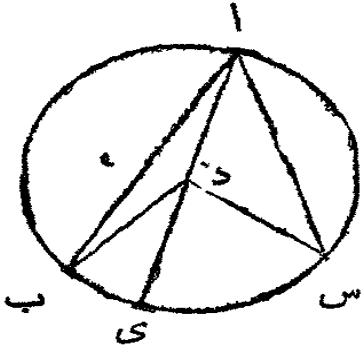
ليكن الخط المستقيم دي مماساً للدائرة ا ب س ومن نقطة الماسة س ليُرسم س ا
عموداً على دي فمركز الدائرة واقع في الخط س ا
والآن فلنكن ق المركز ارسم ق س فحسب
القضية السابقة ق س هو عمود على دي وق
س ي قائمة ولكن اس ي ايضاً قائمة فاذا
اس ي تعدل ق س ي اعني العكس يعدل
جزءه وذلك محال فلا يمكن ان تكون ق المركز ي
وهكذا يبرهن في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا



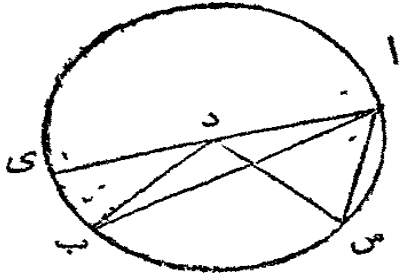
القضية العشرون . ن

الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على
قاعدة واحدة اعني على جزء واحد من المحيط

لتكن ا ب س دائرة وب د س الزاوية عند المركز وب ا س الزاوية عند المحيط
وكلتاها على جزء واحد من المحيط ب س فالزاوية
ب د س انما هي مضاعف ب ا س



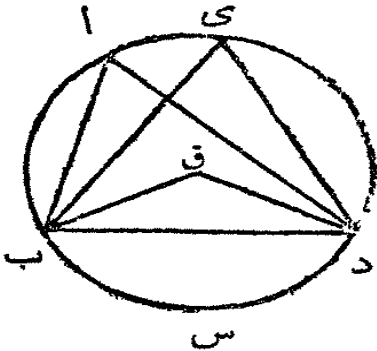
اولاً ليكن د مركز الدائرة داخل الزاوية ب ا س
ارسم ا د واخرجه الى 'ي' فمن حيث ان د ا يعدل
د ب فالزاوية د ا ب تعدل الزاوية د ب ا (ق ٥
ك ١) فالزاويتان د ب ا د ا ب هما مضاعف
د ا ب والزاوية ب د ي تعدل د ا ب د ب ا معاً (ق ٢٢ ك ١) فاذا ب د ي هي
مضاعف د ا ب وهكذا يبرهن ان 'ي د س' مضاعف د ا س فالكل ب د س
مضاعف الكل ب ا س



ثم ليكن المركز خارج الزاوية ب ا س . ارسم
ا د واخرجه الى 'ي' . فيبرهن كما تقدم ان الزاوية
ي د س هي مضاعف د ا س وان 'ي د ب' جزء
من الاولى مضاعف د ا ب جزء من الثانية فالباقية
ب د س مضاعف الباقية ب ا س

القضية الحادية والعشرون

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية

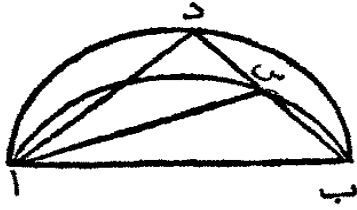


لتكن ا ب س د دائرة وب ا د ب ي د
زاويتين في قطعة واحدة منها ب ا ي د فهما متساويتان
استعلم ق مركز الدائرة واولاً لتكن القطعة
ب ا ي د اكبر من نصف دائرة . ارسم ب ق د ق
فالزاوية ب ق د عند المركز هي مضاعف الزاوية
ب ا د عند المحيط لانهما على قاعدة واحدة ب س د
(ق ٢٠ ك ٢) وب ق د ايضاً مضاعف ب ي د فاذا ا س د ا د تعدل ب ي د

القضية الثالثة والعشرون ن

لا تكون قطعتان متشابهتان على جانب واحد من خطٍ مستقيم بدون ان تتطابقا

ان كان ممكناً لتكن اس ب اد ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من



الخط المستقيم اب وغير متطابقتين. فمن حيث ان الدائرتين اد ب اس ب نثقاطعان في اوب فلا يمكن ان نثقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٢) وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى

فلتقع اس ب داخل اد ب وارسم الخط ب س د وايضاً س اودا. فمن حيث ان القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حد ٩ ك ٢) فالزاوية الخارجة اس ب تعدل الداخلة المقابلة اد ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)

القضية الرابعة والعشرون ن

قِطْعَةٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية

لتكن اي ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين



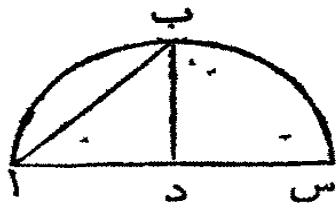
اب وس دفهما متساويتان لانه اذا وضعت القطعة اي ب على القطعة س ق د

بجيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط اب على الخط س د فالنقطة ب تقع على النقطة د لأن اب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة اي ب على القطعة س ق د (ق ٢٢ ك ٢) فتعدلها

القضية الخامسة والعشرون ع

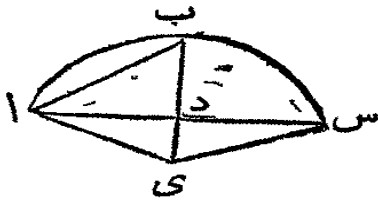
اذا فرضت قطعة من دائرة فعلينا ان نتممها

لتكن اب س قطعة دائرة فعلينا ان نتم الدائرة



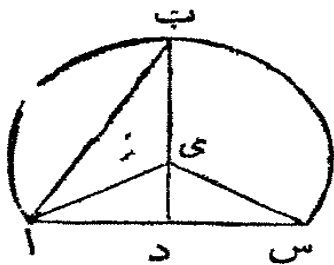
نصف اس في د (ق ١٠ ك ١) ومن د ارسم دب
عموداً على اس (ق ١١ ك ١) وارسم اب
ثم اولاً لتكن الزاويتان اب د د ب ا د متساويتين
فالمخطوطا د يعدل ب د (ق ٦ ك ١) ويعدل د س ايضاً

فالمخطوط الثلثة ا د ب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢)
واذا جعلت د مركزاً وواحداً من هذه المخطوط الثلثة نصف قطر تم الدائرة التي
كانت اب س قطعة منها. ومن حيث ان المركز واقع في اس فالقطعة اب س
انما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان اب د ب ا د غير متساويتين
ارسم الزاوية ب ا ي حتى تعدل اب د (ق ٢٢ ك ١)
وان لزم فاخرج ب د الى ي وارسم ي س. فمن حيث
ان ب ا ي تعدل اب ي فالمخطوط ا ي يعدل ب ي

(ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ا د يعدل د س و د ي مشترك بين المثلثين ا د ي س
د ي فالضلعان ا د د ي يعدلان الضلعين س د د ي اعني كل واحد يعدل
نظيرة والزاوية ا د ي تعدل س د ي لانها قائمتان فالقاعدة ا ي تعدل القاعدة
ي س (ق ٤ ك ١) و ا ي يعدل ب ي حسباً تقدم فالمخطوط الثلثة ا ي ب ي س
ي متساوية وي مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢) التي كانت اب س قطعة منها واذا كانت
الزاوية اب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة اب س
اعني انها اصغر من نصف دائرة

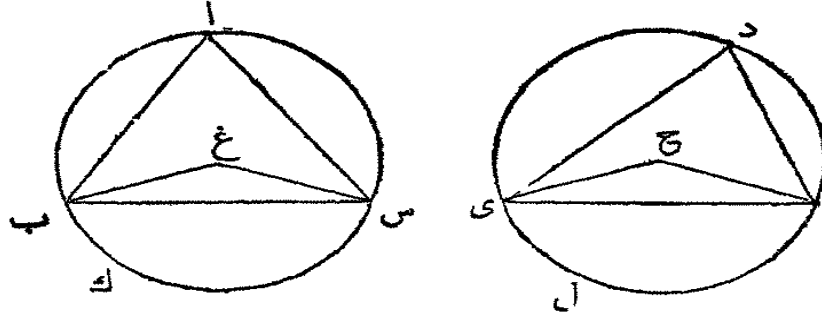


واذا كانت اب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع
داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دائرة وهكذا تم
الدائرة اذا قُرِضَتْ قطعة منها

القضية السادسة والعشرون . ن

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على اقواس متساوية ان كانت تلك
الزوايا في المركز او في المحيط

لكن ا ب س دى ف دايرتين متساويتين وب غ س ي ح ف زاويتين



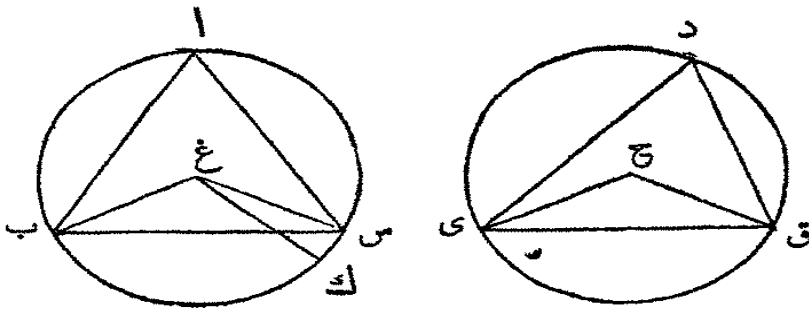
متساويتين في
المركز . وب ا س
ى د ف زاويتين
متساويتين في ف
المحيط . فالقوس ب

ك س يعدل القوس ل ف ا رسم الوترين ب س ي ف . فمن حيث ان الدائرتين
متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيهما متساوية . فالخطان ب غ س
يعدلان ي ح ح ف والزاوية ب غ س تعدل ي ح ف فالقاعدة ب س تعدل
القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالقطعة
ب ا س تشابه القطعة ي د ف (حد ٩ ك ٣) وهما على الخطين المتساويتين ب س
ى ف والقطع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٢٤ ك ٣) فالقطعة
ب ا س تعدل القطعة ي د ف . ولكن كل الدائرة ب ا س تعدل الكل ي د ف
فالبقية ب ك س تعدل البقية ي ل ف

القضية السابعة والعشرون . ن

زوايا واقعة على اقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية ان
كانت في المركز او في المحيط

في الدائرتين المتساويتين ا ب س دى ق لتكن الراويتان في المركز ب غ س



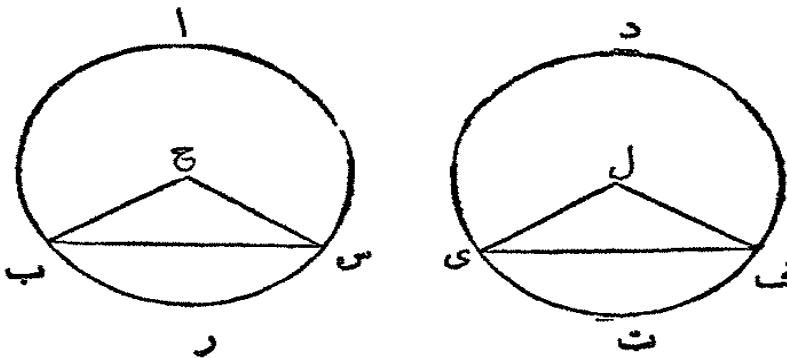
ي ح ق والزويتان
في المحيط ب ا س
ي د ق على القوسين
المتساويين ب س ي
ق فالزاوية ب غ س

تعديل ي ح ق وب ا س تعديل ي د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ي ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٢) ان ب ا س
تعديل ي د ق والا فتكون احدها اكبر من الاخرى. لتكن ب غ س اكبرها وعلى
النقطة غ من الخط المستقيم ب غ ا رسم الزاوية ب غ ك حتى تعديل ي ح ق (ق ٢٢
ك ١). فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المركزي على اقواس متساوية (ق ٢٦
ك ٢) فالقوس ب ك يعدل القوس ي ق. وقد فرض ان ي ق يعدل ب س
فالقوس ب ك يعدل ب س ايضاً اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال. فلا يمكن
ان تكون ب غ س ي ح ق غير متساويتين ايها متساويتان. والزاوية عند ا هي
نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ي ح ق فالزاوية عند ا تعديل
الزاوية عند د

القضية الثامنة والعشرون

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية الاكبر
يعديل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر



ليكن ب س
ي ف خطين مستقيمين
متساويين في دائرتين
متساويتين ا ب س
د ي ف وليقطعا
القوسين الاكبرين

ب ا س ي د ف والاصغرين ب س ي ث ف فالقوس ب ا س يعدل ي د ف

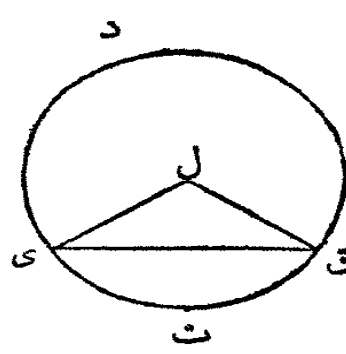
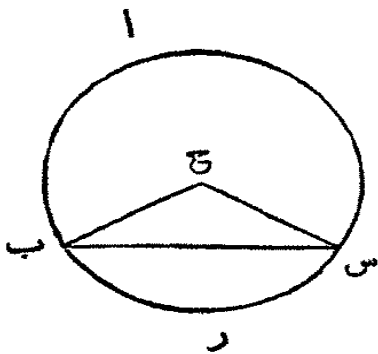
وب رس يعدل ي ت ف

استعلم المركزين ح ول (ق ١ ك ٢) وارسم ح ب ح س ل ي ل ف. فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزهما هي متساوية فالخطان ب ح ح س يعدلان ي ل ل ف. وقد فُرض ان القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ف (ق ١ ك ١) والزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالقوس ب رس يعدل القوس ي ت ف والدائرة ا ب س تعدل الدائرة د ي ف فالباقي ب ا س يعدل الباقي ي د ف

القضية التاسعة والعشرون ن

اقواس متساوية في دوائر متساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية

لكن ا ب س د ي ق دائرتين متساويتين والقوسان ب رس ي ت ق

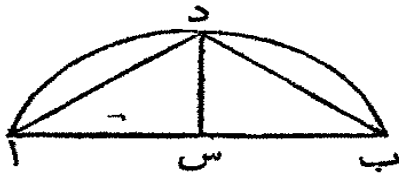


متساويتين فالخطان المستقيمان المقابلان لهما ب س ي ق ايضاً متساويان استعلم المركزين ح ول (ق ١ ك ٢)

وارسم ح ب ح س ل ي ل ق. فمن حيث ان القوس ب رس يعدل القوس ي ت ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ق (ق ٢٧ ك ٢) وح ب ح س يعدلان ي ل ق لانها أنصاف اقطار دائرتين متساويتين فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ق (ق ٤ ك ١)

القضية الثلاثون ع

علينا ان ننصف قوساً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين متماثلين



ليكن ا د ب القوس المفروض . فعلينا ان نصفه
ارسم ا ب ونصفه في س (ق ١٠ ك ١) وارسم
س د عموداً على ا ب وارسم ا د ب فقد تنصّف
القوس ا د ب في النقطة د

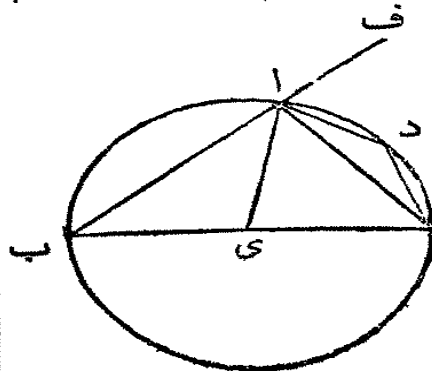
لان اس يعدل س ب وس د مشترك بين المثلثين اس د ب س د والزاوية
اس د تعدل الزاوية ب س د لأن كل واحدة منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة
ب د (ق ٤ ك ١) والمحاور المستقيمة المتساوية تقطع اقواساً متساوية (ق ٢٨ ك ٣)
والأكبر يعدل الأكبر والأصغر يعدل الأصغر وكل واحد من ا د ب د اصغر من
نصف دائرة لأن د س يمر بالمركز (فرع ق ١ ك ٢) فالقوس ا د يعدل القوس د ب
فقد تنصف ا د ب في د

تعليقة . وعلى هذه الكمية كل واحد من النصفين ا د ب يتنصف ايضاً
فيقسم قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهم جراً

القضية السادسة والثلاثون . ن

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة أكبر من
نصف دائرة هي اصغر من قائمة والمرسومة في قطعة اصغر من نصف
دائرة هي أكبر من قائمة

ليكن ا ب س د دائرة و ب س قطرها و ي مركزها . ارسم س ا الذي يقسم



الدائرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا
ا د د س . فالزاوية في نصف الدائرة ب ا س هي
قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي أكبر من
نصف الدائرة فاصغر من قائمة والزاوية في القطعة س
ا د س التي هي اصغر من نصف الدائرة فأكبر من قائمة
ارسم ا ي واخرج ب الى ف . فمن حيث

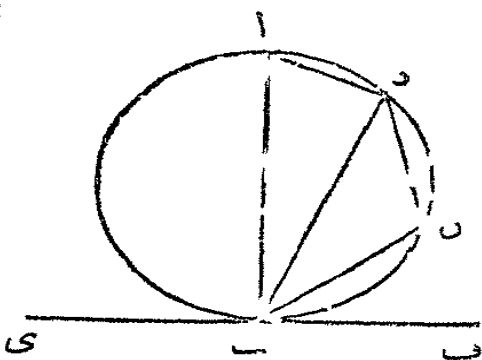
ا ب س ي يعدل ا ي فالزاوية ا ب س ي ا (ق ٥ ك ١) ولأن س ي

يعدل اي فالزاوية ي س ا تعدل ي اس ف لكل ب اس يعدل الزاويتين
 اب س اس ب، ولكن الزاوية ف اس الخارجة من المثلث اب س تعدل
 الزاويتين اب س اس ب (ق ٢٣ ك ١) فالزاوية ب اس تعدل ف اس وكل
 واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فالزاوية ب اس في نصف الدائرة انما هي قائمة
 ومن حيث ان الزاويتين اب س ب اس من المثلث اب س هما معاً اقل
 من قائمتين (ق ١٧ ك ١) وب اس قائمة فتكون اب س اصغر من قائمة فالزاوية
 في القطعة اب س التي هي اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة
 ومن حيث ان اب س د هو ذو اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنين من
 زواياه المتقابلة تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) فالزاويتان اب س اد س تعدلان
 معاً قائمتين وقد تبرهن ان اب س اصغر من قائمة فتكون اد س اكبر من قائمة
 فرح. يتضح من هذه القضية ان زاوية واحدة من مثلث ان عدلت بمجتمع الاخرين
 فهي قائمة لان الزاوية التي تليها تعدل الاخرين ايضاً ومتي كانت الزاويتان
 المتواليتان متساويتين فكل واحدة منها قائمة

القضية الثانية والمثلثون ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم قاطع
 الدائرة فالزوايا الحادثة بين الماس والقاطع تعدل الزوايا في القطع
 المتبادلة من الدائرة

ليكن الخط المستقيم ي ف مماساً للدائرة اب س ر ومن ب نقطة الماسة يرسم
 الخط المستقيم ب د قاطعها فالزاوية ف ب د
 تعدل الزاوية في القطعة د ا ب المتبادلة
 والزاوية د ب ي تعدل الزاوية في القطعة
 ب س د المتبادلة



من القطعة ب ا رسم ب ا عموداً على ي
 ف (ق ١١ ك ١) وفي القوس ب د ي انما

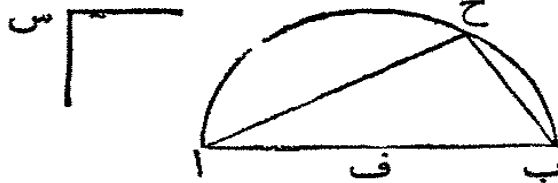
نقطة شئت كالنقطة س وارسم الخطوط المستقيمة ا د د س س ب . فمن حيث ان الخط المستقيم س ب يمس الدائرة ا ب س د في النقطة ب وقد رُسم ب ا عموداً على المماس من نقطة الماسة فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٢) والزاوية ا د ب هي في نصف دائرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٢) والزاويتان الاخرتان د ا ب ا ب د تعدلان قائمة (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب د قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة من الدائرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذوا رعة اضلاع في دائرة فالزاويتان المتقابلتان ب ا د ب س د معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) ولذلك تعدلان ايضاً د ب ف د ب س (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية د ب س تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدائرة



القضية الثالثة والثلاثون . ع

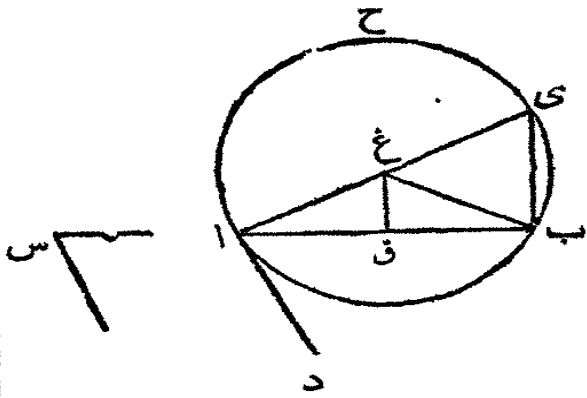
علينا ان نرسم على خطٍ مستقيم مفروض قطعةً دائرةٍ فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية عند س اولاً لتكن الزاوية عند س قائمة .



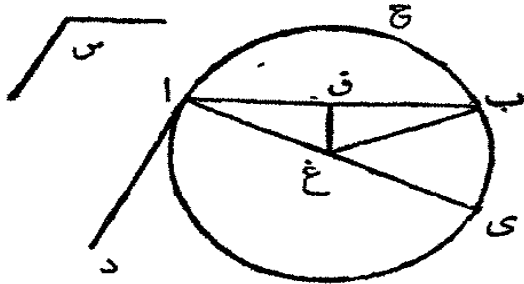
نصِّف ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل ف مركزاً و ف ب بعداً وارسم الدائرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في صف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س

ثانياً ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية ب ا د تعدل س (ق ٢٢ ك ١) ومن النقطة ا رسم ا س عموداً على ا د (ق ١١ ك ١)



نصِّفْ ا ب في ق (ق ١٠ ك ١) ومن ق ا رسم ق غ عموداً على ا ب (ق ١١ ك ١) وارسم غ ب. فمن حيث ان ا ق يعدل ق ب و ق غ مشترك بين المثلثين ا ق غ ب ق غ فالضلعان ا ق ق غ يعدلان الضلعين ب ق ق غ والزوايا ا ق غ تعدل ب ق غ

فالقاعدة ا غ تعدل القاعدة غ ب (ق ٤ ك ١) والدائرة المرسومة على المركز ع وعلى



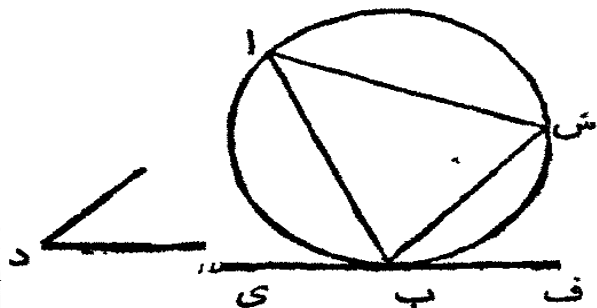
البعْد غ ا تمر في النقطة ب. فلتكن ا ح ب هذه الدائرة. فمن حيث انه قد رُسم ا د عموداً من طرف القطر ا ي فهو مماس الدائرة (فرع اول ق ١٦ ك ٢) ومن حيث انه قد رُسم القاطع ا ب من نقطة المماس فالزاوية

د ا ب تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية د ا ب تعدل الزاوية عند س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب. فقد رُسم على الخط المستقيم المفروض ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

القضية الرابعة والثلاثون ع

علينا ان نقطع من دائرة مفروضة قطعة فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة. علينا ان نقطع



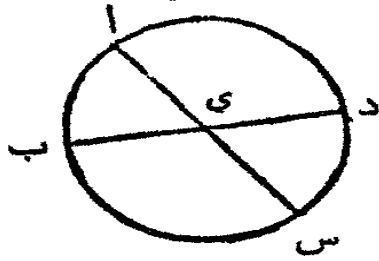
من الدائرة ا ب س قطعة فيها زاوية تعدل الزاوية عند د. ارسم المماس ي ف (ق ١٧ ك ٢) حتى يمس الدائرة في النقطة ب ومن النقطة ب في الخط ي ف اجعل الزاوية ف ب س تعدل د

(ق ٢٢ ك ١). فمن حيث ان الخط المستقيم ي ف يمس الدائرة ا ب س وقد رسم من نقطة الماسة الخط ب س قاطعاً فالزاوية ف ب س تعدل الزاوية في القطعة ب ا س المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية ف ب س تعدل الزاوية عند د فالزاوية في القطعة ب ا س تعدل الزاوية عند د فقد قُطِعَت من الدائرة ا ب س القطعة ب ا س فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند د

القضية الخامسة والثلاثون

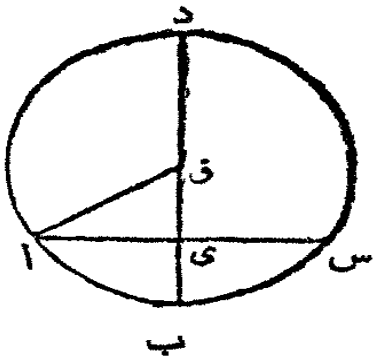
اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة فالقائم الزوايا مسطح قسبي احدها يعدل القائم الزوايا مسطح قسبي الآخر

ليتقاطع الخطان المستقيمان ا س ب د في الدائرة ا ب س د في النقطة ي فالقائم الزوايا ا ي في ي س يعدل القائم الزوايا ب ي في ي د



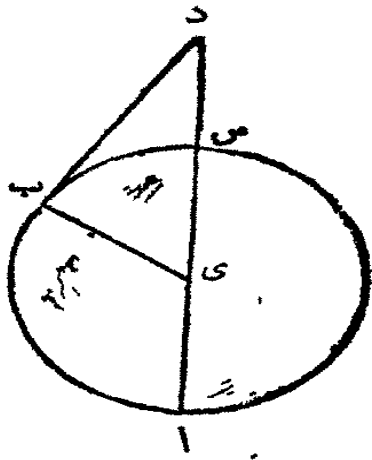
اذا مر كل واحد منها في المركز وكان ذلك المركز ي فالامر واضح ان الخطوط ا ي ي س ب ي ي د متساوية والقائم الزوايا ا ي في ي س يعدل القائم الزوايا ب ي في ي د

ثم لنفرض مرور احدها ب د في المركز وليكن عموداً على الاخر ا س الذي لا



يمر بالمركز وليقطع في النقطة ي. فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز الدائرة (فرع ق ١ ك ٢) ا رسم ا ق. فمن حيث ان الخط ب د المار بالمركز هو عمود على ا س الذي لا يمر بالمركز ويقطعه في ي فالقسمان ا ي ي س متساويان (ق ٢ ك ٢) ومن حيث ان الخط المستقيم ب د قد انقسم الى قسمين متساويين في ق

وغير متساويين في ي (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا ب ي ي ق = ا ي ي ق = ا ق ولكن ا ق = ا ي + ي ق فالقائم الزوايا ب ي ي د = ا ي + ي د

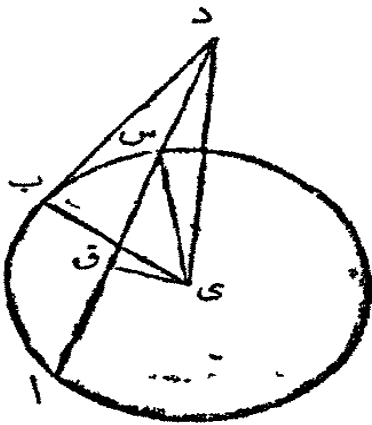


لكن د نقطة خارج الدائرة ا ب س وليرسم منها
الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم
د ب حتى يسها فالقائم الزوايا ا د س د س يعدل مربع
د ب

اولاً لنفرض ان د س ا يمر بالمركز ا رسم ي ب
فالزاوية ي ب د دائما هي قائمة (ق ١٨ ك ٢) ومن حيث
ان الخط المستقيم ا س قد تنصف في ي واخرج الى د
فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي د (ق ٦ ك ٢)

وي س = ي ب فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي د ولكن ي د = ي ب
+ ب د (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي ب + ب د . اطرح
من الجانبين ي ب فالباقي ا د س د س = ب د

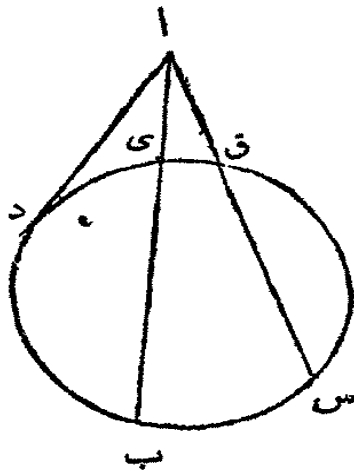
ثانياً ان لم يمر د س ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركزي (ق ١ ك ٢)



وارسم ي ق عموداً على ا س (ق ١٢ ك ١) وارسم ي ب
ي س ي د . فمن حيث ان الخط المستقيم المار بالمركز
ي ق هو عمود على الخط المستقيم ا س الذي لا يمر
بالمركز فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فالقسم ا ق يعدل
القسم ق س . فمن حيث ان الخط المستقيم ا س قد
تنصف في ق واخرج الى د (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا
ا د س د س + ق س = ق د . اضف اليها ق ي فالقائم

الزوايا ا د س د س + ق س + ق ي = ق ي + ق د + ق ي وي س = ق س + ق ي
وي د = ق د + ق ي (ق ٤٧ ك ١) لان د ق ي قائمة . فالقائم الزوايا ا د س
+ ي س = ي د . ومن حيث ان ي ب د قائمة ي د = ي ب + ب د = ي س +
+ ب د فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي س + ب د + ب د =
ب د

فروع اول . اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان فاطعان مثل ا ب ا س



فالشكلان القائم الزوايا مسطحا كل خط في القسم منه
الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا
 \times ا ح = ا د \times ا ق لان كل واحد منها يعدل مربع
الخط المستقيم ا د الذي يمس الدائرة

فرع ثانٍ . ماسان مرسومان من نقطة واحدة هما
متساويان

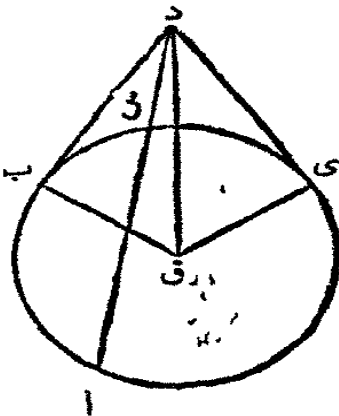
فرع ثالث . بما ان نصف القطر الواقع على
نقطة الماسة هو عمود على الماس فبالضرورة الزاوية

الواقعة بين ماسين مرسومين من نقطة واحدة تنتصف بخط مستقيم مرسوم من
مركز الدائرة الى تلك النقطة لانه وتر مشترك بين مثلين متساويين قائمي الزاوية

القضية السابعة والثلاثون .

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
والاخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطحا كل الخط القاطع في الجزء منه
الواقع خارج الدائرة ان عدل مربع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط
ماس الدائرة

لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب ح وليرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى
يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم
الزوايا ا د \times د س ان عدل مربع د ب فالخط د ب
يمس الدائرة



ارسم الخط المستقيم د ح حتى يمس الدائرة (ق ١٧
ك ٣) واستعلم المركز ق وارسم ق ب ق د ق ح فالزاوية
ق ح د قائمة (ق ١٨ ك ٣) ومن حيث ان د ح يمس
الدائرة ا ب س ود س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د \times

د س يعدل مربع د ح (ق ٢٦ ك ٣) وقد فرض ان القائم الزوايا ا د \times د س يعدل

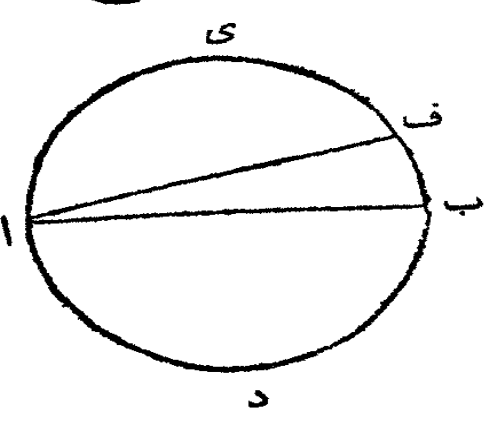
مربع د ب ف مربع د ي يعدل مربع د ب والخط المستقيم د ي يعدل الخط المستقيم
 د ب . وق ي = ق ب فالخطان د ي ي ق يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق
 مشتركة بين المثلثين د ب ق د ي ق فالزاوية د ي ق تعدل الزاوية د ب ق
 ر ق ٨ ك ١) ولكن د ي ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضا قائمة وب ق اذا
 اُخرج يكون قطراً للدائرة والخط الذي يُجَدِّد مع القطر من طرفه زاوية قائمة فهو
 يس الدائرة (ق ١٦ ك ٢) فالخط د ب هو ماس الدائرة ا ب س

مضافات الى الكتاب الثالث

قضية ١٠ ن

قطر الدائرة يقسمها ومحيطها الى قسمين متماثلين . وبقلب الخط الذي
 يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

ليكن ا ب قطر الدائرة ا ي ب د فالقسمان ا ي ب ا د ب متماثلان محيطاً
 ومساحةً . فان وُضِعَ الشكل ا ي ب على الشكل
 ا د ب وقيت قاعدتها المشتركة ا ب على
 وضعها فالخط المحي ا ي ب يقع على الخط
 المعني ا د ب و الألكات في احدها نقط
 مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حد الدائرة
 وبقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى
 قسمين متماثلين هو قطر

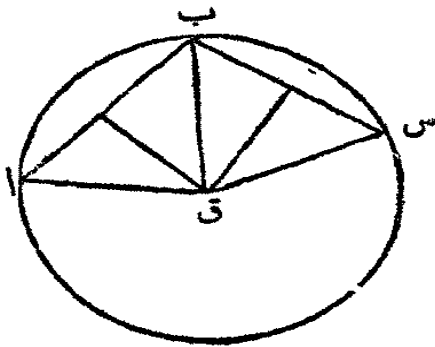


لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة ا ي ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز
 في ا ب فليُرَسَمَ ا ف ماراً في المركز . فهو اذاً قطر ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين .
 فالقسم ا ي ف يعدل القسم ا ي ف ب وذاك محال
 فرج . قوس وتره قطر هو نصف محيط . والشكل المحاط بهذا القوس مع وتره
 هو نصف دائرة

قضية ب. ن

يمكن ان تُرسم دائرة واحدة محيطها مارٌ بثلاث نُقطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍ واحد مستقيم. ولا تُرسم الا دائرة واحدة محيطها ماٌ بهذه النُقط الثلاث

لتكن ا ب س النقط الثلاث المروضة ولا تكون في خطٍ واحدٍ مستقيم فهي في محيط دائرة واحدة



ارسم ا ب و ب س وتصّفهما في دوى بالعمودين د ق ي ق اللذين لا بدّ من النقيضهما في نقطة ما كالنقطة ق. لانه لو كانا متوازيين لكان د ب ب ي متوازيين ايضاً (فرع ٢ ق ٢٩ ك ١) او كانا في خطٍ واحد مستقيم ولكهما

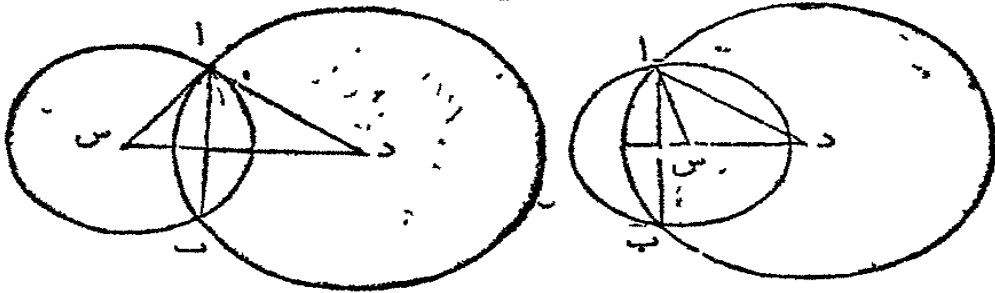
النقيا في ب و ا ب س ليس خطاً مستقيماً حسب المروض اولاً. ارسم ق ا ق س ق ب. فمن حيث ان ق ا ق ب يلاقيان ا ب على بعدٍ واحدٍ من العمود فهما متساويان. ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضاً فالنقط الثلاث ا ب س هي على بعدٍ واحدٍ من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق والامر واضح انه لا يمر بهذه النقط محيطٌ آخر. لانّ المركز واقع في العمود د ق الذي ينصف الوتر ا ب. وهو ايضاً في العمود ق ي الذي ينصف الوتر ب س (فرع ١ ق ٢ ك ٢) فلا بدّ من وقوعه عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركزاً واحداً لا يكون الا محيط واحد

قضية ج. ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخطُ المستقيم المارٌ بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين تقاطعي التقاطع وينصفه

ليكن س د الخط المستقيم الموصل بين مركزيه دائرتين متقاطعتين. فهو

عموداً على الوتر اب الموصل بين نقطتي التقاطع



لأن
الخط اب
الموصل
بين
نقطتي

التقاطع هو وتر مشترك بين الدائرتين وإذا رسم عموداً من وسط هذا الوتر يمر بكل واحد من المركزين س ود (فرع ا ق ٢ ك ٢) ولا يمكن ان يرسم أكثر من خط واحد مستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين. فالخط المار بمركزيهما ينصف الوتر ويحدث معه قائمتين اي يكون عموداً عليه

فرع ٢. الخط المستقيم الموصل بين نقطتي تقاطع دائرتين هو عموداً على الخط المستقيم الموصل بين مركزيهما

تعليقة. اولاً. اذا تقاطعت دائرتان فالبعد بين مركزيهما هو اقصر من مجموع نصفي قطريهما. ونصف القطر الاطول هو اقصر من مجموع نصف القطر الاقصر مع البعد بين المركزين. لأن س د هو اقصر من س ا + ا د (ق ٢ ك ١) و ا د > س ا + س د

ثانياً. بالقلب. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اقل من مجموع نصفي قطريهما وكان نصف القطر الاطول اقصر من نصف القطر الاقصر مع البعد بين المركزين فالدائرتان تتقاطعان

لانه لكي يكون التقاطع ممكناً يازم ان يكون المثلث س ا د ممكناً ولذلك يلزم ان يكون س د > س ا + ا د وان يكون نصف القطر الاطول ا د > س ا + س د. واذا كان المثلث س د ممكناً فالامر واضح ان الدائرتين المرسومتين على المركزين س ود تتقاطعان في ا و ب

فرع اول. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين أكثر من مجموع نصفي قطريهما فالدائرتان لا تتقاطعان

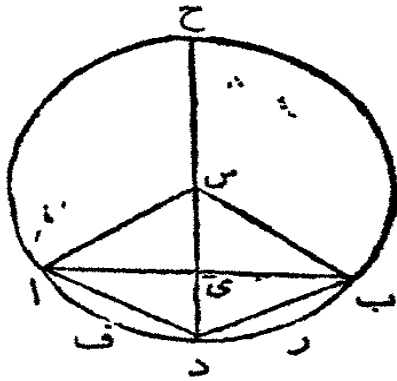
فرع ثان. اذا كان البعد بين المركزين اقل من فضله نصفي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان. لأن س د < ا د فاذا س د < ا د - س ا اي ضلع من مثلث

هو اطول من فضلة الضلعين الآخرين . فالمثلث غير ممكن متى كانت البعد بين
المركزين اقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك ان تقاطع القطران

قضية د . ن

في دائرة واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها اقواس متماثلة وبالقلب
الاقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لتكن س مركز الدائرة . والزاوية اس د فلتعدل ب س د . فالقوس ا ف د



الذي يقابل الزاوية الواحدة يعدل القوس ب ر د
الذي يقابل الزاوية الاخرى

ارسم ا د و د ب . فالمثلثان اس د ب س د
ها متساويان لأن ضلعين وزاوية من الواحد تعدل
ضلعين وزاوية من الآخر فاذا وُضع احدها على
الآخر يتطابقان والنقطة ا تقع على النقطة ب .
والنقطة د انما هي مشتركة بين القوسين . فطرفنا

القوس ا ف د يقعان على طرفي القوس ب ر د فلا بُدَّ من مطابقتهم بقية اجزائهم لأنهما
على بُعد واحد من المركز

وبالقلب لنفرض مساواة القوسين ا ف د ب ر د . فالزاوية اس د = ب س د .
لأنه اذا وُضع احد القوسين على الآخر يتطابقان . وطرفا الوتر ا د يقعان على طرفي
الوتر ب د فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية اس د = ب س د

فرع اول . الزوايا المتساوية في المركز يقابلها اوتار متساوية . وبالقلب الاوتار
المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرع ثانٍ . الاوتار المتساوية تقابل اقواساً متساوية . وبالقلب الاقواس المتساوية
تقابل اوتاراً متساوية

فرع ثالث . اذا تنصفت الزاوية في المركز فالقوس والوتر اللذان يقابلانها
ينصفان ايضاً

فرع رابع . العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويمر ايضاً بوسط

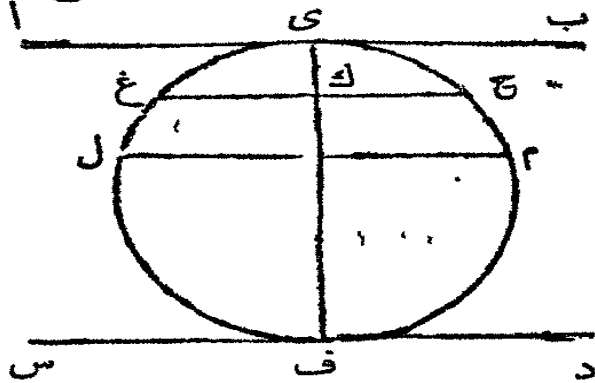
القوس الذي يقابلة الوتر
 تعليفة. المركز س والنقطة ي التي هي وسط الوتر ا ب والنقطة د التي هي
 وسط القوس الذي يقابلة الوتر المذكور هي تلك نُقطة في خطٍ عموديٍّ على الوتر.
 ولكن الخطَّ المستقيم يتعيَّن وضعه بنقطتين. فكل خطٍ يمرُّ باثنتين من هذه النقط
 الثلاث يمرُّ بثالثها ايضاً ويكون عموداً على الوتر

قضية ٥٠٥

قوسان بين خطين متوازيين هما متساويان. وبالقلب اذا وقع بين
 خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطان
 متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخطان المتوازيان مماسين مثل ا ب و س د. فكل واحد من
 القوسين بينها نصف دائرة لأنَّ نقطتي الماسة هما طرفا القطر (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢)
 الثاني متى كان احد الخطين مماساً مثل ا ب والآخر وترًا مثل غ ح. وهو عمود
 على ف ي الذي ينصف القوس غ ي ح (فرع ٤ ق د ك ٢) فالقوسان بينهما غ ي
 ح ي متساويان



ثالثاً متى كان الخطان المتوازيان
 وترين مثل غ ح ول م
 فلنفرض ان القطر ف ي عمود
 على غ ح. فيكون عموداً على ل م ايضاً
 لانها متوازيان. والقطر ينصف كل

واحد من القوسين اللذين يقابلان هذين الوترين اي غ ي = ح ي ول ي = م ي

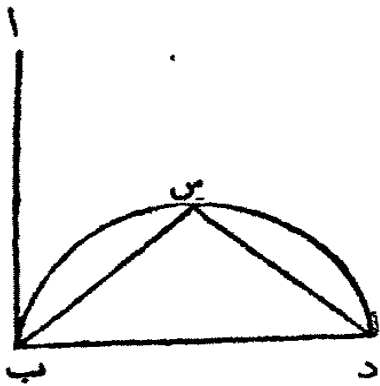
فبالضرورة ل ي = غ ي = م ي = ح ي اي غ ل = ح م

ثم بالقلب. اذا كان الخطان ا ب س د مماسين وكان القوسان ل م ف ي م ف
 متساويين يكون ي ف قطرًا (ق ١ ك ٢) و ا ب س د متوازيين (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢)

وإذا كان احدهما ا ب ماساً والآخر غ ح قاطعاً وكان القوسان ي غ ي ح
 متساويين يكون القطر ف ي الذي ينصف القوس ي غ ي ح عموداً على وتر
 ي غ ح (تعليقة ق د ك ٢) وعلى ماساً ا ب ف هما متوازيان
 وإذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل ي غ ح ول م وكان القوسان غ ل خ م بينهما
 متساويين فلنرض ان القطر ف ي ينصف احدهما مثل غ ح في ك فهو ينصف
 القوس ي غ ي ح ايضاً اي ي غ = ي ح وقد قرض ان غ ل = ح م فالكل ي ل =
 الكل ي م فالوتر ل م قد تنصف بالقطر ف ي . فقد تنصف كلا الوترين بالقطر
 ف ي وها اذ ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)
 تعليقة . لا بد ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يتقاطعان في الدائرة لان
 خطين مستقيمين ما زبن في ي غ م وح ل يقطعان اقواساً متساوية غ ل ح م ولا يكونان
 متوازيين

قضية و . ع

علينا ان نرسم ماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال
 المركز



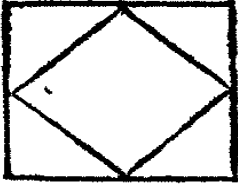
لتكن ب النقطة المفروضة . قس جزءين متماثلين
 من القوس مثل ب س س د . ا رسم ب د وايضاً
 الوترين ب س س د واجعل الزاوية س ب ا
 تعدل س ب د (ق ٢٢ ك ١) فيكون الخط المستقيم
 ب ا الماس المطلوب
 لان الزاوية س ب د = س د ب فالزاوية

س ب ا = س د ب (ق ٢٢ ك ٢) التي هي في القطعة المتبادلة فاذا ب ا هو ماس
 في النقطة ب

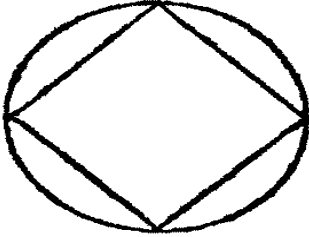
اصول الهندسة

الكتاب الرابع

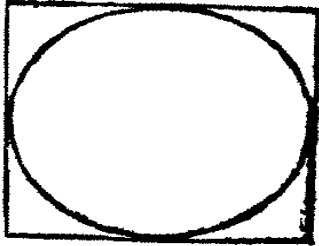
حدود



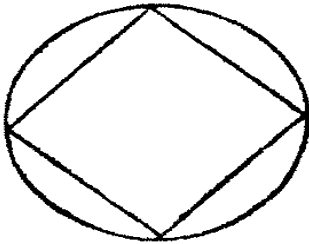
١ في شكلين اضلاعها مستقيمة متى كانت زوايا احدها في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسوم في الآخر
٢ اذا مرت اضلاع شكل في زوايا شكل آخر يقال ان الواحد يحيط بالآخر



٣ متى كانت زوايا شكل ذي اضلاع مستقيمة في محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة



٤ شكل ذو اضلاع مستقيمة يحيط بدائرة متى كانت اضلاعه مماسات لمحيط الدائرة



٥ اذا مس محيط دائرة كل ضلع من اضلاع شكل ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل

٦ الدائرة تحيط بشكل ذي اضلاع مستقيمة متى مر محيطها بزوايا الشكل

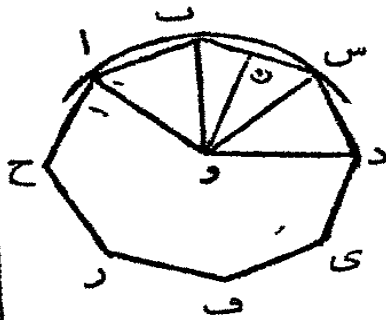
٧ اذا انتهى طرفا خط مستقيم في محيط دائرة يقال انه موضوع او مرسوم في الدائرة

٨ شكل ذو زوايا كثيرة متى كان له خمسة اضلاع يسمى ذا خمس زوايا ويسمى ذا ست زوايا متى كان له اضلاعه ستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعه سبعة وهلم جرا
٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعه ورواياه متساوية يسمى قياسيا

سابقة

يمكن ان يرسم في دائرة او محيطاً بها اي شكل ذي اضلاع كثيرة
قياسي فرض

ليكن اب س ي ح شكلاً قياسياً اذا اضلاع كثيرة. ارسم دائرة محيطها ماراً بالقطر



الثلث اب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة
و وليكن ون عموداً من المركز على وسط ب س. ارسم
او دو

فاذا وضع ذو الاضلاع الاربعة ون س د على
ذوي الاضلاع الاربعة ون ب ا بتطابقان. لأن الضلع
ون مشترك بين الشكلين والزاوية ون س = ون ب

لأنهما قائمتان. فالضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب
لأن ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسي فالزاوية ن س د = ن ب ا فالخط س د
يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا الآن س د = ب ا. فالشكلان يتطابقان
والخط و د = و ا والمحيط الذي يمر في القطر ا ب س يمر ايضاً في النقطة د. وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المار في ب س د يمر في ي ايضاً وفي كل زوايا
الشكل المفروض فهو ادا مرسوم في الدائرة

تم اذا تم الشكل والدائرة كما تقدم ترى الاضلاع اب ب س س د الى اخره
انها اوتار متساوية وهي على بعد واحد من المركز (ق ٤ الك ٢) فاذا جعلت النقطة و
مركزاً للعمود ون بعداً ورسمت دائرة محيطها بمس الضلع ب س في وسطه وهكذا
في جميع اضلاع الشكل فترسم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة
فرع اول. اذا فرض شكل قياسي فيمكن ان ترسم دائرة فيه واخرى محيطة به
ويكون لهما مركز واحد

فرع ثان. اذا امكن ان ترسم دائرة في شكل مفروض واخرى محيطة به فالشكل
قياسي

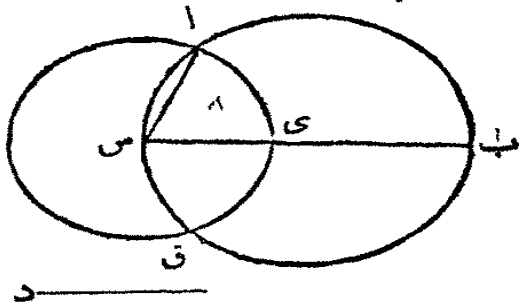
تعلقة اول. النقطة و هي مركز الدائرة اي المحطة بالمثل والمرسومة فيه فهي
ايضاً مركز الشكل. وسمى الزاوية ا و ب الزاوية في المركز وهي مصطعة من بصفي

قطرين مرسومين من طرفي الضلع ا ب
 بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية. فتستعمل كمية كل
 واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل
 تعليقة ثانية. اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسياً مفروضاً عدد اضلاعه في دائرة
 مفروضة فلنقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر
 الشكل في ق ١٥ ك ٤)

القضية الاولى ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً يماثل خطاً مستقيماً مفروضاً
 ليس اطول من قطر الدائرة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الخط المستقيم المفروض

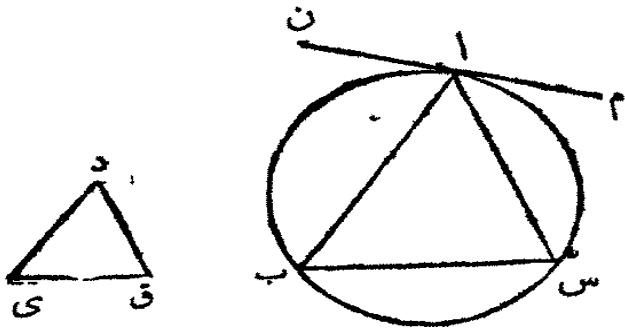


ارسم ب س قطر الدائرة ا ب س ثم اذا
 ماثل ب س الخط د فقد تم العمل لانه قد
 وضع في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل د. والآن
 فالخط ب س اطول من د. اقطع الجزء
 س ي حتى يماثل د (ق ٢ ك ١) واجعل س

مركزاً وس ي بعداً وارسم الدائرة ا ي ق وارسم الخط س ا. فبما ان س مركز الدائرة
 ا ي ق فالخط اس يعدل س ي. ولكن س ي يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضاً
 فقد رُسم في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول
 من قطر الدائرة

القضية الثانية ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثاً زواياه تماثل زوايا مثلث مفروض
 لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود ي ق المثلث المفروض. علينا ان نرسم في



الدائرة ا ب س مثلثاً زواياها تعدل
زوايا المثلث د ي ق

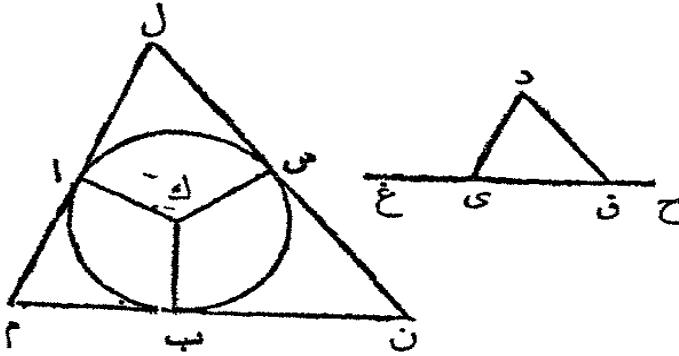
ارسم الخط المستقيم ن ا م
حتى يمسّ الدائرة في النقطة ا (ق
١٧ ك ٢) وفي النقطة ا من الخط
المستقيم ا م اجعل الزاوية م ا س

تعدل الزاوية د ي ق (ق ٢٢ ك ١) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا ن اجعل
الزاوية ن ا ب تعدل د ي ق وارسم ب س . لأنّ الخط ن ا م يمسّ الدائرة ا ب س
و ا س يقطعها فالزاوية م ا س تعدل ا ب س في القطعة المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢)
وم ا س تعدل د ي ق فالزاوية ا ب س تعدل د ي ق ولهذا السبب ا س ب
تعدل د ي ق فالزاوية الباقية من الواحد ب ا س تعدل الباقية من الاخرى د ي ق
(فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ي ق وقد رُسم
في الدائرة ا ب س

القضية الثالثة. ع

علينا ان نرسم مثلثاً يحيط بدائرة مفروضة وزواياه تعدل زوايا مثلث
مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة وليكن د ي ق المثلث المفروض. علينا ان



نرسم مثلثاً يحيط بالدائرة
ا ب س وزواياه تعدل
زوايا المثلث د ي ق
أخرج د ي ق الى
الجهتين الى غ و ح واستعلم
ك مركز الدائرة ا ب س

(ق ١ ك ٢) ومن ك ارسم خطاً مستقيماً كيفاً شئت مثل ك ب وفي النقطة ك من
الخط ب ك اجعل الزاوية ب ك ا تعدل الزاوية د ي غ (ق ٢٢ ك ١) وايضاً الزاوية

ب ك س تعدل الزاوية د ق ح . وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات ل ا م
 م ب ن ن س ل (ق ١٧ ك ٣)
 لان م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسم اليها من المركز
 ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق ١٨ ك ٣)
 والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزوايا الاربعة
 تعدل اربع زوايا قائمة . وك ا م ك ب م قائمتان فالآخران ا ك ب ب م ا تعدلان
 قائمتين والزاويتان د ي غ د ي ق تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزاويتان ا م ب
 ا ك ب تعدلان د ي غ د ي ق . ولكن ا ك ب تعدل د ي غ فالاخرى ا م ب
 تعدل الاخرى د ي ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ي
 فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الآخر اي م ل ن تعدل ي د ق (ق ٢٢ ك ١)
 فالمثلث ل م ن قد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياه تعدل زوايا المثلث د ي ق

القضية الرابعة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مثلث مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة

نصف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٤)

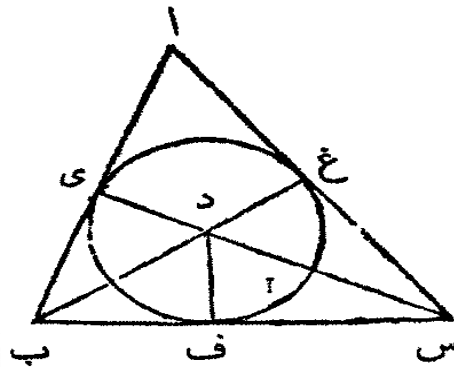
ك ٤) بالخطين المستقيمين ب د س والمقاطعين

في النقطة د . ومن دارسم الخطوط د ي د ف

د غ عمودية على الاضلاع ا ب ب س س ا

ثم لان الزاوية ي ب د تعدل ف ب د من

حيث ان ا ب س تنصفت بالخط ب د ولان



القائمة ب ي د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ي ب د لهُ زاويتان تعدلان زاويتين

من المثلث ف ب د والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشترك بين

المثلثين . فالضلعان الآخران من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر (ق ٢٦ ك ١)

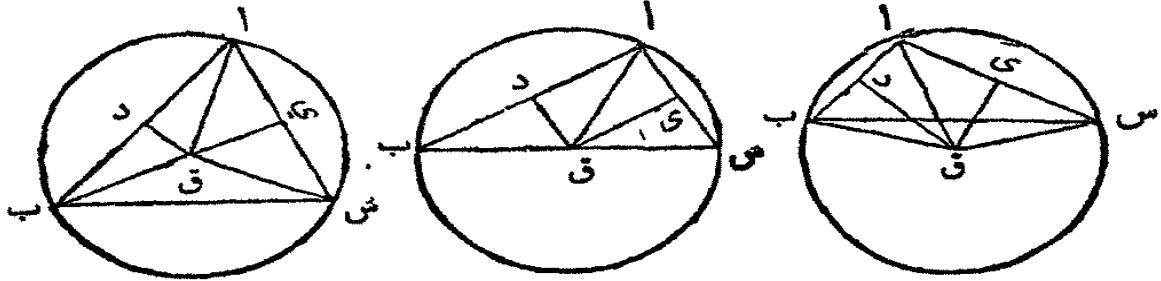
اي د ي يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضاً ان د ع يعدل د ف والخطوط الثلاثة د غ

د ف د ي متساوية واذا رسمت دائرة من المركز د وعلى بعد د ي يمر المحيط في طرفي

د ف ودغ ايضاً ويسمى الاضلاع ا ب ب س س الآن الزوايا عند هذه النقطى
 ف غ هي قائمات . والخط المستقيم العمودي على طرف القطر هو مماس (فرع اول ق
 ١٦ ك ٢) فالخطوط الثلاثة ا ب ب س س اسمس الدائرة فقد رُسمت الدائرة في
 المثلث ا ب س

القضية الخامسة . ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلث مفروض
 ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



نصف ا ب و ا س في د وى (ق ١٠ ك ١) ومن هاتين النقطتين ارسم د ق
 ي ق عمودين على ا ب و ا س (ق ١١ ك ١) فاذا اخرج د ق ي ق يلتقيان والآن
 فهما متوازيان و ا ب و ا س العموديان عليهما متوازيان ايضاً وذاك محال . فلنفرض
 التقاءهما في ق وارسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في الخط ب س فارسم ب ق س ق
 لان اد يعدل ب د و د ق مشترك بين المثلثين وعمود على ا ب فالقاعدة ا ق
 تعدل القاعدة ب ق (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل ا ق ولذلك ب ق
 يعدل س ق والخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جعلت النقطة ق
 مركزاً واحداً من هذه الخطوط بعداً فمحيط الدائرة تمر بطرفي الآخرين ونرسم حول
 المثلث

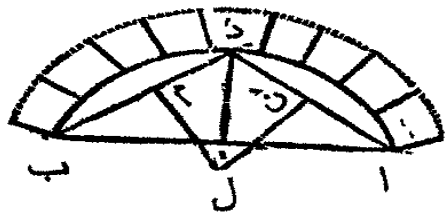
فرع . متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياه اصغر من
 قائمة لان كل واحدة منها في قطعة اكبر من نصف دائرة . ومتى كان المركز في احد
 الاضلاع فالزاوية المقابلة له قائمة لانها في نصف دائرة . ومتى وقع المركز خارج المثلث
 فالزاوية المقابلة للضلع الذي كان المركز خارجه اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

من نصف دائرة. فاذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخله وإذا كان
ذا قائمة يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز
خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة

تعليقة

(1) يتضح من هذه القضية ان الخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع
مثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

(2) بموجب هذه القضية تُرسم قطعة من قنطرة وترها وعلوها مفروضان



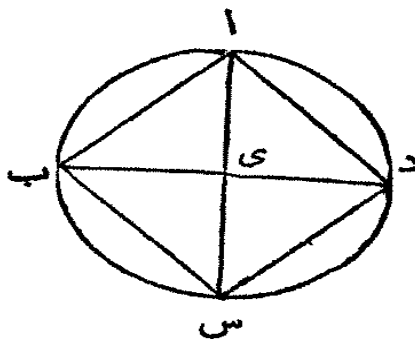
ليكن اب وترها والعمود على وسطها علوها .
ارسم ا د ب د ونصّفهما في م ون ومن م ون ارسم
عمودين ل م ل ن الملتقيين في ل مركز الدائرة .
فالخطوط ل ب ل د ل ا متساوية والحلول بين
حجارة القنطرة هي كأنها منقطة من انصاف اقطار الدائرة



القضية السادسة . ع

علينا ان نرسم مربعاً في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها مربعاً



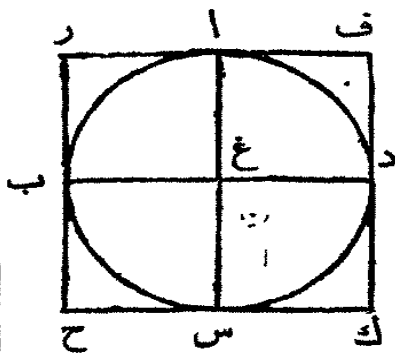
ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد
منها عموداً على الآخر . وارسم اب ب س س د دا
النقطة ي هي مركز الدائرة ولذلك ب ي
يعدل ي د وقد جعل اي عموداً على ب د والمثلثان
اب ي ا د ي لها الضلع المشترك اي فالقاعدة اب
تعديل القاعدة ا د (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان

ب س وس د بعدلان اب او ا د فالشكل اب س د متساوي الاضلاع . وهي
ايضاً قائم الزوايا . لان ب د قطر وب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٢١
ك ٣) هكذا يبرهن ايضاً ان اب س ب س ب س د س د قائمات فالشكل اب س د
قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم في الدائرة اب س د

تعلیقة. المثلث ای د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٢ ق ٤٧ ك ١)
 ا د : ای : ٢٦ : ١ ای ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذر اثنين المائل الى واحد

القضية السابعة. ع

علينا ان نرسم مربعاً محيطاً بدائرة مفروضة
 لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم مربعاً محيطاً بها

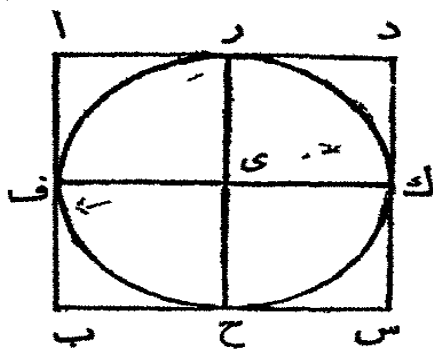


ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد
 منها عموداً على الآخر. وفي النقط ا ب س د
 ارسم المماسات رف ر ح ك ف (ق ١٧ ك ٢)
 لان رف ممس الدائرة وقد رسم غ من المركز
 الى نقطة الماسة فالزاويتان عند ا قائمتان (ق ١٨
 ك ٢) وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود

قائمات. فبا ان ا غ ب قائمة و غ ب كذلك فالخط ر ح يوازي ا س وهكذا يبرهن
 ان ا س يوازي ف ك وان ر ف و ح ك يوازيان ب د فالاشكال ر ك س ا ك
 ف ب ب ك هي متوازية الاضلاع ورف يعدل ح ك (ق ٢٤ ك ١) و ر ح يعدل
 ف ك. ومن حيث ان ا س يعدل ب د و يعدل ر ح و ف ك ايضاً و ب د يعدل
 ر ف و ح ك فالخطان ر ح ف ك يعدلان ر ف ا و ح ك فالشكل ف ر ح ك متساوي
 الاضلاع. وهو ايضاً قائم الزوايا. لان ر ب غ ا متوازي الاضلاع و ا غ ب قائمة
 تكون ا ر ب ايضاً قائمة (ق ٢٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند
 ح و ك وف قائمة فالشكل ف ر ح ك قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع
 فهو مربع وقد رسم محيطاً بالدائرة ا ب س د

القضية الثامنة. ع

علينا ان نرسم دائرة في مربع مفروض
 ليكن ا ب س د المربع المفروض. فعلينا ان نرسم فيه دائرة



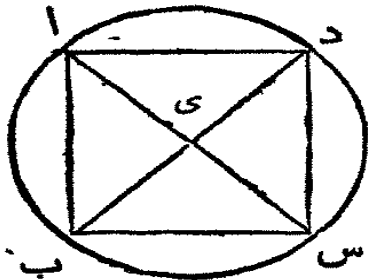
نصف الضلع اب في ف والضلع اد في ر
(ق ١٠ ك ١) ومن م ارسم رح حتى يوازي اب او
د س ومن ف ارسم ف ك حتى يوازي ا د او ب س
فكل واحد من الاشكال اك ك ب اح ح د اى
ى س بى ى د متوازي الاضلاع واضلاعها
المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فمن حيث ان اد

يعدل اب وار نصف اد و اف نصف اب فبالضرورة ار يعدل اف فالضلعان
المقابلان لهذين متساويان ايضاً اي ف ي يعدل ى ر وهكنا يبرهن ان ى ح وى ك
يعدلان ف ى ا وى ر فالخطوط الاربعة ى ر ى ف ى ح ى ك متساوية والدائرة
المرسومة على المركز ى وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الأخرى وهي تمس
الاضلاع الاربعة ايضاً لان الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٩ ك ١) والخط
العمودي على طرف القطر انما هو مماس (ق ١٦ ك ٢) فكل واحد من الخطوط
الاربعة اب ب س س د د ا مماس الدائرة فقد رسمت الدائرة في المربع المفروض

القضية التاسعة ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربع مفروض

ليكن اب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



ارسم اس ب د المتقاطعين في ى . فلان دا
يعدل اب والخط اس مشترك بين المثلثين دا س
ب اس فالضلعان دا اس يعدلان ب اس
والقاعدة د س تعدل القاعدة ب س فالزاوية دا س
تعدل ب اس (ق ٨ ك ١) فقد نصفت الزاوية دا ب

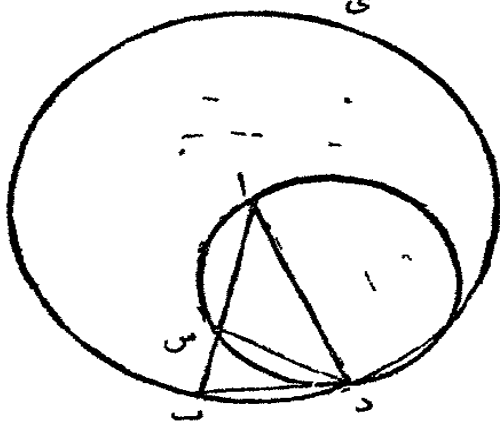
بالخط اس وهكنا يبرهن ان الزوايا اب س ب س د ا قد تنصفت
بالخطين المستقيمين اس ب د . فلكون الزاوية دا ب تعدل اب س
وى اب نصف دا ب وى ب ا نصف اب س فالزاوية ى اب تعدل ى ب ا
والضلع اى يعدل الضلع بى (ق ٦ ك ١) وهكنا يبرهن ان ى س ى د يعدلان

اى اوبى فالخطوط الاربعه اى اى بى سى د متساوية والدائرة المرسومة على المركزى وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الأخر وتحيط بالمرّبع ا ب س د

القضية العاشرة ع

علينا ان نرسم مثلثا متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطا مستقيما مثل ا ب واقسمه (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان القائم الزوايا ا ب \times ب س يعدل مربع ا س واجعل ا مركزا و ا ب بعدا وارسم الدائرة ب د دى واجعل فيها (ق ١ ك ٤) المخط المستقيم ب د حتى يعدل ا س الذي ليس



اطول من قطر الدائرة ب دى ارسم دا د س وارسم الدائرة ا س د تحيط بالمثلث ا د س (ق ٥ ك ٤) فالمثلث ا ب د هو المطلوب اى كل واحدة من الزاويتين ا ب د ا د ب مضاعف الزاوية ب ا د

لان القائم الزوايا ا ب \times ب س يعدل مربع ا س و ا س يعدل ب د فالقائم الزوايا

ا ب \times ب س يعدل مربع ب د ولانه قد رسم الخط المستقيم ب س او الخط المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة ا س د الواحد قاطع الدائرة والاخر يلاقها والقائم الزوايا ا ب \times ب س مسطح كل القاطع في الجزء منه الواقع خارج الدائرة يعدل مربع ب د الذي يلاقى الدائرة ا س د فالخط ب د مماس للدائرة ا س د (ق ٢٧ ك ٢) ولان ب د مماس ود س قاطع من نقطة المماسه فالزاوية ب د س (ق ٢٢ ك ٢) تعدل الزاوية د ا س في القطعة المتبادلة من الدائرة اصف الى كل واحدة منها الزاوية س د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الزاويتين س د ا د ا س ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٢٢ ك ١) تعدل الزاويتين س د ا د ا س فالزاوية ب د ا تعدل ب س د ولكن ب د ا تعدل س ب د لان الساق ا د يعدل الساق ا ب (ق ٥ ك ١) فالزاوية س ب د او د ب ا تعدل ب س د فالزوايا الثلاث

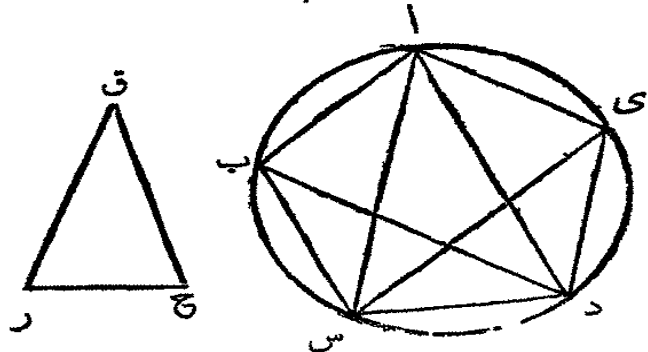
ب د ا د ب ا ب س د متساوية. ولأن الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع
ب د يعدل الضلع س د (ق ٦ ك ١) وب د يعدل ا س ولذلك س د يعدل ا س
ايضاً والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق ٥ ك ١) وس د ا س ا د معاً مضاعف
س ا د. ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب س د
مضاعف س ا د. وب س د تعدل كل واحدة من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل
واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د فقد رُسم مثلثٌ متساوي الساقين وكل
واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

فرعٌ اول. الزاوية ب ا د هي خمس قائمتين. لأن كل واحدة من ا ب د ا د ب
مضاعف ب ا د فهما معاً تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معاً تعدل
خمسة امثال ب ا د والثلاث معاً تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل
قائمتين ا ب ا د تعدل خمس قائمتين

فرعٌ ثانٍ. لان ب ا د خمس قائمتين او عشر اربع قائمات فكل الزوايا في المركز
ا تعدل معاً عشرة امثال ب ا د وتقبل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد يعدل
ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز نقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس ب د هـ
عشر المحيط والمخط المستقيم ب د ا و ا س يعدل ضلعاً من ذي عشرة اضلاع مرسوم
في الدائرة ب د ي

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً اذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ي الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً اذا



خمسة اضلاع. ارسم مثلثاً متساوي
الساقين ق ر ح لهُ كل واحدة من
الزاويتين عند القاعدة ا ب ع د ر
وح مضاعف الزاوية عند ق (ق ١٠
ك ٤) وفي الدائرة ا ب س د ي ارسم
المثلث المتساوي الساقين ا س د

زوايا تماثل زوايا المثلث ق ر ح (ق ٢ ك ٤) اي الزاوية س ا د تماثل الزاوية عند ق
والزاوية ا س د تماثل الزاوية عند ر و ا د س تماثل الزاوية عند ح . فكل واحدة من
الزاويتين ا س د ا د س هي مضاعف س ا د نصفها بالخطين المستقيمين س ي د ب
(ق ٩ ك ١) وارسم ا ب ب س ا ي د فالتشكل ا ب س د ي هو الشكل
المطلوب ذو خمسة اضلاع قياسي

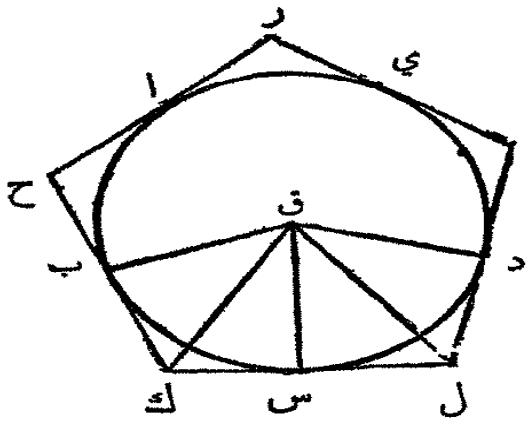
بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصفتنا
بالخطين المستقيمين د ب س ي فالزوايا الخمس د ا س ا س ي س د س د ب
ب د ا متساوية . والزوايا المتساوية تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالاقواس
الخمس ا ب ب س س د د ي ا متساوية . والاقواس المتساوية تقابلها خطوط
متساوية (ق ٢٩ ك ٢) فالخطوط ا ب ب س س د د ي ا متساوية والشكل
ا ب س د ي ذو خمسة اضلاع متساوية . وهو ايضاً متساوي الزوايا لان القوس ا ب
يعدل القوس د ي . فاذا اُضيف اليها ب س د فلكل ا ب س د يعدل الكل
ي د س ب . والزاوية ا ي د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ا ي على
القوس ي د س ب . فالزاوية ب ا ي تعدل الزاوية ا ي د (ق ٢٧ ك ٢) وهكذا
يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د س د ي تعدل ب ا ي او ا ي د فالتشكل
ا ب س د ي متساوي الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع
قياسي وقد رُسم في الدائرة المفروضة

طريقة اخرى . اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوايا مسطح
كل الخط في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً
يعدل اكبر القسمين على جانبي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منها
يقطع قوساً عُشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك ٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووتره ضلع
شكل ذي خمسة اضلاع قياسي في الدائرة

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . علينا نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع

يحيط بها



لتكن زوايا شكل قياسي ذي خمسة
اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ي
فالأقواس ا ب ب س س د د ي متساوية
(ق ١١ ك ٤) وفي النقط ا ب س د ي
ارسم المخطوط رح ح ك ل م م ر
حتى تمس الدائرة (ق ١٢ ك ٢) استعلم المركز
ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

فما ان الخط المستقيم كل يمس الدائرة ا ب س د ي في النقطة س التي
رسم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على كل (ق ١٨ ك ٢) والزوايتان
عند س قائمتان. وهكذا يبرهن ايضا ان الزوايا عند ب ود قائمتان. ولكون
ق س ك قائمة فمربع ق ك يعدل مجموع مربعي ق س س ك (ق ٤٧ ك ١)
ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربعي ق ب ب ك فمربع ق س س ك
يعدلان مربعي ق ب ب ك. ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقي مربع س ك
يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك. وبما ان ق س
يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق
ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدتان س ك تعدل القاعدتان ب ك. فالزاوية
ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق ٨ ك ١) وب ك ق تعدل س ك ق. فصكل
الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س. وهكذا
يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق.
ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د
(ق ٢٧ ك ٢) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية
ك ق س تعدل س ق ل. والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان
ق ك س ق ل س لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع
ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك س يعدل الضلع
س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س. ولكون ك س يعدل س ل فالخط
كل مضاعف ك س. وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك. ولكن ب ك

يعدل ك س كما قد تبرهن سابقاً فالخط ك ل يعدل ح ك (أوليفة ٦) وهكذا يبرهن ان رح رم ل تعدل ح ك او ك ل . فالشكل رح ك ل م ذو خمسة اضلاع متساوية وزواياها متساوية ايضاً لان الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانه فالزاوية ح ك ل تعدل ك ل م . وهكذا يبرهن ان ل م ر م رح ك تعدل ح ك ل او ك ل م . فالزوايا الخمس متساوية وقد تبرهن ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قياسي محيط بالدائرة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع

ليكن ا ب س د ي الشكل المفروض . علينا ان نرسم فيه دائرة

نصف الزاويتين ب س د س د ي بالخطين المستقيمين س ق د ق . ومن

ق نقطة التقاءهما ارسم المخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي . فلكون ب س يعدل

س د وق س مشترك بين المثلثين

ب س ق س ق د س ق فالضلعان ب س

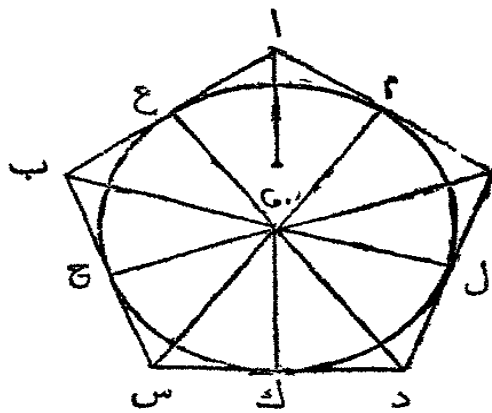
س ق يعدلان الضلعين د س س ق ي

والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق .

فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤

ك ا) وثيقة الزوايا من الواحد تعدل بقية

الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل



س د ق . ولان س د ي مضاعف س د ق وس د ي تعدل س ب ا وس د ق تعدل

س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق

فالزاوية ا ب س قد تصفت بالخط المستقيم ب ق . وهكذا يبرهن ان ب ا ي ا د

تصفتنا بالخطين المستقيمين ا ق ي ق

ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك ا) ارسم ق ي ق ح ق ك ق ل ق م عمودية

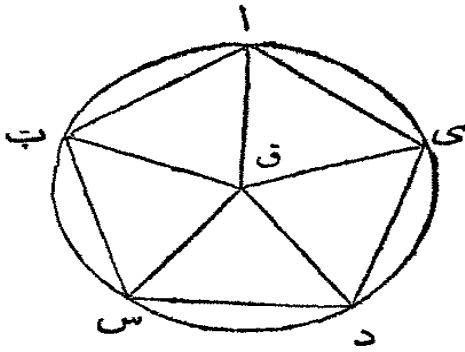
على المخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي ي ا . فن حيث ان الزاوية

ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س

مشترك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح اوق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية. فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الأخر وتمس الخطوط الخمسة اب ب س س د دى دى ا. ومن حيث ان الزوايا عند النقط غ ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة اب ب س س د دى دى ا هي عمودية على اطراف اوصاف الاقطار فهي ماسآت (فرع ١ ق ١٦ ك ٢) فقد رسمت الدائرة في الشكل المفروض

القضية الرابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع ليكن اب س دى شكلاً مفروضاً قياسياً ذا خمسة اضلاع. فعلياً ان نرسم دائرة تحيط به



نصف الزاوية ب س د بالخط المستقيم س ق والزاوية س دى بالخط المستقيم د ق (ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة التقائها ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا قى الى القطب و اوى. فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا ب اى اى د قد تنصفت بالخطوط المستقيمة

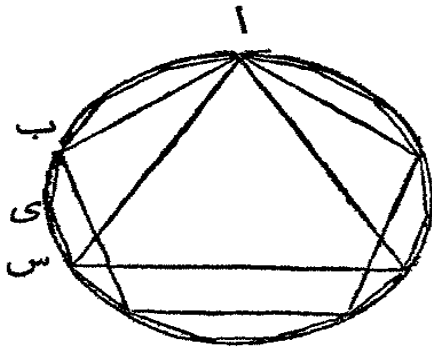
ق ب ق ا قى. ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س دى والزاوية ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س دى فالزاوية ق س د تعدل س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب ق ا قى تعدل ق س اوق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت النقطة ق مركزاً واحد هذه الخطوط بعداً ورسمت دائرة فمحيطها يمر باطراف الأخر وهي تحيط بالشكل القياسي ذي الخمسة الاضلاع اب س دى

والزاوية ا ف ي هي على القوس ي د س ب ا فالزاوية ا ف ي تعدل الزاوية ف ي د
وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ي او ف ي د فالشكل ا ب س
د ي ف متساوي الزوايا. وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو قياسي وقد رُسم في
الدائرة المفروضة ا ب س د ي ف

فرع. ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسي في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة.
واذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في النقط ا ب س د ي ف يحدث شكل
قياسي ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسم دائرة في شكل قياسي
مفروض ذي ستة اضلاع او محيطه بـ حسب ما تقدم في ذي خمسة اضلاع

القضية السادسة عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة عشر ضلعاً في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا خمسة
عشر ضلعاً



ليكن ا س ضلع مثلث متساوي الاضلاع
في الدائرة (ق ٢ ك ٤) و ا ب ضلع شكل قياسي
ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك ٤). ف
فالقوس ا ب س هو ثلث المحيط او $\frac{1}{3}$ من
المحيط والقوس ا ب هو خمس المحيط اي $\frac{2}{5}$
من المحيط فالقوس ب س فصلتها وهو $\frac{1}{15}$
من المحيط. نصّف ب س في ي (ق ٢٠ ك ٢) فكل واحدٍ من ب ي ي س هو
 $\frac{1}{15}$ من المحيط فاذا رُسم الخطان المستقيمان ب ي ي س ووضع امثالهما في دائرة
المحيط (ق ١ ك ٤) يحدث شكل قياسي ذو خمسة عشر ضلعاً في الدائرة
اذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسي
ذو خمسة عشر ضلعاً محيط بالدائرة. وعلى هذا الاسلوب ايضاً حسب ما تقدم في شكل ذي
خمسة اضلاع تُرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة عشر ضلعاً او محيطه بـ

تعليقة

اذا رُسم في دائرة شكل قياسي ذو اضلاع كثيرة وتنصفت الاقواس التي تقابل
اضلاعه فيحدث شكل قياسي عدد اضلاعه مضاعف عدد اضلاع الاول . وهكذا
من المربع في دائرة يحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعاً او ٢٢
ضلعاً او ٦٤ ضلعاً الى اخره . ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢
او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعاً الى اخره . ومن ذي عشرة اضلاع يحدث
شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعاً الى اخره . ومن

ذي خمسة عشر ضلعاً يحدث شكل ذو ٣٠

او ٦٠ ضلعاً الى اخره . ولكن الى

الآن لم توجد طريقة لرسم

شكل قياسي ذي

سبعة اضلاع

في دائرة

اصول الهندسة

الكتاب الخامس

حدود

١ المقدار هو ما كان له واحد أو أكثر من ثلثة اشياء وهي طول وعرض وعمق فاذا قُرِض مقداران أكبر واصغر وكان الاصغر قياساً تاماً للاكبر اي وُجِدَ فيه مراراً معلومة بدون باقي فالاصغر جزء الاكبر

٢ اذا كان اصغر مقدارين قياساً تاماً لاكبرها فالاكبر مضروب الاصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنس واحدٍ باعتبار الكمية

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الاصغر حتى يزيد عن الاكبر

والتناسب لا يقع الا بين المقادير المتجانسة

٥ اذا قُرِض اربعة مقادير وضرب الاول والثالث مراراً ما وضرب الثاني

والرابع مراراً ما فاذا عدل الثالث الرابع عندما عدل الاول الثاني او كان اكبر

منه عندما كان الاول اكبر من الثاني او اصغر منه عندما كانت الاول اصغر من

الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث

الى الرابع وتناسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس وهلم جرا

مهما تعددت المقادير. فاذا كانت المقادير الاربعة ا ب س د متناسبة يقال ان

نسبة الف الى باء كنسبة سين الى دال وتكتب هكذا: ب :: س : د او ا : ب =

س : د

٧ اذا قُرِض اربعة مقادير كما في الحد الخامس وقاس الاول الثاني مراراً

اكثر مما يقيس الثالث الرابع يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني
 ٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني
 الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا
 يقال انها على نسبة متصلة
 ٩ متى كان ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط
 بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المتجانسة كما في الحد الثامن يقال ان تناسب الاول
 الى الاخير هو مركب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع
 تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا الى الاخير
 فلو فرض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو
 مركب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د واذا فرض
 ا:ب::ي:ف وب:س::غ:ح وس:د::ك:ل فتناسب ا الى د هو
 مركب من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د او من تناسبات تعدل
 المذكورة كتناسب ي الى ف وغ الى ح وك الى ل
 وهكذا اذا فرض بين م ون التناسب الواقع بين ا و د، فلاجل الاختصار
 يقال ان التناسب بين م ون هو مركب من التناسبات التي تركب منها التناسب
 بين ا و د اي من تناسب ي الى ف وغ الى ح وك الى ل

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
 الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني، فاذا فرض ا:ب::ب:س
 فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب، وحسب الحد السابق تناسب ا الى
 س هو مركب من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركب من تناسبتين
 متماثلين هو مضاعف كل منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
 الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان
 خمسة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال
 تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلم جرا الى النهاية، فالتناسب
 المركب من ثلاث تناسبات متماثلة هو ثلاثة امثال كل منها والمركب من اربع تناسبات

- هو اربعة امثال كلٍ منها وهم جراً
- ١٣ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقتين والثانية والرابعة التاليتين. والسابق مع تاليوها المتناسبان والسابقان معاً او التاليان معاًها المتشابهان
- ١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث كالثاني الى الرابع (ق ١٦ ك ٥)
- ١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع الى الثالث (قضية الف ك ٥)
- ١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول مع الثاني الى الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (ق ١٨ ك ٥)
- ١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق ١٧ ك ٥)
- ١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (ق د ك ٥)

اوليات

- ١ اذا ضرب مقادير متساوية في كميات متساوية تبقى متساوية
- ٢ المقادير التي تقس مقادير متساوية مراراً متساوية هي متساوية
- ٣ مضروب لمقدار اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر
- ٤ اذا كان مضروب لمقدار اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالمدار الاول اعظم من الثاني

القضية الاولى من

اذا فرضت عدة مقادير قابلة الانقسام على عدة اخرى من المقادير مراراً معلومة كل واحد على نظيره فحسبها يتعدد كل من المتسومات

عليها في مقسومه هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسم
(انظر كتاب علم الجبر ع ١٦٦)

لنفرض المقادير ا و ب وس قابلة الانقسام مراراً معلومة على المقادير د و ي وف
كل واحد على نظيره فالجمنع د + ي + ف يتعدد في الجمنع ا + ب + س كما يتعدد
د في ا

لنفرض ان د يتعدد في ا ثلاث مرات وهكذا ي في ب وف في س

فلكون ا بعدد د ثلاث مرات لنا

وايضاً $ا = د + د + د$

وايضاً $ب = ي + ي + ي$

وايضاً $س = ف + ف + ف$

وبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية (اولية ٢ ك ١) $ا + ب + س$ يعدل

$د + ي + ف$ ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د و ي وف في ا و ب وس أكثر او

اقل من ثلاث مرات

فرع. اذا فرضنا م عدداً ما كان $م + د + م + ي + م + ف = م(د + ي + ف)$ لان

$م د م ي م ف$ هي تعداد د ي ف مراراً تماثل م فجمعها يتعدد ايضاً مراراً تماثل م

القضية الثانية . ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما واضيف الى الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد آخر فالجمنع يعد ذلك المقدار مراراً تماثل الاحاد في مجتمع

المضروبين فيها . (انظر كتاب الجبر ع ١٨٧)

لنفرض $ا = م س$ و $ب = ن س$ فيثبت $ا + ب = (م + ن) س$

لان $ا = م س$ لنا $ا = س + س + س + س$ الخ م مرة وايضاً $ب = س + س + س + س$

س الخ ن مرة . فبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية $ا + ب = س$ متعددة م +

ن مرة اي $ا + ب = (م + ن) س$ اي $ا + ب$ بعدد س مراراً تماثل الاحاد في م + ن

فرع اول . هكذا مهما تعددت المضارب . فلو فرض $ا = م ي$ و $ب = ن ي$

وس = ف ي لنا $ا + ب = س (م + ن) - ف$

فرع ثانٍ. وهكذا من حيث ان $a + b + s = (m + n + f)$ ي وقد فُرض
 $m = y$ و $b = n$ و $s = f$ لنا $m + n + f = (m + n + f)$ ي

القضية الثالثة. ن

اذا فُرض ثلاثة مقادير ونعدّد الثاني في الاول مرارًا تماثل الاحاد في
 عددٍ ما وتعدد الثالث في الثاني مرارًا تماثل الاحاد في عددٍ ما
 فالثالث يتعدد في الاول مرارًا تماثل الاحاد في حاصل هذين
 العددين. (انظر كتاب الجبر ع^{١٨٢})

لنفرض $a = m$ ب $b = n$ و $s = f$ فحينئذٍ $a = m$ ن س
 لانه حسب المفروض $b = n$ س فلذلك $m = b = n$ س + ن س + الخ م مرّة
 ون س + ن س + الخ م مرّة يعدل س في ن + ن + الخ م مرّة (فرع ثانٍ ق ٢ ك ٥)
 ون مضافة الى ذاتها م مرّة يعدل ن في م اي م ن فاذا ن س + ن س + الخ م مرّة
 يعدل م ن س فاذا $m = b = n$ س وقد فُرض $a = m$ ب فاذا $a = m$ ن س

القضية الرابعة. ن

اذا فُرض اربعة مقادير متناسبة اية نسبة الاول الى الثاني كنسبة
 الثالث الى الرابع وضرب الاول والثالث في عدد ما وضرب الثاني
 والرابع في عدد ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني
 كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع^{١٨٢})
 لنفرض $a : b :: s : d$ ، وليكن m ون عددًا يتخمينئذٍ $a : n : b :: m : s : n : d$
 ليتعدّد m و s مرارًا تعدل الاحاد في f ولينعدّد n ب ون د مرارًا تعدل
 الاحاد في q فلما (ق ٢ ك ٥) $f : m : a : s$ و $a : m : s$ و $a : s : n : d$ ، فلكون
 $a : b :: s : d$ حسب المفروض وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د. فاذا كان ف م ا اكبر
من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حده ك ه) فاذا كان ف م ا ق ن ب
متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب
يكون ف م س اصغر من ق ن د. ولكن ف م ا ف م س تعدان م ا م س مراراً
متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعدان ن ب ن د مراراً متساوية ولذلك (حده
ك ه) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرغ. اذا فرض ا : ب :: س : د وضرب اوس في عدد ما مثل م تكون نسبة
م ا : ب :: م س : د

القضية الخامسة. ن

اذا فرض مقداران احدهما يعدُّ الآخر مراراً ما وأخذ من كل واحدٍ
منهما مقداراً احدهما يعدُّ الآخر كما يعدُّ الاولين الآخر فالبقية من
الواحد تعدُّ البقية من الآخر كما يعدُّ كلُّ الواحد كلَّ الآخر (انظر
كتاب الجبر ع ١٦٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارين ا وب وليكن اكبرها
فالبقية ا - ب يتعدَّد في م ا - م ب مراراً تماثل تعداد ا في م ا - م ب =
م (ا - ب)

ليكن د فضلة ا وب اي ا - ب = د. اصف ب الى الجانين فلما ا = د + ب.
فاذا (ق ا ك ه) م ا = م د + م ب. اطرح م ب من الجانين فلما م ا - م ب = م د
وقد فرض د = ا - ب فاذا م ا - م ب = م (ا - ب)

القضية السادسة. ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما وطرح من الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عددٍ اصغر من الاول فالباقي يعدُّ ذلك المقدار مراراً تعدل الاحاد
في فضلة العددين (انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

لفرض a مقداراً وليتعدد m مرةً ون مرةً اي m ا n ا وليكن m اكبر من n
 فحينئذٍ a يتعدد في m - a - n ا مراراً تعدل الاحاد في m - n اي m - a - n ا = m - n ا
 لفرض ان m - n = q فحينئذٍ m = n + q . ثم m ا = n ا + q ا (ق ٢ ك ه) .
 اطرح n ا من الجانبيين . m ا - n ا = q ا اي m ا - n ا يعدهُ ا مراراً تعدل الاحاد
 في q اي m - n مرةً اي m ا - n ا = q ا (م - ن) ا
 فرج . اذا كانت فضلة العددين واحداً اي m - n = 1 فحينئذٍ m ا - n ا = 1 ا

قضية ا . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة . فهي متناسبة ايضاً بالقلب

مفروض ا : ب :: س : د فحينئذٍ ب : ا :: د : س
 ليتعدد ا وس m مرةً اي m ا m س . وليتعدد ب ود n مرةً اي n ب n د .
 فاذا كان m اصغر من n ب يكون m س اصغر من n د (حد ه ك ه) . واذا كان
 n ب اكبر من m ا يكون n د اكبر من m س . واذا كانت n ب = m ا n د = m س
 واذا كان n ب > m ا n د > m س ولكن n ب n د يعدهُ ب ود مراراً
 متساوية وم m س يعدهُ ا وس مراراً متساوية فاذا (حد ه ك ه) ب : ا :: د : س

قضية ب . ن

في اربعة مقادير اذا تعدد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد
 الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني
 كنسبة الثالث الى الرابع

اولاً ليتعدد ا وب m مرةً ثم m ا : ا :: م : ب : ب
 ليتعدد m ا ب مراراً تعدل الاحاد في n ا ب n مرةً . وليتعدد ا وب مراراً
 تعدل الاحاد في f اي f مرةً فلنا (ق ٢ ك ه) n م ا f ا n م ب f ب . فاذا
 كان n م ا اكبر من f ا يكون n م اكبر من f . واذا كان n م اكبر من f يكون
 n م ب اكبر من f ب فاذا كان n م ا اكبر من f ا يكون n م ب اكبر من
 f ب واذا كان n م ا = f ا n م ب = f ب . واذا كانت n م ا > f ا

ن م ب ح ف ب وقد تعدد م ا م ب في ن م ا ن م ب مراراً متساوية. وقد تعدد
 ا و ب في ف ا ف ب مراراً متساوية فإذا م ا : ا : م ب : ب (حدّه ك ه)
 ثانياً ليكن س جزاً من ا (حدًا ك ه) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب
 فيتعدّد س في ا كما يتعدّد د في ب وحسبما قد تبرهن ا : س :: ب : د وبالقلب
 (ق ا ك ه) س : ا :: د : ب

قضية ج. ن

إذا فرض أربعة مقادير متناسبة أي نسبة الأول الى الثاني كنسبة
 الثالث الى الرابع وكان الأول مضروب الثاني أو جزاً منه فالثالث
 ذات هذا المضروب أو الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: س : د. واولاً ليكن ا مضروب ب أي ليتعدّد ب في ا مراراً
 معلومة فيكون س ذات هذا المضروب من د أي د يتعدّد في س كما يتعدّد ب في ا
 أي اذا كان ا = م ب فحينئذ س = م د

ليتعدّد ا وس مرتين مثلاً أي ١٢ ا س وليتعدّد ب ود ٢ مرة أي ٢ م ب
 ٢ م د (ق ٢ ك ه). فمن حيث ان ا = م ب ١٢ - ٢ م ب. ومن حيث ان
 ا : ب :: س : د و ١٢ = ٢ م ب فاذا ٢ س = ٢ م د (حدّه ك ه) وس = م د أي د
 يتعدّد في س مراراً تعدل الاحاد في م أي م مرة أي كما يتعدّد ب في ا

ثانياً ليكن ا جزاً من ب فيكون س ذات هذا الجزء من د. لان ا : ب :: س : د
 وبالقلب (ق ا ك ه) ب : ا :: د : س. ولكن ا هو جزء من ب أي ب هو مضروب ا
 وكما تقدم د هو ذات هذا المضروب من س أي س ذات الجزء من د الذي كان ا
 من ب

القضية السابعة. ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدار مفروض تناسب واحد. والمقدار
 الواحد بينه وبين مقادير متساوية تناسب واحد. (جبر عا ١٥١)

ليكن اوب مقدارين متساويين وس مقداراً اخر فنسبة ا : س :: ب : س
 ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من اوب ون س مضروباً من س
 فلكون ا = ب م ا = م ب (اولية ك ه) فاذا كان م ا اكبر من ن س يكون م ب
 اكبر من ن س واذا كان م ا = ن س م ب = ن س واذا كان م ا > ن س
 م ب > ن س . ولكن م ا م ب مضروبان متساويان من اوب ون س هو
 مضروب من س فاذا (حده ك ه) ا : س :: ب : س
 ثانياً اذا كان ا = ب فنسبة س : ا :: س : ب لانه قد تبرهن ان ا : س :: ب : س
 وبالقالب (ق ا ك ه) س : ا :: س : ب

القضية الثامنة . ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدار مفروض هو
 اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار . وتناسب ذلك المقدار الى
 الاصغر هو اعظم من تناسبه الى الاكبر (جبر ع ١٦٣ وع ١٦٤)

ليكن ا + ب مقداراً اكبر من مقدار اخر هو ا وليكن س مقداراً ثالثاً فتناسب
 ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س وتناسب س الى ا هو اعظم من تناسب
 ا الى ا + ب

ليكن م عدداً وليكن كل من م ا م ب اكبر من س . وليكن ن س المضروب
 الاصغر من س الذي يزيد على م ا + م ب ثم ن س - س اي (ن - ا) س (ق ا
 ك ه) يكون اصغر من م ا + م ب اي م ا + م ب او م (ا + ب) هو اكبر من
 (ن - ا) س . لان ن س هو اكبر من م ا + م ب وس اصغر من م ب يكون ن س -
 س اكبر من م ا اي م ا هو اصغر من ن س - س اي من (ن - ا) س . فاذا
 المضروب ا + ب في م هو اكبر من المضروب س في ن - ا ولكن المضروب ا في م
 ليس باكبر من المضروب س في ن - ا فاذا تناسب ا + ب الى س هو اعظم من
 تناسب ا الى س (ح د ل ك ه)

ثم من حيث ان المضروب س في ن - ا هو اكبر من المضروب ا في م وليس

أكبر من المضروب $a + b$ في m فتناسب s الى a هو اعظم من تناسبه الى $a + b$
(حد ٧ ك ٥)

القضية التاسعة. ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدار مفروض هي متساوية وإذا كان
لمقدار واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع ١٥٨)

مفروض $a : s :: b : s$ فحينئذ $a = b$
والأفليكن أكبر من b . فيمكن وجود عدد m ون كما في القضية السابقة
حتى يكون m أكبر من n s ولا يكون m أكبر من n s . ومن حيث ان
 $a : s :: b : s$ فاذا كان m أكبر من n s يكون m ب ايضاً أكبر من n s
(حد ٥ ك ٥) وقد تبرهن ان m ب ليس أكبر من n s وذلك محال فلا يكون
أكبر من b اي $a = b$

ثم لنفرض $s : a :: s : b$ فحينئذ $a = b$ لانه بالقلب (ق الك ٥) $a : s :: b : s$
س ولذلك حسباً تقدم $a = b$

القضية العاشرة. ن

إذا فرض مقداران وكان بين احدهما ومقدار ثالث تناسب اعظم من
تناسب ثانيهما الى ذلك المقدار فالاول أكبرها. وإذا كان تناسب
الثالث الى احدهما اعظم من تناسبه الى الآخر فهو اصغرهما (جبر
ع ١٦٣ وع ١٦٤)

إذا كان تناسب a الى s اعظم من تناسب b الى s يكون أكبر من b
لانه حسب المفروض $a : s < b : s$ فيمكن وجود عدد m ون حتى يكون
 $m < n$ s و m ب $> n$ s (حد ٧ ك ٥) فيكون $m < n$ s و m ب $> n$ s
(اولية ٤ ك ٥)

ثم ليكن $s : b < s : a$ فيكون $b > a$. لانه قد يمكن ان يوجد عددان

م ون حتى يكون م س < ن ب وم س > ن ا (حد ه ك ه) فمن حيث ان ن ب اصغر من م س ون ا اكبر من م س يكون ن ب > ن ا فيكون ب > ا

القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسباً واحداً هي متساوية (جبر ع ١٨٢)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ي : ف فحينئذ ا : ب :: ي : ف
 لنفرض م ا م س م ي مضاريب متساوية من ا وس وي وايضاً ن ب ن د
 ن ف مضاريب متساوية من ب ود وف . فلكون ا : ب :: س : د فاذا كان
 م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ه ك ه) . ولكن اذا كان م س < ن د
 يكون م ي < ن ف (حد ه ك ه) لان س : د :: ي : ف فاذا كان م ا < ن ب
 يكون م ي < ن ف . وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ي = ن ف واذا كان
 م ا > ن ب يكون م ي > ن ف ولكن م ا م ي ها مضروبان متساويان من
 ا وي . ون ب ن ف ها مضروبان متساويان من ب وف فاذا ا : ب :: ي : ف
 (حد ه ك ه)

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدة مقادير متناسبة فنسبة مجتمع السوابق الى مجتمع التوالي
 كنسبة احد السوابق الى تاليه (جبر ع ١٦٦)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ي : ف فنسبة ا : ب :: ا + س + ي : ب + د + ف

افرض م ا م س م ي مضاريب متساوية من ا وس وي . وايضاً ن ب ن د
 ن ف مضاريب متساوية من ب ود وف . فمن حيث ان ا : ب :: س : د فاذا كان
 م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ه ك ه) واذا كان م س < ن د يكون
 م ي < ن ف لان س : د :: ي : ف . فاذا كان م ا < ن ب يكون م ا + س
 + م ي < ن ب + ن د + ن ف وكذلك ، اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + س
 + م ي = ن ب + ن د + ن ف واذا كان م ا > ن ب يكون م ا + س +

م > ن ب + ن د + ن ف ، ولكن م + م س + م ي = م (ا + س + ي)
 (فرع ق ا ك ه) وم ا + م س + م ي هما مضروبان متساويان من ا ومن ا +
 س + ي . ولهذا السبب ايضا يكون ن ب ون ب + ن د + ن ف مضروبين
 متساويين من ن ومن ب + د + ف فيكون (حد ه ك ه) ا : ب :: ا + س +
 ي : ب + د + ف

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع
 ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى
 السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس
 الى السادس (جبر ع ١٨٤)

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د < ي : ف فيثبت ا : ب < ي :
 ف . لان س : د < ي : ف فيمكن وجود عددين م ون حتى يكون م س < ن د
 ويكون م ي > ن ف (حد ٧ ك ه) . فاذا كان م س < ن د يكون م ا < ن ب
 لان ا : ب :: س : د فيكون م ا < ن ب وم ي > ن ف فاذا ا : ب < ي :
 ف (حد ٧ ك ه)

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا
 كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل
 الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث
 يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع ١٩٢)

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا < س يكون ب < د واذا كان ا =
 س يكون ب = د واذا كان ا > س يكون ب > د

اولاً ليكن $a < s$ ثم $a : b < s : b$ (ق ٨ ك ٥) ولكن $a : b :: s : s$:
 دفاذاً $s : d < s : b$ (ق ١٢ ك ٥) ولذلك $b < d$ (ق ١٠ ك ٥)
 وهكذا يبرهن انه اذا كان $a = s$ فحينئذ $b = d$ واذا كان $a > s$ يكون
 $b > d$

القضية الخامسة عشرة. ن

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاربيها المتساوية (جبر
 (ع ١٦٤))

ليكن a و b مقدارين وم عدداً ما فتناسب $a : b :: m : m$ ب
 لأن $a : b :: a : b$ (ق ٧ ك ٥) فيكون $a : b :: a + a : b + b$ (ق ١٢
 ك ٥) اي $a : b :: ٢ : ١٢$ وهكذا ايضاً من حيث ان $a : b :: ١٢ : ١٢$ ب
 يكون $a : b :: ١٢ + ١ : ١٢ + b$ (ق ١٢ ك ٥) اي $a : b :: ١٣ : ١٢$ ب
 وهم جراً في كل المضاربي المتساوية من a و b

القضية السادسة عشرة. ن

اذا كان اربعة مقادير من جنس واحد متناسبة تكون متناسبة ايضاً
 بالمبادلة (جبر ع ١٨١)

اذا كان $a : b :: s : d$ فبالمبادلة $a : s :: b : d$
 خذ m ب مضروبين متساويين من a و b و n ب مضروبين
 متساويين من s و d ثم (ق ١٥ ك ٥) $a : b :: m : m$ ب وقد فرض $a : b :: s : d$:
 فاذاً (ق ١١ ك ٥) $s : d :: m : m$ ب. ولكن $s : d :: n : n$ (ق ١٥ ك ٥)
 فاذاً $m : n :: m : n$ (ق ١١ ك ٥) فاذاً كان $m < n$ س يكون $m < n$
 ن د (ق ١٤ ك ٥) واذاً كان $m = n$ س يكون $m = n$ د واذاً كان $m > n$ س
 يكون $m > n$ د فاذاً (حد ٥ ك ٥) $a : s :: b : d$

القضية السابعة عشرة . ن

المقادير المناسبة بالاجمال هي متناسبة ايضاً بالافراد . اي اذا كان
تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى
الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع

(جبر ع ١٨)

مفروض $a + b : b :: s + d : d$ فحينئذ $a : b :: s : d$
خدم a ن ب مضروبين من a و b في العددين m و n . واولاً ليكن $m < n$ ب :
اضف الى كل واحد منهما m فلنا $m + m < m + n$ و لكن $m + m =$
 $m (a + b)$ (فرع ق ا ك ه) و $m + n = m (n + b)$ (فرع ا ق ا ك ه)
فاذا $m (a + b) < m (n + b)$

ومن حيث ان $a + b : b :: s + d : d$ فاذا كان $m (a + b) < m (n + b)$
يكون $m (s + d) < m (n + d)$ اي $m s + m d < m n + m d$ و يطرح $m d$ من
الجانبين $m s < m n$. فاذا كان $m < n$ ب يكون $m s < m n$. وهكذا يبرهن
انه اذا كان $m = n$ ب يكون $m s = m n$. فاذا كان $m > n$ ب يكون $m s > m n$
فاذا $a : b :: s : d$ (حده ك ه)

القضية الثامنة عشرة . ن

المقادير المناسبة بالافراد هي متناسبة ايضاً بالاجمال . اي اذا كان
الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني

كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع ١٨)

ليكن $a : b :: s : d$ فحينئذ $a + b : b :: s + d : d$
لفرض $m (a + b)$ و n ب مضروبين من $a + b$ و b . واولاً ليكن m اعظم من
 n . فلكون $a + b$ اعظم من b يكون $m (a + b) < n (a + b)$ و ايضاً $m (s + d) < n (s + d)$
 n فاذا كان $m < n$ ب يكون $m (a + b) < n (a + b)$ و $m (s + d) < n (s + d)$.

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m = n$ فيكون $m (a + b)$ اعظم من n ب $m (s + d)$ اعظم من n د

ثم ليكن $m > n$ او $n < m$ فقد يمكن ان يكون $m (a + b)$ اعظم من n ب او مساوية او اصغر منه. اولاً ليكن $m (a + b)$ اعظم من n ب فيكون $m + a > m + b > n$ ب اطرح من الجانبين m ب الذي هو اصغر من n ب فلنا $m + a < n - b - m$ ب اي $m + a < n - m$ ب (ق ٦ ك ٥). ولكن اذا كان $m + a < n - m$ ب يكون $m + s < n - m + s = n + d$ ب (ق ٦ ك ٥) فاذا $m + s < n + d$ ب اضف اليها $m + s$ فلنا $m + s + m < n + d + m$ ب (ق ١ ك ٥) $m (s + d) < n$ د. فاذا كان $m (a + b) < n$ ب يكون $m (s + d) < n$ د

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m (a + b) = n$ ب يكون $m (s + d) = n$ د
واذا كان $m (a + b) > n$ ب يكون $m (s + d) > n$ د فاذا (حده ك ٥)
 $a + b : b :: s + d : d$

القضية التاسعة عشرة. ن

اذا كانت نسبة مقدار كل واحد الى مقدار اخر كـ كمقدار ماخوذ من الاول الى مقدار ماخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل

(جبر ع ١٨٨)

اذا كان $a : b :: s : d$ وكان s اصغر من a يكون $a - s : b - d :: a : b$
بما ان $a : b :: s : d$ فبالقلب (ق ١٦ ك ٥) $a : s :: b : d$. وبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) $a - s : s :: b - d : d$ وبالقلب ايضاً $a - s : b - d :: s : d$
ولكن $a : b :: s : d$ فاذا (ق ١١ ك ٥) $a - s : b - d :: a : b$
فرج ١٠. $a - s : b - d :: s : d$

قضية د. ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضاً بالطرح اي الاول

الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (حد ١٨ كه)
 مفروض ا: ب :: س : د فبالطرح ا: ا-ب :: س : س-د
 لان ا: ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ كه) ا-ب : ب :: س-د : د
 وبالقلم (ق ١٨ كه) ب : ا-ب :: د : س-د ثم بالتركيب (ق ١٨ كه)
 ا : ا-ب :: س : س-د
 فرع . وهكذا يبرهن ان ا : ا+ب :: س : س+د

القضية العشرون

اذا قُرِضَ ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير آخر اية كل اثنين من
 الأول مناسبان لكل اثنين من الآخر فاذا كان الأول اعظم من
 الثالث يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساوياً له يكون
 الرابع مساوياً للسادس واذا كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من
 السادس (جبر ع ١٩٢)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وكانت نسبة
 ا : ب :: د : ي وايضاً ب : س :: ي : ف فاذا كان ا < س
 يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان
 ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا : ب < س : ب (ق ٨ كه) ولكن ا : ب :: د : ي
 فاذا د : ي < س : س (ق ١٢ كه) وقد قُرِضَ ب : س :: ي : ف وبالقلم
 (ق ١٨ كه) س : ب :: ي : ف . وقد تبرهن ان د : ي < س : ب فاذا د : ي < س
 ف : ي (ق ١٢ كه) وبالضرورة د < ف (ق ١٠ كه)

ثم لنفرض ا = س ثم ا : ب :: س : ب (ق ٧ كه) ولكن ا : ب :: د : ي
 فاذا س : ب :: د : ي ولكن س : ب :: ي : ف فاذا د : ي :: ف : ي (ق ١١
 كه) ود = ف (ق ٩ كه) . اخيراً ليكن ا > س اي س < ا وقد تبرهن ان

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ي ف على ترتيبها

اي ا : ب :: د : د ي وب : س :: ي : ف	ا	ب	س
فيكون ا : س :: د : ف	د	ي	ف
خذ مضروبين متساويين من ا و د اي	م ا	ن ب	ق س
م ا م د وكذلك ن ب ن ي من ب و ي	م د	ن ي	ق ف

وق س ق ف من س وف. فلكون ا : ب :: د : ي فيكون م ا : ن ب :: م د : ن ي (ق ٤ ك ٥) وايضا ن ب : ق س :: ن ي : ق ف فاذا (ق ٣٠ ك ٥) حسبما كان م ا اعظم من ق س او مساويا له او اصغر منه يكون م د اعظم من ق ف او مساويا له او اصغر منه. ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا و د وق س ق ف مضروبان متساويان من س وف فاذا (ح ٥ ك ٥) ا : س :: د : ف ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د واربعه اخرى ف غ ح متناسبة على

ترتيبها اي ا : ب :: ي : ف	ا	ب	س	د
وب : س :: ف : غ وس :	ي	ف	غ	ح
د :: غ : ح فيكون ا : د ::				
ي : ح				

لأنه حسبما تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها ا : س :: ي : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح وهكذا مهما تعددت المقادير

القضية الثالثة والعشرون

اذا كانت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى على ترتيب المذكور في القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاول كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦) اولاً يُفرض ثلاثة مقادير ا ب س متناسبة لثلاثة اخرى د ي ف بان

يكون ا : ب :: ح : د :: س : ف وب : س :: د : ح فيكون ا : س :: د : ف . خذ مضاريب

س	ب	ا
ف	ح	د
ن س	م ب	م ا
ن ف	ن ح	د م

متساوية من ا ب د اي م ا م ب
م د وكذلك من س ح ف اي
ن س ن ح ن ف
فلكون ا . ب :: ح : د
وا : ب :: م : ا . م ب (ق ١٥ كه)

وي : ف :: ن : ح فيكون م ا : م ب :: ن : ح (ق ١١ كه) ولكون
ب : س :: د : ح فيكون م ب : ن س :: م د : ح (ق ٤ كه) وقد تهرن ان
م ا . م ب :: ن : ح فاذا كان م ا < ن س يكون م د < ن ف (ق ٢١ كه)
واذا كان م ا = ن س يكون م د = ن ف واذا كان م ا > ن س يكون م د > ن ف .
ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا و د ون س ن ف مضروبان متساويان
من س و ف فاذا (حده كه) ا . س . د . ف

ثم يُفرض اربعة مقادير مناسبة لاربعة اخرى على الترتيب السابق اي ا . ب . .

د	س	ب	ا
ح	غ	ف	ح

غ : ح وب : س :: ف : ع
وس : د :: ح : ف فيكون
ا . د :: ح : ع لانه حسبا

نقدم ا : س :: ف : ح وبالمفروض س : د :: ح : ف فحسبا نقدم ايضا ا : د :: ح : ع
وهكذا هما تعددت المقادير

القضية الرابعة والعشرون . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع وتناسب
الخامس الى الثاني كتناسب السادس الى الرابع يكون تناسب الاول
مع الخامس الى الثاني كتناسب الثالث مع السادس الى الرابع
(جبر عا)

مفروض ا : ب :: س : د وي : ب :: ف : د فيكون ا + ح : ب :: س + د

ف : د

لأنَّ ي : ب :: ف : د فبالقلب ب : ي :: د : ف وبالمفروض ا : ب :: س : د
 فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا : ي :: س : ف وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) ا + ي : ي ::
 س + ف : ف وبالمفروض ايضاً ي : ب :: ف : د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا + ي :
 ب :: س + ف : د

قضية ٥٠ ن

إذا كان اربعة مقادير متناسبة فجميع الاولين الى فضلتهما كجميع
 الاخرين الى فضلتهما

مفروض ا : ب :: س : د وإذا كان ا < ب فيكون ا + ب : ا - ب :: س +
 د : س - د وإذا كان ا > ب ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س
 لانه إذا كان ا < ب فمن حيث ان ا : ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥)
 ا - ب : ب :: س - د وبالقلب (ق ١٥ ك ٥)
 ب : ا - ب :: د : س - د وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥)
 ا + ب : ب :: س + د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
 ا + ب : ا - ب :: س + د : س - د
 وهكذا إذا كان ا > ب ا و ب < ا يبرهن ان
 ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س

قضية ٥٠ ن

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض
 لنفرض ان تناسب ا الى س قد تركب من تناسبين اي تناسب ا : ب و تناسب
 ب : س وان تناسب د الى ف قد تركب من تناسب د : ي و تناسب ي : ف
 المساويين للاولين اي ا : ب و ب : س فيكون ا : س : د : ف

ا	ب	س
د	ي	ف

اولاً اذا كان تناسب ا : ب = د : ي
 و تناسب ب : س = ي : ف فبالمساواة
 (ق ٢٢ ك ٥) ا : س :: د : ف

ثانياً اذا كان $a : b = c : d$ ف $b : c = d : a$ فيالمساواة بالقلب (ق ٢٢
 لكه) $a : c :: d : b$ وهكذا تعددت التناسبات

قضية ز. ن

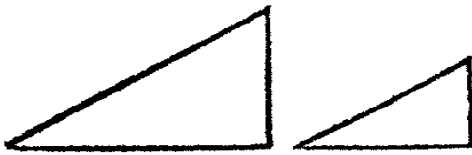
اذا قاس مقداراً كلاً من مقدارين آخرين يقيس ايضاً مجتمعها وفضلتها
 لنفرض ان a يقيس b اي يتعدد فيه تسع مرات مثلاً وايضا ليقس b خمس
 مرات مثلاً فلنا $a = 9$ و $b = 5$ فيكون a و b معاً 14 مرة a يقيس
 مجتمع a و b ، وفضلتها هي اربعة امثال a فاذا a يقيس هذه الفضلة ايضاً، وهكذا
 مهما كانت الاعداد المفروضة، فلنفرض $a = m$ و $b = n$ ثم $a + b = (m + n)$
 $a - b = (m - n)$ a يقيس $a + b$ وايضاً للقدار $a - b$ فانه يقيس
 المقدار ايضاً لان مجتمع $a - b$ هو a وفضلته $a - b$ هي ايضاً

اصول الهندسة

الكتاب السادس

حدود

١ اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة هي ما كانت زواياها متساوية



كل واحدة تعدل نظيرها. والاضلاع

المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة

في شكلين متناسين الاضلاع التي

تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة. والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة. وفي الدوائر

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطعان المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية

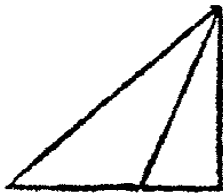
عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكل الى ضلع شكل آخر كنسبة ضلع اخر من

الثاني الى اخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافؤ

٣ اذا انقسم خط مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى القسم الاطول كالنصف

الاطول الى الاقصر يقال انه قد انقسم على نسبة متوسطة



٤ علو مثلث هو البعد العمودي من راسه الى قاعدته

علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين

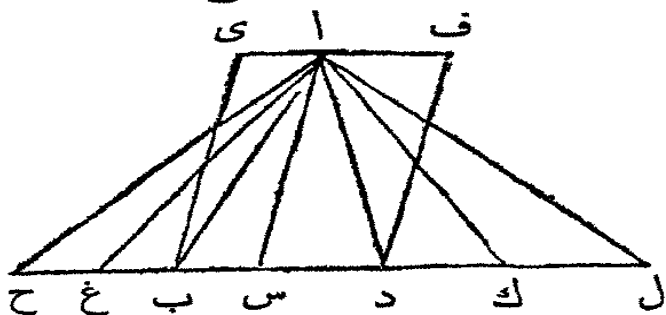
ضلعيه المتقابلين محسوبين قاعدتين وعلو شبهه المعين هو

البعد العمودي بين ضلعيه المتوازيين

القضية الاولى ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان اب س اس د والشكلان المتوازي الاضلاع ي س س ف



على علو واحد اي عمود من ا الى ب د فنسبة المثلث اب س الى المثلث اس د ونسبة الشكل ي س الى شكل س ف كنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د

اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسام تعدل ب س مثل ح غ ب واقسم د ل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم اغ اح اك ال

فلكون س ب ب غ ح متساوية تكون المثلثات اح غ ب اب س متساوية (ق ٢٨ ك ١) وكما تعددت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا يتعدّد المثلث اب س في المثلث اح س وكذلك كما يتعدّد القاعدة د س في القاعدة س ل هكذا يتعدّد المثلث اس د في المثلث اس ل. واذا كانت القاعدة ح س تعدل القاعدة س ل يكون المثلثان اح س ال س متساويين (ق ٢٨ ك ١) واذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث اح س اكبر من المثلث ال س وان كانت اصغر فاصغر. فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان اب س اس د وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اية القاعدة ب س والمثلث اب س وهما القاعدة ح س والمثلث اح س وهكذا من القاعدة س د والمثلث اس د وهما القاعدة س ل والمثلث ال س وقد تبرهن انه اذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث اح س اكبر من ال س وان كانت متساوية لها فالمثلث اح س يعدل المثلث ال س وان كانت اصغر فاصغر منه فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث اب س الى المثلث اس د

(حد ه ك ه)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ي هو مضاعف المثلث ا ب س
(ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة
الكائنة بين مضاربيها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل ي س الى الشكل س ف
كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د. وقد تبرهن ان ب س : س د :: ا ب س :
ا س د فبالمساواة الشكل س ي الى الشكل س ف كالفائدة ب س الى القاعدة
س د (ق ١١ ك ٥)

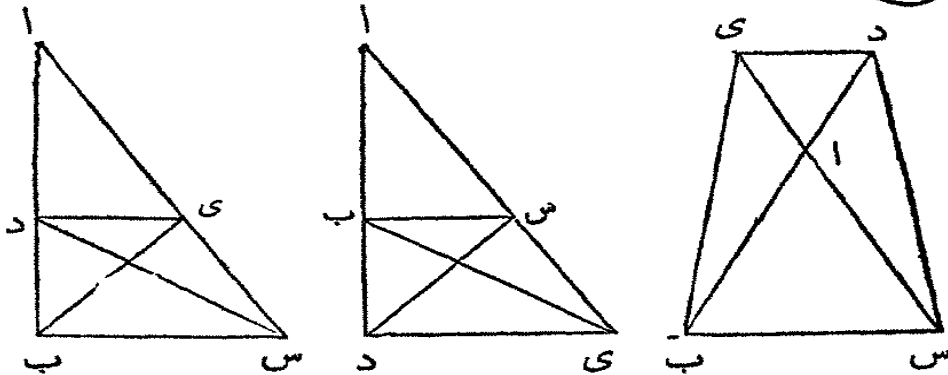
فرج. نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع هي كنسبة قواعدها
بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علو واحد

القضية الثانية . ن

اذا رسم خط مستقيم حتى يوازي ضلع مثلث فانه يقطع الضلعين
الآخرين او الخطين الحاصلين من اخراجهما حتى تكون اقسامها
متناسبة. واذا قطع الضلعان او الخطان الحاصلان من اخراجها حتى
تكون اقسامها متناسبة فالخط المستقيم الذي يقطعها يوازي الضلع
الآخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثا ويرسم د ي حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا ::
س ي : ي ا

ارسم ب ي س د. فالمثلث ب د ي يعدل المثلث س د ي (ق ٢٧ ك ١)
لانها على قاعدة واحدة د ي وبين خطين متوازيين ب س د ي. واد ي مثلث

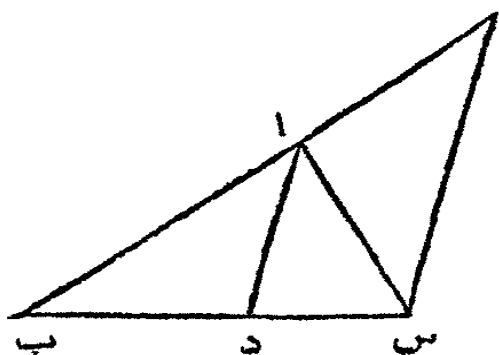


آخر والمقادير المتساوية لها نسبة واحدة الى مقدار آخر (ق ٧ ك ٥) اي المثلث ب د ي الى المثلث ا د ي كالمثلث س د ي الى المثلث ا د ي ولكن ب د ي : ا د ي :: ب د : دا (ق ١ ك ٦) لان لها علواً واحداً اي عموداً من ي الى ب ا ولهذا السبب ايضاً س د ي : ا د ي :: س ي : ي ا فاذا ب د : دا :: س ي : ي ا ثم لنفرض ان الضلعين ا ب ا س او الخطين الحاصلين من اخراجها قد قطعاً في د وي حتى تكون نسبة ب د : دا :: س ي : ي ا فالخط المستقيم د ي الموصل بين نقطتي القطع يوازي ب س . ثم الشكل كما تقدم . فلكون ب د : دا :: س ي : ي ا ولكون ب د : دا :: ب د ي : ا د ي (ق ١ ك ٦) وس ي : ي ا :: س د ي : ا د ي يكون المثلث ب د ي : ا د ي :: س د ي : ا د ي اي المثلثان ب د ي وس د ي لها نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ي فالمثلث ب د ي = س د ي (ق ٩ ك ٥) وهما على قاعدة واحدة د ي والمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعدة واحدة هي بين خطين متوازيين (ق ٢٩ ك ١) فالخط د ي يوازي الخط ب س

القضية الثالثة . ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضاً فقسمها القاعدة بينها النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا كانت نسبة قسي القاعدة بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط المستقيم المرسوم من نقطة القطع الى الزاوية المقابلة ينصف تلك الزاوية

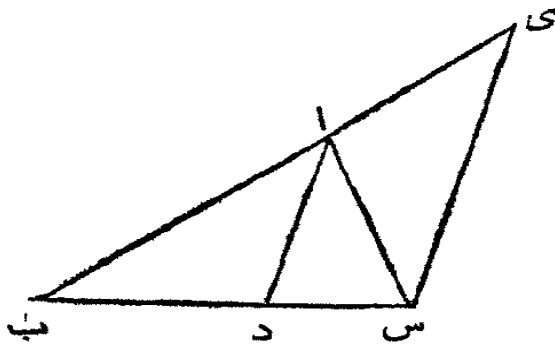
ليكن ا ب س مثلثاً ولتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س ::



ب ا : ا س
من النقطة س ا رسم س ي حتى يوازي دا وليلاق ب ا بعد اخراجه في ي . فلان الخط المستقيم ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا د ي س فالزاوية ا س ي تعدل المتبادلة

س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل
 اس ي . ولأن الخط المستقيم ب ا ي يلاقي المتوازيين ا د ي س فالزاوية الخارجة
 ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ي س . ولكن ب ا د تعدل اس ي فالزاوية اس ي
 تعدل ا ي س فالضلع ا ي يعدل الضلع س ا (ق ٦ ك ١) ولكون ا د قد رُسم
 حتى يوازي ي س احد اضلاع المثلث ب ي س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ي
 (ق ٢ ك ٦) و ا ي = اس فاذا ب د : د س :: ب ا : اس (ق ٧ ك ٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : اس . ا رسم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصفت
 بالخط المستقيم ا د



تم الشكل كما تقدم . فلكون
 ب د : د س :: ب ا : اس وب د :
 د س :: ب ا : ا ي (ق ٢ ك ٦) لأن
 ا د يوازي ي س فنسبة ا ب : اس ::
 ا ب : ا ي (ق ١ ك ٥) فاذا اس =
 ا ي (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ي س =

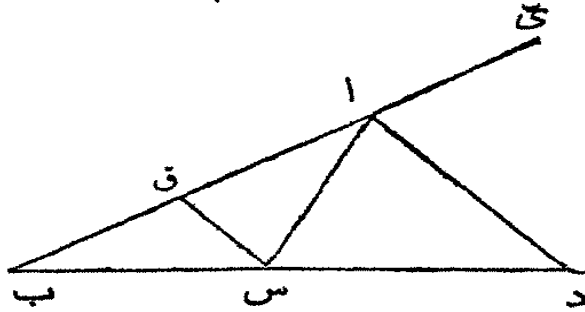
اس ي (ق ٥ ك ١) و ا ي س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د و اس ي تعدل المتبادلة
 س ا د (ق ٢٩ ك ١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط
 المستقيم ا د

قضية ألف ن

إذا تنصفت الزاوية الخارجة من مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة
 بعد اخراجها فنسبة القسامين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة
 بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الاخرين من المثلث بعضها الى
 بعض . وإذا كانت نسبة قسَمي القاعدة بعد اخراجها بعضها الى بعض
 كنسبة الضلعين الاخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط

الموصل بين تقطة القطع والزاوية المتقابلة ينصف الزاوية الخارجة من المثلث

ليكن اب س مثلثًا ولتنصف زاوية الخارجة بالخط المستقيم اد الذي يلاقي القاعدة بعد اخراجها في د فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا س



من النقطة س ارسم س ق حتى يوازي دا (ق ٢١ ك ١) فلكون الخط المستقيم اس يلاقي المتوازيين اد ق س

فالزاوية اس ق تعدل المتبادلة س اد (ق ٢٩ ك ١) وس اد تعدل داى حسب المفروض فالزاوية داى تعدل اس ق. ولكون الخط المستقيم ق اى يلاقي المتوازيين س ق دا فالزاوية الخارجة داى تعدل الداخلة المتقابلة س ق ا وقد تبرهن ان اس ق تعدل داى فالزاوية اس ق تعدل الزاوية س ق ا والضلع س ا يعدل الضلع اق (ق ٦ ك ١) ولكون اد يوازي س ق ضلعًا من المثلث ب س ق فنسبة ب د الى د س كنسبة ب ا الى اق (ق ٢ ك ٦) واق يعدل اس فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا س

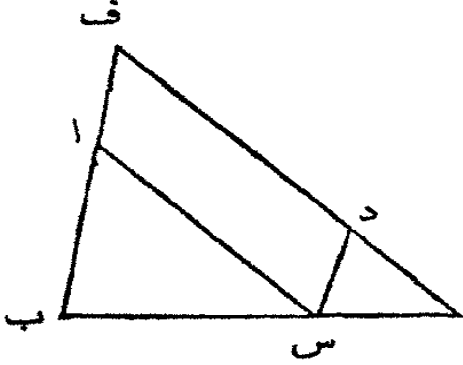
ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س. ارسم اد. فالزاوية س اد تعدل الزاوية داى. ثم الشكل كما تقدم. فلكون ب د : د س :: ب ا : ا س وب د : د س :: ب ا : اق (ق ٢ ك ٦) فنسبة ب ا : ا س :: ب ا : اق (ق ١١ ك ٥) واس يعدل اق (ق ٩ ك ٥) والزاوية اق س تعدل الزاوية اس ق (ق ٥ ك ١) والزاوية اق س تعدل الخارجة س اد واس ق تعدل المتبادلة س اد فالزاوية س اد = س اد

القضية الرابعة. ن

في مثلثات متساوية الزوايا الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة والاضلاع المتقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي

سوابق نسب وتواليها

ليكن ا ب س د س ي مثلثين متشابهين اي متساويي الزوايا ا ب س الزاوية
ا ب س تعدل د س ي والزاوية ا س ب تعدل د ي س وبالتتبع (فرع ق ٢٢ ك ١)



الزاوية ب ا س تعدل س د ي فالاضلاع
التي تلي هذه الزوايا المتساوية هي متناسبة
والاضلاع التي تقابلها هي متشابهة

ليوضع المثلثان حتى يمس احدهما
الآخر ويكون الضلع ب س من الواحد
وي س من الاخر على استقامة واحدة

فالزاويتان ا ب س ا س ب معا اقل من قائمتين (ق ١٧ ك ١) و د ي س = ا س ب
فالزاويتان ا ب س د ي س معا اقل من قائمتين فاذا أُخْرِجَ ب ا وي د يلتقيان
(فرع اول ق ٢٩ ك ١) فليُخْرَجَا حتى يلتقيا في ف . فلكون الزاوية ا ب س تعدل
د س ي فالخط ب ف يوازي س د (ق ٢٨ ك ١) ولكون ا س ب تعدل د ي س
فالخط ا س يوازي ف ي (ق ٢٨ ك ١) فالشكل ف ا س د متوازي الاضلاع و ا ف
يعدل س د و ا س يعدل ف د (ق ٢٤ ك ١) ولكون ا س يوازي ف ي احد اضلاع
المثلث ف ب ي ف نسبة ب ا : ا ف :: ب س : س ي (ق ٢ ك ٦) و ا ف = س د
فاذا ب ا : س د :: ب س : س ي (ق ٧ ك ٥) وبالمبادأة ب ا : ب س :: س د :
س ي (ق ١٦ ك ٥)

ولان س د يوازي ب ف فنسبة ب س : س ي :: ف د : د ي (ق ٢ ك ٦)
ولكن ف د = ا س فنسبة ب س : س ي :: ا س : د ي وبالمبادأة ب س : ا س ::
س ي : د ي . وقد تبهرن ان ا ب : ب س :: د س : س ي وب س : س ا ::
س ي : د ي فبالمساواة ب ا : ا س :: س د : د ي

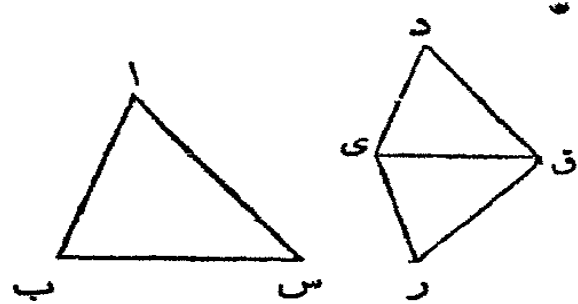
القضية الخامسة . ن

اذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبة فالمثلثان متشابهان

وزواياها المتساوية تقابل اضلاعها المتناسبة

ليكن ا ب س د ي ق مثلثين اضلاعها متناسبة اي ا ب : ب س :: د ي :

ي ق وب س : س ا :: ي ق : ق د وب المساواة ب ا : س :: ي د : د ق فالمثلث
 ا ب س يشبه المثلث د ي ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع
 المناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ي ق وب س ا تعدل ي ق د وب ا س
 تعدل ي د ق



في النقطتين ي وق من الخط
 المستقيم ي ق ا جعل الزاوية ق ي ر
 تعدل ا ب س (ق ٢٢ ك ١) والزاوية
 ي ق ر تعدل ا س ب فالباقية
 ب ا س تعدل الباقية ي ر ق (فرع

٤ ق ٢٢ ك ١) وزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث ي ر ق والاضلاع التي
 تقابل الزوايا المتساوية هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اي

ا ب : ب س :: ر ي : ي ق ولكن بالفروض

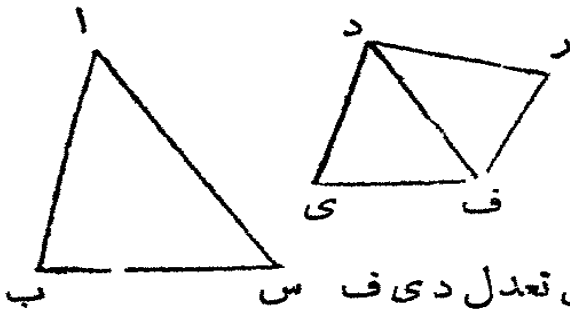
ا ب : ب س :: د ي : ي ق فاذا

د ي : ي ق :: ر ي : ي ق اي (ق ١١ ك ٥) د ي وري

بينها وبين ي ق تناسب واحد فها متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضاً
 د ق يعدل ق ر. ثم في المثلثين د ي ق ر ي ق الضلع د ي = ي ر و ي ق مشترك
 بينهما والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ي ق تعدل ر ي ق (ق ٨ ك ١)
 وبقيت زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية
 (ق ٤ ك ١) فالزاوية د ق ي = ر ق ي و ي د ق = ي ر ق ولكن ر ي ق = ا ب س
 فاذا ا ب س = د ي ق ولهذا السبب ايضاً ا س ب = د ق ي والزاوية عند ا تعدل
 الزاوية عند د فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ي ق

القضية السادسة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر وكانت
 الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل
 الاضلاع المتناسبة متساوية



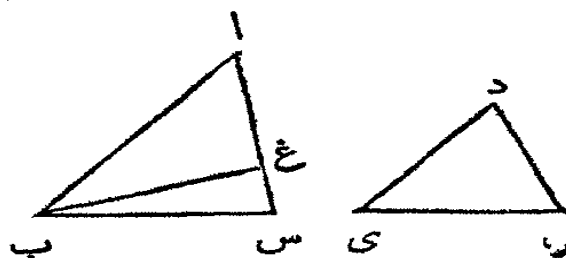
ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولتكن الزاويتان ب ا س ي د ف
متساويتين والاضلاع المحيطة بهما
متناسبة اي ب ا : س ي د :
د ف فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س تعدل د ي ف
واس ب تعدل د ف ي

في النقطتين د و ف من الخط المستقيم د ف ا جعل الزاوية ف د ر تعدل
احدى الزاويتين ب ا س ا و ي د ف (ق ٢٢ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعدل
اس ب فالباقية ا ب س تعدل الباقية د ر ف (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) والمثلث ا ب س
يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : س ي د : د ف وبالمفروض
ب ا : س ي د : د ف فاذا (ق ١١ ك ٥)
ي د : د ف : د ر : د ف اي ي د = د ر (ق ٩ ك ٥)
ود ف مشترك بين المثلثين ي د ف د ر ف فالضلعان ي د د ف يعدلان
الضلعين ر د د ف. ولكن الزاوية ي د ف = ر د ف فالقاعدة ي ف تعدل القاعدة
ر ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ي د ف يعدل المثلث ر د ف وبقيّة الزوايا من الواحد
تعدل بقيّة الزوايا من الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية د ف ر
تعدل د ف ي و د ر ف تعدل د ي ف. ولكن الزاوية د ف ر تعدل اس ب
فالزاوية اس ب تعدل د ف ي وبالمفروض ب ا س = ي د ف فالاخرى ا ب س
تعدل الاخرى د ي ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف

القضية السابعة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر والاضلاع
المحيطة بزاويتين اخريين متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقيّة الزوايا
اصغر من قائمة او لم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان والزاويا
التي تليها الاضلاع متناسبة متساوية



ليكن اب س دى ف مثلثين
والزاوية ب اس فلتعدل ي د ف
وليكن الاضلاع المحيطة بزاويتين
اخرين اب س دى ف متناسبة اى

اب : ب س :: دى : ي ف واولاً لتكن كل واحدة من الزاويتين الباقيتين عند
س وف اصغر من قائمة فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف اى الزاوية اب س
= دى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

لانه ان لم تكن الزاويتان اب س دى ف متساويتين فاحداها اكبر من الاخرى
لتكن اب س اكبرها وعند النقطة ب في الخط المستقيم اب اجعل الزاوية اب غ
تعدل دى ف (ق ٢٢ ك ١) فحسب المفروض الزاوية ب اغ تعدل ي د ف وقد
جعلت اب غ = دى ف فالباقية اغ ب تعدل الباقية دى ف (فرع ٤ ق ٢٢
ك ١) وزوايا المثلث اب غ تعدل زوايا المثلث دى ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

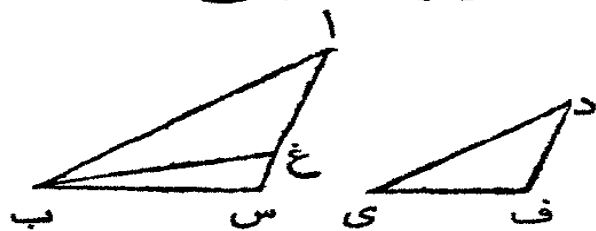
اب : ب غ :: دى : ي ف وبالمفروض

دى : ي ف :: اب : ب س فاذا (ق ١١ ك ٥)

اب : ب س :: اب : ب غ اى بين اب والمخطين ب س ب غ

تناسب واحد فاذا ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ
(ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من
قائمة فتكون الزاوية المتوالية اغ ب اعظم من قائمة (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان
اغ ب = دى ف فتكون دى ف اعظم من قائمة وقد فرض انها اصغر من قائمة
وذلك محال. فلا تكون الزاويتان اب س دى ف غير متساويتين اى هما متساويتان.
والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية عند ف فالمثلث
اب س يشبه المثلث دى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزاويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث



اب س يشبه المثلث دى ف. لانه اذا

رُسم الشكل كما تقدم يُبرهن ان ب س

= ب غ وب س غ = ب غ س .

وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا

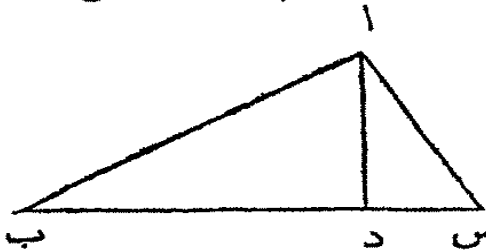
تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معاً لا تكونان اصغر من قائمتين وذلك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيُبرهن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف حسبما تقدم

القضية الثامنة. ن

في مثلث ذي قائمة اذا رُسم خط عمودي من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادثان على جانبي العمود متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث

الاول

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س ومن النقطة اليُرسَم ا د عموداً على القاعدة



ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث ا ب س. لأن الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا د ب لكون كل واحدة منها قائمة والزاوية عند ب مشتركة

بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويا الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فهما متشابهان

فرع. يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع. لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

ب د : دا :: دا : د س وفي المثلثين ا ب س ب د ا لنا (ق ٤ ك ٦)

ب س : با :: با : ب د وفي المثلثين ا ب س ا س د (ق ٤ ك ٦)

ب س : سا :: سا : س د

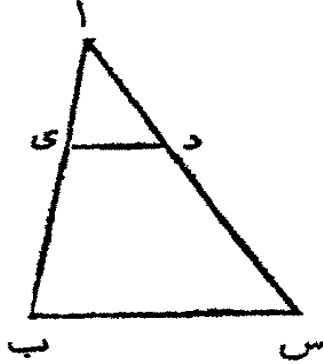
القضية التاسعة. ع

علينا ان نقطع من خطٍ مستقيم جزءًا معينًا ا ب جزءًا يعدهُ الخطُّ مرارًا

مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض. فعليتنا ان نقطع منه جزءًا يعدهُ ا ب مرارًا

مفروضة



من النقطة ا رسم الخط المستقيم ا س حتى يجعل مع ا ب زاوية وفي ا س افرض نقطة مثل د حتى ان ا س يعدهُ ا د مرارًا تعدل المراس المفروضة للخط ا ب ان يعدهُ الجزء المطلوب قطعة. ا رسم ب س ثم ا رسم د ي حتى يوازي ب س

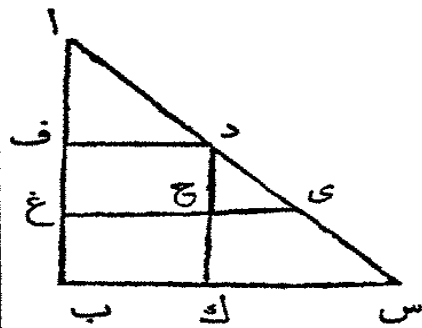
فلان ي د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فنسبة س د : د ا :: ب ي : ي ا (ق ٢ ك ٦) وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : ا د :: ب ا : ا ي. ولكن س ا هو مضروب من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ي (ق ج ك ٥) اي يعدهُ ا ي كما ان ا س يعدهُ ا د فاي جزء كان ا د من ا س يكون ا ي ذات ذلك الجزء من ا ب فقد قطع من ا ب الجزء المفروض

القضية العاشرة. ع

علينا ان تقسم خطًا مستقيمًا مفروضًا الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين

اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض و ا س الخط المقسوم. عليتنا ان تقسم ا ب

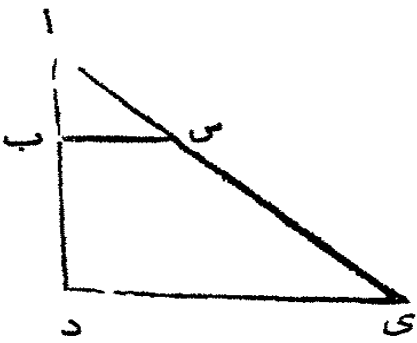


الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط ا س ليقسم ا س في د و ي وليوضع ا ب ا س حتى تحدث بينها زاوية و ا رسم ب س. ثم من النقطتين د و ي ا رسم د ف ي غ حتى يوازي ا ب س (ق ٢١ ك ١) ومن د ا رسم د ح ك حتى يوازي ا ب. فكل واحد من الشكائين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح = ف غ

(ق ٢٤ ك ١) وح ك = غ ب . ولكون ح ي يوازي ك س احد اضلاع المثلث د ك س
فنسبة س ي : س ي : د :: ك ح : ح د (ق ٢ ك ٦) ولكن ك ح = ب غ وح د = غ ف
فتكون س ي : س ي : د :: ب غ : غ ف . ولكون ف د يوازي غ ي احد اضلاع المثلث
اغ ي فنسبة س ي : د : دا :: غ ف : ف ا وقد تبهرن ان س ي : س ي : د :: ب غ : غ ف
فقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نجد خطاً ثالثاً مناسباً للخطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ا س الخطين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى تحدث بينهما
زاوية . علينا ان نجد خطاً ثالثاً يناسبها

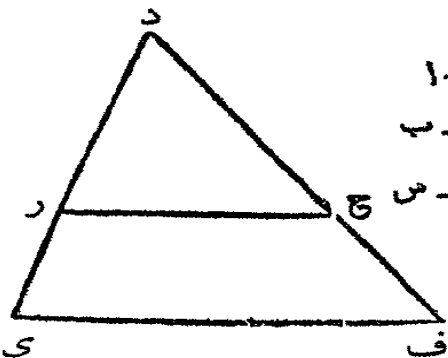


اخرج ا ب ا س الى د وي واجعل ب د
يعدل ا س . ا رسم ب س ثم من النقطة د ا رسم د ي
حتى يوازي ب س . فلان ب س يوازي د ي
ضلعاً من المثلث ا د ي فنسبة ا ب : ب د :: ا س
: س ي (ق ٢ ك ٦) ولكن ب د = ا س فنسبة

ا ب : ا س :: ا س : س ي فالخط س ي انما هو مناسبٌ ثالثٌ للخطين المفروضين

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نجد مناسباً رابعاً لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
ليكن ا و ب و س الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة . علينا ان نجد خطاً
رابعاً يناسبها

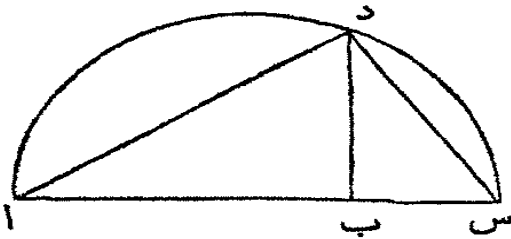


لفرض خطين
مستقيمين د ي د ف
بينهما زاوية س د ف .
ومنهما افصل د ر حتى
يعدل ا و رى حتى

يعدل ب ودح حتى يعدل س . ا رسم رح ثم ا رسم ي ف حتى يوازي رح (ق ٢١ ك ١) . فلان رح يوازي ي ف احد اضلاع المثلث د ي ف فنسبة در : ر ي :: دح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن در = ا و ر ي = ب ودح = س فنسبة ا : ب :: س : ح ف . فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نجد متناسبا متوسطا بين خطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ب س الخطين المستقيمين المفروضين . علينا ان نجد متناسبا



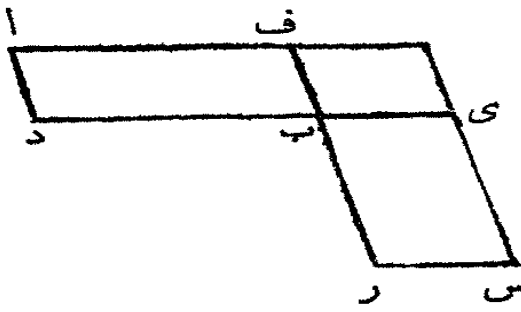
متوسطا بينهما . اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى اس ا رسم نصف دائرة ا د س . ومن النقطة ب ا رسم ب د عمودا على اس (ق ١١ ك ١) ثم ا رسم ا د و د س

لان ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وقد رسم د ب عمودا من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسبا متوسطا بين الخطين المفروضين ا ب ب س

القضية الرابعة عشرة . ن

في شكلين متوازيي الاضلاع متساويين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت زاوية من شكل متوازي الاضلاع زاوية من اخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيي الاضلاع متساويين لهما الزاويتان عند ب



متساويتان وليكن الضلعان د ب ب ي
على استقامة واحدة فيكون الضلعان ر ب
ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك
١) فاضلاع الشكلين ا ب ب س
المحيطة بالزاويتين المتساويتين هي متناسبة
بالتكافؤ اي نسبة د ب : ب ي :: ر ب : ب ف

ثم الشكل ف ي . فلان الشكلين ا ب ب س متساويان وف ي شكل
اخر متوازي الاضلاع فلنا ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ٧ ك ٥)
والشكلان ا ب ف ي لهما علو واحد فلنا

ا ب : ف ي :: د ب : ب ي (ق ١ ك ٦) وايضاً

ب س : ف ي :: ر ب : ب ف (ق ١ ك ٦) فاذاً

د ب : ب ي :: ر ب : ب ف (ق ١ ك ٥) فاضلاع

الشكلين ا ب ب س المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافؤ اي د ب : ب ي :: ر ب : ب ف

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س . لان د ب . ب ي :: ر ب : ب ف وايضاً

د ب : ب ي :: ا ب : ف ي وايضاً ر ب : ب ف :: ب س : ف ي فاذاً

ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ١ ك ٥)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س (ق ٩ ك ٥)

القضية الخامسة عشرة . ن

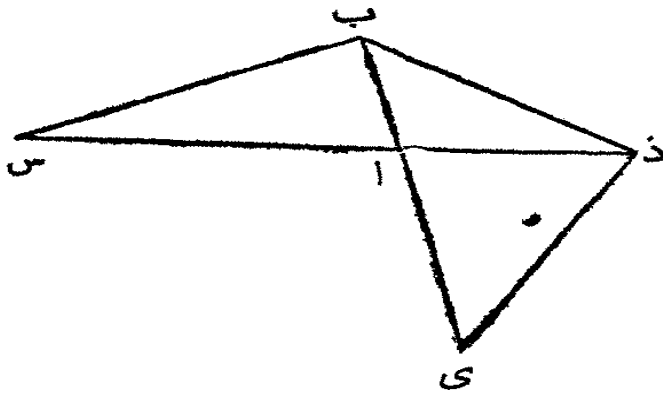
في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون

الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت

زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين

الزاويتين متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب س ا د ي مثلثين متساويين والزاوية ب ا س فلتعديل الزاوية



داى فالاضلاع المحيطة بهاتين
الزاويتين المتساويتين متناسبة
بالتكافؤ اي س ا : ا د :: ي ا
: ا ب

ليوضع المثلثان حتى يكون
الضلعان س ا ا د على استقامة

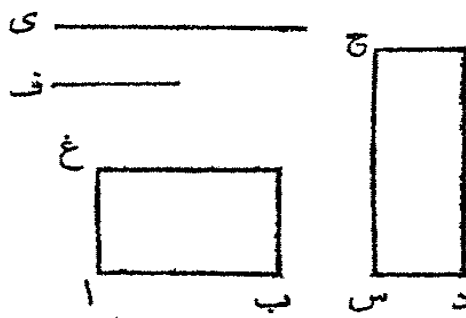
واحدة فيكون ي ا ا ب ايضا على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ا رسم ب د، فلكون
المثلث ا ب س يعدل المثلث ا د ي فنسبة المثلث س ا ب الى المثلث ب ا د
كالمثلث ي ا د الى ب ا د ولكن س ا ب : ب ا د :: س ا : ا د ونسبة ي ا د :
ب ا د :: ي ا : ا ب فاذا س ا : ا د :: ي ا : ا ب (ق ١١ ك ٥) فالاضلاع المحيطة
بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د ي. ا رسم ب د كما تقدم. فلان س ا : ا د :: ي ا
: ا ب وايضا لان س ا : ا د :: المثلث ا ب س : المثلث ب ا د (ق ١٤ ك ٦) وايضا
ي ا : ا ب :: المثلث ي ا د : المثلث ب ا د. فالمثلث ا ب س : المثلث ب ا د ::
المثلث ي ا د : المثلث ب ا د (ق ١١ ك ٥) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ي ا د
(ق ٩ ك ٥)

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو
مسطح الطرفين يعدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين .
والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل القائم الزوايا الذي
هو مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة

ليكن ا ب س د ي ف خطوطا مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د :: ي : ف
فالقائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي



من النقطة ا رسم اغ عموداً على اب
ومن س ارسم سح عموداً على س د واجعل
اغ يعدل ف وس ح يعدل ي وتم
الشكلين المتوازيين الاضلاع غ ب ح د
فلكون اب : س د :: ي : ف وي = س ح

وف = اغ فنسبة اب : س د :: س ح : اغ (ق ٧ ك ٥) فاضلاع الشكلين
المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب
(ق ١٤ ك ٦) وب غ هو مسطح اب في ف لأن اغ = ف وح د مسطح س د في ي لأن
س ح = ي فالقائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي. ثم اذا فرض
ان القائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي فالخطوط الاربعة
متناسبة اي اب : س د :: ي : ف. ثم الشكلين كما تقدم. فلان القائم الزوايا اب
× ف = القائم الزوايا س د × ي والقائم الزوايا ب غ هو مسطح اب × ف لان اغ
= ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د × ي لان س ح = ي فالقائم الزوايا
ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياها متساوية ايضاً فالاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ (ق ١٤ ك ٦) فنسبة اب : س د :: س ح : اغ
وس ح = ي واغ = ف فنسبة اب : س د :: ي : ف

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين يعدل مربع الوسط. والقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة

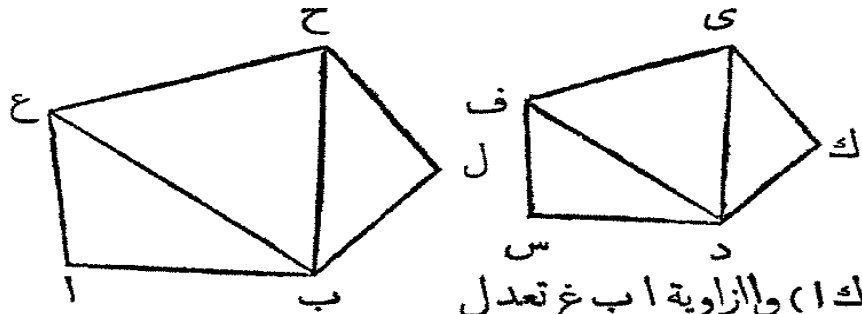
ليكن اوب وس ثلاثة خطوط متناسبة اي ا : ب :: ب : س فالقائم الزوايا
ا × س يعدل مربع ب. افرض خطاً اخر يعدل ب
مثل د فلكون ا : ب :: ب : س وقد فرض ان ب
يعدل د فنسبة ا : ب :: د : س (ق ٧ ك ٥) واذا

كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم

الزوايا مسطح الوسطين (ق ١٦ ك ٦) فالقائم الزوايا \times س يعدل القائم الزوايا
 \times ب \times د والقائم الزوايا ب \times د يعدل مربع ب لأن د يعدل ب فالقائم الزوايا
 \times س = ب. ثم اذا فرض ان \times س = ب تكون نسبة ا : ب :: ب : س
 ليفرض كما تقدم ان د يعدل ب فلان القائم الزوايا \times س = ب \times د = ب
 فالقائم الزوايا \times س = ب \times د واذا كان القائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم
 الزوايا مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق ١٦ ك ٦) ا : ب :: د :
 س ولكن ب = د فتكون ا : ب :: ب : س

القضية الثامنة عشرة. ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة
 شبيهاً بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس د ي ف الشكل المفروض ذا اضلاع
 مستقيمة. علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ي ف شكلاً ووضعاً



ارسم د ف وعلى
 النقطتين ا و ب من
 الخط المستقيم ا ب
 اجعل الزاوية ب ا غ

تعديل د س ف (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب غ تعديل
 س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعديل ا غ ب (ق ٢٢ ك ١) فالمثلث
 ف س د يشبه المثلث غ ا ب. ثم عند النقطتين ب و غ من الخط المستقيم ب غ
 اجعل الزاوية ب غ ح تعديل د ف ي (ق ٢٢ ك ١) والزاوية غ ب ح تعديل
 ف د ي فالزاوية الاخرى ف ي د تعديل ا خرى غ ح ب والمثلث ف د ي يشبه
 المثلث غ ب ح. فلان الزاوية ا غ ب تعديل س ف د والزاوية ب غ ح تعديل د ف ي
 فكل الزاوية ا غ ح تعديل الكل س ف ي. وهكذا يبرهن ايضاً ان ا ب ح تعديل
 س د ي. ولكن الزاوية عند ا تعديل الزاوية عند س والزاوية غ ح ب تعديل ف ي د
 فالشكل ا ب ح غ يشبه الشكل س د ي ف. واضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا

المساوية متناسبة. لأن المثلثين غ ا ب ف س د متساوي الزوايا فنسبة ب ا : غ : د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا أيضاً

اغ : غ ب :: س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ ح د ف ي
 غ ب : غ ح :: ف د : ف ي في المساواة (ق ٢٢ ك ٥)
 اغ : غ ح :: س ف : ف ي وهكذا يبرهن ان
 اب : ب ح :: س د : د ي وايضاً (ق ٤ ك ٦)

غ ح : ح ب :: ف ي : ي د فالشكلان متساوي الزوايا والاضلاع
 المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦)

ثم اذا فرض ان يرسم على اب شكلاً يشبه س د ك ي ف . ارسم د ي وعلى
 الخط المفروض اب ارسم الشكل اب ح غ حسباً تقدم حتى يشبه س د ي ف وعند
 المقطعين ب وح من الخط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل ي د ك
 والزاوية ب ح ل تعدل د ي ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك .

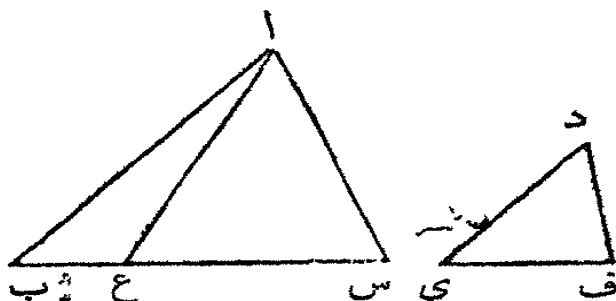
ولان الشكلين اب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ ح ب تعدل ف ي د
 وب ح ل تعدل د ي ك فالكل غ ح ل يعدل الكل ف ي ك . وهكذا يبرهن ان
 اب ل تعدل س د ك والشكل ذو الخمسة الاضلاع اغ ح ل ب يعدل الشكل ذا
 الخمسة الاضلاع س د ي ك د . ولان الشكلين اغ ح ب س ف ي د متساوي

الزوايا فنسبة غ ح : ح ب :: ف ي : ي د وايضاً ح ب : ح ل :: ي د : ي ك
 (ق ٤ ك ٦) في المساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ ح : ح ل :: ف ي : ي ك . ولهذا السبب
 ايضاً اب : ب ل :: س د : د ك وب ل : ل ح :: د ك : ك ي (ق ٤ ك ٦) لان
 المثلثين ب ل ح د ك ي متساوي الزوايا . فالشكلان اب ل ح غ س د ك ي ف
 متساوي الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة فهما متشابهان . وعلى هذه
 الكيفية يرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذو ستة اضلاع فاكثر يشبه بشكل
 مفروض

القضية التاسعة عشرة . ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كبرعات اضلاعها المتشابهة

ليكن AB CD مثلثين متشابهين ولتكن الزاويتان عند B و C



متساويتين ولتكن نسبة AB :

$BC :: CD :: DE$ حتى

يكون BC CD DE ضلعين

متشابهين (حد ١٣ ك ٥)

فنسبة المثلث AB CD الى

المثلث CD DE كنسبة مربع BC الى مربع CD . استعلم متناسبًا ثالثًا بين BC CD

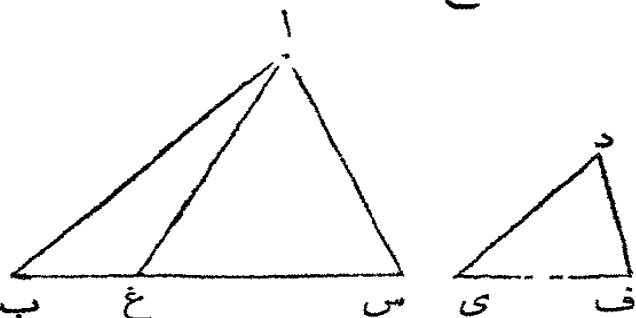
و CD DE (ق ١١ ك ٦) حتى يكون $BC :: CD :: DE$ $BC :: DE$. ارسم

اغ فلان $AB :: BC :: CD :: DE$ $BC :: DE$ فيالمباداة (ق ١٦ ك ٥)

$AB :: BC :: CD :: DE$ ولكن

$BC :: CD :: DE$ $BC :: DE$ فاذا (ق ١١ ك ٥)

$AB :: BC :: CD :: DE$



فاضلاع المثلثين AB CD

DE المحيطة بالزوايا

المتساوية منها هي متناسبة

بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

(ق ١٥ ك ٦) فالمثلث AB CD

يعدل المثلث CD DE . ولان $BC :: CD :: DE$ $BC :: DE$ فتناسب BC الى

BC هو مربع تناسبه الى CD . وب $BC :: DE$ $BC :: DE$ المثلث AB CD

(ق ١٦ ك ٦) فالمثلث AB CD $BC :: DE$ $BC :: DE$ والمثلث

AB CD يعدل المثلث CD DE فنسبة AB الى CD كربع BC الى مربع

CD

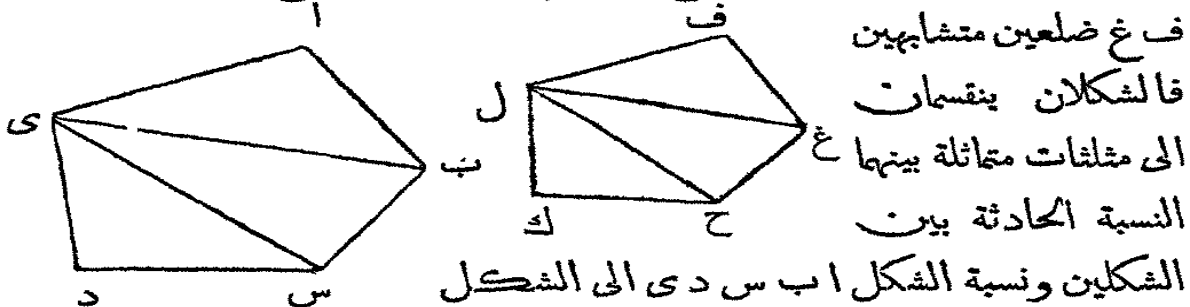
فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة فنسبة الاول

الى الثالث كنسبة مثلث مبني على الاول الى مثلث مثله مبني على الثاني

القضية العشرون

اشكال متشابهة ذات اضلاع كثيرة تنقسم الى مثلثات متماثلة عددًا

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية. ونسبة
الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كمربعات اضلاعها المتشابهة
ليكن $ا ب س د ي$ ف $غ ح ك ل$ شكلين لها اضلاع كثيرة وليكن $ا ب$



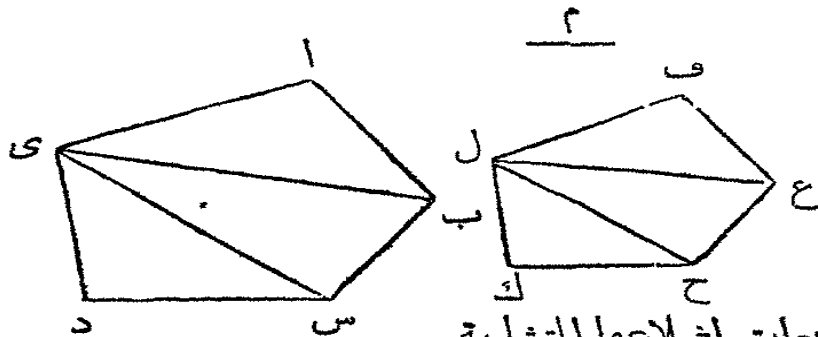
ف $غ ح ك ل$ كنسبة مربع $ا ب$ الى مربع $ف غ$. ا رسم $ب ي س ي غ ل ح ل$.
فلكون الشكل $ا ب س د ي$ يشبه الشكل $ف غ ح ك ل$ فالزاوية $ب ا ي$ تعدل
الزاوية $غ ف ل$ (حد $ا ك ٦$) و $ب ا ي :: غ ف :: ف ل$ فالمثلثان $ا ب ي$
ف $غ ل$ لها زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين
المتساويتين متناسبة فزاويا المثلث $ا ب ي$ تعدل زاويا المثلث $ف غ ل$ (ق $٦ ك ٦$)
فالمثلثان متشابهان (ق $٤ ك ٦$). ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية $ا ب س$
تعدل الزاوية $ف غ ح$ (حد $ا ك ٦$) فالزاوية الباقية $ي ب س$ تعدل الباقية $ل غ ح$
ولكون المثلثين $ا ب ي$ ف $غ ل$ متشابهين فنسبة $ي ب :: ل غ :: غ ف$
ولان الشكلين متشابهان فنسبة $ا ب :: ب س :: ف غ :: غ ح$ (حد $ا ك ٦$) فبالمساواة
(ق $٢٢ ك ٥$) $ي ب :: ب س :: ل غ :: غ ح$ فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين
متناسبان وزوايا المثلث $ي ب س$ تعدل زاويا المثلث $ل غ ح$ (ق $٦ ك ٦$) فهما
متشابهان (ق $٤ ك ٦$) وهكذا يبرهن ان المثلثين $ي س د ل ح ك$ متشابهان
فقد انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض
فالسوايق هي المثلثات $ا ب ي ي ب س س ي د$ والتوالي هي المثلثات $ف غ ل$
 $ل غ ح ل ح ك$. ونسبة الشكل $ا ب س د ي$ الى الشكل $ف غ ح ك ل$ كنسبة
مربع $ا ب$ الى مربع الضلع المشابه $ف غ$
لان المثلث $ا ب ي$ يشبه المثلث $ف غ ل$ فنسبة $ا ب ي$ الى $ف غ ل$ كنسبة

مربع الضلع ب ي الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ي س :
 المثلث غ ل ح :: مربع ب ي : مربع غ ل فنسبة ا ب ي : ف غ ل :: ب ي س :
 غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك

وقد تبرهن ان ي ب س : ل غ ح :: ا ب ي : ف غ ل . فنسبة ا ب ي :
 ف غ ل :: ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك اي نسبة احد السوايق الى احد
 التوازي ككل السوايق الى كل التوازي (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث ا ب ي : المثلث ف غ ل ::
 الشكل ا ب س د ي : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة ا ب ي : ف غ ل :: ا ب :
 ف غ فنسبة الشكل ا ب س د ي : ف غ ح ك ل :: مربع ا ب : مربع ف غ



فرع اول . هكذا
 يبرهن في اشكال
 ذات اربعة او ستة
 اضلاع فاكثر ان نسبة

بعضها الى بعض كنسبة مربعات اضلاعها المتشابهة

فرع ثان . اذا استعمل متناسب ثالث بين الضلعين المتشابهين ا ب ف غ مثل
 خط م اي ا ب : ف غ :: ف ع : م فلان الشكل على ا ب : الشكل على ف غ ::
 مربع ا ب : مربع ف غ فنسبة ا ب : م :: الشكل على ا ب : الشكل على ف غ حسبما
 تقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة
 الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل منله على الثاني

فرع ثالث . المربعات متشابهة . فنسبة مربع الى مربع كنسبة ضلع من
 الواحد الى مربع ضلع من الاخر . وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع
 مستقيمة اي احدها الى الاخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

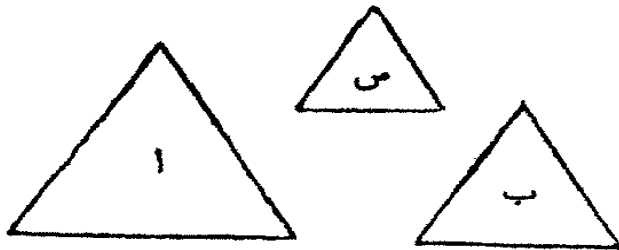
تعليقة . شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان . فبمشابهة
 المثلثين لنا ي ا ب = ل ف غ ا ب ي - ف غ ل ي ب س = ل غ ح فاذا
 ا ب س = ف غ ح وب س د - ف غ ح ك وهام جراً وايضاً ي ا : ل ف :: ا ب :

ف غ :: ي ث : ل غ :: ب س : غ ح وهلم جرا فالزوايا والاضلاع متناسبة
فالشكلان متشابهان

القضية الحادية والعشرون

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع
مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكلي آخر ذي اضلاع



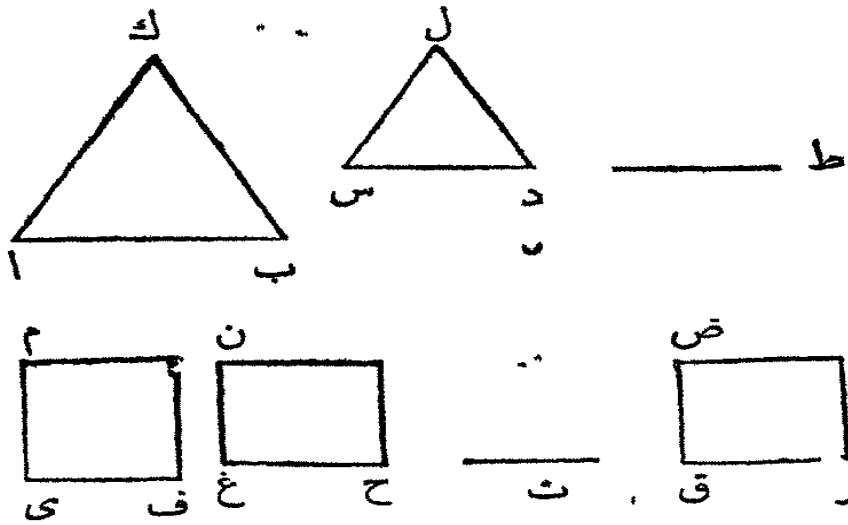
مستقيمة مثل س فهما متشابهان
لان ا يشبه س فهما متساويا
الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦)
ولان ب يشبه س فهما متساويا

الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد
من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية
منها متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ١) واضلاعا الموازية لهذه الزوايا
متناسبة (ق ا ك ٥) فالشكل ا يشبه الشكل ب (حد ا ك ٦)

القضية الثانية والعشرون

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالاشكال المتشابهة ذات
الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضاً. واذا
كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنيت عليها تكون
متناسبة ايضاً

ليكن ا ب س د ي ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د



:: ي ف : غ ح وليرسم
 على ا ب و س د
 شكلان متشابهان
 لهما اضلاع مستقيمة
 ك ا ب ل س د
 وليرسم على ي ف
 غ ح شكلان
 متشابهان لهما
 اضلاع مستقيمة

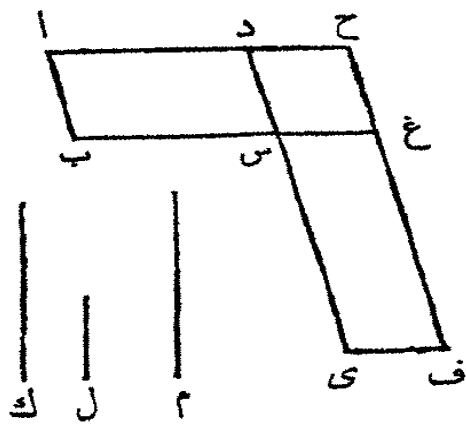
م ف ن ح فتكون نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح
 ليكن ط خطاً مستقيماً ومناسباً ثالثاً للخطين ا ب س د والخط المستقيم ت
 متناسباً ثالثاً للخطين ي ف غ ح (ق ١١ ك ٦) فلكون
 ا ب : س د :: ي ف : غ ح وايضاً
 س د : ط :: غ ح : ت (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
 ا ب : ط :: ي ف : ت ولكن
 ا ب : ط :: ك ا ب : ل س د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فاذا
 ي ف : ت :: م ف : ن ح فيكون
 ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)
 ثم اذا فرض ان نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح تكون نسبة ا ب : س د ::
 ي ف : غ ح

اجعل نسبة ا ب : س د :: ي ف : ق ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ا رسم
 الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف ا و ن ح شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)
 فلان ا ب : س د :: ي ف : ق ر وقد رُسم على ا ب و س د شكلان متشابهان
 شكلاً ووضعاً ك ا ب و ل س د وهكذا على ي ف ق ر قد رُسم شكلان متشابهان
 شكلاً ووضعاً م ف و ص ر فتكون نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : ص ر
 وبالمفروض ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح فالشكل المستقيم الاضلاع م ف ل
 تناسب واحد للشكلين ن ح ص ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان

ايضاً شكلاً ووضعاً فالخط غ ح يعدل المخط ق ر ولان اب : س د :: ي ف : ق ر
وقر = غ ح فنكون نسبة اب : س د :: ي ف : غ ح

القضية الثالثة والعشرون

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض
هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن اس س ف شكليين متوازيين
الاضلاع. والزاوية ب س د فلتعدل الزاوية
ي س غ فتناسب اس الى س ف هو
التناسب المركب من تناسبات اضلاعها.
ليوضع ب س وس غ على استقامة واحدة
فيكون ي س س د ايضاً على استقامة واحدة
(ق ١٤ ك ١) تم الشكل د غ. ثم عين خطأ

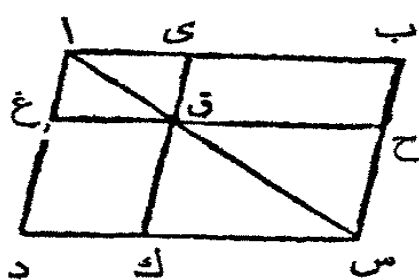
مستقيماً مثل ك واجعل تناسب ب س : س ع :: ك : ل (ق ١٢ ك ٦) وتناسب
د س : س ي :: ل : م فتناسبات ك الى ل ول الى م هي مثل تناسبات الاضلاع
اي تناسب ب س الى س غ وتناسب د س الى س ي. ولكن تناسب ك الى م هو
المركب من تناسب ك الى ل مع تناسب ل الى م (حد ١٠ ك ٥) فتناسب ك الى م
هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين. ولان ب س : س غ :: اس : س ح
(ق ١ ك ٦) وب س : س غ :: ك : ل فيكون ك : ل :: اس : س ح (ق ١١ ك ٥)
ولان د س : س ي :: س ح : س ف ود س : س ي :: ل : م فيكون ل : م ::
س ح : س ف (ق ١١ ك ٥)

وقد تبرهن ان ك : ل :: اس : س ح وان ل : م :: س ح : س ف فهما مساوية
(ق ٢٢ ك ٥) ك : م :: اس : س ف ولكن تناسب ك الى م هو المركب من
تناسبات اضلاع الشكلين كما تقدم. فتناسب اس الى س ف هو المركب من اضلاعها
فرع اول. شكلان قائماً الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتيهما في علوهما
فرع ثانٍ. مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعدة في العلو

فرع ثالث. مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف طوله.

القضية الرابعة والعشرون ن

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



ليكن اب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى غ ح ك شكليْن متوازي الاضلاع على جانبي القطر فهما متشابهان ويشبهان كل الشكل اب س د

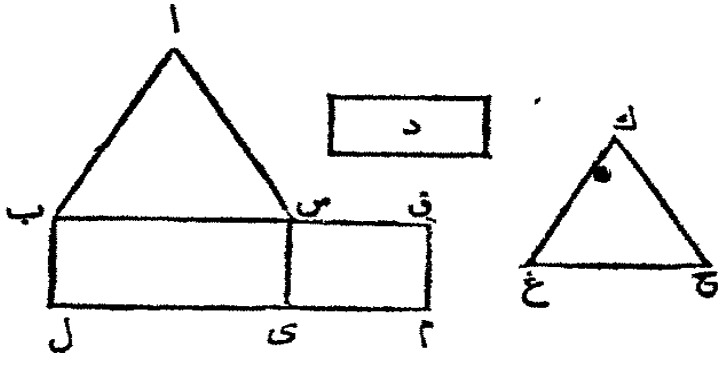
لان د س يوازي غ ق والزواية ا د س تعدل

الزاوية اغ ق (ق ٢٤ ك ١) ولان ب س يوازي ي ق والزواية اب س تعدل الزواية اى ق وكل واحدة من الزاويتين ب س د ي ق غ تعدل المقابلة د اب (ق ٢٤ ك ١) فهما متساويتان والشكلان اب س د اى ق غ متساويا الزوايا ولان الزواية اب س تعدل الزواية اى ق والزواية س اب مشتركة بين المثلثين ب اس ي ا ق فهما متساويا الزوايا و اب : ب س :: اى : ي ق (ق ٤ ك ٦) ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٢٤ ك ١) يكون اب : ا د :: اى : اغ (ق ٧ ك ٥) و د س : س ب :: غ ق : ق ي وس د : د ا :: ق غ : غ ا فاضلاع الشكلين اب س د اى ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضا الشكل اب س د يشابه الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكلين غ ي ك ح يشبه د ب والاشكال المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض (ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ي يشبه الشكل ك ح

القضية الخامسة والعشرون ع

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ويعدل شكلاً اخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن اب س شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ود شكلاً اخر مفروضاً مستقيم



الاضلاع. علينا ان نرسم
شكلاً مستقيم الاضلاع
يعدل د ويشبه اب س
ارسم الشكل
المتوازي الاضلاع
ب ي على الخط المستقيم

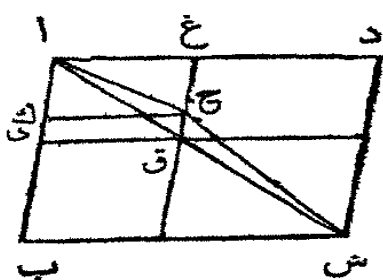
ب س حتى يعدل اب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ي ارسم شكلاً متوازيه
الاضلاع س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ي منه تعدل
الزاوية س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ي وى م كذلك
(ق ٢٩ ك ١ اوق ١٤ ك ١) استعلم متناسباً متوسطاً بين ب س وس ق مثل غ ح
(ق ١٢ ك ٦) وارسم على غ ح شكلاً مستقيم الاضلاع ك غ ح حتى يشبه اب س
شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)

فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل اب س : ك غ ح ::
ب س : س ق (فرع ثانٍ ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ي : س م (ق ١ ك ٦)
فتكون نسبة اب س : ك غ ح :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٥) والشكل اب س
يعدل ب ي فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٥) والشكل س م يعدل د
فالشكل ك غ ح يعدل د ايضاً وهو يشبه الشكل اب س وذلك ما كان علينا ان
نعلمه

القضية السادسة والعشرون . ن

شكلا ن متوازي الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابهها
وضعاً فهما على جانبي قطر واحد

ليكن اب س د اى ق غ شكلين متوازيين الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعاً



ولتكن الزاوية دا ب مشتركة بينهما فالشكلان على جانبي قطر واحد
والا فليكن اح س قطر الشكل ب د واق
قطر الشكل س غ والخط غ ق فليقطع اح س في
النقطة ح ومن ح ارسم ح ك حتى يوازي ا دا و
ب س . فالشكلان اب س د اك ح غ متشابهان لانهما على جانبي قطر واحد
(ق ٢٤ ك ٦) ودا : اب :: غ : اك (حدا ك ٦) وقد فُرض ان اب س د
اي ق غ متشابهان فتكون نسبة دا : اب :: غ : اي فتكون نسبة غ : ا : اي ::
غ : اك (ق ١١ ك ٥) فاذا اك = اي (ق ٩ ك ٥) اي الاصغر يعدل الاكبر
وذاك محال فلا يكون اك ح غ اب س د على جانبي قطر واحد فبالضرورة يكون
اب س د اي ق غ على جانبي قطر واحد

القضية السابعة والعشرون

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسام خط مستقيم
فاعظما مربع نصف الخط

ليكن اب خطا مستقيما وليتصف في س ولتكن د اية نقطة كانت فيه فالمرجع
على اس هو اعظم من القائم الزوايا اد × دب ب د س
فلكون الخط المستقيم اب قد انقسم الى قسمين متساويين في س وغير
متساويين في د فالقائم الزوايا اد × دب مع مربع س د يعدل مربع اس (ق ١٥
ك ٢) فاذا مربع اس هو اكبر من القائم الزوايا اد × دب

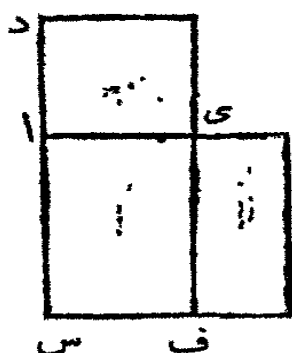
القضية الثامنة والعشرون

علينا ان تقسم خطا مستقيما مفروضا حتى يعدل القائم الزوايا مسطح
قسمة مساحة مفروضة ولا تكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف
الخط

القضية الثلثون ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً حتى يكون احد القسمين متناسباً متوسطاً بين الخط كله والقسم الاخر

ليكن ab الخط المستقيم المفروض. ارسم على ab مربعاً (ق ٤٦ ك ١) b s واخرج s a الى d حتى ان القائم الزوايا s d da يعدل المربع s b (ق ٢٩ ك ٦) اجعل ay يعدل ad وتم القائم الزوايا df ay ds da . فلكون s d da df فالشكل df s b اطرح الجزء المشترك s y فالباقي dy = الباقي b f وب f هو القائم الزوايا f y ay b او ab ay b y .



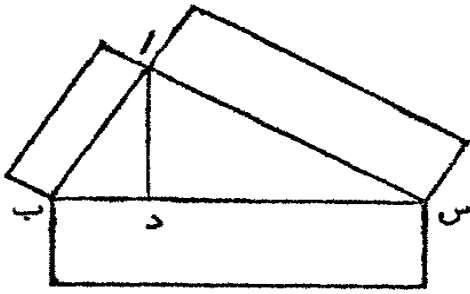
و dy هو المربع على ay فالخط ay هو متناسب متوسط بين ab و b y (ق ١٧ ك ٦) اي ab : ay :: ay : b و b هو اعظم من ay فيكون ay اعظم من y (ق ١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط ab على نسبة متوسطة (حد ٢ ك ٦)

طريقة اخرى

ليكن ab الخط المفروض. اقسام ab في s حتى ان القائم الزوايا ab bs ss يعدل as (ق ١١ ك ٢) فلكون ab bs ss as تكون نسبة ab : as :: as : bs (ق ١٧ ك ٦) اي as متناسب متوسط بين ab و bs (حد ٢ ك ٦)

القضية الحادية والثلاثون ن

في كل مثلث ذي قائمة ذوا اضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي يقابل القائمة يعدل الشكلين المتشابهين به هيئة ووضعاً المرسومين على الضلعين المحيطين بالقائمة

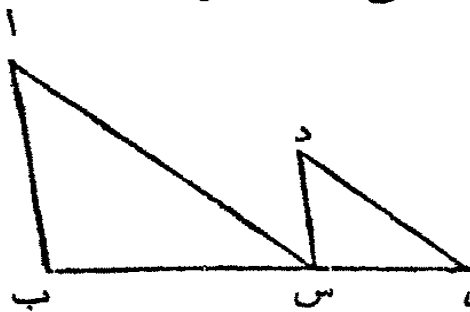


ليكن $اب س$ مثلثا ذا قامة $ب ا س$
 فذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على $ب س$
 يعدل الشكلين المتشابهين به هيئة ووضعاً
 المرسومين على $ب ا و س$
 ارسم العمود $ا د$. فلان $ا د$ قد رُسم

عموداً من القامة على القاعدة فالمثلثان $ا د ب$ $ا د س$ متشابهان ويشبهان كل المثلث
 $ا ب س$ ايضاً (ق ٨ ك ٦) ونسبة $س ب : ب ا :: ب ا : ب د$ (ق ٤ ك ٦)
 ولكون هذه المخطوط الثلاثة المستقيمة متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث
 كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله هيئة ووضعاً على الثاني (فرع ثانٍ ق ٢٠ ك ٦)
 فنسبة $س ب : ب ا :: ب ا : ب د$ شكل على $س ب$: مثله هيئة ووضعاً على $ب ا$. وبالقلب
 (ق ب ك ٥) $د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س$. وهكذا ايضاً
 $د س : س ب :: الشكل على س ا : مثله على س ب$. فاذا $ب د + د س : ب س$
 $:: الشكل على ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س$ (ق ٢٤ ك ٥)
 فالشكلان على $ب ا و س$ معاً يعدلان الشكل على $ب س$ وهي اشكال متشابهة

القضية الثانية والثلاثون

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الاخر اذا وضعت
 زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الاخر حتى تكون اضلعها المتشابهة
 متوازية يكون الضلعان الاخران على استقامة واحدة



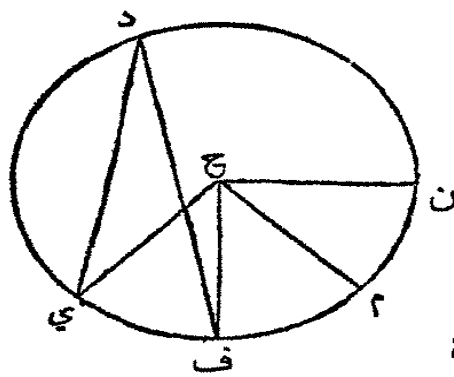
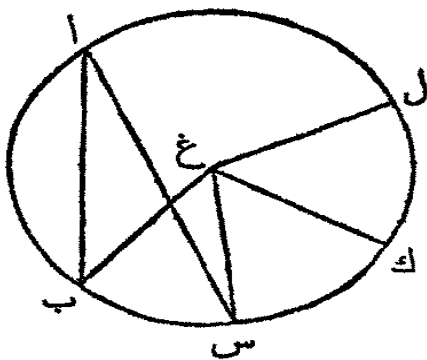
ليكن $ا ب س$ $د س ي$ مثلثين
 والضلعان $ب ا$ $ا س$ فليناسبيا $د د ي$
 اي $ب ا : ا س :: د د : د ي$ وليكن
 $ا ب و د س$ متوازيين و $ا س و د ي$ متوازيين
 فيكون $ب س و س ي$ على استقامة واحدة

لان الخط المستقيم $ا س$ يلاقي المتوازيين $ا ب$ $د س$ فالزاويتان المتبادلتان
 $ب ا س$ $ا س د$ متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب ايضاً الزاوية $س د ي$ تعدل

الزاوية اس د فالزاوية ب اس تعدل س دى والمثلثان لها الزاوية عند د تعدل
 الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا : اس ::
 س د : دى فزاويا المثلث اب س تعدل زوايا المثلث د س ي (ق ٦ ك ٦)
 فالزاوية اب س تعدل د س ي . وقد تبهرن ان ب اس تعدل اس د فلكل
 اس ي يعدل الزاويتين اب س ب اس . اضف الزاوية المشتركة اس ب الى
 المجانبين فالزاويتان اس ي اس ب تعدلان اب س ب اس اس ب وهذه
 الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا اس ي اس ب تعدلان قائمتين
 فالخطان ب س س ي على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

القضية الثالثة والثلاثون . ن

في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض
 كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض . وهكذا القطعان ايضاً
 لتكن اب س دى ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س
 الى الزاوية في المركز ح ف والزاوية في المحيط ب اس الى الزاوية في المحيط
 س د ف كنسبة القوس ب س الى القوس س ي ف والقطاع ب غ س : القطاع
 س د ف :: القوس ب س : القوس س ي ف

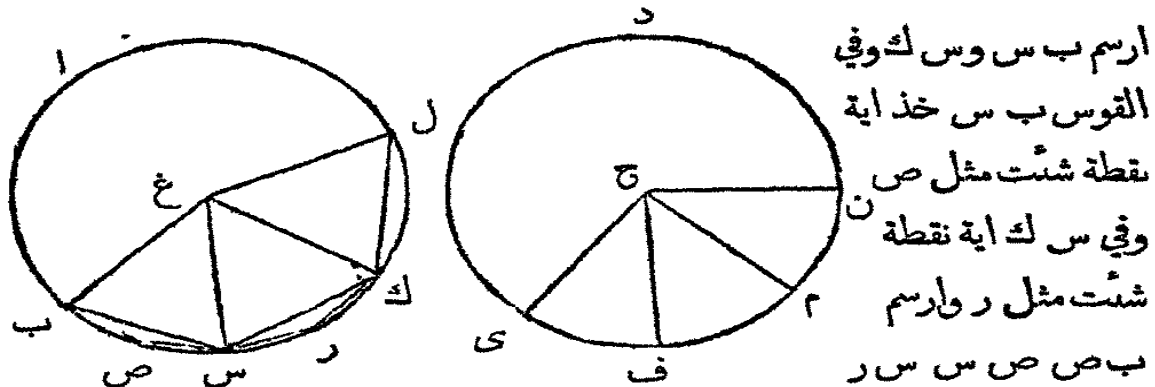


في الدائرة
 اب س اقطع
 اقواساً تعدل
 القوس ب س
 مثل س ك
 وكل وفي الدائرة

دى ف اقطع اقواساً تعدل القوس س ي ف مثل ف م م ن . ارسم غ ك غ ل ح م
 ح ن . فالزوايا ب غ س س غ ك ك غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك
 كل متساوية (ق ٢٧ ك ٣) فاي مضروب كان القوس ب ل من القوس ب س
 كان ب غ ل ذات هذا المضروب من ب غ س . وعلى هذا الاسلوب يتضح ان

ي ح ن ذات المضروب من ي ح ف الذي كان القوس ي ن من القوس ي ف
والقوس ب ل اذا عدل القوس ي ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ي ح ن
(ق ٢٧ ك ٢) وان كان اعظم فاعظم وان كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ي ف
:: ب غ س : ي ح ف (حد ٥ ك ٥) ولكن ب غ س : ي ح ف :: ب ا س :
ي د ف (ق ١٥ ك ٥) لان كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك ٢) فسيب القوس
ب س : القوس ي ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ي ح ف وكسبة الزاوية ب ا س
الزاوية ي د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



ارسم ب س وس ك وفي
القوس ب س خذ اية
نقطة شئت مثل ص
وفي س ك اية نقطة
شئت مثل ر وارسم
ب ص س س ر

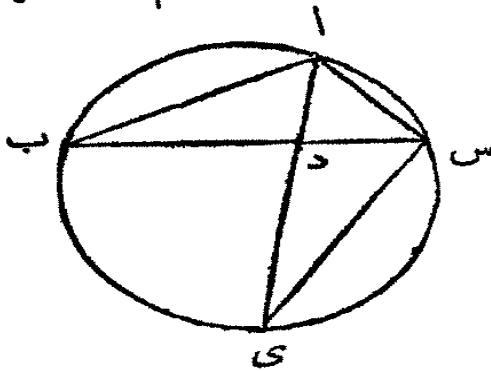
رك. فضلعان من المثلث غ ب س اي ب غ ع س يعدلان ضلعين من المثلث
غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س ع ك فالقاعدة ب س = القاعدة
س ك (ق ٤ ك ١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك. ولكون القوس ب س =
القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك فالزاوية
ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق ٧ ك ٢) والقطعة ب ص س تشبه القطعة
س ر ك (حد ٩ ك ٢) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فهما
متساويان (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضاً
بهرن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س اوس غ ك. وهكذا يبرهن ايضاً ان
القطاعان ي ح ف ف ح م م ح ن متساوية. فاي مضروب كان القوس ب ل
من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع
ب غ س وهكذا ايضاً اي مضروب كان القوس ي ن من القوس ي ف فالقطاع
ي ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ي ح ف. فالقوس ب ل اذا
عدل القوس ي ن فالقطاع ب غ ل يعدل القطاع ي ح ن واذا كان اكر

فاكبر واذا كان اصغر فاصغر فاذا (حد ه ك ه) القوس ب س : القوس ي ف :
 القطع ب غ س : ي ح ف

قضية ب. ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضا فالقائم
 الزوايا مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسي القاعدة
 مع مربع الخط المستقيم الذي ينصف الزاوية

ليكن اب س مثلثا وتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي



يقطع القاعدة في النقطة د . فالقائم الزوايا ب ا
 \times ا س = ب د \times د س + ا د^٢

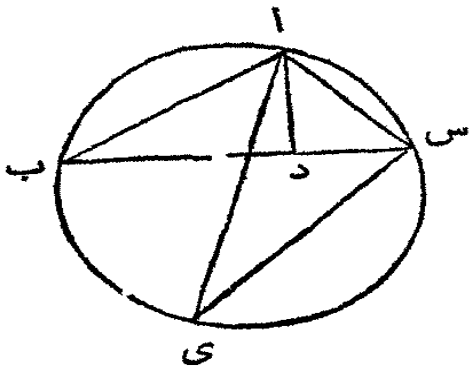
ارسم دائرة تحيط بالمثلث اب س (ق ٥
 ك ٤) واخرج ا د حتى يلاقي المحيط في ي وارسم
 ي س . فلكون الزاوية ب ا د تعدل الزاوية
 س ا ي والزاوية اب د تعدل الزاوية ا ي س

(ق ٢ ا ك ٢) لانها في قطعة واحدة فالمثلثان اب د ا ي س متساويا الزوايا ونسبة
 ب ا : ا د :: ي ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فاذا ب ا \times ا س = ا د \times ا ي (ق ٦ ك ٦)
 $=$ ي د \times ا د + ا د^٢ (ق ٢ ك ٢) وي د \times ا د = ب د \times د س (ق ٢٥ ك ٢) فاذا
 ب ا \times ا س = ب د \times د س + ا د^٢

قضية ج. ن

اذا رسم من زاوية مثلث خط مستقيم عمود على القاعدة فالقائم الزوايا
 مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح العمود وقطر الدائرة
 المحيطة بالمثلث

ليكن اب س مثلثا ويرسم العمود ا د على القاعدة ب س من الزاوية عند ا .



فالقائم الزوايا ب ا \times ا س يعدل القائم الزوايا
ا د في قطر الدائرة المحيطة بالمثلث

ارسم الدائرة ا س ب حتى تحيط بالمثلث

ا ب س (ق ٥ ك ٤) وارسم قطرها اي تم ارسم

المحيط ي س. فليكون القائم ب د ا تعدل القائم

ي س الواقعة في نصف دائرة والزاوية ا ب د

تعدل ا ي س لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٢) فالمتثلثان ا ب د ا ي س هما متساويان

الزوايا ونسبة ب ا : ا د :: ي س : ا س (ق ٤ ك ٦) فاذا ب ا \times ا س = ا د \times ي س ا

(ق ١٦ ك ٦)

قضيه د ن

القائم الزوايا مسطح قطري شكل ذي اربعة اضلاع في دائرة يعدل
القائم الزوايا مسطحي ضلعيه المتقابلين

ليكن ا ب س د شكلاً ذا اربعة اضلاع في دائرة. فالقائم الزوايا ا س \times ب د

يعدل القائم الزوايا ا ب \times س د و ب س \times ا د

اجعل الزاوية ا ب ي تعدل الزاوية د ب س

واضف الى كل واحدة منها الزاوية المشتركة

ي ب د. فالزاوية ا ب د = ي ب س. والزاوية

ب د ا = ب س ي (ق ٢٦ ك ٢) لانها في قطعة

واحدة فزوايا المثلث ا ب د تعدل زوايا المثلث

ب س ي ونسبة (ق ٤ ك ٦) ب س : س ي :: ب د : ا فاذا (ق ١٦ ك ٦)

ب س \times ا د = ب د \times س ي. ولكون الزاوية ا ب ي تعدل د ب س والزاوية

ب ا ي تعدل ب د س (ق ٢١ ك ٢) فزوايا المثلث ا ب ي تعدل زوايا المثلث

ب س د ونسبة ب ا : ا ي :: ب د : د س فاذا ب ا \times د س = ب د \times ا ي. وقد

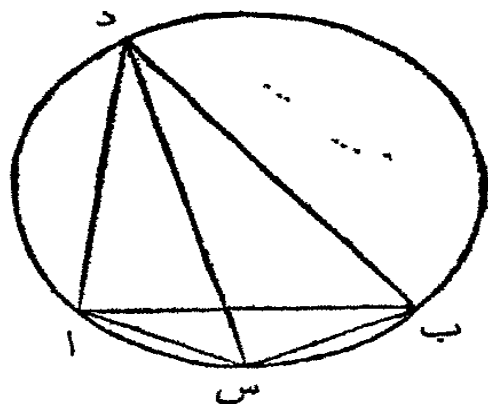
تبرهن ان ب س \times ا د = ب د \times س ي فاذا ب س \times ا د + ب ا \times د س =

ب د × س ي + ب د × ا ي = ب د × ا س (ق ا ك ٢) فالقائم الزوايا ب د ×
 ا س = ا ب × س د + ا د × ب س

قضية لا بن

اذا تنصف قوس دائرة ورسم من طرفيه ومن نقطة الانتصاف خطوط مستقيمة الى تقطة ما من المحيط تكون نسبة مجتمع الخطتين المرسومين من طرفي القوس الى الخط المرسوم من نقطة انتصافه كنسبة وتر القوس الى وتر نصفه

لتكن ا ب د دائرة وليتنصف القوس ا ب منها في س ولترسم الخطوط



المستقيمة ا د س د ب د من طرفي القوس ومن نصفه الى النقطة د من المحيط فنسبة مجتمع الخطتين ا د ب الى د س كنسبة ب الى ا س

لكون ا د ب س ذاربعة اضلاع في دائرة وقطره ا ب و د س فالقائم الزوايا ا د × س ب + د ب × ا س = ا ب × س د

(ق د ك ٦) ولكن ا د × س ب + د ب × ا س = ا د × ا س + د ب × ا س لان
 ا س = س ب فاذا ا د × ا س + د ب × ا س = ا س × (ا ي) (ق ا ك ٢) (ا د + د ب) ×
 ا س = ا ب × س د. و اضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافؤ
 (ق ا ك ٦) فتكون نسبة ا د + د ب : د س :: ا ب : ا س

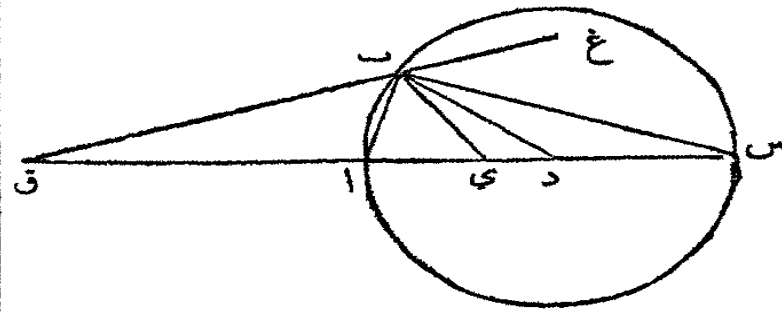
قضية ون

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجه حتى ان القائم الزوايا مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربع نصف القطر

ورُسم من هاتين النقطتين خطَّان مستقيمان الى نقطة ما من المحيط
تكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة احد قسيمي القطر بين احدي
النقطتين المذكورتين والمحيط الى الاخر بين النقطة الاخرى والمحيط

لتكن ا ب س دائرة مركزها د. اخرج دا وعين فيه نقطتين ي وق حتى ان
القائم الزوايا ي د × د ق يعدل مربع ا د ويرسم ي ب ق ب الى ب نقطة من المحيط

فتكون نسبة ق ب :
ب ي :: ق ا : ا ي
ارسم ب د. فلكون
القائم الزوايا ق د × د ي
يعدل مربع ا د او د ب



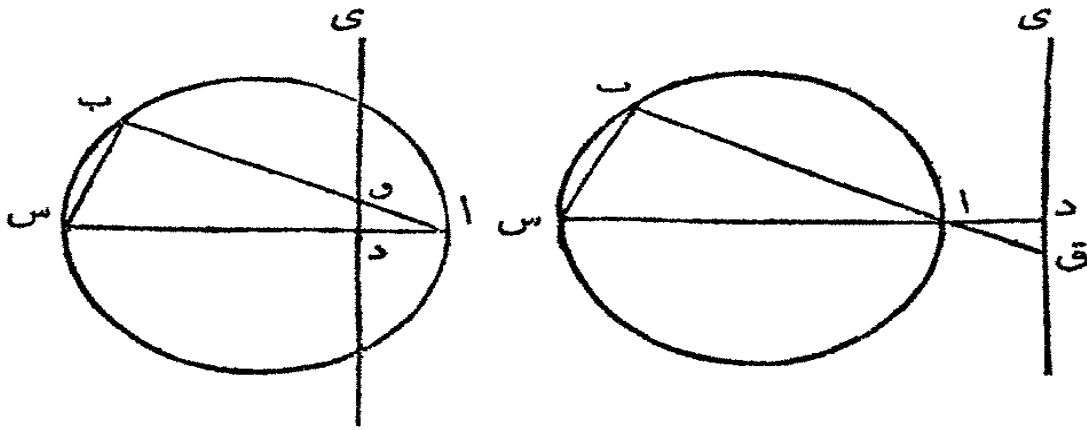
فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ي (ق ١٧ ك ٦). فالثلثان ق د ب ب د ي
اضلاعها المحيطة بالزاوية المشتركة د هي متناسبة وها اذا متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦)
والزاوية د ي ب تعدل د ب ق و د ب ي تعدل د ق ب. ولكون الاضلاع
المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ي :
ي د وبالمبادلة (ق ١٦ ك ٥) ق ب : ب ي :: ب د : ي د او ق ب : ب ي :: ا د :
د ي ولان ق د : د ا :: د ا : د ي فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) ق ا : د ا :: ا ي : ي د
وبالمبادلة (ق ١١ ك ٥) ق ا : ا ي :: د ا : ي د. وقد تبرهن ان ق ب : ب ي ::
ا د : د ي فتكون نسبة ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي

فروع. اذا رسم ا ب فلكون ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي تكون الزاوية ق ب ي
قد تنصفت بالخط ا ب (ق ٢ ك ٦). ولان ق د : د س :: د س : د ي وبالتركيب
(ق ١٨ ك ٥) ق س : د س :: د س : ي د وقد تبرهن ان ق ا : ا د او د س ::
ا ي : ي د فبالمساواة ق ا : ا ي :: ق س : ي د. ولكن ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي
فاذا ق ب : ب ي :: ق س : ي د (ق ١١ ك ٥) فاذا اُخرج ق ب الى غ
ورسم ب س فالزاوية ي ب غ تنصّف بالخط ب س (ق ١ ك ٦)

قضية ز.ن

اذا رُسم من طرف قطر دائرة خطٌ مستقيمٌ في الدائرة وإذا لاقى خطاً عموداً على القطر داخل الدائرة أو خارجها بعد اخراجه فالقائم الزوايا مسطح الخط المستقيم في الدائرة والقسم منه الواقع بين طرف القطر والخط العمودي على القطر يعدل القائم الزوايا مسطح القطر والقسم منه المقطوع بالعمود عليه

ليكن ا ب س دائرة قطرها ا س وليكن د ي عموداً على القطر ا س وليلاقوه

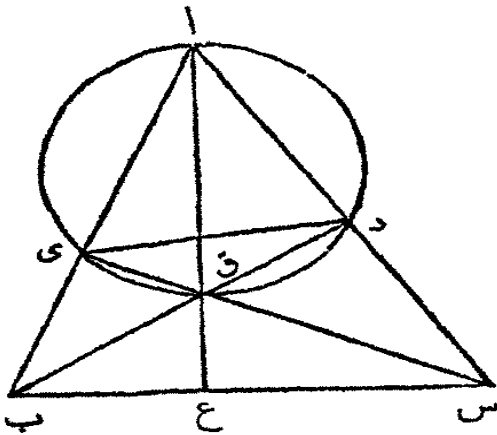


ا ب في ق فالقائم الزوايا ب ا × ا ق = س ا × ا د

ارسم ب س. فالزاوية ا ب س قائمة لانها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢)
و ا د ق ايضاً قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او
مقابلة لها فللمثلتان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق
(ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا ب ا × ا ق = س ا × ا د (ق ١٦ ك ٦)

قضية ح.ن

العموديات من زوايا مثلث الى الاضلاع المقابلة تتقاطع في نقطة واحدة
ليكن ا ب س مثلثاً و ب د و س ي عمودين يتقاطعان في ق



ارسم اق و اخرج حتى يلاقي ب س في
غ . فالخط اغ عمود على ب س . ارسم د ي
وارسم الدائرة اى ق تحيط بالمثلث اى ق .
فلكون اى ق قائمة فالخط اق قطر الدائرة
المحيطة بالمثلث اى ق (ق ٢١ ك ٢) واق
ايضا قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ادق
فالنقط اى ق د في محيط دائرة واحدة .

ولكون الزاوية اى ق ب تعدل الزاوية دق س (ق ١٥ ك ١) والزاوية بى ق تعدل
س دق لانها قائمتان فالمثلثان بى ق س دق متساويا الزوايا ونسبة ب ق :
اى ق :: س ق : دق (٤ ك ٦) وبالمبادلة ب ق : س ق :: اى ق : دق (ق ١٦ ك ٥)
فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ق س اى ق د متناسبة فالمثلثان
ب ق س اى ق د متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل اى ق د .
ولكن اى ق د تعدل اى ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٢) فالزاوية اى ق
تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان اى ق س ق غ متساويتان ايضا لانها متقابلتان
(ق ١٥ ك ١) فالزاويتان اى ق ق غ س متساويتان ايضا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١)
ولكن اى ق قائمة فتكون ق غ س ايضا قائمة واغ عمود على ب س

فرع . المثلث ادى يشبه المثلث ا ب س . لان المثلثين ب ا د س اى لها
الزاويتان عند د وى قائمتان والزاوية عدا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : د : س ا :
اى وبالمبادلة ب ا : س ا : د ا : اى . فالمثلثان ب ا س د اى لها الزاوية عدا
مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بهما متناسبة فهما متساويا الزوايا ومتشابهان (ق ٦
ك ٦)

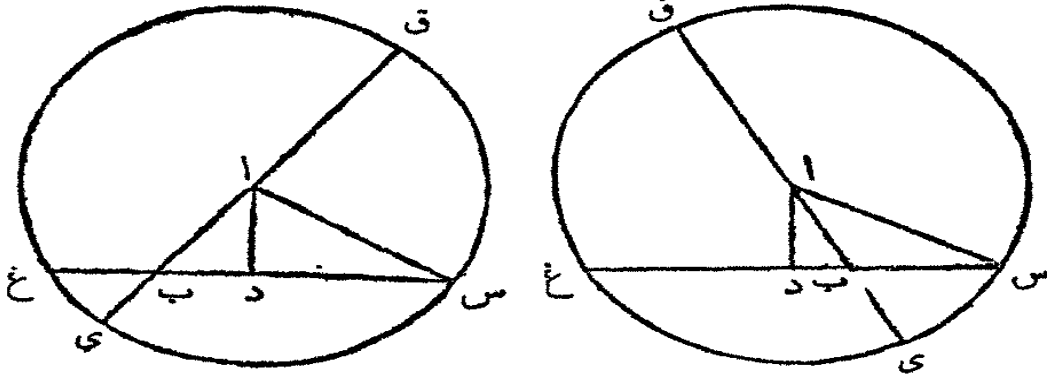
$$\text{النائم الروايا ب ا} \times \text{اى} = \text{س ا} \times \text{اد}$$

قضية ط . ن

اذا رسم من زاوية مثلث عمود على القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مجتمع

الضلعين الاخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح مجموع قسي القاعدة في فضلتهما

ليكن اب س مثلثا ومن الزاوية ب اس يرسم اد عمودا على القاعدة ب س



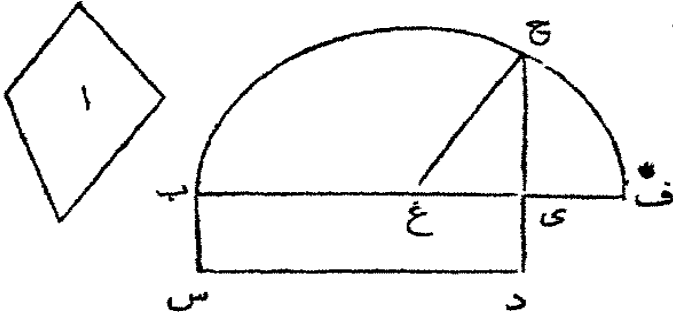
فالقائم الزوايا (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب) -
 دب اجعل ا مركزا واس اطول الضلعين نصف قطري وارسم الدائرة س ق غ
 واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وي واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ.
 فلان اق = اس فالخط ب ق = اب + اس مجموع الضلعين ولان اي = اس
 فالخط ب ي = اس - اب فضلة الضلعين. ولكون اد عمودا من المركز على غ س
 فهو ينصفه ايضا فاذا وقع العمود داخل المثلث فالخط ب غ = دغ - دب =
 دس - دب = فضلة قسي القاعدة وب س = دب + دس = مجموع قسي القاعدة
 واذا وقع اد خارج المثلث فالخط ب غ = دغ + دب = س د + دب = مجموع
 القسامين وب س = س د - دب = فضلتهما. وعلى الحالين لان الخطين ق ي
 غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب × ب ي = س ب × ب غ او حسبما
 تقدم (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)

عمليات ملحقات بالكتاب السادس

قضية ي. ع

علينا ان نرسم مربعا يعدل شكلا مفروضا اذا اضلاع مستقيمة

ليكن a الشكل المفروض ذا الاضلاع المستقيمة . علينا ان نرسم مربعاً يعدل a



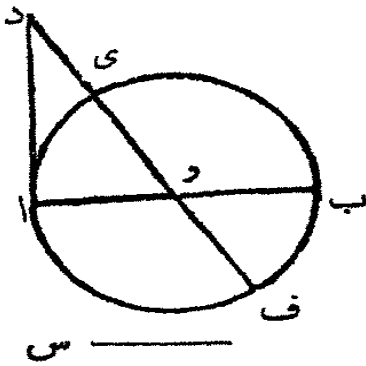
ارسم القائم الزوايا b s d
حتى يعدل a (ق ٤٥ ك ١)
واخرج احد اضلاعه b y
واجعل y f يعدل y d
نصف b f في $غ$ واجعل $غ$

مركزاً و $غ$ f او $غ$ b نصف قطر وارسم نصف الدائرة f $ح$ b واخرج d الى $ح$
 $ح$ y $=$ b y \times y f (ق ١٣ ك ٦) b $=$ d $=$ a فالمربع على $ح$ y يعدل a

قضية ك.ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا يعدل مربعاً مفروضاً وفضله ضلعيه المتواليين تعدل خطاً مفروضاً

ليكن s ضلعاً من المربع المفروض و a b فضله ضلعي الشكل المطلوب

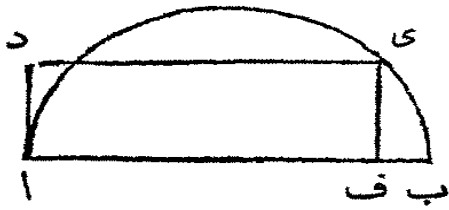


ارسم على a b دائرة ومن طرف القطر ارسم المماس
 a d حتى يعدل ضلعاً من مربع s وفي النقطة d والمركز
ارسم القاطع d f فيكون f d \times d y الشكل المطلوب
اولاً فضله ضلعيه يعدل y f او a b
وثانياً d y \times d f $=$ d a (ق ٢٦ ك ٢) و d a $=$ s

قضية ل.ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل مربعاً مفروضاً ومجموع ضلعيه المتواليين يعدل خطاً مفروضاً

ليكن s المربع المفروض و a b مجموع ضلعي الشكل المطلوب



اجعل اب قطراً وارسم
عليه نصف دائرة وارسم دى
حتى يوازي اب واجعل ا د
(اي ضلعاً من المربع المفروض)

البعد بينهما والخط دى فليقطع نصف الدائرة في ي ومن ي ارسم ي ف عموداً
على اب فيكون اف \times ف ب الشكل المطلوب
لان مجتمعا يعدل اب ومسطحهما اف \times ف ب يعدل مربع ف ي او ا د
و ا د^٢ = س

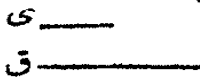
تعليقة. حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون ا د اطول من نصف القطر. اي
ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخط ا ب

قضية م. ع

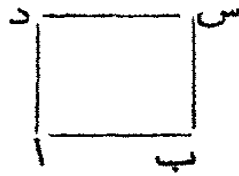
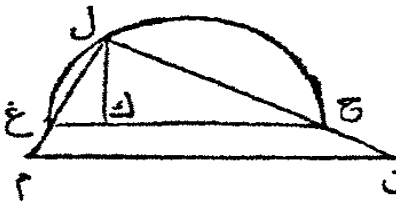
علينا ان نرسم مربعاً تكون نسبته الى مربع مفروض كنسبة خط مفروض
الى خط اخر مفروض

ليكن اس المربع المفروض وى وف الخطين المفروضين

ليكن غ ح خطاً مستقيماً غير معين طوله وافصل منه غ ك حتى يعدل ي



وك ح حتى يعدل ف وعلى



غ ح ارسم نصف دائرة وارسم

ك ل عموداً على غ ح. وارسم

ل غ م حتى يعدل اب ارسم

م ن حتى يوازي غ ح واخرج

ل ح الى ن. فلكون م ن يوازي ع ح فنسبة ل م : ل ن :: ل غ : ل ح ول م^٢ :

ل ن^٢ :: ل غ^٢ : ل ح^٢ (ق ٢٢ ك ٦) ول غ ح مثلث قائم الزاوية فنسبة ل غ^٢ :

ل ح^٢ :: غ ك : ك ح فاذا ل م : ل ن :: غ ك : ك ح وقد قُرض ان غ ك = ي

وك ح = ق ول م = اب فالمرجع على اب : المربع على ل ن :: ي : ف

قضية ن.ع

علينا ان تقسم مثلثا الى قسمين بخط من احدى زواياه حتى تكون
نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن
اقسم ب س الى قسمين ب د و د س مناسبين للخطين م ون وارسم ا د

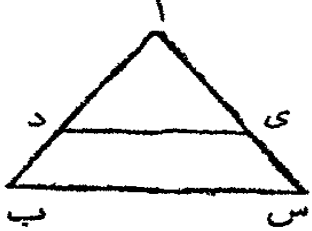


فينقسم المثلث حسب المفروض لان
المثلثات التي لها علو واحد بعضها الى
بعض كفوا عدها بعضها الى بعض فلما

ا ب د : ا د س :: ب د : د س :: م : ن :: س : د
تعلية، يمكن اقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك
باتقسام القاعدة على التناسب المفروض

قضية س.ع

علينا ان تقسم مثلثا الى قسمين بخط يوازي احد اضلاعه حتى تكون
نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن
اجعل ا ب : ا د :: م : ن + م : ن : ا رسم د ي حتى يوازي ب س فقد انقسم

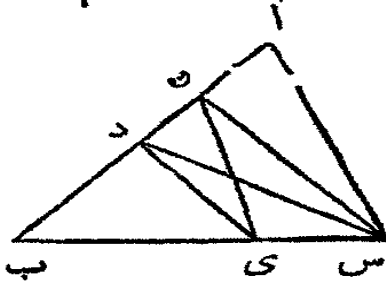


المثلث حسب المفروض
لان المثلثين ا ب س ا د ي متشابهان و ا ب س
: ا د ي :: ا ب : ا د ولكن م : ن + م : ن :: ا ب : ا د
فيكون ا ب س : ا د ي :: م : ن + م : ن فاذا ب د ي س
: ا د ي :: م : ن

قضية ع.ع

علينا ان تقسم مثلثا مفروضا الى قسمين بخط مستقيم من نقطة
مفروضة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط
مستقيم م الى خط مستقيم ن

ليكن ا ب س المثلث المفروض ون النقطة المفروضة . ارسم ن س واقسم ا ب
 في د حتى يكون ا د : د ب :: م : ن . وارسم د ي حتى
 يوازي ن س وارسم ن ي فالخط ن ي يقسم المثلث
 حسب المفروض



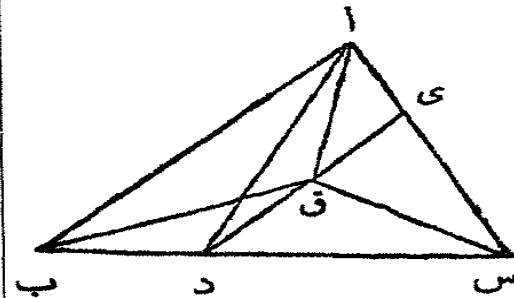
ارسم د س . فلان د ي ن س متوازيان فالمثلثان
 ن د ي س د ي متساويان . اضف الى كل واحد

منهما المثلث د ي ب فالمثلث ن ي ب = د س ب . فاذا طرح كل واحد من
 المثلث ا ب س يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة ا س ي ن وهو يعدل المثلث
 ا س د و ا س د : د س ب :: ا د : د ب :: م : ن فيكون ا س ي ن : ن ي ب :: م : ن
 تعليقة . على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاء كثيرة متساوية بخطوط من
 نقطة مفروضة في احد اضلاعه . لانه اذا انقسم ا ب الى اجزاء متساوية ورسم من
 نقط الانقسام خطوط توازي ن س فانها تقطع ب س و ا س ومن هذه نقط
 التقاطع اذا رسمت خطوط الى ن تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

قضية ف . ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من
 زواياه الى نقطة واحدة داخله

اجعل ب د ثلث ب س وارسم د ي حتى يوازي ب ا الضلع الذي يلي ب د .
 نصف د ي في ق ومن ق ارسم الخطوط
 المستقيمة ق ا ق ب ق س فقد انقسم المثلث
 حسب المفروض



ارسم د ا . فلكون ب د ثلث ب س
 فالمثلث ا ب د هو ثلث المثلث ا ب س .

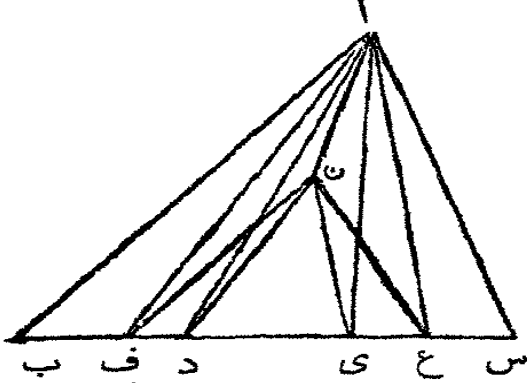
و ا ب د = ا ب ق (ق ٢٧ ك ١) فاذا ا ب ق هو ثلث ا ب س . ولان د ق = ق ي
 فالمثلث ب د ق = ا ق ي وكذلك س د ق = س ق ي فلكل ب ق س يعدل
 الكل ا ق س وقد تبرهن ان ا ب ق يعدل ثلث ا ب س فكل واحد من المثلثات

ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

قضية ص . ع

علينا ان تقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط من نقطة مفروضة داخله

اقسم ب س الى ثلاثة اقسام متساوية في دوى وارسم دن ي ن . ارسم ايضا

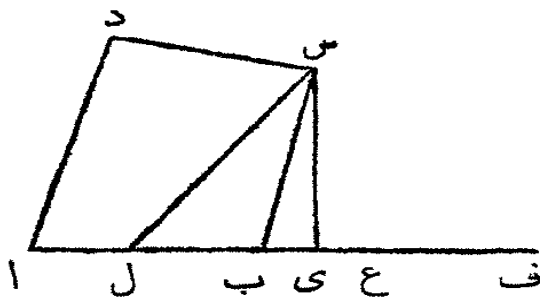


ا ف حتى يوازي دن وارسم اغ حتى يوازيه ي ن . فاذا رسمت ن ف ن غ ن ا ينقسم المثلث حسب المفروض ارسم ا د اى . فلكون ا ف ون د متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا ف د فاذا اضيف اليها المثلث ا ب ف يحدث

الشكل ا ب ف ن ذو الاربعه الاضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د انما هو ثلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثلث المثلث ا ب س . ولان اغ يوازيه ن ي فالمثلث اغ ن = اغ ي . اضف اليها اس غ فالشكل اس غ ن يعدل المثلث اس ي الذي هو ثلث ا ب س فالشكل اس غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن اس غ ن ن ف غ يعدل ثلث ا ب س

قضية ق . ع

علينا ان تقسم شكلا اذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احده زواياه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن ارسم س ي عمودا على ا ب وارسم شكلا اذا زوايا فاعمة حتى يعدل الشكل



المفروض وليكن س ي ضلعاً من اضلاع
 وى ف ضلعاً اخر من اضلاع واقسم
 ي ف في غ حتى تكون نسبة م : ن :: غ : ف
 : ي غ . اجعل ب ل يعدل مضاعف ي غ
 وارسم ل س . فقد انقسم الشكل حسب
 المفروض

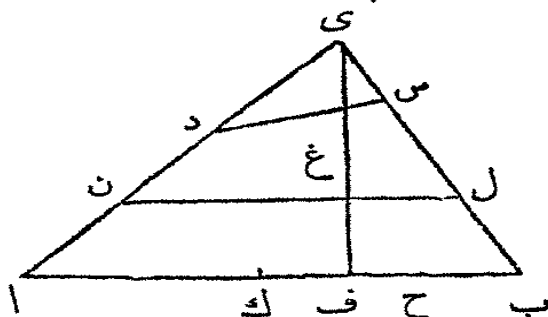
لان المثلث س ب ل يعدل س ي > ي غ . فنسبة القائم الزوايا س ي > غ ف
 : س ب ل :: غ ف : ي غ . ولكن س ي > غ ف = الشكل دل ونسبة غ ف :
 غ ي :: م : ن فاذا دل : س ل ب :: م : ن



قضية ر.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط يوازي احد
 اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن

ليكن اب س د الشكل . اخرج اد وب س حتى يلتقيا في ي وارسم ي ف
 عموداً على اب ونصّفه في غ وعلى غ ف ارسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل المثلث



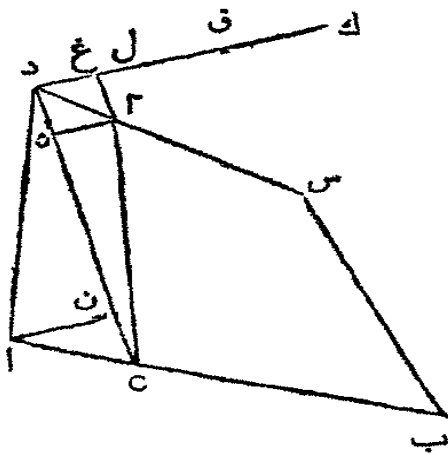
ي د س وليكن ح ب ضلعاً اخر من هذا
 الشكل . اقسام اح في ك حتى تكون
 نسبة الك : كح :: م : ن واجعل ي ا :
 ي ن : اب : ك ب . ارسم ن ل حتى
 يوازي اب فينقسم الشكل حسب

المفروض . لان المثلثين ي اب ي ن ل متساويان تكون نسبة ي اب : ي ن ل ::
 ي ا : ي ن وبالمفروض ي ا : ي ن :: اب : ك ب فتكون نسبة ي اب :
 ي ن ل :: اب : ك ب :: اب : ك ب :: اب : ك ب :: غ ف : ك ب وبالشكل ي اب =
 اب > غ ف فاذا ي ن ل = ك ب > غ ف واك > غ ف = ال . ولكن اح >
 غ ف = اس فاذا ك ح > غ ف = ن س واك > غ ف : ك ح > غ ف :: الك : كح

واك : ك ح : م : ن فاذا ال : ن : س : م : ن

قضية ش . ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من نقطة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ت ارسم ه د وان عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن دك

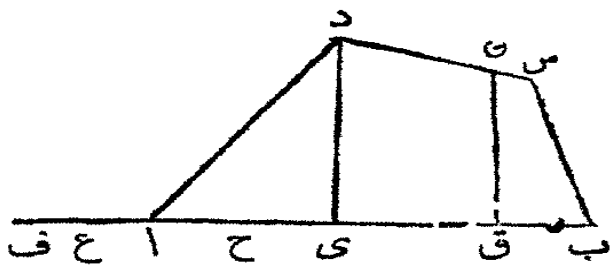


ضلعاً الاخر . اقسام دك في ل حتى تكون نسبة دل : ل ك :: م : ت . واجعل دق يعدل ٢ دل . واجعل ق غ يعدل العمود ان وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ه ٢ فينقسم الشكل حسب المفروض

ارسم العمود ه ٢ . فبالشكل ه د × د ك = اس ه د × د ق = د ه × ان + د ه × د ٢ اي ه د × د ق يعدل مضاعف مجتمع المثلثين ه د ا ه د ٢ . فلان دل نصف دق فالثام الزوايا ه د × دل = ا ه د ٢ فاذا ه د × دل ك = ه د ب س ٢ . ولكن ه د × دل : ه د × ل ك :: دل : ل ك :: م : ت فاذا ا ه د ٢ : ه د ب س ٢ :: م : ت

قضية ت . ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخط عمودي على احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ت ليكن اب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامه على نسبة م : ت بخط



عمودتي على الضلع اب
ارسم المخط دي عموداً على اب وان
عليه شكلاً قائم الزوايا دي × سي ف
حتى يعدل الشكل اب س د واقسم
في سي في غ حتى تكون نسبة ف غ :

غ سي :: م : ت . نصف اي في ح واقسم الشكل ذا الاربعه الاضلاع سي س الى
قسمين بالمخط ن ق الذي يوازي دي حتى تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة
ف غ : غ ح . فالمخط ن ق يقسم الشكل اس حسب المفروض

لان دي × سي ف = اس ودي × سي ح = داي فاذا دي × ح ف =
سي س فالتشكل سي س قد انقسم على نسبة انقسام ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي
يعدله فاذا ق س = دي × ف غ وي ن = دي × غ ح وان = دي × غ سي
فنسبة ق س : ان :: ف غ : غ سي :: م : ت



اصول الهندسة

مضافات

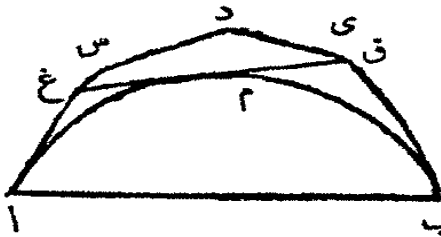
الكتاب الاول

في تزيح الدائرة

سابقة

كل خطٍ منحنياً كان او مركباً من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ
محدّبٍ هو اطول من الخطِّ المحاط به

ليكن ا م ب الخطُّ المحاط به فهو اقصر من الخطِّ ا ع د ب المحيط به
فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍ محيط به فبالضرورة يوجد بين الخطوط



المحيطة خطٌ اقصر من البقية واقصر من ا م ب
او يماثلة. ليكن ا س د ي ب هذا الخط.
ارسم بين الخطِّ المحيط والمحاط به خطاً اخر
مستقيماً لا يلاقي ا م ب او يمسه فقط مثل ب

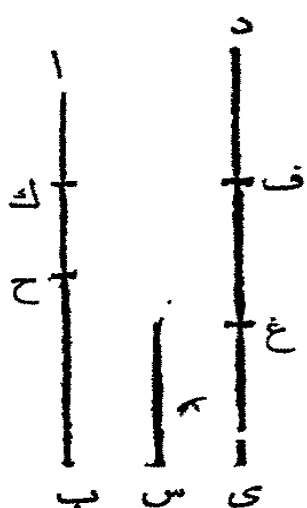
الخطِّ غ ق. فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط ع س د ي ق. فاذا وضع ع ق
عوض س د ي ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فرض ان هذا الاخير
هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذاك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو
اطول منه

فرغ اول. محيط شكل كبير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة

فرع ثانٍ . اذا رُسم من نقطة مفروضة خطان مستقيمان يمسان دائرة فحجبتهما هو اطول من القوس المقطوع بهما فحيط شكل كثير الاضلاع يحيط بدائرة هو اطول من محيط الدائرة

القضية الاولى . ن

اذا فرض مقداران غير متساويين وطرح من اكبرها نصفه ومن الباقي نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من اصغر المقدارين المفروضين ليكن اب اكبر مقدارين وس اصغرهما . فاذا طرح من اب نصفه ومن الباقي نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من س

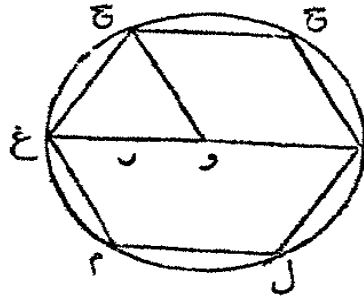
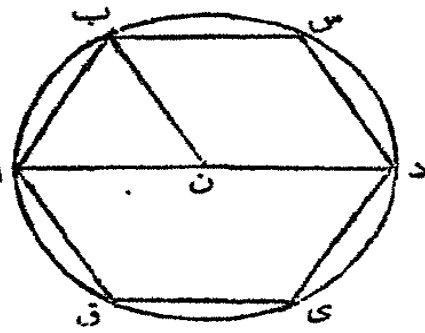


لانه قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من اب . فليكن دى مضروباً للمقدار س اكبر من اب وليكن فيه الاقسام د ف ف غ غ ي وكل قسم فليعدل س . اطرح من اب نصفه ب ح ومن اح اطرح نصفه ح ك وكرر العمل حتى ان اقسام اب تماثل اقسام دى عدداً اي اك ك ح ح ب . فلكون دى اعظم من اب والقسم ي غ المطروح من دى ليس هو نصف دى ولكن ح ب القسم المطروح من اب هو نصفه فالباقي غ د هو اكبر من الباقي اح . ولكون غ د اكبر من ح ا والقسم غ ف ليس اكثر من نصف د غ والقسم ح ك هو نصف اك فالباقي ف د اعظم من الباقي اك ولكن ف د يعدل س فاذا س اكبر من اك او اك انما هو اصغر من س

القضية الثانية . ن

اشكال كثيرة الاضلاع المتساوية ومتماثلة في عدد اضلاعها ومرسومة في دوائر هي متشابهة ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار الدوائر التي رُسمت فيها

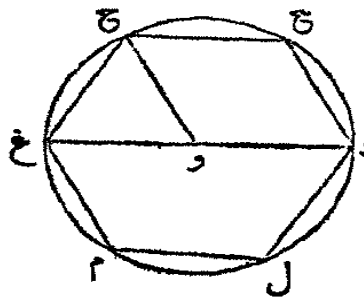
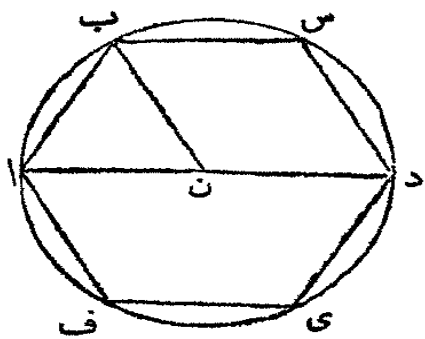
ليكن ا ب س د ي ق و غ ح ج ك ل م شكليْن اضلاعهما كثيرة متساوية



وليكونا متماثلين
في عدد اضلاعها
ومرسومين في
دائرتين ا د ب
غ ح ك فهما
متشابهان ونسبة

ا ب س د ي ق الى غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر
الدائرة غ ح ك

استعلم ن وو مركزي الدائرتين وارسم ان وع و واخرجها حتى يلاقيا المحيطين
في د وك. ارسم ب ن و ح و. فلكرن الخطوط المستقيمة ا ب س س د د ي
ي ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضا متساوية (ق ٢٨ ك ٢) ولذلك
الاقواس غ ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضا وهي تماثل اقواس
الدائرة الاخرى عدداً فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس
غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط غ ح ك. والزاوية ان ب ذات الجزء من اربع
زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٢٣ ك ٦) والزاوية غ و ح
هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس غ ح من المحيط غ ح ك (ق ٢٣ ك ٦)
فالزاويتان ان ب غ و ح هما جزءان متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة
فهما متساويان. والمثلثان المتساوي الساقين ان ب غ و ح هما متساوي الزوايا ايضا
والزاوية ا ب ن تعدل الزاوية غ ح و. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم ن س و ج



يبرهن ان الزاوية
ن ب س تعدل
و ح ج. فالكل
ا ب س يعدل
الكل غ ح ج.
وهكذا يبرهن في

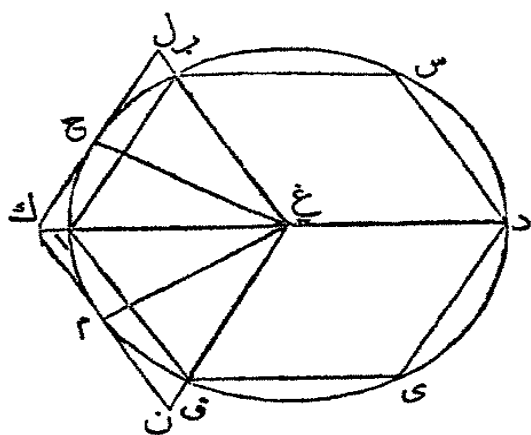
بقية زوايا الشكليْن فهما متساوي الزوايا. وقد فرض انهما متساوي الاضلاع. فالاضلاع

التي تلى الزوايا المتساوية هي متناسبة. فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦) والاشكال
الكثيرة الاضلاع المتشابهة هي كمربعات اضلاعها المتشابهة (ق ٢٠ ك ٦) فالشكل
اب س دى ف: غ ح ج ك ل م:: مربع اب: مربع غ ح. ويكون المثلثين اب ن
غ ح ومتساويي الزوايا فرقع اب: مربع غ ح:: مربع ان: مربع غ و (ق ٤ ك ٦)
او:: ٤ ان: ٤ ع و (ق ١٥ ك ٥) اي:: ا د: غ ك (فرع ٢ ق ٨ ك ٢) فالشكل
اب س دى ف: غ ح ج ك ل م:: ا د: غ ك. وقد تبرهن انهما متشابهان
فرع. كل شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة هو متساوي الزوايا. لان
المثلثات المتساوية الساقين التي تلتقي زواياها في المركز هي متساوية ومتشابهة والزوايا
عند قواعدها متساوية فزوايا الشكل متساوية

القضية الثالثة. ع

مفروض ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد
ضلع شكل مثله محيط بالدائرة

ليكن اب س دى ق شكلاً كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد



ضلع شكل مثله محيط بالدائرة

استعلم مركز الدائرة غ وارسم ع ا غ ب
ونصف القوس اب في ح ومن ح ارسم
المماس ل ح ك الذي يمس الدائرة في ج
ويلاقي غ ا و ع ب بعد اخراجها في ك ول
فالخط ك ل هو ضلع الشكل المطلوب.
اجعل الزاوية ك غ ن تعدل ك غ ل.

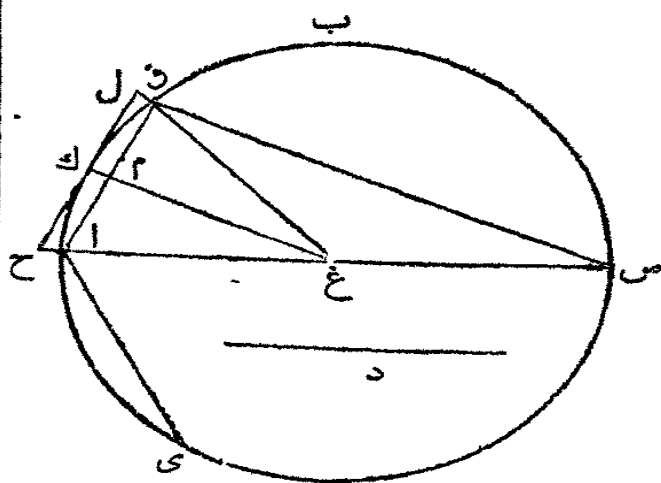
ارسم غ ن حتى يعدل غ ل وارسم ك ن وارسم ع م عموداً على ك ن وارسم ح غ
لكون القوس اب قد تنصف في ح فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية ب غ ح
(ق ٢٧ ك ٢) ولكون ك ل يمس الدائرة في ح فالزاويتان ك ح غ ل ح غ قائمتان
(ق ١٨ ك ٢) فزاويتان من المثلث ك ح غ تعدلان اثنتين من المثلث ل ح غ
والضلع غ ح مشترك بينهما فتساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع غ ل يعدل الضلع

غ ك. ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن وغ ك مشترك بينهما
 والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن
 متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان
 فالمثلثان غ م ك ع م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فقد تنصف
 ك ن في م وك ن = ك ل فاذا ك م = ك ح والضلع غ ك مشترك بين المثلثين غ ك م
 غ ك ح والزاوية غ ك ح = غ ك م فالضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي
 في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة. وهكذا اذا رسمت
 خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة يرسم شكل محيط بالدائرة
 اضلاعه تعدل ك ل وعدد الاضلاع يماثل اضلاع الشكل في الدائرة
 فرع اول. اذا جعل غ مركزاً و ع ل او غ ك او ع ن نصف قطر ورسمت
 دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة ويشبه ا ب س دى ق

فرع ثان. نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل
 اي: نصف قطر الدائرة فمحيط الشكل في الدائرة: محيط الشكل المحيط بالدائرة ::
 العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة: نصف قطر الدائرة

القضية الرابعة. ن

اذا فرضت دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما
 كثيرة احدهما في الدائرة والآخر محيطاً بها وفضلتها اقل من مساحة
 مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة
 المفروضة ومربع د مساحة مفروضة
 فقد يمكن ان يرسم شكل كثير
 الاضلاع في ا ب س وآخر يشبهه
 محيطاً بها وتكون فضلة الشكلين
 اقل من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س
 الخط المستقيم اى حتى يعدل د.

وليكن ا ب ربع محيط الدائرة . من ا ب اطرح نصفه ومن الباقي نصفه وهكذا
 حتى يبقى ا ق اقل من القوس ا ي (ق ا ك مضافات) استعلم المركز غ وارسم القطر
 ا س والمخطين المستقيمين ا ق ق غ . نصّف القوس ا ق في ك وارسم ك غ وارسم
 ح ل حتى يمسّ الدائرة في ك ويلاقى غ ا غ ق بعد اخراجها في ح ول وارسم س ق
 المثلثان ح غ ل ا غ ق متساويا الساقين والزاوية ا غ ق مشتركة بينهما فهما
 متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) والزاويتان غ ح ل غ ا ق متساويتان . ولكن الزاوية
 غ ك ح = س ق لانها قائمتان . فالمثلثان ح غ ك ا س ق متساويا الزوايا (فرع ٤
 ق ٢٢ ك ١) وقد استعمل القوس ا ق بتنصيف القوس ا ب ثم بتنصيف النصف الى
 اخره فالقوس ا ق يتعدد مراراً معلومة في القوس ا ب فيتعدّد ايضا في محيط الدائرة
 ا ب س مراراً معلومة فيكون الخط المستقيم ا ق ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية
 في الدائرة ا ب س ويكون ح ل ضلع شكل مثله محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١
 مضافات) . ايكن عن الشكل في الدائرة بحرف مثل ن وعن الشكل المحيط بها
 بحرف مثل م . فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدهما الى الآخر
 كمرّعي الضلعين المتشابهين ح ل م ا ق (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) اي (لكون المثلثين
 ح ل غ ا ق غ متشابهين) كنسبة مرّع ح غ الى مربع ا غ الذي يعدل مرّع غ ك .
 وقد تبرهن ان المثلثين ح غ ك ا س ق متشابهان . فتكون نسبة ا س : س ق ::
 الشكل م : الشكل ن . وبالطرح مرّع ا س : زيادته على مرّع س ق اي مربع ا ق
 (ق ٤٧ ك ١) :: الشكل م : زيادته على الشكل ن . ولكن مربع ا س اي المربع المحيط
 بالدائرة ا ب س هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساويه محيط بالدائرة لانه
 محيط بذلك الشكل . والشكل ذو الثمانية اضلاع اعظم من شكل ذي ستة عشر
 ضلعاً وهم جراً . فمربع ا س هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس
 ا ب حسباً تقدم فمرّع اعظم من الشكل م . وقد تبرهن ان مربع ا س : مربع ا ق ::
 الشكل م : فضلة الشكلين . فلكون ا س اعظم من م يكون مربع ا ق اعظم من فضلة
 الشكلين (ق ١٤ ك ٥) فضلة الشكلين اذا هي اقل من مربع ا ق ا ق اقصر من
 د . فضلة الشكلين اقل من مربع د اي من المساحة المفروضة
 فرع اول . فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدهما والدائرة . فيمكن ان يرسم
 شكل في الدائرة او محيط بها تكون فضلة احدهما والدائرة اقل من مساحة مفروضة

مهما كانت تلك المساحة صغيرة

فرع ثانٍ. المساحة ب التي هي أكبر من كل شكل تُرسم في الدائرة ا واصغر من

كل شكل يُرسم محيطاً بالدائرة

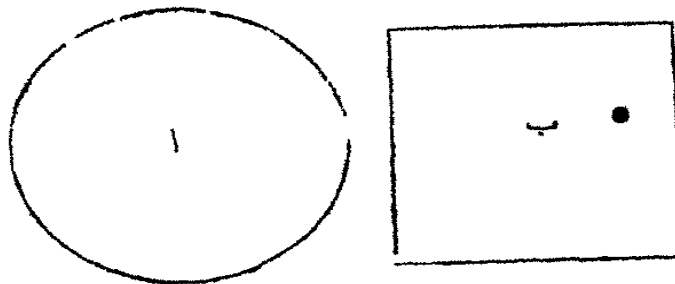
تعادل الدائرة ا واولاً فتكون

أكبر منها او اصغر منها واولاً

لكن أكبر من ا بها يعدل

مساحة س. فالاشكال التي

تُرسم محيطة بالدائرة ا هي



س

بالمفروض أكبر من د. ولكن ب أكبر من ا بمساحة س فلا يرسم شكل محيطة

بالدائرة الا ما كان أكبر منها بما يعدل مساحة س وذاك محال. وهكذا اذا كانت

ب اصغر من ا بمساحة س يبان انه لا يمكن ان يُرسم في الدائرة ا شكل الا ما كان

اصغر من ا بمساحة أكبر من س وذاك محال فلا يكون ا و ب غير متساويين اية

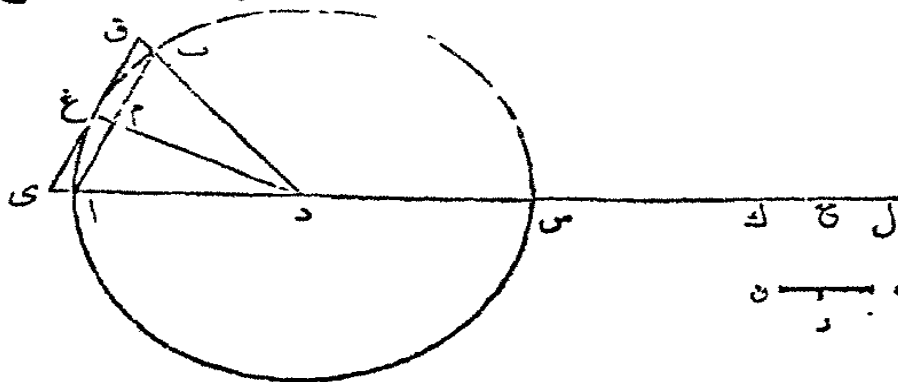
ها متساويان

القضية الخامسة. ن

مساحة دائرة تعدل القائم الزوايا مسطح نصف قطرها في خط مستقيم

يعدل نصف محيطها

ليكن ا ب س دائرة مركزها د وقطرها ا س. فاذا أُخرج ا س وأخذ ا ح



حتى يعدل

نصف محيط

الدائرة

فمساحتها

تعادل القائم

الزوايا ا ب س

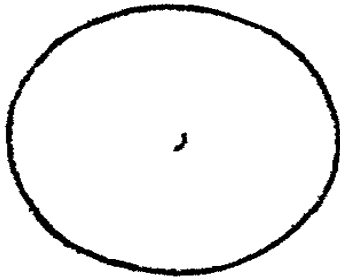
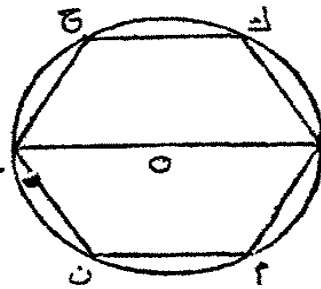
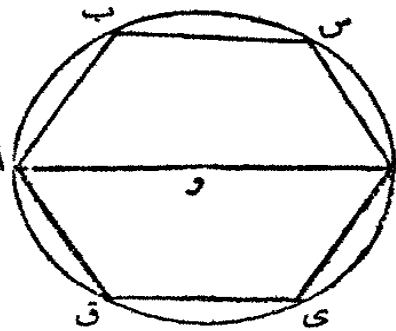
ا ح

ليكن ا ب ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س. نصيف

القوس ab في $غ$ ومن $غ$ ارسم المماس $سي$ $غ$ الذي يلاقي $دا$ ودب بعد اخراجها في $ي$ و $ف$. فيكون $سي$ $ف$ ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ab $س$ (ق ٢ ك ١ مضافات). اقطع من $اس$ بعد اخراجه $اك$ حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان $اب$ ضلعاً من اضلاعه واقطع ايضاً $ال$ حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان $سي$ $ف$ ضلعاً من اضلاعه. فيكون $اك$ اقصر من $اح$ و $ال$ اطول من $اح$ (سابقة المضافات) ثم في المثلث $سي$ $د$ $ف$ قد رسم $دغ$ عموداً على القاعدة فالمثلث $سي$ $د$ $ف$ يعدل القائم الزوايا $دغ$ في نصف $سي$ $ق$ (ق ١ ك ٤) وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند $د$ والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة فالشكل كله يعدل القائم الزوايا $دغ$ في $ال$ الذي فرض انه نصف محيط الشكل (ق ١ ك ٢) او يعدل $دا \times ال$ ولكن $ال$ اطول من $اح$ فالقائم الزوايا $دا \times ال$ اكبر من $دا \times اح$ اي القائم الزوايا $دا \times اح$ اصغر من $دا \times ال$ اي اصغر من كل شكل محيط بالدائرة $اب$ $س$

واما المثلث $ادب$ فانه يعدل القائم الزوايا $دم$ في نصف $اب$ فهو اصغر من القائم الزوايا $دغ$ او $دا$ في نصف $اب$. وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند $د$ والتي يتركب منها الشكل في الدائرة $اب$ $س$. فكل الشكل يعدل $دا \times اك$ لان $اك = نصف$ محيط الشكل في الدائرة. والقائم الزوايا $دا \times اك$ هو اصغر من القائم الزوايا $دا \times اح$ فبلاخرى يكون الشكل الذي $اب$ ضلعاً منه اصغر من $دا \times اح$. اي $دا \times اح$ اكبر من كل شكل يمكن رسمه في الدائرة $اب$ $س$. وقد تبرهن ان $دا \times اح$ اصغر من كل شكل محيط بالدائرة $اب$ $س$ فالقائم الزوايا $دا \times اح$ يعدل الدائرة $اب$ $س$ (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) و $دا$ هو نصف قطر الدائرة $اب$ $س$ و $اح$ نصف محيطها

فرع اول. لكون $دا : اح :: دا : دا \times اح$ (ق ١ ك ٦) وقد تبرهن ان $دا \times اح = مساحة$ الدائرة التي كان $دا$ نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصف محيطها او القطر كله الى المحيط كله :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة



غ ح ل ك مربع القطر

ا د الى مربع القطر

غ ل

ليكن

ا ب س د ي ق

و غ ح ك ل م ن

شكلين متشابهين لهما اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن
 مساحة ما وليكن نسبة مربع ا د الى مربع ع ل كالدائرة
 ا ب د الى ر. فلكون الشكلين ا ب س د ي ق
 غ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدهما الى
 مساحة الاخر ك مربع قطر دائرة الواحد الى مربع قطر

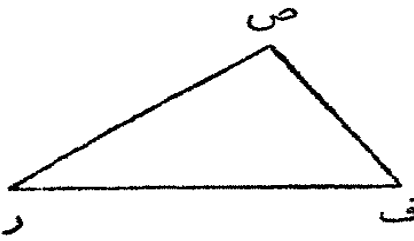
دائرة الاخر (ق ٢ ك ا مضافات) فنسبة ا د : غ ل :: الشكل ا ب س د ي ق
 : الشكل غ ح ك ل م ن. ولكن ا د : غ ل :: الدائرة ا ب د : ر. فالشكل
 ا ب س د ي ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: ا ب د : ر. والدائرة ا ب د <
 ا ب س د ي ق فتكون ر < غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ٥) اي راكبر من كل
 شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يُرسم حول الدائرة غ ح ل فاذا ر =
 الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ا مضافات) وقد فُرض ان ا ب د : ر :: ا د :
 غ ل فتكون ا ب د : غ ح ل :: ا د : غ ل

فرع اول. نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها
 الى بعض

لفرض ان المحيط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة ا ب د والمحيط المستقيم
 ي = نصف محيط الدائرة غ ح ل. فالقائم الزوايا ا و ك = ا ب د و غ ه × ي =
 غ ح ل (ق ٥ ك ا مضافات) فنسبة
 ا و ك : غ ه × ي :: ا د : غ ل ::
 ا و : غ ه والمبادلة ا و ب ك : ا و : غ ه × ي :: غ ه : ي

كانت على اء واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواءءها بعضها الى بعض
 (ق ١ ك ٦) فنسبة ك : ا و : ي : غه وبالمبادءة ك : ي :: ا و : عه فاذا تضاعف
 كل واحد نكون نسبة المحيط اب د : المحيط ع ح ل :: القطر ا د : القطر ع ل
 فرع ثانٍ . الدائرة المرسومة على المضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة



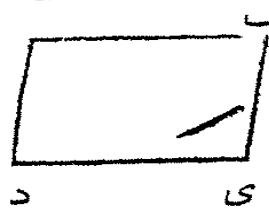
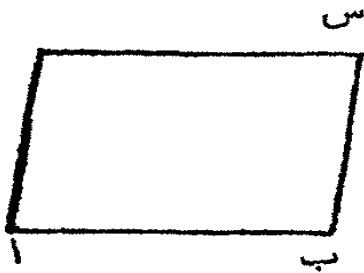
تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين
 الاخرين . لان نسبة الدائرة على ص ر .
 الدائرة على ر ف :: مربع ص ر : مربع ر ف .
 والدائرة على ف ص : الدائرة على ر ف : مربع

ف ص : مربع ر ف . فالدائرتان على ص ر و ص ف : الدائرة على ف ر :: مربع
 ص ر و ص ف : مربع ر ف (ق ٢٤ ك ٥) ولكن مربع ص ر و ص ف يعدلان
 مربع ر ف (ق ٤٧ ك ١) فالدائرتان على ص ر و ص ف تعدلان الدائرة على ر ف

القضية السابعة . ن

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى
 بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض

ليكن اس و د ف شكلين متوازيي الاضلاع متساويي الزوايا . وليكن م ن



ف ق اربعة اعداد ولتكن
 نسبة اب : ب س :: م : ن
 ونسبة اب : د ي :: م : ف
 ونسبة اب : ي ف :: م : ق

فبالمساواة نسبة ب س . ي ف . ن . ق . فالشكل
 اس : د ف :: م : ن : ف ق

ليكن ن ف مسطح ن في ف . ونسبة م ن الى ف ق نتركب من نسبت م ن الى
 ن ف ون ف الى ف ق (حد ١٠ ك ٥) . ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى
 ف (ق ١٥ ك ٥) لان م ن ون ف مضروبان متساويان من م و ف . ولهذا السبب
 ايضا نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة ن الى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من

نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق . وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى . ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركيبت من نسبة ا ب الى دى ونسبة ب س الى دى ف . ونسبة الشكل اس الى الشكل د ف قد تركيبت من هذه النسب ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالشكل اس الى الشكل ا د كسبة م ن مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق فرغ اول . اذا كانت نسبة غ ح الى ك ل كسبة م الى ح ل
 ن فالمرجع المرسوم على ع ح الى المربع على ك ل كسبة م م ل
 او مربع م الى ن او مربع ن

فرغ ثان . اذا قُرِصَتْ خطوط مثل ا ب س د الى اخرو واعداد مناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا : ب :: م : ن : و : س :: م : ر : و : د :: م : ص . فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه الخطوط يعدل مربع الخط الثالث فسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان $a \times s = b^2$ فينثني $m \times r = n^2$

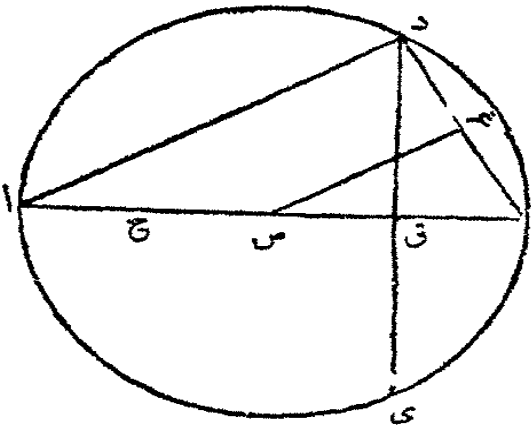
وبالقلب اذا قُرِص م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وقُرِص ان $a \times s = b^2$ ووجد عدد مثل ن حتى ان $n^2 = m \times r$ فينثني ا : ب :: م : ن

تعليقة . لكي نجد اعدادا مناسبة لعدة مقادير من جنس واحد لفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءا من الاجزاء . ولفرض ان ح يوجد ن مرة في المقارب ورمرة في المقارس و ص مرة في المقار د وهمم جرا الى اخرو . فالامر واضح ان الاعداد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ب س د . فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطأ مثل ا = عددا مثل م يراد ان $a = m \times c$ اي ان ا يعدل المقار المفروض ح مضروبيا في م وهكذا في المقادير الاخر ب س د والاعداد المناسبة لها لان ح انما هو قياس مشترك للكل . وقد يترك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنه متضمن في المعنى كما قيل ان خطأ او مقدارا هندسيا يعدل عددا ما . واذا كان في ذلك العدد كسرا او كان مختلطا يراد ان القياس المشترك ح قد انقسم الى اجزاء يُدَلُّ عليها بالكسر . فلو قيل $a = 270, 5270$ يراد انه يوجد مقدار ح حتى ان $a = 270 \times c + 5270 \times c$ وهكذا

كل ما دلّ على نسب مقادير هندسية بواسطة اعداد

القضية الثامنة. ن

العمود من مركز دائرة على وتر قوس من الدائرة هو متناسب متوسط بين ربع القطر وخطّ مركب من نصف القطر مع عمود من المركز على وتر مضاعف القوس. ووتر القوس هو متناسب متوسط بين القطر وخطّ هو فضلة نصف القطر والعمود المذكور من المركز ليكن ا ب د دائرة مركزها س و د ب ي قوساً ما و د ب نصفه. ارسم الوترين



دي د ب وايضاً س ق عموداً على دي وس ع عموداً على د ب وليخرج س ق حتى يلاقي المحيط في ب وا. نصف اس في ح. فالعمود س ع هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق. و ب د متناسب متوسط بين ا ب و ب ق الذي هو فضلة نصف القطر وس ق

ارسم ا د فلكون ا د ب قائمة لانها في نصف دائرة وس غ ب ايضاً قائمة فالمثلثان ا ب د س ب غ متساويا الزوايا و ا ب : ا د :: ب س : س غ (ق ٤ ك ٦) وبالمباداة ا ب : ب س :: ا د : س غ ولكن ا ب هو مضاعف ب س فيكون ا د مضاعف س غ ومربع ا د يعدل اربعة امثال مربع س ع

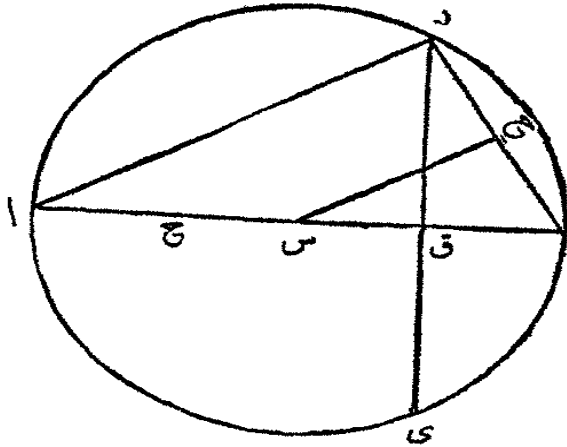
ولكون ا د ب مثلثاً ذا قائمة و د ق عموداً من القائمة على ا ب فالضلع ا د متناسب متوسط بين ا ب و ا ق (ق ٨ ك ٦) و ا د^٢ = ا ب × ا ق (ق ١٧ ك ٦) او لكون ا ب = ا ح × ا ق = ا د^٢ = ا ب × ا ق. ولكون ا د^٢ = ا ب × ا ق = ا ح × ا ق = ا ح × ا ق وس غ^٢ = ا ح × ا ق فاداً س غ هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق اي بين ربع القطر والخطّ المركب من نصف القطر والعمود على مضاعف القوس ب د والامر واضح ان ب د هو متناسب متوسط بين ا ب و ب ق (ق ٨ ك ٦) اي

بين القطر وفضلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

القضية التاسعة من

محيط الدائرة هو اطول من ثلاثة امثال قطرها بخط اقصر من $\frac{1}{7}$ من القطر واطول من $\frac{1}{71}$ من القطر

ليكن ا ب د دائرة مركزها س وقطرها ا ب فالمحيط اطول من ا ب بخط



اتصر من $\frac{1}{7}$ او $\frac{1}{71}$ من ا ب واطول من $\frac{1}{71}$ من ا ب

ارسم في الدائرة ا د ب الخط المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب س (ق ا ك ٤) ارسم د ق عموداً على ب س واخرجه حتى يلاقى المحيط ايضا في ي وارسم س ج

عموداً على ب د. اخرج ب س الى ا. وتصف ا س في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحد من القوسين ب د ب ي هو سدس المحيط (فرع ق ا ك ٤) فالقوس د ب ي ثلث المحيط. فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح ربع القطر والمحيط ا ق (ق ا ك ٨ مضافات). ولكون الضامعين ب د د س متساويين فالزاويتان د س ق د ب ق متساويتان. ود ق س د ق ب متساويتان ايضاً والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة س ق فتد تصف س ب في ق فاذا فرض ان ا س ا ب س = ١٠٠٠ فحينئذ ا ح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ وا ق = ١٥٠٠ وس ج متناسب متوسط بين ا ح وا ق اي س ج = ا ح > ا ق (ق ا ك ٦) = ١٥٠٠ > ٥٠٠ = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤ + لان (١٦٦٤٠٢٥٤) اقل من ٧٥٠٠٠٠ وايضاً ا س + س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤ +

ولكون س ج عموداً من المركز س على وتر سدس المحيط فاذا فرض ف = العمود من س وتر ا ب من المحيط يكون ف متناسباً متوسطاً بين ا ح و ا س + س ج

(ق ٨ ك ١ مضافات) وف^١ = اح × (اس + س ج) = ٥٠٠ × (٢٠٥٤ +) = ١٨٦٦
 ١٢٠٧ + = ٩٢٣٠ ١٢٠٧ + = وف = ٩٢٥٨ + ٩٦٥ واس + ف = ٩٢٥٨ +
 ١٩٦٥

ثم اذا قُرض ر = العمود من س على وتر^١ من المحيط فحينئذ يكون متناسباً
 متوسطاً بين اح واس + ف ور^١ = اح × (اس + ف) = ٥٠٠ × (٩٢٥٨ +)
 ١٩٦٥ = (١٩٦٥ + ٩٨٢٩٦٢ ٩٨٢٩٦٢ + = ور = ٩٩١٤٤٤٩ + واس + ر = ٤٤٤٩ +
 ١٩٩١

ثم اذا قُرض ص = العمود من س على وتر^١ من المحيط فحينئذ ص^١ = اح ×
 (اس + ر) = ٥٠٠ × (١٩٩١ + ٤٤٤٩ +) = ٩٩٥٧٢٢ ٩٩٥٧٢٢ + = وص =
 ١٩٩٧٤٨٥٨٩ + = ص + واس + ٩٩٧٤٨٥٨٩ +

اخيراً اذا قُرض ط = العمود من س على وتر^١ من المحيط فحينئذ ط^١ = اح ×
 (اس + ص) = ٥٠٠ × (١٩٩٧٤٨٥٨٩ +) = ٩٩٨٩٢٩٤٤٥ + = وط =
 ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ + اي اذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ جزء فالعمود من
 المركز على وتر^١ من المحيط هو اطول من ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ من تلك الاجزاء
 ولكن حسب القضية السابقة وتر^١ من المحيط هو متناسب متوسط بين
 المحيط وفضلة نصف القطر وص اي العمود من المركز على وتر^١ من المحيط . فربع
 وتر^١ من المحيط = اب × (اس - ص) = ٢٠٠٠ × (٢٠١٤١١ -) = ٤٢٨٢
 ٤٢٨٢ والوتر ذاته = ٦٥٤٤٢٨٦ - لان (٦٥٤٤٢٨٦) أكثر من ٤٢٨٢
 ووتر^١ من المحيط او ضاع شكل متساوي الاضلاع ذي ٩٦ ضلعاً في الدائرة اذا
 كان ٦٥٤٤٢٨٦ - يكون محيط ذلك الشكل (٦٥٤٤٢٨٦) × ٩٦ =
 ٦٢٨٢٤١٠٥٦ -

ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكره محيط بالدائرة ثم (فرع ٢ ق ٢ ك ٥
 مضافات) ط : اس :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - : م ولكن ط = ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ +
 فلما ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ + : ١٠٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - : م فاذا قُرض مقدار
 اخرن حتى تكون نسبة ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - : ن
 فاذا (ق ٢٣ ك ٥) ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ + : ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ن : م ولكون الاول
 أكبر من الثاني فالثالث أكبر من الرابع اي ن < م فاذا استعمل متناسب رابع لهذه

الاعداد ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ و ١٠٠٠ و ٦٢٨٢٤١٠٥٦ و ٦٢٨٥٤٤٦١ -
 فلنا ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٤٦١ وحسبها
 نقدم ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ن فلنا ايضاً
 ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٢٤١٠٥٦ :: ٦٢٨٥٤٤٦١ : ن. ولان الاول
 اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي - ٦٢٨٥٤٤٦١ < ن. وقد تبرهن
 ان ن < م فاذا ٦٢٨٥٤٤٦١ اكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذي
 الستة والتسعين ضلعاً اي محيط ذلك الشكل هو اقل من ٦٢٨٥٤٤٦١ ومحيط
 الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالبحري محيط الدائرة
 اقل من ٦٢٨٥٤٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اقل
 من ٦٢٨٥٤٤٦١ من تلك الاقسام فيبين المحيط والقطر تناسب اصغر (ق ٨ ك ٥)
 من تناسب ٦٢٨٥٤٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٧٢٠٥٤٤٦٢ الى ١٠٠٠
 ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٧٢٠٥٤٤٦٢ الى ١٠٠٠ اي
 اذا انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسمًا منها

بقي علينا ان نبرهن ان زيادة المحيط على القطر هي اكثر من $\frac{1}{11}$ من القطر

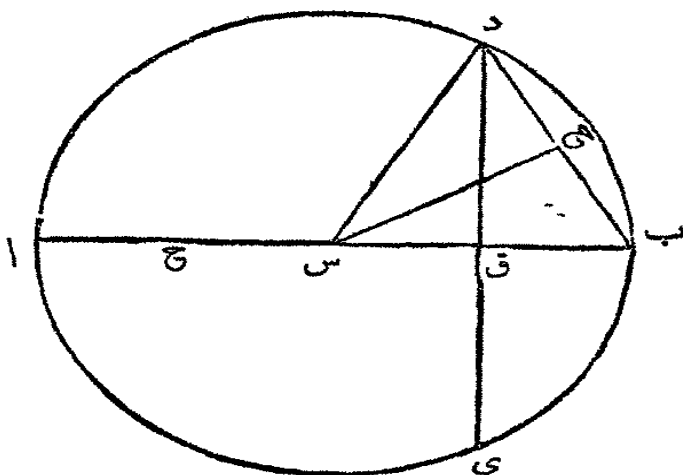
قد تبرهن سابقاً ان س ج = ٧٥٠٠٠٠ و س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ فاذا
 اس + س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥. ليكن ف كما تقدم عموداً من المركز على
 وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط فلنا

$$ف^2 = ا ح \times (ا س + س ج) = (١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ -) \times ٥٠٠ = ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥ -$$

$$١٩٦٥٤٩٢٥٨٥ - = ف + اس \times ٩٦٥٤٩٢٥٨٥ - = و ر ٩٨٢٩٦٢٤٩٣ - =$$

$$٩٨٢٩٦٢٤٩٣ - = ر + اس \times ٩٩١٤٤٤٩٥ - =$$

$$٩٩١٤٤٤٩٥ -$$



ثم ليكن ر العمود من المركز
 على وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط فلنا ر =
 ا ح (ا س + ف) = ٥٠٠ =
 (١٩٦٥٤٩٢٥٨٥ -) =
 ٩٨٢٩٦٢٤٩٣ و ر =
 ٩٩١٤٤٤٩٥ و ر =
 ٩٩١٤٤٤٩٥

ليكن ص العمود من المركز

على وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط فلنا ص² = اح × (اس + ر) = ٥٠٠ × (-)
 ٩٩٧٤٨٥٨٩٥ = - (٩٩٥٧٢٢٢٤٧٥ = -) وص = -
 ثم ان مربع وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط = اب × (اس - ص) = ٢٠٠٠ ×
 (+) = ٢٤١٤١٠٥ + = ٢٨٢٤١٠٥. والوتر ذاته = ٦٥٤٤٣٧٧ لان
 (٦٥٤٤٣٧٧) اقل من ٢٨٢٤١٠٥. واذا كان وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط + ٦٥٤٤٣٧٧
 فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعاً متساوياً في الدائرة = (٦٥٤٤٣٧٧ +) × ٩٦ =
 ٦٢٨٢٤٠١٩ ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر
 الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٦٢٨٢٤٠١٩ من تلك الاقسام. واذا انقسم
 نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٣١٤١٤٠٠٩ من تلك الاقسام
 ولكن تناسب ٣١٤١٤٠٠٩ الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب $\frac{1}{4} + ٢$ الى واحد
 فتناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب $\frac{1}{4} + ٢$ الى واحد اي فضلة
 المحيط وثلاثة امثال القطر هي اكثر من $\frac{1}{4}$ من القطر وقد تبرهن انها اقل من $\frac{1}{4}$
 من القطر

فرع اول. اذا فرض قطر دائرة نستعلم المحيط هكذا ٢٢ : ٧ :: القطر : كمية
 رابعة اكبر من المحيط و ٢ : ١ + $\frac{1}{4}$ او ٧١ : ٢٢٢ :: انظر : كمية رابعة اصغر من
 المحيط

فرع ثان $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$ فضلة الخطين المستعملين هي $\frac{1}{97}$ من القطر فضلة
 المحيط واحدها اقل من $\frac{1}{97}$ من القطر

فرع ثالث. نسبة ٢٢ : ٧ :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريباً. لان قد
 تبرهن سابقاً (فرع اول ق ٥ ك ١ مضافات) ان نسبة قطر دائرة الى محيطها كربع
 نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة ٢٢ : ٧ تقريباً فربع
 نصف القطر الى المساحة كمذه النسبة المذكورة تقريباً

تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بيها قلت الفضلة بينهما
 وبين احدهما والمحيط كما يرى من هذا الجدول الذي فيه حسب نصف القطر واحداً

عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦٠٠٠٠٠٠	٦٠٨٢٢.٢٣-
١٢	٦٠٢١١٦٥٧+	٦٠٤٣٠.٧٨١-
٢٤	٦٠٢٦٥٢٥٧+	٦٠٣١٩٣٢. -
٤٨	٦٠٢٧٨٧٠. +	٦٠٢٩٢١٧٣-
٩٦	٦٠٢٨٢.٦٣+	٦٠٢٨٥٤٣. -
١٩٢	٦٠٢٨٢٩.٤+	٦٠٢٨٣٧٤٧-
٣٨٤	٦٠٢٨٣١١٥+	٦٠٢٨٣٣٢٧-
٧٦٨	٦٠٢٨٣١٦٧+	٦٠٢٨٣٢٢١-
١٥٣٦	٦٠٢٨٣١٨٠+	٦٠٢٨٣١٩٥-
٣٠٧٢	٦٠٢٨٣١٨٤+	٦٠٢٨٣١٨٨-
٦١٤٤	٦٠٢٨٣١٨٥+	٦٠٢٨٣١٨٦-

فدى فصلة المحيطين اقل من واحد في المرة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر فالمحيط في معرفة محيط الدائرة هو اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف قطرها فاذا فرض $n =$ نصف القطر فالمحيط هو اكثر من $n \times 2$ او من $2 \times 2 \times 141592$ واقل من $2 \times 2 \times 141593$ وفضلتها اما هي $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر

وهكذا $2 \times 2 \times 141592$ اقل مساحة الدائرة و $2 \times 2 \times 141593$ اكثر من مساحة الدائرة وفضلتها هي $\frac{1}{1000000}$ من مربع نصف القطر. وعلى هذا الاسلوب يتقرب الى الصحيح اكثر مما نقدم ولكن الى الآن لم توجد نسبة القطر الى المحيط تماما



اصول الهندسة

مصافات

الكتاب الثاني

في تقاطع السطح

حدود

١ الخط المستقيم العمودي على سطح هو ما احده زاوية قائمة مع كل خط مستقيم في ذلك السطح

٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل المخطوط المستقيمة في احدهما العمودية على خط التقاطع عمودية ايضاً على السطح الاخر فالسطح الاول عمودي على الثاني

٣ ميل خط مستقيم على سطح هو الزاوية الحادة بين ذلك الخط وخط اخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخط الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعمودي عليه من اية نقطة كانت في الخط الاول

٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان في الحادة بين خطين مستقيمين في كل واحد منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عمودي على خط تقاطعها. ومن الزاويتين المتوازيين الحادتين من ذلك والحادة هي ميل احد السطحين الاخر

٥ اذا عدلت الزاوية المذكورة الحادة بين سطحين الزاوية الحادة بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الاخرين

٦ الخط المستقيم المرابي سطحاً هو الذي لا يلاقي السطح ولو اُحرج على

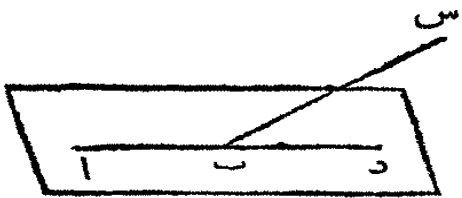
استقامته الى سيرته نهاية

٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدَّت الى غير نهاية
 ٨ الزاوية المجسَّمة هي الحادثة من التقاء ثلاث زوايا بسيطة فاكثر ليست في
 سطح واحد

القضية الاولى . ن

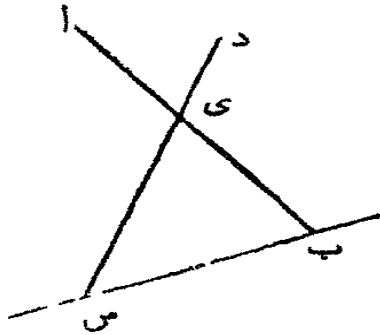
لا يكون قسم من خط مستقيم في سطح وقسم اخر منه فوق ذلك
 السطح

ان كانت ممكنا ليكن اب س خطا مستقيما وليكن القسم اب منه في سطح
 والقسم ب س منه فوق السطح . فلكون اب في
 سطح فيمكن اخراجه في ذلك السطح (اولى
 المقنضيات ك ا) فلنخرج الى د فيكون اب س
 اب د خطين مستقيمين لهما قسم مشترك اب
 وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ ك ا) فلا يكون اب س خطا مستقيما



القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطح واحد
 لتتلاق الخطوط الثلاثة المستقيمة اب ب س س د في النقطة ي ب س
 فهي في سطح واحد

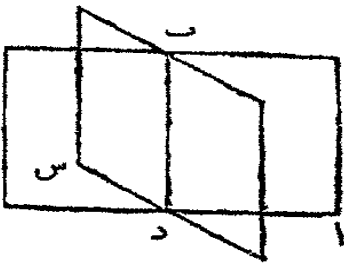


ليمر سطح بالخط المستقيم ي ب وليدر السطح
 على ب ي حتى يمر بالنقطة س . فلكون ي س
 في هذا السطح يكون الخط ي س فيه ايضا وقد
 فرض ان ي ب فيه فالخطوط الثلاثة ي ب
 ب س س ي هي في السطح الواحد وهي انسام من
 ب ا ب س س د ولا يكون قسم من خطين

سطح وقسم اخر منه في غيره (ق ا ك ٢ مضافات) فكل الخطوط الثلاثة في سطح واحد
 فرع كل خطين متقاطعين هـا في سطح واحد. وكل ثلاث نَقَط كَيْفَا فَرِضَتْ
 هـي في سطح واحد

القضية الثالثة. ن

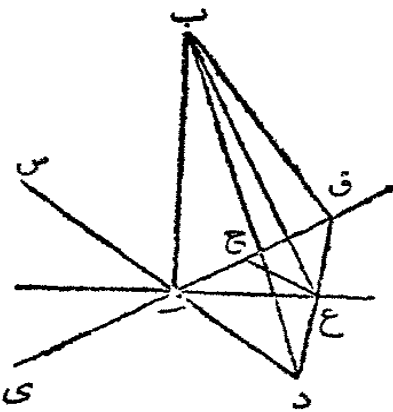
اذا تقاطع سطحان فموضع التقاطع هو خط مستقيم
 ليتقاطع السطحان ا ب و س ولتكن ب و د نقطتين في خط التقاطع. ارسم
 الخط المستقيم ب د. فلانّ النقطتين ب و د في السطح
 ا ب فالخط ب د هو في ا ب (حده ك ا) ولهذا
 السبب ايضاً هو في ب س فالخط المستقيم ب د
 مشترك بين السطحين ا ب و ب س اي هو موضع
 تقاطعها



القضية الرابعة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على خطين مستقيمين على ملتقاهما فهو
 عمود على السطح الذي فيه الخطان

ليكن ا ب عموداً على الخطين المستقيمين ي ق د س على نقطة التقاءهما ا فهو
 عمود على السطح المار بالخطين ي ق د س
 من ارسم اي خطاً تنثت في السطح الذي
 فيه ي ق و د س مثل الخط ا ع. ولتكن ح نقطة
 في ذلك الخط. ارسم غ ح حتى يوازي ا د واجعل
 ح ق يعدل ح ا وارسم ق ع وليخرج حتى يلاقي
 س ا في د. ارسم ب د ب ع ب ق
 لان غ ح يوازي ا د وح ق = ح ا فلذا

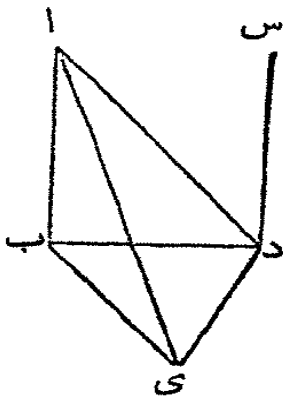


ا ب ف قائمة وقد فُرض ان ا ب س قائمة فالزاوية ا ب ف = ا ت س وها في سطح واحد وذلك لا يمكن فالخط المستقيم ب س ليس فوق السطح الذي فيه ب د وب ي فالخطوط الثلاثة المستقيمة ب س ب د ب ي في سطح واحد

القضية السادسة . ن

خطان مستقيمان عمودان على سطح واحد هما متوازيان

ليكن الخطان المستقيمان ا ب وس د عمودين على السطح ب ي د فهما متوازيان



ليلاقيا السطح في النقطتين ب ود . ا رسم د ي عموداً على

د ب في السطح ب د ي ولتكن ي نقطة ما فيه . ا رسم ا ي

ا د ي ب . فلكون ا ب ي قائمة ا ب + ب ي = ا ي

(ق ٤٧ ك ١) ولكون ب د ي قائمة ب ي = ب د + د ي

د ي فاذا ا ب + ب د + د ي = ا ي و ا ب + ب د + د ي = ا د

ا د فاذا ا د + د ي = ا ي فتكون ا د ي قائمة (ق ٤٨ ك ١)

فالخط ي د هو عمود على الخطوط الثلاثة ب د د ا

د س فهي في سطح واحد (ق ٥ ك ٢ مضافات) و ا ب هو في السطح الذي فيه ب د

ودا لان كل ثلاثة خطوط متلاقية هي في سطح واحد (ق ٢ ك ٢ مضافات) فاذا

ا ب ب د د س في سطح واحد وكل واحد من الراويين ا ب د ب د س قائمة

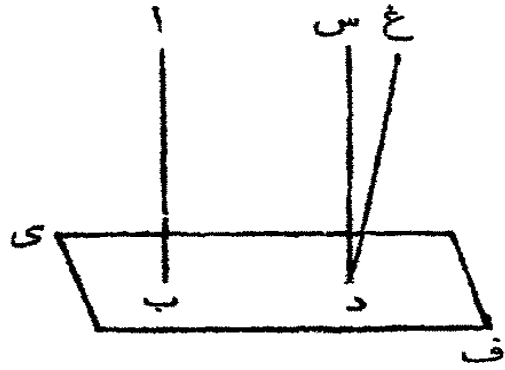
فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٨ ك ١)

القضية السابعة . ن

اذا كان خطان مستقيمان متوازيين وكان احدهما عموداً على سطح

فالاخر ايضاً عمود على ذلك السطح

ليكن ا ب وس د خطين متوازيين وليكن احدهما ا ب عموداً على سطح ي ف



فيكون س د ايضاً عموداً عليه
وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي
اب عمود عليه فليكن دغ عموداً عليه فاذا
دغ يوازي اب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا
دس دغ يوازي اب وقد رُسمت نقطة
واحدة وذلك غير ممكن (اولية الك ١)

القضية الثامنة . ن

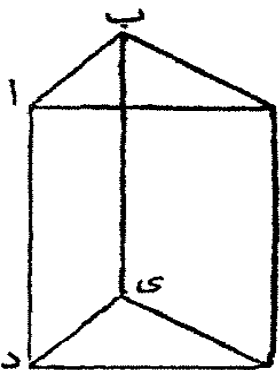
خطان مستقيمان يوازيان خطأ ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن
في سطح واحد

لنفرض ان الخطين المستقيمين اب وس د يوازيان الخط المستقيم ي ف وهو
ليس في سطحهما فالخط اب يوازي الخط س د
في ي ف خذ آية نقطة شئت مثل غ ومنها
ارسم الخط المستقيم غ ح في السطح المار بالخطين
اب ي ف وليكن غ ح عموداً على ي ف
غ ح عموداً على ي ف في السطح الذي ير
بالخطين ي ف س د . ولكون ي ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح
الماز بها ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وي ف يوازي اب فاذا اب هو عمود على
السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهذا السبب س د عمود على السطح ح غ ك
فكلا اب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة . ن

اذا تلاقي خطان مستقيمان ووازي خطين آخرين مستقيمين متلاقين
وليسا في سطح الاولين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة
بين الاخرين

ليكن اب س ب خطين مستقيمين وليتلاقيا في ب وليوازيا خطين اخرين

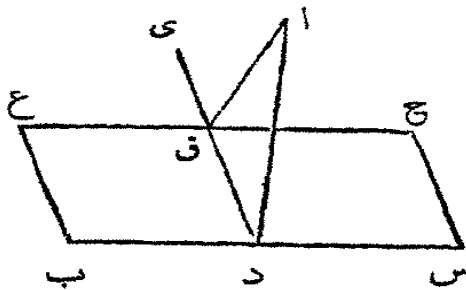


مستقيمين دي في الملتقيين في ي وليس في سطح
 الاولين فالزاوية اب س تعدل الزاوية دي ف. اقطع س
 الاقسام المتساوية ب ا ب س ي هـ ي ف وارسم ا د
 ب ي س ف اس د ف. فلكون ب ا = ي د وبوازيه
 فالخط ا د = ب ي وبوازيه (ق ٢٢ ك ١) ولهذا السبب
 س ف = ب ي وبوازيه فاذا ا د = س ف وبوازيه ف
 (ق ٨ ك ٢ مضافات) و اس = د ف وبوازيه (ق ٢٢ ك ١) فلكون اب وب س
 يعدلان دي وي ف والقاعدة اس = القاعدة د ف فالزاوية اب س = الزاوية
 دي ف (ق ٨ ك ١)

القضية العاشرة. ع

علينا ان نرسم عموداً على سطح من نقطة مفروضة فوقه

ليكن النقطة المفروضة وب ح السطح المفروض. عليا ان نرسم عموداً على



ب ح من النقطة ا
 ارسم في السطح اي خط مستقيم شئت
 مثل ب س ومن ا ارسم ا د عموداً على
 ب س (ق ١٢ ك ١) فاذا كان ا د عموداً
 على السطح ب ح ايضاً فقد تم العمل. والآن

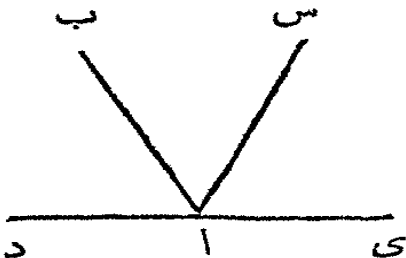
فمن النقطة د ارسم الخط المستقيم دي في السطح ب ح واجعله عموداً على ب س.
 ومن ا ارسم اق عموداً على دي. وفي ق ارسم ق ح حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١)
 فلكون ب س عموداً على دا وعلى دي فهو عمود على السطح الما ز بهما (ق ٤
 ك ٢ مضافات) وق ح يوازي ب س فهو ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢
 مضافات) وهو عمود على كل خط مستقيم في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)
 ويلاقيه اق الذي هو في السطح المذكور اي الما ز بالخطين ا د و دي فاذا اق عمود
 على ق ح ودي على موضع التقائهما فهو عمود على سطحهما (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك
 السطح هو ب ح فقد رُسم اق عموداً على السطح ب ح من النقطة المفروضة

فرع. لو فرض ان يرسم عمود على سطح من نقطة فيه مثل س فعين نقطة فوقه
مثل ا وارسم اق عموداً على السطح ومن س ارسم خطاً حتى يوازي اق فيكون عموداً
على السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الحادية عشرة. ن

من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطان مستقيمان عمودين على ذلك
السطح على جانب واحد منه. ومن نقطة فوقه لا يكون اكثر من خط
واحد عموداً عليه.

ان كان ممكناً ليكن اس اب عمودين على سطح مفروض على نقطة واحدة منه



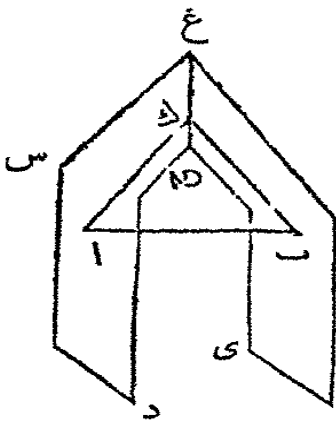
هي ا وعلى جانب واحد منه ويمر سطح بهذين
الخطين ب ا س افجعل تقاطع هذا السطح بالسطح
المفروض هو خط مستقيم ماراً بالنقطة ا (ق ٢ ك ٢
مضافات) ليكن د ا ي محل التقاطع فالخطوط

المستقيمة ب ا س ا د ا ي هي في سطح واحد. ولكون س ا عموداً على السطح
المفروض فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح فالزاوية س ا ي
قائمة ولهذا السبب ايضاً ب ا ي قائمة وهما في سطح واحد وذاك غير ممكن. ومن
نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خط واحد عموداً على السطح والا لكانا
متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

القضية الثانية عشرة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على سطوح فتلك السطوح متوازية

ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطحين س د ي ف فهما متوازيان

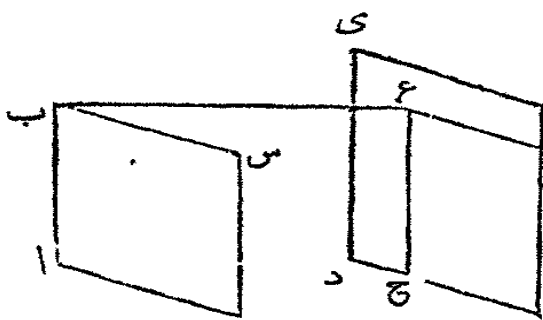


والا فلا بد من التقائهما اذا أُخْرِجَا ويكون محل
 تقاطعهما خطاً مستقيماً غ ح ، خذ في غ ح اية نقطت شئت
 مثل ك وارسم اك ب ك ، فلكون اب عموداً على
 السطح ي ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في
 ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على
 ب ك وك ب قائمة ، ولهذا السبب ايضاً ب ا ك قائمة
 ففي المثلث ك ا ب قائمتان وذاك غير ممكن (ق ١٧
 ك ا) فالسطحان لا يتلاقيان ولو أُخْرِجَا فهما متوازيان (حد ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان خطان مستقيمان ملتقيان موازيين لخطين مستقيمين اخرين
 اللذين يلتقيان ايضاً وليسا في سطح الاولين فالسطح المارّ بالاولين
 يوازي المارّ بالآخرين

ليكن اب ب س خطين مستقيمين ولينلاقيا في ب وليوازي خطين اخرين



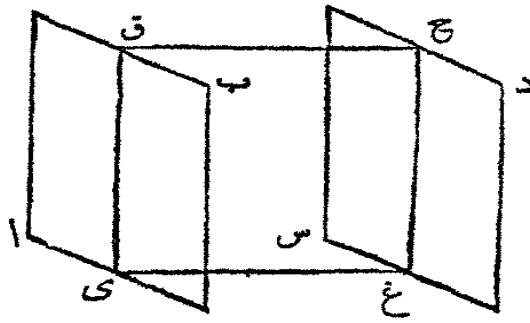
مستقيمين ليسا في سطحها د ي ف ي
 اللذين يتلاقيان في ي ، فالسطح المارّ
 بالاولين يوازي المارّ بالآخرين
 من ب ارسم ب غ عموداً على
 السطح المارّ بالخطين د ي ي ف

(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليلاق في ع ومن غ ارسم غ ح حتى يوازي د ي (ق ٢١
 ك ا) وغ ك حتى يوازي ف ي ، فلكون ب ع عموداً على سطح د ي ي ف فهو عمود
 على كل خطٍ يلاقيه في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فتكون كل واحدة من
 الزاويتين ك ع ب ح غ ب قائمة ، ولكون ب ا يوازي ع ح (ق ٨ ك ٢ مضافات)
 فالزاويتان ح غ ب ا ب غ معاً تعدلان قائمتين وح ح ب قائمة فتكون اب غ
 ايضاً قائمة وغ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضاً هو عمود على ب س ، فهو عمود

على السطح المائل بها وقد رُسم عموداً على سطح دى ي ف فهو عمود على السطحين
 فهما متوازيان (ق ١٢ ك ٢ مضافات)
 فرع. اذا لاقى خطاً مستقيماً سطحين متوازيين وكان عموداً على احدهما فهو عمود
 على الثاني ايضاً

القضية الرابعة عشرة. ن

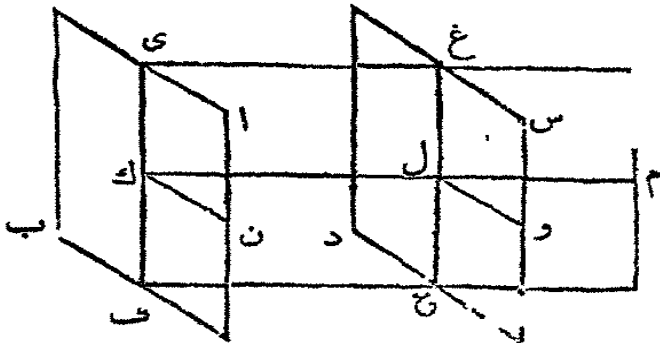
اذا قطع سطح^١ سطحين متوازيين فخطاً التقاطع متوازيان
 ليكن اب وس د سطحين متوازيين وليقطعها السطح ي ق غ فخطاً التقاطع
 ي ق غ ح متوازيان



لأن الخط ي ق في السطح اب
 والخط غ ح في السطح س د وكل واحد
 يبنى في سطحها منها أخرج والسطحان
 لا يلتقيان لانها متوازيان فالخطان
 لا يتلاقيان ولو أخرجا فهما متوازيان
 (حد ٢٠ ك ١)

القضية الخامسة عشرة. ن

اذا قطع سطح^١ سطحين متوازيين فلها ميل واحد على ذلك السطح
 ليكن اب وس د سطحين متوازيين وليقطعها السطح ي ح فيل اب على ي ح



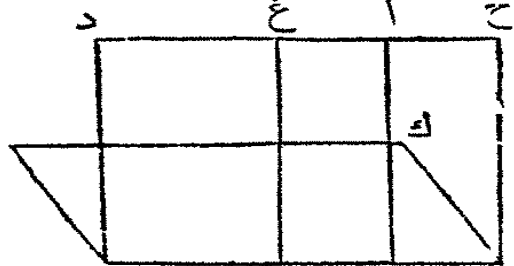
هو مثل ميل س د على ي ح
 ليكن الخطان المستقيمان
 ي ف و غ ح موضعي التقاطع
 من آية نقطة شئت في ي ف مثل
 ك ارسم الخط ك م في السطح ي ح
 عموداً على ي ف وليلاقي غ ح في
 ل وارسم ك ن عموداً على ي ف في السطح اب وليبرر سطح بالخطين المستقيمين ك ن

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كان خطٌ مستقيمٌ عموداً على سطحٍ فكل سطحٍ مارٌّ بذلك الخط

هو عمود على السطح الاول

ليكن الخطُ المستقيم اب عموداً على السطح س ك فكل سطح يمرُّ بالخط اب هو



عمود على السطح س ك

ليمر سطحٌ مثل دي في الخط اب

وليكن الخط س ي مثل تقاطع السطح

س ك. في س ي خذ ا ب نقطة شئت مثل ف

وفي السطح دي ا رسم ف غ عموداً على س ي.

ولكون اب عموداً على السطح س ك فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في ذلك

السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على س ي و اب ف قائمة و غ ف ب ايضاً

قائمة فاذا اب يوازي ع ف (ق ٢٨ ك ١) و اب عمود على السطح س ك فالخط غ ف

ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) و اب و غ ف في السطح دي

فالسطح دي عمود على السطح س ك (حد ٢ ك ٢ مضافات) وهكذا يبرهن ان كل

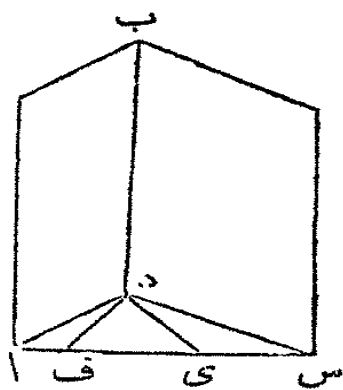
السطوح المارة بالخط اب عمودية على س ك

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا تقاطع سطحان وكانا عموديين على سطح ثالث فخط تقاطعها هو

ايضاً عمود على ذلك السطح

ليكن اب وب س سطحين ولتقاطعا في الخط ب د وليكونا عموديين على



السطح ا د س فالخط ب د هو ايضاً عمود على ا د س

من دي في السطح ا د س ا رسم دي عموداً على ا د

و د ف عموداً على د س. فلكون دي عموداً على د ا

خط تقاطع السطحين اب ا د س و اب عمود على

ا د س فالخط دي عمود على السطح اب (حد ٢ ك ٢

مضافات) فهو ايضاً عمود على الخط ب د الذي في ذلك

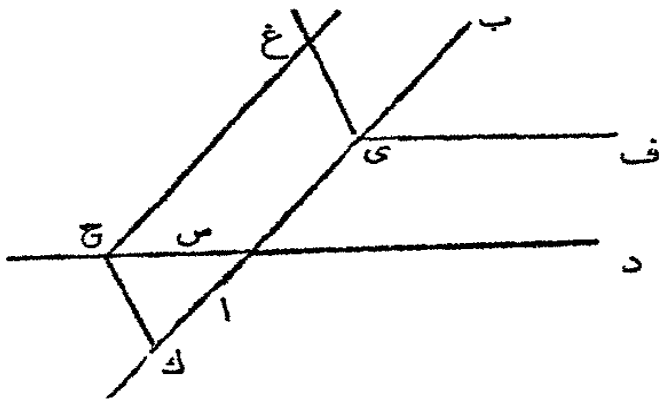
السطح (حدا ك ٢ مضافات) وهكذا ايضاً يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط
د ب عمود على د ي و د ف فهو عمود على سطحها اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خطين مستقيمين مفروضين وضعاً

وليسا في سطح واحد

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونا في سطح واحد. علينا ان نرسم عموداً عليهما



في ا ب خذ نقطة ي ومن
ي ا رسم ي ف حتى يوازي س د
وليكن ي غ عموداً على السطح
المائر بالخطين ي ب ي ف
(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليتر
السطح غ ك بالخطين ا ب و غ ي

وليلاق س د في ح ومن ح ا رسم ح ك عموداً على ا ب فالخط ح ك هو المطلوب.
من ح ا رسم ح غ حتى يوازي ا ب

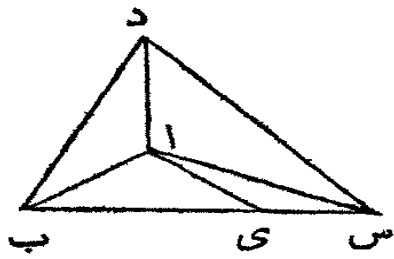
فلكون ح ك و غ ي عمودين على ا ب وهما في سطح واحد فهما متوازيان. ولان
ح غ ح د يوازيان ي ب و ي ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ب ي ف (ق ١٢
ك ٢ مضافات) فالخط غ ي العمودي على ب ي ف هو عمود على السطح غ ح د
ايضاً (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) وح ك يوازي غ ي فهو عمود على السطح غ ح د
(ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حدا ك ٢ مضافات)
وقد رُسم ح ك عموداً على ا ب فهو عمود على الخطين المفروضين

القضية العشرون. ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزاوية مجسمة فكل اثنتين منها معاً

اكبر من الثالثة

لتنع الزاوية المجسمة ا بين الزوايا الثلاث البسيطة ب ا س ب ا د س ا د



فكل اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة

فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر واضح ان اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة. وان لم تكن متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست اصغر من احدى الاخرين والتي هي أكبر من احدهما اي

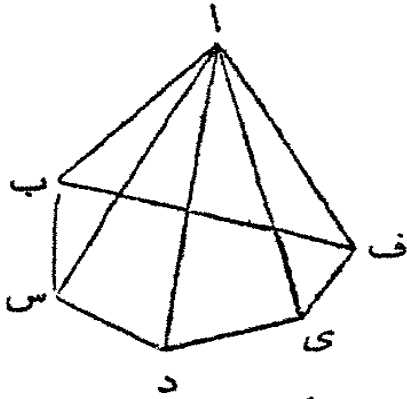
من د ا ب. وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المار بالخطين ب ا س اجعل الزاوية ب ا ي تعدل الزاوية د ا ب (ق ٢٢ ك ١) واجعل ا ي = ا د وفي النقطة ي ا رسم الخط ب ي س حتى يقطع ا ب و ا س في ب و س وارسم ب د و د س

فلكون د ا = ا ي و ا ب مشتركاً بين المثلثين ب ا د ب ا ي والزاوية ب ا د = ب ا ي فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب ي (ق ٤ ك ١) ولان ب د و د س معاً اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) وقد تبهرن ان احدهما ب د = ب ي الذي هو جزء من ب س فالآخر د س هو اطول من الباقي ي س. ولان د ا = ا ي و ا س مشترك بين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة ي س فالزاوية د ا س هي أكبر من الزاوية ي ا س (ق ٢٥ ك ١) وقد جعلت الزاوية د ا ب = ب ا ي فالزاويتان د ا ب د ا س معاً أكبر من ب ا ي ا س او من ب ا س. وقد فرض ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع احدى الاخرين أكبر من الثالثة

القضية الحادية والعشرون . ن

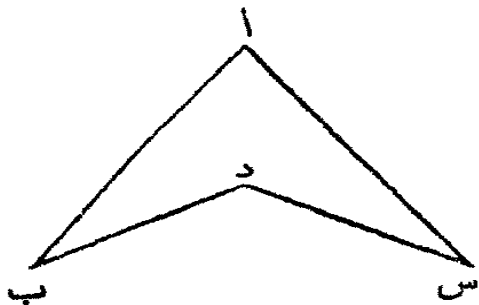
الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسمة هي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة.

لتكن ا زاوية مجسمة ولتخط بها زوايا بسيطة ب ا س ا د ا ي ا ف



ف ا ب فهي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة
لنقطع السطوح المحيطة بالزاوية المجسمة ا
بسطح آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الاضلاع
المستقيمة ب س د ي ف. فالزاوية المجسمة عند ب
تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف
ف ب س وكل اثنتين منها اكبر من الثالثة

(ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا ا ب ف معاً اكبر من ف ب س
ولهذا السبب ايضاً الزاويتان البسيطتان عند كل واحدة من النقط س د ي ف
وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في اها اكبر من الثالثة عند تلك النقط.
فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معاً اكبر من جميع زوايا الشكل. وجميع زوايا
المثلثات معاً تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة المثلثات (ق ٢٢ ك ١) او مضاعف
اضلاع الشكل ب س د ي ف وجميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة تعدل من
الزوايا القائمة مضاعف عدة اضلاع الشكل (فرع اول ق ٢٢ ك ١) فجميع زوايا
المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة. ولكن جميع الزوايا عند
قواعد المثلثات اكبر من جميع زوايا الشكل كما قد تبرهن فالزوايا الباقية من المثلثات
اي التي عند مجتمع المثلثات المحيطة بالزاوية المجسمة ا هي اصغر من اربع زوايا قائمة
تعلية. اذا كانت احدى زوايا الشكل ب س د ي ف خارجة كالزاوية عند د



لا تصح هذه القضية لان الزوايا المجسمة عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا البسيطة
التي اثنتان منها في السطوح المثلثة المجتمعة
عند ا والثالثة زاوية داخلية من الشكل
المذكور. فلا يقال ان مجتمع الزوايا عند
قواعد المثلثات هو ضرورة اكبر من مجتمع
زوايا الشكل ب س د ي ف

اصول الهندسة مضافات

الكتاب الثالث في مقايسة الاجسام

حدود

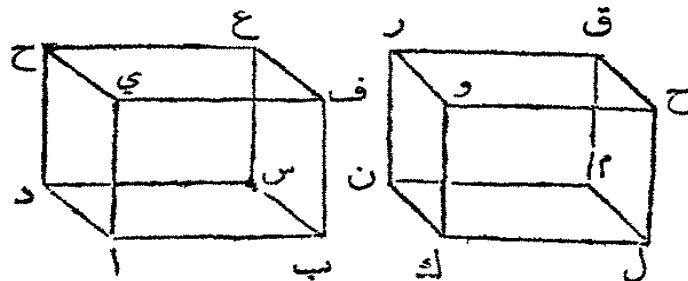
- ١ الجسم هو ما كان له طول وعرض وعمق
- ٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها عدة واحدة من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لها ميل واحد بعضها على بعض
- ٣ الهرم جسم يحيط به سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح هي بين هذه النقطة وسطح اخر
- ٤ المشور ويقال له المشور جسم يحيط به سطوح منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية
- ٥ المتوازي السطوح هو جسم يحيط به ستة سطوح كل واحد منها ذو اربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان
- ٦ المكعب جسم يحيط به ست مربعات متساوية
- ٧ الكرة جسم يرسم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت
- ٨ محور الكرة ويقال له الجزء او الجزع هو الخط الثابت الذي دار عليه نصف الدائرة
- ٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رسمت الكرة بدورانه
- ١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمر بمركزها وينتهي طرفاه في سطحها

- ١١ المخروط هو جسم بُرِّمَ بدوران مثلث ذي قامة على احد ضلعيه المحيطين بالقائمة
- ١٢ محور المخروط او جزعته هو الضلع الثابت من المثلث الذي رُسم المخروط بدورانه
- ١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القائمة من المثلث الذي بدورانه رُسم المخروط
- ١٤ الاسطوانة جسم مرسوم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قائمة على احد اضلاعه
- ١٥ سهم الاسطوانة او محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسمت الاسطوانة بدورانه
- ١٦ قاعدتا الاسطوانة هما الدائرتان المحادثتان من دوران الضلعين المتقابلين من الشكل الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة
- ١٧ المخاريط المتساوية والاساطين المتشابهة هي التي تكون سهامها واقطاس قواعدها متناسبة

القضية الاولى

إذا أُحيط جسمان بعدة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرها في الآخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن اغ وك ق جسمين محاطين بعدة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة



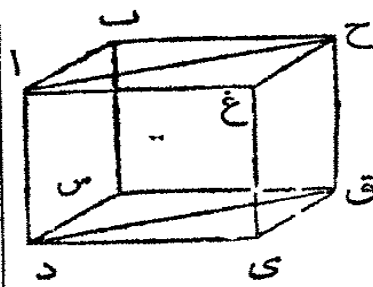
شكلاً ووضعاً اي السطح اس يشبه السطح ك م وبعده و اف يشبه ك ج وبعده وهكذا في البقية وليكن ميل اف على اس مثل ميل ك ج على ك م

وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم ا غ ويشبهه
ليوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدته ك م على اس قاعدة الجسم ا غ اي حتى
تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان
(اولية تامة ك ا) . فلكون السطح ك م يطابق السطح اس وبالمفروض ميل ك ر على
ك م مثل ميل اح على اس فالسطح ك ر يطابق السطح اح لانهما متساويتان ومتشابهتان
(اولية تامة ك ا) وضلعاهما المتساويتان ك ن و ا د متطابقتان . وهكذا يبرهن في بقية
سطوح الجسمين ان كل واحد يطابق نظيره فالجسمان متطابقتان كلياً فهما متساويتان
ومتشابهتان

القضية الثانية . ن

اذا أُحيط جسمٌ بستةً سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح
المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

ليكن س د ع ح جسمًا احاط به السطوح المتوازية اس غ ق و ب غ س ي
وق ب ي ا فالسطوح المتقابلة هي متواربة الاضلاع
متشابهة ومتساوية



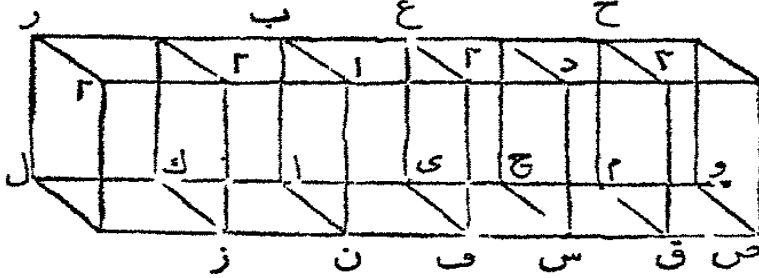
لأن السطح اس يتقطع السطحين المتوازيين ب ع
وس ي فخطاً التقاطع ا ب ود س متوازيان (ق ٤ ا
ك ٢ مضافات) ولأن السطح اس يتقطع السطحين

المتوازيين ب ق و ا ي فخطاً التقاطع ب س و ا د متوازيان و ا ب يوازي س د كما
نقدم فالشكل ا ب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقية السطوح انها
متواربة الاضلاع . ا رسم ا ح و د ق . فاكون ا ب يوازي د س و ب ح يوازي س ق
فالخطان المتلاقيان ا ب ب ح يوازيان المتلاقيين د س س ق . فالزاوية ا ب ح =
د س ق (ق ٤ ك ٢ مضافات) ولكون ا ب ب ح يعدلان د س س ق والزاوية
ا ب ح = د س ق فالقاعدة ا ح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح = المثلث د س ق .
ولهذا الساس ا ب ح = ي ق ، ما التمثل ب ع = س ي وهكذا يبرهن ان اس =

القضية الثالثة . ن

جسم متوازي السطوح اذا قُطِعَ بسطحٍ يوازيه سطحين متوازيين من سطوحه ينقسم الى جسمين نسبة بعضهما الى بعض كسبة قاعدتيهما بعضها الى بعض

ليكن ا ب س د جسمًا متوازي السطوح وليقطع السطح ف ع الموازي السطحين



المتقابلين ن ب ح د
فينقسم الجسم الى
جسمين ن ب ف ع
و غ ف ح د حتى
تكون نسبة ن ب ف غ

الى غ ف ح د كسبة القاعدة اى ف ن الى القاعدة ي ح س ف

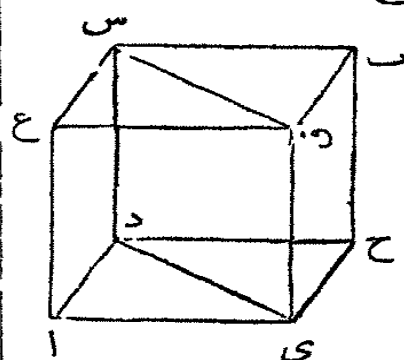
اخرج ا ح الى الجهتين وخذ م و م وحتى بعد ل ا ي ح وخذ ا ك كل حتى بعد ل ا ي وتم الاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ح ق م ص والاجسام ل ٢ ك ا ح ٢ م ت . المخطوط ل ك ا اى متساوية والمخطوط ل ز ا ن ي ف متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ا و اى فالاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ٢٦ ك ا و حد ا ك ٦) وهكذا الاشكال ل ك ر ك ب ا غ وايضا الاشكال ل ٢ ك ١١ ٢ (ق ٢ ك ٢ مضافات) لانها سطوح متقابلة . وهكذا يبرهن ان الاشكال ي س ح ق م ص متساوية (ق ٢٦ ك ا حد ا ك ٦) وايضا الاشكال ح غ ح ج ج و وايضا ح د م ٢ ت و (ق ٢ ك ٢ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ٢ تعدل وتساه ثلثة سطوح من الجسم ك ا وثلاثة سطوح من الجسم ا ٢ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ٢ ك ٢ مضافات) فالاجسام ل ٢ ك ا ١ ٢ تحيط بها سطوح متساوية ومتشابهة . ولكون السطوح ل ٢ ك ١ ٢ متوازية ويقطعها السطح ر ٢ يكون ميل ل ٢ على ر ٢ مثل ميل ك ٢ على ا ٢ ب او ميل ا ١ على ب ٢ (ق ١٥ ك ٢ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوازية . فالاجسام

ل ٢ ك ا ا ٢ في متساوية (ق ١ ك ٢ مضافات). وهكذا يبرهن ان الاجسام
 ي د ح ٢ م متساوية فكما تتكرر ا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ا ٢ في الجسم
 ل ٢ وكذلك كما تتكرر ا ف ح في ف وهكذا يتكرر الجسم ي د في الجسم ي ت واذا
 كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف و فلجسم ل ٢ يعدل الجسم ي ق (ق ١
 ك ٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكثر وان كانت اصغر فاقصر فالقاعدة ا ف :
 القاعدة ف ح :: الجسم ا ٢ : الجسم ي د (حد ٥ ك ٥)
 فرع. لان الشكل المتوازي الاضلاع ا ف : ف ح :: ن ف : فس (ق ١ ك ٦)
 فالجسم ا ٢ : الجسم ي د :: ن ف : فس

القضية الرابعة ن

جسم متوازي السطوح اذا قطعته سطح ماراً بقطري السطحين
 المتقابلين ينقسم الى موشورين متساويين

ليكن ا ب جسماً متوازي السطوح وليقطع بالسطح س ق ي د المار بقطري
 السطحين المتقابلين غ ب واح فانه ينقسم الى
 موشورين متساويين. لان س د يوازي غ ا وق ي
 يوازي ع ا وهو ليس في سطحه فالحيطان س د ق ي
 متوازيان (ق ١ ك ٢ مضافات) فالقطران س ق
 د ي هما في سطح س د وق ي فهما متوازيان (ق ٤ ا
 ك ٢ مضافات) والثلث س ب ق = س غ ق

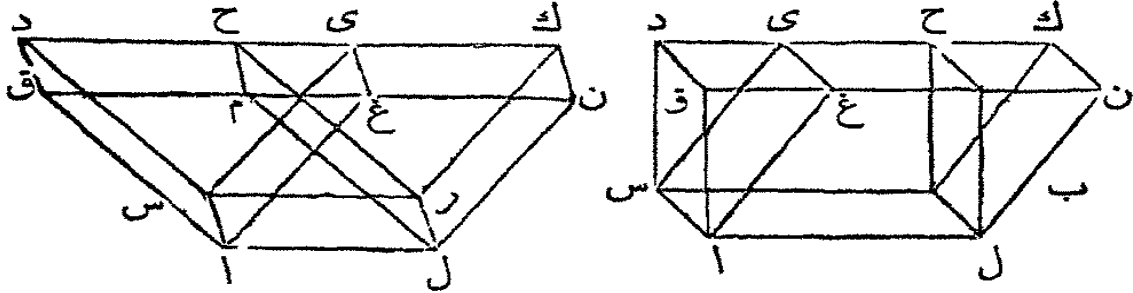


(ق ٢٤ ك ١) ود ح ي = د ا ي والشكل س ا يعدل الشكل المقابل له ب ي
 (ق ٢ ك ٢ مضافات) وغ ي = س ح فالسطوح المحيطة بالموشورين س ا ي
 س ب ي متساوية ومتشابهة كل واحد بنظيره وهي على ميل واحد بعضها على
 بعض لان السطح ا س يوازي السطح ي ب و ا ق يوازي س ح ونقطعها السطح س ي
 (ق ١٥ ك ٢ مضافات) فالوشور س ا ي = س ب ي (ق ١ ك ٢ مضافات)
 تبي. في القضايا الآتية يراد بالمحطوط الرافعة اضلاع الاشكال الواقعة بين
 قاعدة الجسم والسطح الذي يقابلها

القضية الخامسة. ن

لجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية
إذا انتهت خطوطها الواقفة إلى خط مستقيم واحد في السطح الذي
يقابل القاعدة

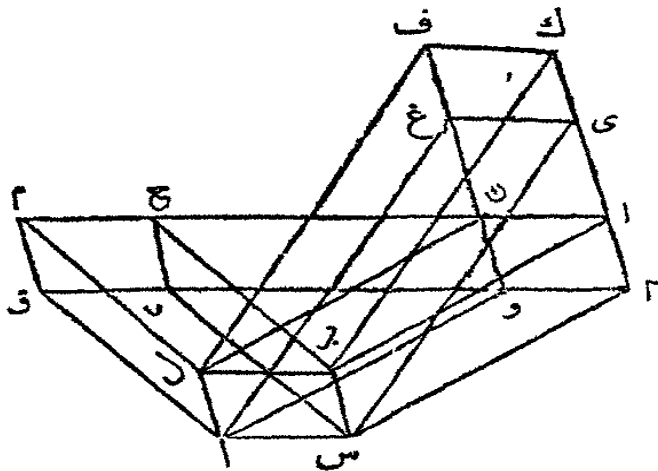
ليكن اح اك جسمين على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد وخطوطها



الواقفة اق اغ ل م ل ن منتهية إلى خط واحد ق ن والخطوط س د س ي
ب ح ب ك منتهية إلى خط واحد د ك فالجسمان متساويان
لأن س ح س ك متوازي الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من
الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق ٢٤ ك ١) د ح = ي ك فان اضيف اليهما الجزء
المشترك ح ي او طرح منها فالجمع او الباقي دى = المجتمع او الباقي ك ح والمثلث
س دى = ب ح ك (ق ٢٨ ك ١) والشكل دغ = الشكل ح ن (ق ٢٦ ك ١) ولهذا
السبب اق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق ٢ ك ٢ م) وس غ = ب ن لانها سطوح
متقابلة فالسطوح المحيطة بالمشور داغ انما تعدل وتنسب السطوح المحيطة بالمشور
ح ل ن كل واحد يعدل ويشبه نظيرة والسطوح المتوالية هي على ميل واحد بعضها
على بعض (ق ١٥ ك ٢ م) فالمشوران داغ ح ل ن متساويان (ق ١ ك ٢ م)
فان طرح المشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدته الشكل اب وق د ك ن السطح
المقابل لها وطرح منه ايضا المشور اغ د فالجسم الباقي اي المتواري السطوح اح
يعدل الباقي اك

القضية السادسة. ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية وان لم تنته خطوطها الواقفة في خط واحد في السطح المقابل القاعدة ليكن الجسمان المتوازي السطوح س م وس ف على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد



واحد وخطوطها الواقفة اق اغ ل م ل ف س د س ي بح ب ك غير منتهية الى خط واحد كما في القضية السابقة فالجسمان س م س ف متساويان

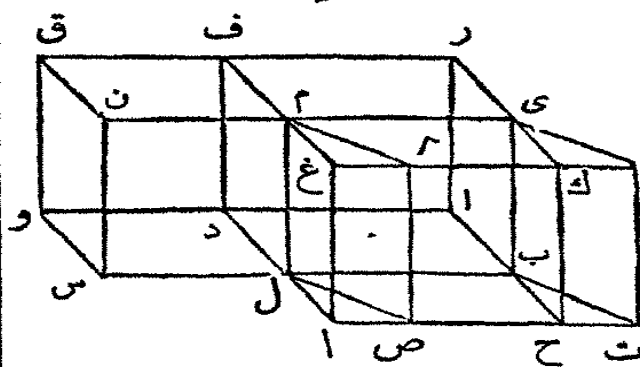
لانها على علو واحد فالسطح ح ق والسطح ك غ في

سطح واحد واذا اخرج السطح ح ق والسطح ك غ نقاط اضلاعها. فليخرجوا ولينقاطعا في ان ٢ و. فالجسم س ف = س ن (ق ٥ ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن (ق ٥ ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية ك ١)

القضية السابعة. ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن الجسمان المتوازي السطوح س ف واى على علو واحد وعلى قاعدتين



متساويتين ح ل وس د فهما متساويان

ليوضع الجسمان حتى تكون القاعدتان في سطح واحد. فلكونها على علو واحد يكون السطحان المقابلان القاعدتين

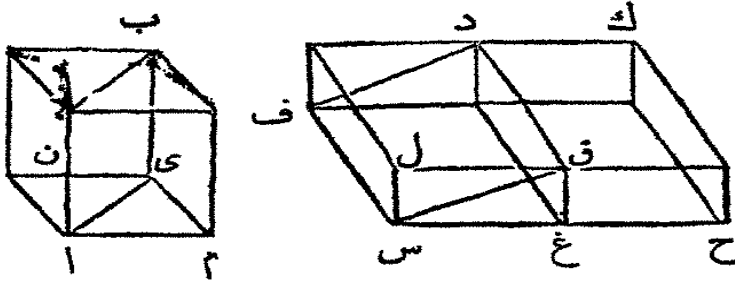
ن ف غ ي ايضاً في سطح واحدٍ ويُخرج السطوح حتى يصطنع السطحان م ر وب د
 وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم س ف (ق ١ ك ٢ م) وهو ايضاً يعدل اي فالجسم
 اي يعدل الجسم س ف (اولية ا ك ١)



القضية الثامنة. ن

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علو واحد تكون نسبة بعضها
 الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن اب وس د جسمين متوازيي السطوح وعلى علو واحد فنسبة اب :



س د :: القاعدة اي :

القاعدة س ق

ارسم الشكل

المتوازي الاضلاع ق ح

على الخط المستقيم

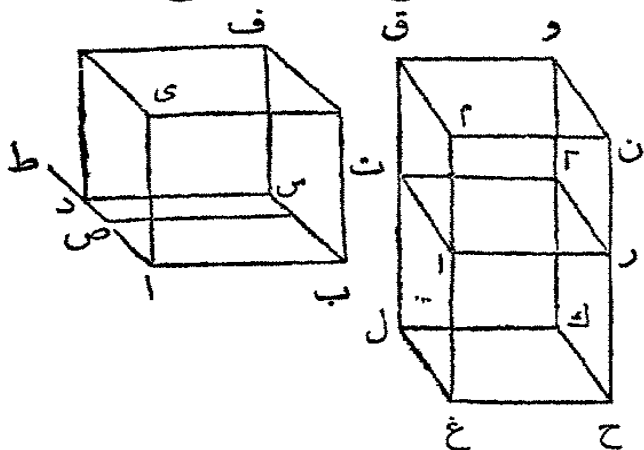
ق غ حتى يعدل القاعدة اي (فرع ق ٤٥ ك ١) والزاوية ق غ ح فلتعدل ل س غ
 وتم الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحداً من خطوطه
 الواقعة فيكون الجسمان س د و غ ك على علو واحد والجسم اب يعدل الجسم غ ك
 (ق ٧ ك ٢ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق ٢ ك ٢ م) والقاعدة
 ح ق = اي والجسم غ ك = اب فنسبة اب : س د :: اي : س ق

فرع اول. يتضح من هذه القضية ان المواشير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى
 علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض
 فرع ثانٍ. اذا كان جسم متوازي السطوح وموشور على علو واحد فنسبة احدها
 الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر



القضية التاسعة . ن

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة سطح
 علو الواحد في مساحة قاعدته الى مسطح علو الاخر في مساحة قاعدته
 ليكن اف و غ و جسمين متوازيي السطوح . فنسبة اف : غ و :: اس :
 س ف : غ ك × ك و



من غ م احد الخطوط
 الواقفه للجسم غ و اقطع غ ا
 حتى يعدل س ف او اى
 من الجسم اف وليمر بالنقطة
 ا سطح يوازي غ ك مثل
 السطح ات ٢ ف الجسم غ ٢

متوازي السطوح (حد ه ك م) وعلوه هو علو اف . ونسبة الجسم اف : الجسم غ و
 هي مركبة من نسبة اف : غ ٢ ونسبة غ ٢ : غ و (حد ا ك ه) ونسبة اف : غ ٢
 هي كنسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك (ق ا ك م) لانها على علو واحد ونسبة الجسم
 غ ٢ : الجسم غ وهي كنسبة غ ا : غ م (ق ٢ ك ه) فالنسبة المركبة من نسبة اف :
 غ ٢ ومن نسبة غ ٢ : غ وهي مثل المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك
 والعلو اى : العلو م (ق و ك ه) ولكن نسبة اف : غ وهي المركبة من اف : غ ٢
 وغ ٢ : غ و فنسبة اف : غ وهي المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو
 اى : العلو م فنسبة اف : غ و :: اس : س ف : غ ك × ك و

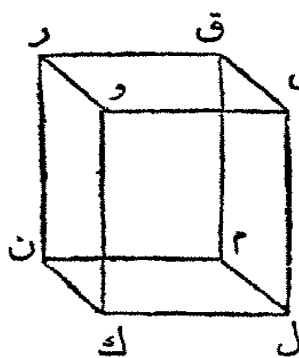
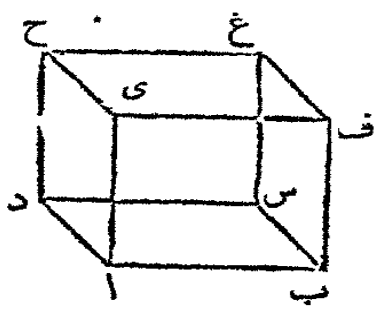
فرع اول . يمكن استعمال خطين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم
 اف الى الجسم غ و . ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على اب وليفرض
 ان ب ص = غ ك وزاوية من زاوية تعدل ب ا د (ق ٤ ك ا) واص : ا ط ::
 اى : غ م (ق ١٢ ك ٦) فتكون نسبة ا د : ا ط :: الجسم اف : غ و . لان نسبة ا د :
 ا ط مركبة (حد ا ك ه) من نسبة ا د : اص ونسبة اص : ا ط ولكن نسبة ا د :
 اص هي مثل نسبة الشكل اس : الشكل ب ص او غ ك (ق ١ ك ٦) ونسبة
 اص : ا ط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة ا د : ا ط مركبة من نسبة اس : غ ك

ونسبة اى : غ م (ق ه ك ه) ونسبة الجسم ا ف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات
 هذه النسب فنسبة ا ف : غ و :: ا د : ا ط
 فرع ثانٍ . نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في
 علوها (فرع ٢ ق ١ ك ٢ م)

القضية العاشرة . ن

اجسام متوازية السطوح هي متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها
 متناسبة بالتكافؤ . والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون
 قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

لتكن نسبة ا س : ك م :: ك و : اى ف الجسم ا غ = الجسم ك ق لانه بتحويل هذه



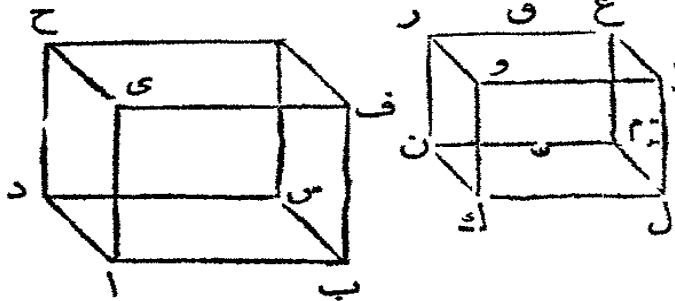
النسبة لنا ا س × اى = ك م
 × ك و و ا س × اى = ا غ
 (ق ١ ك ٢ م) و ك م × ك و
 = ك ق
 ثم اذا قُرِض ان ا س
 × اى = ك م × ك و لنا
 ا س : ك م :: ك و : اى

فرع . في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالعقاب
 اذا كانت العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

القضية الحادية عشرة . ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة
 كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن اغ وك ق جسمين متوازيي السطوح اب وك ل الضلعين المتشابهين
 فنسبة اغ : كق :: اب : كل
 لكون الجسمين متشابهين يكون
 اح وك سطحين متشابهين واف
 وك ط كذلك (حد ٢ ك ٢ م)
 ونسبة اب : كل واي : ك و



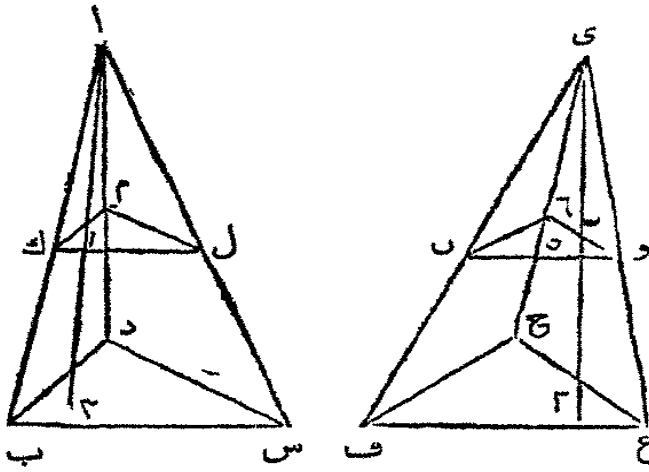
واد : كن متساوية (حد ١ ك ٦) ونسبة اغ : كق هي مركبة من نسبة اس : كم
 واي : ك و ونسبة اس : كم هي مركبة من اب : كل واد : كن فنسبة اغ :
 كق مركبة من النسب الثلاث اي نسبة اب : كل واد : كن واي : ك و وقد
 تبهرن ان هذه النسب الثلاث متساوية اذا اب : كل :: اغ : كق (حد ١٢ ك ٥)

فرع اول . اذا فرض اب : كل :: كل : م وك ل : م :: م : ن فتكون نسبة
 اب : ن :: اع : كق . لان اب : ن = اب : كل (حد ١٢ ك ٥) اي اغ : كق
 فرع ثان . لكون الاجسام المكعبة متشابهة يكون المكعب على اب : المكعب
 على كل :: اغ : اق فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة
 كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض
 فرع ثالث . وهكذا يبرهن ايضا ان المرشورات المتشابهة هي ككعوب اضلاعها
 المتشابهة

القضية الثانية عشرة . ن

هرمان مثلثا الاضلاع على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد اذا
 قُطِع كل واحد منها بسطح يوازي قاعدته وعلى بعد واحد من
 القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويتين

ليكن اب س د ي ف غ ح هرمين متلي الاضلاع على قاعدتين متساويتين
 دب س ح ف غ وعلى علو واحد اي العمود ٢ والعمود ٢ من اوى على
 القاعدتين وابة اح ادها بالسليخ ل م والانبتر با السطح و ٦ على سد واحد من



القاعدتين اي طول العمودين
٢١ و ٢٥. فموضعا التقاطع
اي المثلثان ك ل م ن و
متساويان

السطحان ب د س
ك م ل متوازيان ويلاقيهما
السطح ا ب د فالخطان
ب د ك م متوازيان (ق ١٤)

ك م) وهكذا يبرهن ان د س وم ل متوازيان وب د د س يوازيان ك م م ل
وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق ٩ ك ٢ م) وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة لمظيرها فالمثلثان
متشابهان وهكذا ايضا في المثلثين ف ع ح ن و ٦ فهما متشابهان لان الخطين
المستقيمين ٢١ ا ك ب يلاقيان السطحين المتوازيين ك م ل ب د س فيقطعهما على
نسبة واحدة (ق ١٦ ك ٢ م) ونسبة ١٢ : ١١ :: ب : ك : ا و ١١ : ٢ :: ا ب : ا ك
(ق ١٨ ك ٥) وهكذا ايضا ي ٠٢ : ٥ :: ي ف : ي ن فتكون نسبة ا ب : ا ك ::
ي ف : ي ن لان ٢١ = ٢ ي = ١ و ٥ = ٥ ي = ٥ ولان المثلثين ا ب س ا ك ل
متشابهان ا ب : ا ك :: ب س : ك ل وايضا
ي ف : ي ن :: ف غ : ن و فلما
ب س : ك ل :: ف غ : ن و

واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة
ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالمثلث ب س د : المثلث ك ل م . المثلث ف غ ح : المثلث
ن و ٦ . ولكن قد فرض ان ب س د ف ع ح متساويان فاذا ك ل م ن و ٦
متساويان ايضا (ق ١ ك ٥)

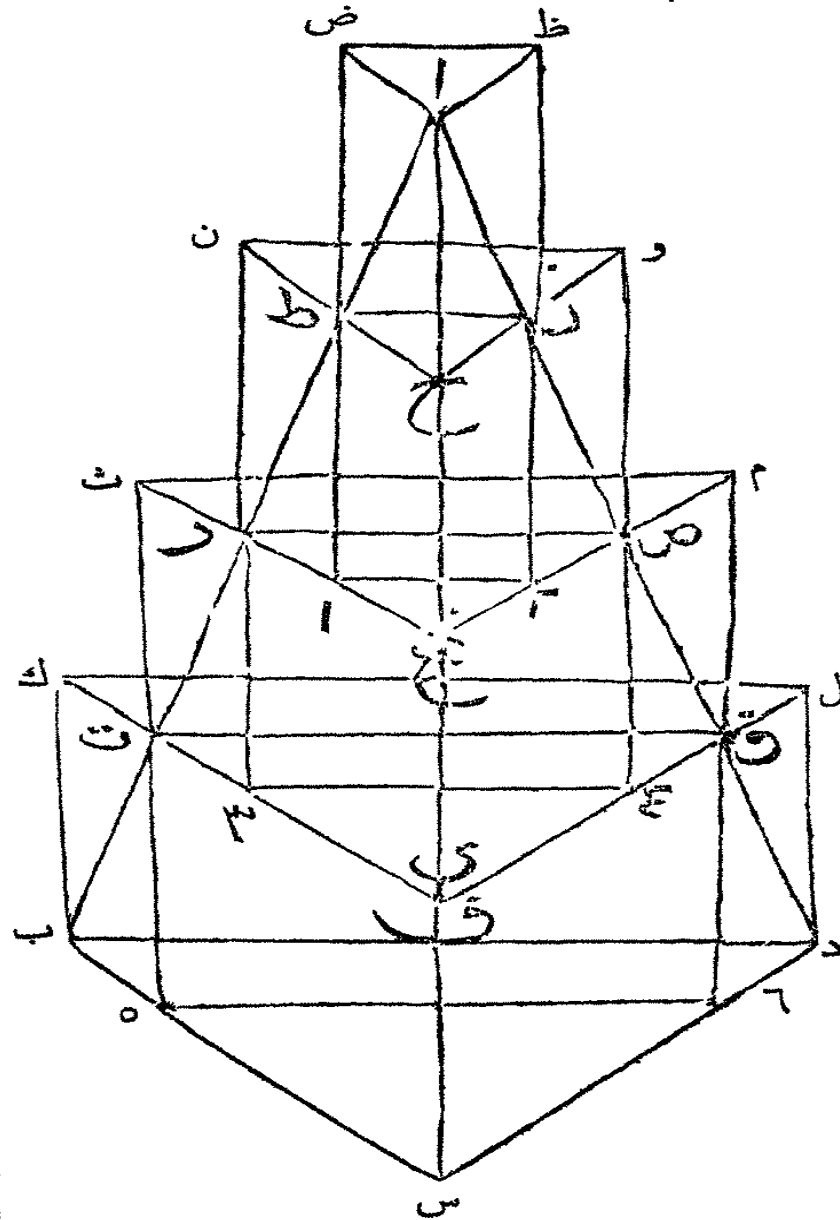
فرع اول . كل موضع يُقطع فيه هرمٌ مثلثُ الاضلاع على موازاة قاعدته هو
مثلثٌ يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على
موازاة قاعدته هو شكل شبيه بقاعدة الهرم

فرع ثاني . اهرام كثيرة الاضلاع وهي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون

الاشكال الممادة من قطعها على بعد واحد من القواعد متساوية

القضية الثالثة عشرة . ن

يمكن ان ترسم عدة مواشير على علو واحد محيطه بهم حتى يكون مجموع المواشير اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من جسم مفروض
ليكن ا ب س د هرمًا وز الجسم المفروض فقد يمكن ان يرسم عدة مواشير محيطه



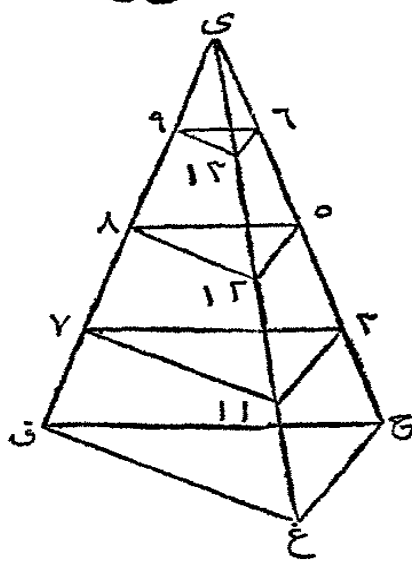
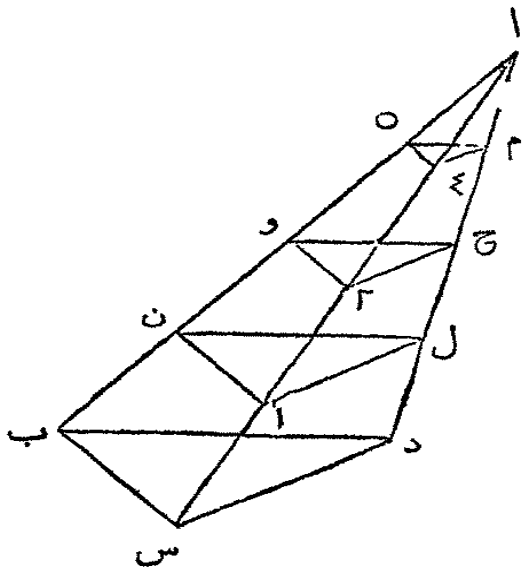
بالهرم ا ب س د مجتمعا
اعظم من ا ب س د
بمقدار جسم اصغر من ز
لفرض ان ز يعدل
موشورًا على قاعدة الهرم
ب س د وعلوه ي س
العمود على القاعدة
ب س د . فان ضرب
س ي في م مثلاً يكون
الحاصل اكبر من ا س .
اقسم س ا الى اقسام
متساوية عددها يائل
الاحاد في م ولتكن
تلك الاقسام س ف
ف غ ح و ا فيكون
كل واحد منها اقل
من س ي . ثم ليمر في
النقط ف و غ و ح سطوح
توازي القاعدة وتصنع مع
اضلاع الهرم السطوح

ف ت ق و غ ر ص و ح ط ذ فهى متشابهة بعضها لبعض والقاعدة ب س د (ق ١٢ ك ٢ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف وبلاقي ف ت بعد اخراجه في ك وهكذا دل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س دل ف موشوراً (حد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ت م ورو و ط ظ ثم اخرج ث ت الى ٥ وم ق الى ٦ وارسم الخط ٦٥ فيكون ٥ س ٦ ق ف ت موشوراً يعدل الموشور ت م (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ٢ ص = رو و ا ذ = ط ظ فجميع المواشير الداخلية ٥ ق و ٢ ص و ا ذ = مجتمع ت م ورو و ط ظ اي مجتمع الخارجية الأ ب ل فيكون ب ل فضلة المواشير الداخلية والخارجية و ب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علو س ي الذي يعدل الجسم المفروض ز. فضلة المواشير الخارجية والداخلية هي اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة المواشير الخارجية والهرم ا ب س د لان الهرم اعظم من مجتمع المواشير الداخلية فبالاخرى تكون فضلة المواشير الخارجية والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

القضية الرابعة عشرة ن

اهرام على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن ا ب س د ي ق غ ح هرمين على قاعدتين متساويتين ب س د



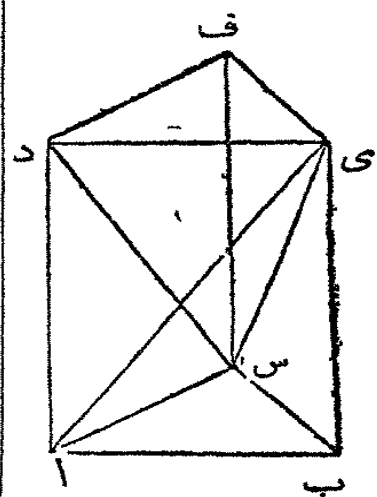
ق غ ح وعلى علو واحد اي العمود من الراسين ا وى على القاعدتين فالهرمان متساويان والا

فليكن س ي ق غ ح اعظم من ا ب س د بمقدار جسم ز. فيمكن ان ترسم عدة مواشير على

علو واحد محيطه بالهرم ا ب س د حتى يكون مجتمعها اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من ز (ق ١٢ ك ٢ م) ولتكن قواعد هذه المواشير المثلثات ب س د ا ن ل ٢ و ج ٥ ٤ م . اقسام ي ح الى اقسام متساوية تماثل اقسام ا د وهي ي ٦ ٦ ٥ ٢ ٣ ٥ ح ولترب هذه النقاط سطوح توازي القاعدة ق غ ح وهي ٢ ١ ١ ٢ ٥ ٧ ١ ٢ ٥ ٨ ١ ٢ ٦ ٩ ١ ٢ ٦ . فالقطع ن ا ل يعدل القطع ٢ ١ ١ ٧ ٢ (ق ١٢ ك ٢ م) و و ٢ ج = ٥ ١ ٢ ٨ ٥ ٤ ٥ م = ٦ ١ ٢ ٩ والمواشير المبنية على هذه الاقطاع المتساوية هي متساوية (فرع اول ق ٨ ك ٢ م) اي المشور على القاعدة ب س د وبين السطحين ب س د ن ا ل يعدل المشور على القاعدة ق غ ح وبين السطحين ق غ ح ٢ ١ ١ ٧ وهكذا في البقية لانها على علو واحد . فجميع المواشير المحيطه بالهرم ا ب س د يعدل مجتمع المواشير المحيطه بالهرم ي ق غ ح وفضله ا ب س د والمواشير المحيطه به هي اقل من ز . فتكون فضلة هذه المواشير والهرم ي ق غ ح اقل من ز . وقد فرض ان فضلة الهرمين تعدل ز . فالهرم ي ق غ ح هو اعظم من الهرم ا ب س د بمقدار اعظم من فضلة المواشير المحيطه بالهرم ي ق غ ح والهرم ا ب س د . فالهرم ي ق غ ح اعظم من مجتمع المواشير المحيطه به وذاك غير ممكن . فلا يكون الهرمان غير متساويين اي هما متساويان

القضية الخامسة عشرة . ن

كل مشور مثلث القاعدة ينقسم الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القاعدة لفرض مشورا قاعدة المثلث ا ب س وليكن د ي ف المثلث المقابل القاعدة

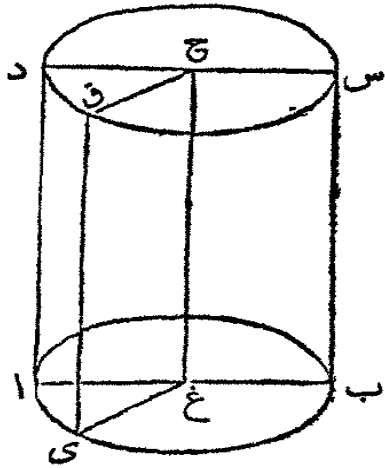


فالمشور ا ب س د ي ف قابل الانقسام الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القواعد . ا رسم ا ي و س د و س ي فيكون ا ب ي د متوازي الاضلاع وقطره ا ي فالمثلث ا د ي = ا ب ي (ق ٢٤ ك ١) فالهرم الذي قاعدته ا د ي يعدل الذي قاعدته ي ب ا وراسها في س (ق ١٤ ك ٢ م) والهرم ا ب س ي = د ي ف س (ق ١٤ ك ٢ م) فالاهرام الثلاثة ا د ي س ا ب ي س د ف ي س هي متساوية ومجتمعها هو المشور المفروض

فرع أول كل هرم هو تلك موشور على قاعدة تعدل قاعدته وعلى علو يعدل علوه لأنه ولئن كانت قاعدته غير مثلثة يمكنها ان تُقسَم الى مواشير لها قواعد مثلثة فرع ثانٍ نسبة اهرام على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م)

القضية السادسة عشرة ن

اذا فرضت نقطة في محيط قاعدة اسطوانة ورسم منها خطاً مستقيماً عموداً على سطح القاعدة يكون الخط كله في سطح الاسطوانة لكن ا ب س د اسطوانة محيط قاعدتها ا ب و لكن د ق س الدائرة التي



تقابل القاعدة وليكن غ ح محورها . وتُفرض في محيط القاعدة النقطة س ويرسم منها الخط للمستقيم س ق عموداً على سطح الدائرة ا ب . فالخط س ق كله في سطح الاسطوانة . ليلاق الخط س ق السطح المقابل بقاعدة د ق س في النقطة ق . ارسم س غ و ق ح . وليكن ا غ ح د الشكل القائم الزوايا الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة (حد ١٤ ك ٢ م)

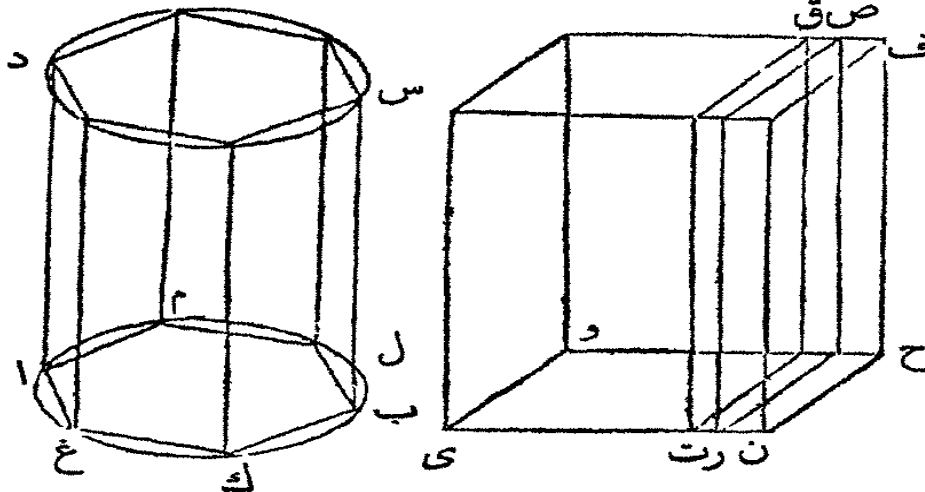
لكون الخط غ ح عموداً على ا غ الذي

بدورانه رُسمت الدائرة ا ب فهو عمود على جميع الخطوط المستقيمة في سطح تلك الدائرة التي تلاقيه في غ . فهو عمود على سطح الدائرة ا ب . والخط س ق هو عمود على ذلك السطح فالخط س ق يوازي غ ح (ق ٦ ك ٢ م) وهما في سطح واحد . والسطح المار بالخطين س ق غ ح يقطع السطحين المتوازيين د ق س ا ب في الخطين المستقيمين س غ ق ح فهما متوازيان (ق ١٤ ك ٢ م) فالشكل س ق ح غ متوازي الاضلاع والزوايا س غ ح منه قائمة فالشكل قائم الزوايا ويعدل القائم الزوايا ا ح لان ي غ = ا غ . فاذا دار الشكل ا ح حتى يوافق الخط ا غ الخط س غ فالشكلان ا ح س يبتوانقان والخط ا د يوافق الخط س ق ولكن ا د هو في سطح الاسطوانة فيكون س ق ايضاً في سطح الاسطوانة

القضية السابعة عشرة . ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد هما متساويان

لتكن اب س د اسطوانة وليكن ي ف جسمًا متوازي السطوح والقاعدة اغ ب



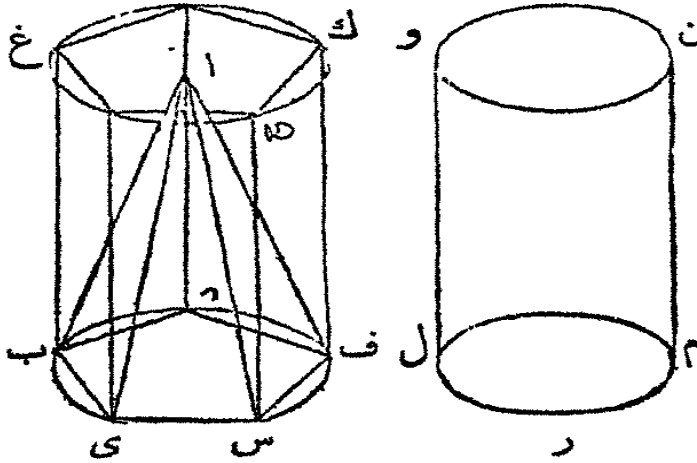
فلتعدل القاعدة
ي ح وليكن علو
الجسمين واحدًا
فلا اسطوانة
اب س د تعدل
الجسم ي ف
والأ فلتكن
الاسطوانة اصغر

من الجسم ي ف . وليفصل من ي ف جزء ي ق يعدل الاسطوانة اب س د .
وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارسم في دائرة اغ ب شكلاً كثير
الاضلاع اغ ك ب ل م ويكون الفرق بينه وبين الدائرة اقل من الشكل ت ح
(ق ٤ ك ا فرع ا م) وافصل من ي ح جزءاً ور = اغ ك ب ل م . فتقع النقطة ر
بين ت ون ثم ارسم على اغ ك ب ل م موشوراً اغ ب س د على علو الاسطوانة
فيكون اصغر منها (ق ١٦ ك ٢ م) ثم ليمر السطح ر ص في النقطة ر وليوازي ن ف
فيقطع من ي ف الجسم ي ص = الموشور اغ ب س د (ق ٨ ك ٢ فرع ٢ م) لانها
متساويان في القاعدة والعلو والموشور هو اصغر من الاسطوانة وفرض ان
الاسطوانة = ي ق اذا ي ص هو اصغر من ي ق وذاك محال فلا يمكن ان تكون
الاسطوانة اصغر من ي ف . وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ي ف

القضية الثامنة عشرة . ن

إذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علو واحد
فالمخروط ثلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة هي الدائرة



ب س د وعلى علو واحد ن
هو العمود من ا على سطح
القاعدة ب س د فالمخروط
ا ب س د انما هو ثلث
الاسطوانة ب ف ك غ
والا فليكن المخروط
ا ب س د ثلث اسطوانة
اخرى ل م ن وعلوها مثل

علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل م ليست مثل القاعدة ب س ف
واولا لتكن ب س د اكبر من ل م

ثم لان الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل م فيمكن ان يرسم في ب س د
شكل كثير الاضلاع فضلتهما اصغر من فضلة ب س د ول م (ق ٤ ك ا م)
ليكن ب ي س ف د ذلك الشكل وليبن عليه الهرم ا ب ي س ف د والموشور
ب س ف ك ح غ

فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ي س ف د اعظم من الدائرة ل م يكون
الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن ولان لهما علوا واحدا ولكن
قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة، ولكن الهرم ا ب ي س ف د هو ثلث الموشور
ب س ف ك ح غ (ق ١١ ك ٢ م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و، وقد
فرض ان المخروط ا ب س د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و، فالهرم ا ب س ف د
اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضا اصغر منه وذلك محال فالمخروط ا ب س د
ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ، وعلى هذا الاسلوب اذا رسم شكل كثير

غ ووح ت وس ب وايضاً ٢ ص و ٧ ٢ و ٦ ا عمودية على المخطوط المذكورة
 فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكل المتوازية الاضلاع والقائمة
 الزوايا ق ٨ وغ ٥ وح ٩ تُحدِث بدورانها اساطين (حد ١ ك ٢ م) في نصف
 الكرة ب د ا والاشكال دن ق ٦ غ ٧ ح ص تُحدِث اساطين محيطية بالمخروط
 ث س ي. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١٢ ك ٢ م) ان مجتمع
 كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من
 الاسطوانة المحاذية من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد فرض اصغر من
 ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجتمع الاساطين المحيطية بالمخروط ث س ي هو اكبر من
 المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة المحاذية من دوران دن ا يه جسم اصغر
 من ع. فلكون مجتمع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل
 نصف الكرة ولكون مجتمع الاساطين المحيطية بالمخروط يبدل المخروط مع جسم
 اصغر من ع فبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجتمع هذه الاساطين مع
 جسم اصغر من ع يعدل مجتمع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. ففضلة
 مجتمع كل الاساطين ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد
 منها اصغر من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع

القضية العشرون . ن

اذا فرض ما فرض في القضية السابقة فجميع الاساطين في نصف
 الكرة والمحيطية بالمخروط يعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
 نصف الكرة وقاعدته

لتم الرسم كما في القضية السابقة فجميع الاساطين المحاذية من دوران اسكال
 ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع المحاذية من دوران الاشكال
 ح ص غ ٧ ق ٦ ودن اي المحيطية بالمخروط يعدل الاسطوانة المحاذية من دوران
 الشكل ب د. لتكن ل نقطة التماس غ و محيط الدائرة فلان س غ ل قائمة فان
 أوصل بين س ول فالداعرتان المرسومتان على نصف القطر س غ وغ ل تعدلان
 الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل اوغ و (ق ٦ ك ١ في ع ٢ م) وس غ =

غ ٢ لان س د = دى فالدايترتان المرسومتان على نصف القطر ع ٢ وغ ل معاً
تعدلان الدائرة المرسومة على نصف التعارخ و اي الدائرتان المرسومتان بدوران
غ ٢ وغ ل على نقطة غ ها معاً تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ و على تلك
النقطة. فالاسطوانتان الواقفتان على الدائرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد
غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضاً علو غ ح. فالاساطين الحادثة
من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل الحادة من دوران غ ت وهكذا يُبرهن في الجميع
فالاساطين الحادثة من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ و د ن
تعدل الحادة من دوران ب د اي تعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
نصف الكرة وقاعدتها

القضية الحادية والعشرون . ن

الكرة هي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

ليرسم كما في القضية السابقة. فان لم يكن نصف الكرة الحاد من دوران
ب د س ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فلنفرضه اكر من ذلك بمقدار
جسم ع . ثم لان المحروط الحاد من دوران س دى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها
(ق ١٨ ك ٢ م) فيكون نصف الكرة والمحروط معاً اكر من الاسطوانة بمقدار جسم
ع . ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجتمع الاساطين الحادثة من دوران الاشكال ح ص
غ ٥ الخ (ق ٢٠ ك ٢ م) فجميع نصف الكرة والمحروط هو اكر من مجتمع هذه
الاساطين بمقدار جسم ع وذاك محال لانه قد تهرن (ق ١٩ ك ٢ م) ان فضلة
مجتمع نصف الكرة والمحروط ومجتمع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع فصف
الكرة يعدل ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة
الحادثة من مضاعف ب د اي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

اصول قياس المثلثات البسيطة

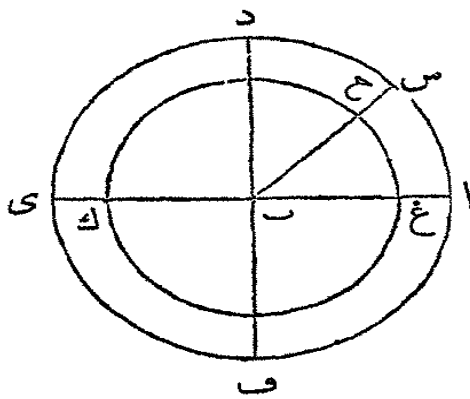
اصول قياس المثلثات البسيطة تنقسم الى ثلاثة اقسام. القسم الاول ايضاح المبادئ. الثاني قواعد العمل. والثالث كيفية اصطلاح الجداول مع بعض النظريات المسهلة لبعض العايات العسرة

القسم الاول

سابقة اولى

نسبة زاوية في مركز دائرة الى اربع زوايا قائمة كنسبة القوس الذي يقابلها الى محيط الدائرة

لتكن اب س زاوية عند مركز الدائرة اس ي ف واس القوس المقابل لها. ف نسبة



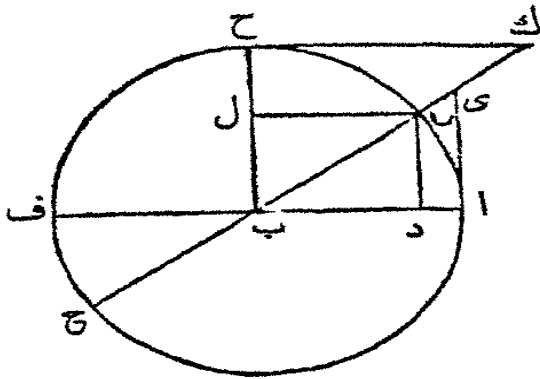
اب س : اربع زوايا قائمة :: اس : محيط الدائرة اس ي ف. اخرج اب حتى يلاقي المحيط في ي وارسم دب ف عموداً على ا. فالزاويتان اب س اب د هما عند مركز دائرة واحدة ونسبة اب س : اب د :: القوس اس : القوس اد (ق ٢٢ ك ٦) ونسبة الزاوية اب س : اربعة امثال اب د :: اس : اربعة

امثال اد (ق ٤ ك ٥) واب د قائمة. فاربعة امثال اد يعدل كل المحيط اس ي ف

فنسبة ا ب س : اربع زوايا قائمة :: القوس ا س : المحيط ا د ي ف
 فرع. الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي
 بين محيطات الدوائر. الزاوية ا ب س عند مركز الدائرتين ا د ف غ ح ك ويقابلها
 القوس ا س من الواحدة والقوس غ ح من الاخرى ونسبة ا س الى محيط الدائرة
 ا د ف كنسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة ونسبة غ ح الى محيط الدائرة غ ح ك
 كنسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة

حدود

- ١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس
 الزاوية المحاذية بينهما. فالقوس ا س هو قياس الزاوية ا ب س
- ٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسماً متساوياً فكل قسم يسمى درجة وإذا
 انقسمت الدرجة الى ستين قسماً متساوياً فكل واحد يسمى دقيقة والدقيقة تُقسم الى
 ستين قسماً متساوياً تسمى ثواني والثانية الى ستين قسماً متساوياً تسمى ثوانك وهكذا
 الى ما لا نهاية له. والدرجات والدقائق والثواني الى اخره في قوس هي نفس
 الدرجات والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس
 فرع اول. نسبة قوس الى المحيط الذي هو قسم منه كنسبة درجاته واجزائه
 درجاته الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كنسبة درجات قوسها واجزائه
 درجاته الى ٣٦٠
- فرع ثانٍ. الاقواس التي تقيس زاوية واحدة هي متماثلة في عدده درجاتها واجزائه
 درجاتها
- الدرجات والدقائق والثواني الخ في قوس او زاوية تُكتب هكذا ٤٩° ٢٦'
 ٢٤" الخ وتقرأ ٤٩ درجة و٢٦ دقيقة و٢٤ ثانية و٤٢ ثالثة الخ
- ٣ اذا عدلت زاويتان معاً قائمتين فكل واحدة تسمى مُتِمَّة الاخرى وهكذا في
 قوسين عدلاً معاً نصف دائرة فكل واحد منها مُتِمَّة الآخر
- ٤ المخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل المخط ن د عموداً على القطر
 المار بالطرف الآخر من القوس هو جيب القوس ان او جيب الزاوية ا ب ن التي



كان القوس ان قياسها
 فرع اول . جيب ربع دائرة او قائمة
 يعدل نصف القطر
 فرع ثان . جيب قوس هو نصف وتر
 مضاعف القوس كما يتضح من اخراج الجيب
 حتى يلاقي المحيط

٥ القسم من القطر الواقع بين الجيب والمحيط مثل دا يسمى سهم الجيب
 للقوس ان او للزاوية اب ن

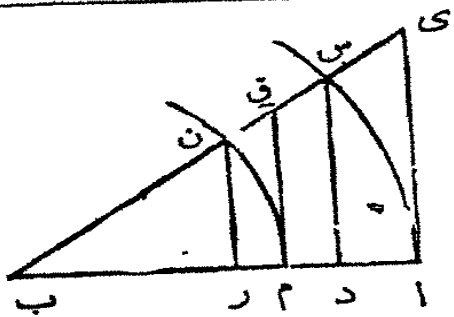
٦ الخط المستقيم الذي يمس طرف قوس مثل الخط اى ا الذي يمس طرف
 القوس ن ا ويلاقي القطر المار بطرفه الاخر مثل بى يسمى مماس القوس ان او
 الزاوية اب ن

فرع . مماس نصف قائمة يعدل نصف القطر
 ٧ الخط المستقيم بى بين المركز وطرف المماس يسمى قاطع القوس ن ا او
 الزاوية اب ن

فرع للحد الرابع والسادس والسابع . جيب زاوية ما مثل اب ن ومماسها
 وقاطعها هو ايضا جيب ومماس وقاطع لمتما ن ب ف
 الامر واضح من الحد الرابع ان ن د هو جيب الزاوية ن ب ف . اخرج ن ب
 حتى يلاقي المحيط في ج . فيتضح ان اى ا هو مماس وبى قاطع للزاوية اب ج او
 ن ب ف (حد ٦ و ٧)

فرع للحد الرابع والخامس والسادس والسابع . نسبة جيب قوس ما وسهم جيبه
 ومماسه وقاطعه التي تقيس زاوية ما الى جيب قوس آخر وسهم جيبه ومماسه وقاطعه
 التي تقيس تلك الزاوية ذاتها كنسبة نصف قطر القوس الاول الى نصف قطر
 القوس الثاني

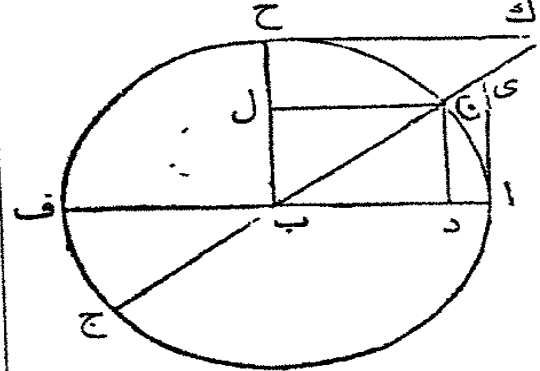
ليكن اس وم ن قياسين للزاوية اب س حسب الحد الاول وليكن س د
 الجيب ود اسهم الجيب وى ا المماس وبى القاطع للقوس اس (حد ٤ و ٥ و ٦ و ٧)
 وليكن ن ر الجيب ورم سهم الجيب وم ق المماس وب ق القاطع للقوس م ن فلكون
 ن ر ق م س دى ا متوازية تكون نسبة س د : ن ر :: نصف القطر س ب :



نصف القطر ن ب ونسبة اى : م ق :: نصف
 القطر ا ب : نصف القطر ب م و بى : ب ق ::
 ا ب : ب م ولان ب س : ب د :: ب ن : ب ر
 ا و ب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة
 ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضح . واذا

اصطنعت جداول دالة على نسبة الجيب وسهم الجيب والمماس والقاطع لزاوية ما الى
 نصف قطر مفروض فهي تدل ايضا على نسبة هذا الجيب وسهمه الى اخرو من
 تلك الزاوية الى ابي نصف قطر فرض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان
 يحسب نصف القطر واحداً او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى اخرو
 وسياتي ابضاح ذلك في موضعه

٨ فضلة زاوية ما وزاوية قائمة تسمى كمالها وفضلة قوس ما وربع دائرة يسمى



كباله . فاذا كان ب ح عموداً على ا ب تكون
 الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزاوية
 ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن

٩ نظير الجيب ونظير المماس ونظير

القاطع لزاوية هي الجيب والمماس والقاطع لكمال تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب
 الزاوية ا ب ن وى امامها وبى قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير
 المماس وب ك نظير القاطع لها

فرع اول . نصف القطر هو متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس لزاوية
 ما فماس ا ب ن × نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر

لان ح ك وب امتوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب
 وب اى قائمتان فالمثلثان ب اى ب ح ك متشابهان واى : ا ب :: ب ح او
 ا ب : ح ك

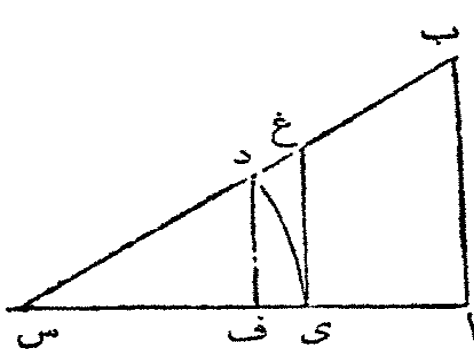
فرع ثان . نصف القطر متناسب متوسط بين نظير الجيب والقاطع لزاوية ما
 اى نظير جيب ا ب ن × قاطع ا ب ن = مربع نصف القطر

لأن ن د بوازي ي ا فنسبة ب د : ب ن او ب ا :: ب ا : ب ي
 تنبيه . لاجل الاختصار يُدَلُّ على نصف القطر هكذا $\frac{ق}{ف}$ وعلى
 الجيب هكذا ج وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا قا وعلى سهم
 الجيب هكذا سـجـ وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا نجـ نم نقـ

القضية الاولى . ن

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعين
 كنصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع . ونسبة ضلع
 الى الضلع الاخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك
 الضلع

ليكن ا ب س مثلثا بسيطا قائم الزاوية وب س وتره . اجعل س مركزا وس د



مثلا نصف قطر وارسم القوس د ي . ارسم
 د ف عمودا على س ي ومن ي ارسم المماس
 ي غ الذي يلاقي س ب في غ فيكون د ف
 جيبا و غ ي مماسا للقوس د ي او للزاوية
 عند س

المثلثان د ف س ب ا س متساويا
 الزوايا لأن د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين .
 فنسبة س ب : ب ا :: س د : د ف وس د هو نصف القطر ود ف جيب الزاوية
 عند س (حد ٤) فنسبة س ب : ب ا :: $\frac{ق}{ف}$: ج س

ولأن ي غ ممس الدائرة في ي فالزاوية غ ي س قائمة وتعادل ب ا س والزاوية
 عند س مشتركة بين المثلثين غ ي س ب ا س فهما متساويا الزوايا ونسبة س ا :
 ا ب :: س ي : ي غ وس ي نصف قطر وي غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س : ا : ب :: $\frac{ق}{س}$: م : س

فرع اول . نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوتر

لان س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ي س ب ا متساويا الزوايا فنسبة س ا : س ب :: س ي : س غ او س ا : س ب :: $\frac{ق}{س}$: قاس

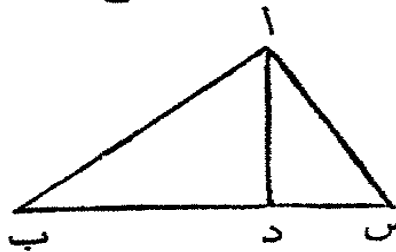
فرع ثان . حسب القضية السابقة وفرعها لو فرض نصف القطر واحداً كان

جس = $\frac{اب}{ب س}$ ومم س = $\frac{اب}{اس}$ وقاس = $\frac{ب س}{اس}$ ولان جس = نجب

(لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلنا نجب = $\frac{اب}{ب س}$

ونجب س = $\frac{اس}{ب س}$

فرع ثالث . في كل مثلث اذا رسم عموداً من احدى زواياه الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسي ذلك الضلع الى القسم الآخر منه كنسبة مماس احد الزوايا على جاب العمود الى مماس الاخرى



في المثلث ا ب س ليرسم ا د عموداً من ا على س

ب س فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذوقائمة ونسبة ا د : د س :: $\frac{ق}{س}$: م

س ا د و ا د : د ب :: $\frac{ق}{س}$: م د ا ب وبالمساواة د س : د ب :: م س ا د : م ب ا د

تعليقة . يسهل علينا حفظ هذه القضية بملاحظة امرين اولهما انه في مثلث ذي

قائمة اذا جعل الوتر نصف قطر يصير كل من الضلعين جيب الزاوية التي تقابلة .

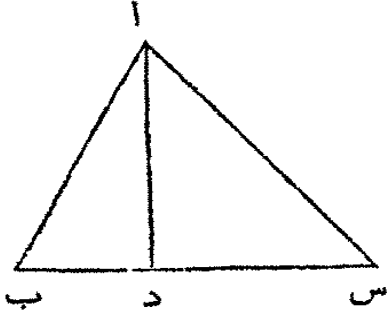
والثاني انه اذا جعل احد الضلعين نصف قطر يصير الضلع الاخر مماساً للزاوية التي تقابلة والوتر قاطعاً لها

القضية الثانية . ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي

تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض

ليكن $اب س$ مثلثاً ومن الزاوية $ا$ ارسم $اد$ ودّاً على $ب س$ ، فالمثلث $اب د$



له قائمة عند $د$ ونسبة $اب : اد :: ق : ج ب$

ولهذا السبب ايضاً $اس : اد :: ق : ج س$

وبالقلب $اد : اس :: ج س : ق$ وبالقلب

والمساواة $اب : اس :: ج س : ج ب$ ، وهكذا

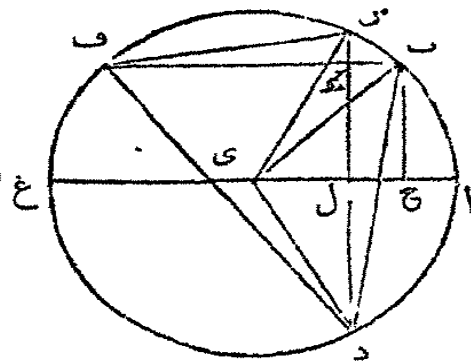
يبرهن ان $اب : ب س :: ج س : ج ا$

القضية الثالثة . ن

اذا فرض قوسان من دائرة تكون نسبة مجموع جيبيهما الى فضله جيبيهما

كنسبة ماسّ نصف مجموعهما الى ماسّ نصف فضلهما

ليكن $اب$ واس قوسين من الدائرة $اب س د$ والنتطة $ي$ مركزها و $اي غ$



قطرها فنسبة $ج ا س + ج ا ب : ج ا س$

$- ج ا ب :: م ا (اس - اب) : م ا$

$(اس - اب)$ ارسم $ب ف$ حتى يوازي $اي غ$

ويلاقي المحيط في $ف$ وارسم $ب ح$ و $س ل$

عمودين على $اي$ ، فهما جيبا القوسين $اب$

واس، اخرج $س ل$ حتى يلاقي المحيط في $د$

وارسم $د ف$ $دي$ $د ب$ $ف س$ $ي ب$ $ي ن$

لكون $ي ل$ قد رسم من المركز عموداً على $س د$ فهو ينصف $س د$ في النقطة $ل$

والقوس $س ا د$ في $ا و د ل = ل س$ الذي هو جيب القوس $اس$ ، و $ب ح$ اول ك

جيب القوس $اب$ فالخط $د ك$ يجمع جيب القوسين المفروضين و $س ك$ فضلهما

و $د ا ب$ يجمع القوسين و $ب س$ فضلهما، وفي المثلث $د ف س$ تكون $ف ك$ عموداً

على $د س$ تكون نسبة $د ك : ك س :: م د ف : م س ف ك$ (فرع ثالث ق ١)

ولكن ماسّ $د ف ك = م ا$ قوس $ب د$ لان $د ف ك$ نصف $دي ب$ (ق ٢٠ ك ٢)

فقياسها نصف ب د . ولهذا السبب ايضا م س ف ك = م ل ب س . فنسبة د ك :
 ك س :: م ل ب د : م ل ب س . ولكن د ك مجتمع جيبى القوسين ا ب و ا س
 وك س فضلتهما . وب د مجتمع القوسين ا ب و ا س وب س فضلتهما . فنسبة ج ا س
 + ج ا ب : ج ا س - ج ا ب :: م ل (ا ب + ا س) : م ل (ا س - ا ب)
 فرع اول . لكون ل نظير جيب ا س و ل نظير جيب ا ب يكون ف ك
 مجتمعها وك ب فضلتهما . لان ف ك = ل ف ب + ل ح = ل ح + ل و ك ب =
 ل ح = ل ح - ل و نسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك وماس د ف ك =
 م ب د ك لان د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك : ك ب :: م د ف ك :
 م ب د ك او ف ك : ك ب :: م ل القوس د ب : م ل القوس ب س . اية نسبة
 مجتمع نظير الجيبين لقوسين الى فضلا نظير الجيبين كنسبة نظير الماس لنصف مجتمع
 القوسين الى ماس نصف فضلتهما

فرع ثان . في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: ق : م د ف ك
 ولكن ف ك = نج ا ب + نج ا س وك د = ج ا ب + ج ا س وم د ف ك =
 م ل (ا ب + ا س) فنسبة نج ا ب + نج ا س : ج ا ب + ج ا س :: ق : م ل
 م ل (ا ب + ا س)

وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نج ا ب + نج ا س : ج ا س -
 ج ا ب :: ق : م ل (ا ب - ا س)

فرع ثالث . اذا كان مجتمع القوسين ا ب و ا س 90° فماس نصف فضلتهما اى
 ماس 45° يماثل نصف القطر . والقوس ب س لكونه فضلا د س و د ب او فضلا
 د ب و 90° فنصف القوس ب س يماثل فضلا نصف د س ونصف د ب او فضلا
 ا س و 45° . فاذا كان مجتمع قوسين 90° تكون نسبة مجتمع جيبى القوسين الى
 فضلتهما كنسبة نصف القطر الى ماس فضلا احدهما و 45°

القضية الرابعة . ن

نسبة مجموع ضلعي مثلث الى فضلتها كحاصل نصف مجموع الزاويتين
المقابلتين للضلعين الى حاصل نصف فضلتها

ليكن ا ب س مثلثا بسيطا فنسبة س + ا : ا ب : س - ا : ا ب :: م : م (ب + س)

م : م (ب - س)

لان (ق ٢) س + ا : ا ب :: ج ب : ج س ولذلك

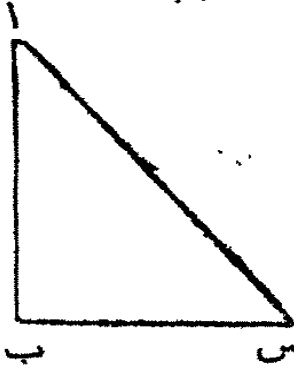
(ق ٥ ك) س + ا : ا ب : س - ا : ا ب :: ج ب + ج س

: ج ب - ج س . وحسب القضية السابقة ج ب + ج س

: ج ب - ج س :: م : م (ب + س) : م : م (ب - س)

فاذا (ق ١ ا ك) س + ا : ا ب : س - ا : ا ب :: م : م (ب + س)

+ (س - س) : م : م (ب - س)



القضية الخامسة . ن

اذا رُسم عمود من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجموع قسبي القاعدة
الى مجموع الضلعين الاخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسبي

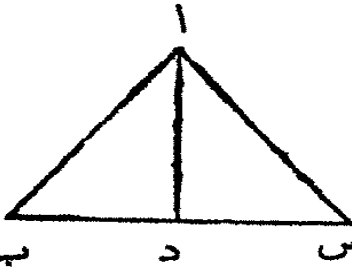
القاعدة

لأنه حسب (ق ٦ ك) القائم الزوايا مسطح مجموع القسامين في فضلتها يعدل
القائم الزوايا مسطح مجموع الضلعين في فضلتها فحسب (ق ١٦ ك) نسبة مجموع
القسامين الى مجموع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة القسامين

القضية السادسة . ن

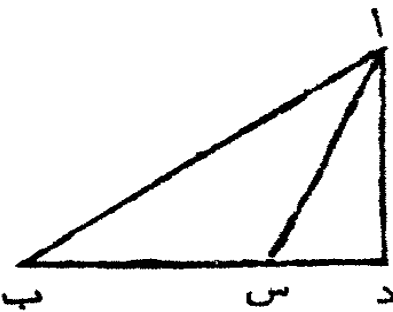
في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطح ضلعين من اضلاعه
الى فضلة مجموع مربعيها ومربع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير
جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ab س مثلثا فنسبة القائم الزوايا $\angle ab \times b$ س : $(ab^2 + b^2)$ س^٢ -
 $اس^2 :: \frac{ق}{ب} :: نجب$



من ا رسم ا د عمودا على ب س . فضلة المربعين
 على اب وب س والمربع على اس يعدل $\angle ab$ س^٢ ×
 ب د (ق ١٢ و ١٢ ك ٢) ولكن ب س × ب ا : س

ب س × ب د :: ب ا : ب د :: $\frac{ق}{ب} :: نجب$. فاذا $\angle ab$ س^٢ × ب ا :
 $\angle ab$ س^٢ × ب د :: $\frac{ق}{ب} :: نجب$ و $\angle ab$ س^٢ × ب د هو فضلة اب^٢ + ب س^٢
 و اس^٢ فاذا $\angle ab \times b$ س : $(ab^2 + b^2)$ س^٢ - اس^٢ :: $\frac{ق}{ب} :: نجب$



فرع . اذا فرض $\frac{ق}{ب} = ا$ فلنا ب د =
 ب ا × نجب (ق ا) و $\angle ab$ س^٢ × ب ا × نجب
 ب = $\angle ab$ س^٢ × ب د فاذا كانت ب حادة لنا
 $\angle ab$ س^٢ × ب ا × نجب = ب س^٢ + ب ا^٢ -
 اس^٢ واذا اضيف اس^٢ الى الجانبين تصير اس^٢ +

$\angle ab$ س^٢ × ب س × ب س = ب ا^٢ + ب س^٢ و بطرح $\angle ab$ س^٢ × ب س × ب س من
 الجانبين تصير اس^٢ = ب س^٢ - $\angle ab$ س^٢ × ب س × ب س + ب ا^٢ فاذا اس =
 ب س^٢ - $\angle ab$ س^٢ × ب س × ب س + ب ا^٢

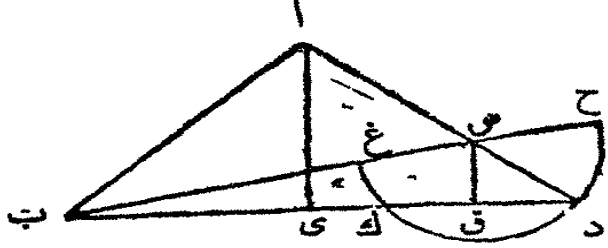
واذا كانت ب منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان اس = ب س^٢ + $\angle ab$ س^٢
 ب × ب س × ب ا + ب ا^٢



القضية السابعة . ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا
 مسطح الضلع الاخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الا فضلة
 الضلعين كنسبة مربع نصف القطر الى مربع جيب نصف الزاوية
 الواقعة بين الضلعين

ليكن اب س مثلثا قاعدته ب س واب اطول ضلعيه فنسبة ٤ اب × اس :



$$(ب س + د اب - ا س) \times$$

$$(ب س - د اب - ا س) ::$$

$$\left(\frac{ق}{ا}\right)^2 : \left(\frac{ج}{ب} \frac{ا}{س}\right)$$

اخرج اس الى د حتى ان اد = اب . ا رسم ب د وارسم اي وس ق عمودين على ب د . واجعل س مركزا وس د نصف قطري وارسم نصف النائرة غ د ح الذي يقطع ب د في ك وب س في غ ويلاقي ب س بعد اخراجه في ح

الامر واضح ان س د هو فضلة الضلعين وب ح هو القاعدة مع فضلة الضلعين وب غ القاعدة الا فضلة الضلعين . ولكون المثلث ب ا د متساوي الساقين يكون د ي نصف ب د و د ق نصف د ك و د ي = د ق = نصف ب د - د ك (ق ٦ ك ٥) او ي ق = $\frac{1}{2}$ ب ك . ولكون اي يوازي س ق تكون نسبة اس : ا د :: ي ق : ي د (ق ٢ ك ٦) والاشكال القائمة الزوايا اذا كانت على علو واحد هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فنسبة اس × ا د : ا د :: ي ق × ي د : ي د (ق ١ ك ٦) و ٤ اس × ا د : ا د :: ٤ ي ق × ي د : ي د وبالمباداة ٤ اس × ا د : ٤ ي ق × ي د :: ي د : ا د

ولكون ٤ ي ق = ٢ ب ك و ٤ ي ق × ي د = ٢ ب ك × ي د = ٢ ا ب ك × ي د = ٢ ا ي د × ي د

ب ك = د ب × ب ك = ح ب × ب غ فنسبة ٤ اس × ا د : د ب × ب ك ::

ا د : ي د . ولكن ا د : ي د :: $\frac{ق}{ب}$: ج ي اس = ج $\frac{ا}{ب}$ اس (ق ١)

و ا د : ي د :: $\left(\frac{ق}{ا}\right)^2$: (ج $\frac{ا}{ب}$ اس) فاذا (ق ١ ك ٥) ٤ اس × ا د :

ح ب × ب غ :: $\left(\frac{ق}{ا}\right)^2$: (ج $\frac{ا}{ب}$ اس) او (لان اب = ا د) ٤ اس ×

اب : ح ب × ب غ :: $\left(\frac{ق}{ا}\right)^2$: (ج $\frac{ا}{ب}$ اس) و ٤ اس × اب هو اربعة

امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي المثلث وح ب × ب غ هو القائم الزوايا ب س +

(اب - اس) × ب س - (اب - اس)

فرع . اذا ١٦ اس × ا د : ح ب × ب غ :: $\frac{ق}{ب}$: ج $\frac{ا}{ب}$ اس

وبالمبادلة اس × اد : اق × اى :: اد : اى وء اس × اد : ء اق × اى ::
 اد : اى . ولكن ء اق × اى = ٢ اق × اى = ن ف × ن ب = م ن × ن ل
 فاذا ء اس × اد : م ن × ن ل :: اد : اى ولكن اد : اى :: ق : نج د اى =
 نج ب ا س (ق ا) . فاذا ء اس × اد : م ن × ن ل :: ق : نج ب ا س
 وء اس × اد هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطح اس × اب (لان اد = اب)
 وم ن × ن ل هو القائم الزوايا مسطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الا القاعدة
 فرغ اول . اذا ٢ اس × اب : م ن × ن ل :: ق : نج ب ا س
 فرغ ثان . حسب القضية السابعة ء اس × اب : (ب س + اب - اس) ×
 (ب س - اب - اس) :: ق : نج ب ا س (وقد تبرهن في هذه القضية
 ان ء اس × اب : (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::
 ق : نج ب ا س) فبالمساواة (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) :
 (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) :: (نج ب ا س) :
 (ج ب ا س) ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كنسبة نصف
 القطر الى ماس ذلك القوس فاذا (اب + اس + ب س) × (اب +
 اس - ب س) : (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) ::
 ق : (م ب ا س) و٢ (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) :
 (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) :: ق : م ب ا س

سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويين فنصف مجتمعهما مع نصف فصلتها
 يعدل اكبرها ونصف مجتمعهما الا نصف فصلتها يعدل اصغرها

ليكن اب وب س مقدارين وليكن س ب د ي
 اب اكبرها . تصيف اس في د واجعل اى يعدل ب س . فالامر واضح ان اس

هو مجتمع المقدارين وى ب فضلتهما . ولكون اس قد تنصف في د ا د = د س
 و اى = ب س فاذا دى = د ب و دى او د ب نصف فضلة المقدارين . ولكن
 ا ب = ب د و ا اى نصف المجتمع مع نصف الفضلة و ب س = نصف المجتمع د س
 الا نصف الفضلة ب د

فرغ . اذا فرض مجتمع مقدارين وفضلتهما يمكن استعمال المقدارين لان نصف
 المجتمع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجتمع الا نصف الفضلة هو الاصغر
 (انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤)

القضية التاسعة . ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعي مثلث الى اقصرها كنصف القطر الى
 حاس زاوية ما تكون نسبة نصف القطر الى حاس تلك الزاوية
 ونصف قائمة كماس نصف مجتمع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى حاس
 نصف فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثا و ب س وس ا ضلعين من اضلاعه و ا ب قاعدته وليكن
 ب س اطول من س ا . ارسم س د عمودا على
 ب س وليعدل س ا . ارسم د ب . فالمثلث
 ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د ::
 $\frac{ق}{ا} : م$ س ب د (ق ا) فالزاوية س ب د
 هي الزاوية التي تكون نسبة حاسها الى نصف

القطر كاضلع س د او س ا الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولها
 ولكن ب س + س د : ب س - س د :: م $\frac{ا}{ب}$ (س د ب + س ب د) :
 م $\frac{ا}{ب}$ (س د ب - س ب د) (ق ا) وايضا ب س + س ا : ب س - س ا :: م $\frac{ا}{ب}$
 (س ا ب + س ب ا) : م $\frac{ا}{ب}$ (س ا ب - س ب ا) فبالمساواة (لان س د = س ا)
 م $\frac{ا}{ب}$ (س د ب + س ب د) : م $\frac{ا}{ب}$ (س د ب - س ب د) :: م $\frac{ا}{ب}$ (س ا ب + س ب ا) :
 م $\frac{ا}{ب}$ (س ا ب - س ب ا) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠ ° فنسبة م $\frac{ا}{ب}$

(س دب + س ب د) : م $\frac{1}{3}$ (س دب - س ب د) :: ق $\frac{1}{3}$: م (٤٥° - س ب د)

(ق ٢ فرع ٢)

فنسبة ق $\frac{1}{3}$: م (٤٥° - س ب د) :: م $\frac{1}{3}$ (س اب + س با) : م $\frac{1}{3}$

(س اب - س با) وقد تبرهن ان ب س : س ا :: ق $\frac{1}{3}$: م س ب د

فرع. اذا قُرِضَ ب س وس ا والزاوية عند س فلكي تجد الزاويتين عند ا

وب استعلم زاوية وسماي مثلاً حتى تكون نسبة ب س : س ا :: ق $\frac{1}{3}$: م س ي

فتكون نسبة ق $\frac{1}{3}$: م (٤٥° - س ي) :: م $\frac{1}{3}$ (ا + ب) : م $\frac{1}{3}$ (ا - ب) فتجد

ا وب حسب السابقة الثانية

القسم الثاني

قواعد حل العمليات

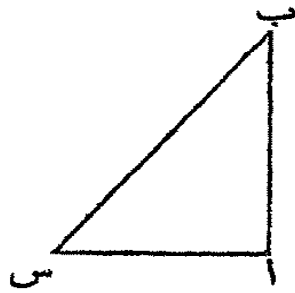
قواعد قياس المثلثات محنوية في عملية واحدة وهي هذه. في مثلث بسيط ذي
سنة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحد منها ضلع
مطلوب واحد من الثلاثة الأخر او كلها

العملية الاولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع
مطلوب الثلاثة الاخر

في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احده الحادتين تعرف الاخرى لانها كمال
الاولى وجيب احدي الحادتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل
حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدول. فالعمود الاول منه يدل على
المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تحل العملية

المفروض	المطلوب	الحل
س ب وب	اس	١ $\frac{ق}{٣} : ج ب :: س ب : اس$
اي الوتر وزاوية	اب	٢ $\frac{ق}{٣} : نج ب :: س ب : اب$
اس وس	ب س	٣ $\frac{ق}{٣} : نج ب :: اس : ب س$
اي ضلع واحد الحادتين	اب	٤ $\frac{ق}{٣} : م س :: اس : اب$
س ب وب ا	س	٥ $\frac{ق}{٣} : ج س :: س ب : ا$
اي الوتر وضع	اس	٦ $\frac{ق}{٣} : نج ب :: س ب : اس$
اس واب	س	٧ $\frac{ق}{٣} : م س :: اس : اب$
اي الضلعان	س ب	٨ $\frac{ق}{٣} : نج ب :: اس : س ب$



تنبيهات، اذا فرض اس وس نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضا لان
 س ا : س ب :: $\frac{ق}{٣}$: قاطع س فلنا $\frac{ق}{٣}$: قاطع س :: اس : س ب
 واذا فرض ب س واب نجد اس كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ا) لان
 اس^٢ = ب س^٢ - ب ا^٢ واس^٢ = ب س^٢ - ب ا^٢ وايضا حسب (ق ٥
 ك ا فرع) ب س^٢ - ب ا^٢ = (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) فاذا اس =
 ب (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) وهذه الاخيرة اسهل اذا قصد حل
 العملية بالانساب

إذا فُرض $اس$ و $اب$ يوجد $ب$ $س$ حسب (ق ٤٧ ك ١) لأن
 $ب س = \sqrt{ب^2 + س^2}$ وإذا قُصِد حل العملية بالانساب فالاسهل
 ان يطلب اولاً $عاس$ $س$ هكذا $اس : اب :: \frac{ق}{س} : مم$ ثم $س : نجس :: \frac{ق}{س} :$
 $اس : س : ب$

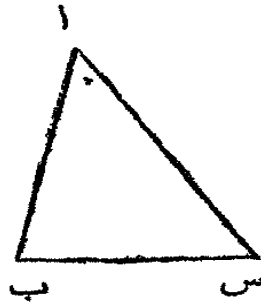
العملية الثانية

في مثلث حادّ الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع مطلوب
 الثلاثة الأخر

لهذه العملية ثلاث حالات

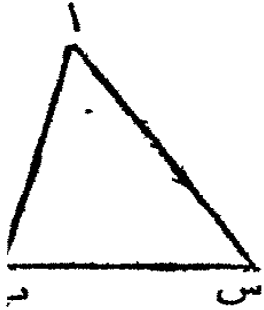
الحالة الاولى

مفروض زاويتان $ا$ و $ب$ والضلع $اب$. مطلوب الضلعان الاخران
 من $ا$ و $ب$ نستعلم $س$ لانها متم $ا + ب$ ولنا (ق ٢) $جس : جا :: اب :$
 $ب س وجس : جب :: اب : اس$



الحالة الثانية

مفروض الضلعان $اب$ و $اس$ والزاوية $ب$ التي تقابل احدهما. مطلوب $ا$ و $س$
 والضلع الاخر $ب$ $س$
 لكي نستعلم $س$ لنا $اس : اب :: جب : جس$ وايضاً $ا = 180^\circ - ب -$
 $س$ ثم $ج ب : جا :: اس : س$ $ب$ حسب الحالة الاولى
 في هذه الحالة حيث يستعلم جيب $س$ فالجيب المذكور في الجداول قد يكون
 لحادة او لمنفرجة متم الحادة فتكون $س$ حادة او منفرجة لانه اذا كانت $اس$ اقصر

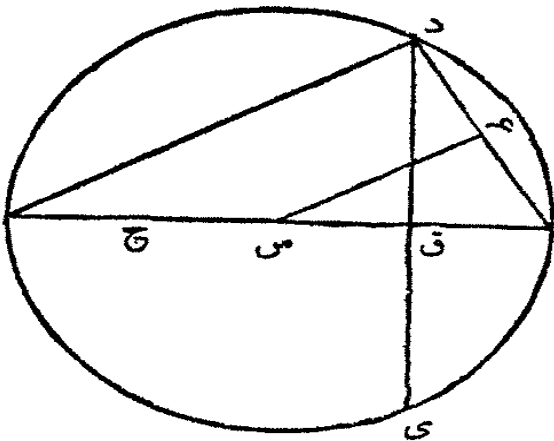


حاشية . من هذه الطرق الاربعة الاول اسهل للحفظ
والآخر اسرع للعمل والثاني اسهل من الثالث متى كانت
الزاوية المطلوبة اصغر من قائمة والآخر اسهل
وتظهر الفائدة متى كانت الزاوية المطلوبة صغيرة جدًا او
كبيرة جدًا اي قريبة الى صفر او الى ٩٠° وذلك لفلة
الفرق بين جيب الاولى ونظير جيب الثانية

القسم الثالث

في اصطناع الجداول

في حل العمليات بواسطة القواعد السابقة لا بد من استعمال جداول متضمنة
الجيوب والمماسات الخ لكل زاوية من ١° الى ٩٠° فيقتضي اولًا استعمال الجيب لدقيقة
واحدة اي لاصغر قوس في الجداول



١ ليكن ا د ب دائرة مركزها س
و د ب قوسًا منها و د ب ي مضاعف
ذلك القوس . فاذا رسم الوتران د ي
د ب والعمودان عليهما من س اي س غ
س ق فقد تبرهن (ق ٨ ك ١ مضافات)
ان س غ متناسب متوسط بين ربع
القطراح و ا ق . و س ق هو نظير جيب

القوس ب د و س غ نظير جيب نصف ب د فنظير جيب نصف قوس ما من
دائرة نصف قطرها واحد هو متناسب متوسط بين ١ و ١ + نج ب د . فاذا فرض ١ =
قوسًا ما فنظير جيب ١/٢ هو متناسب متوسط بين ١ و ١ + نج ا و (نج ١/٢) =
 $\frac{1}{2}(1 + \text{نج } 1) = \frac{1}{2}(1 + \text{نج } 1)$

٢ الامر واضح مما تقدم انه اذا فرض نظير جيب قوس يمكن استعمال نظير
جيب نصف تلك القوس . لنفرض القوس ب د = ٦٠° فالوتر ب د = $\frac{1}{2}$ فالعمود

ل د في م . ولكن ب ف = ح ل وب ف + د ح = د ح + ح ل = دل + ل ح =
 ل م + م ل ح = م ح او ل ك راي رك = $\frac{1}{3}$ (ب ف + د ح) . ولكون
 المثلثين س غ ي رك ي متساويي الزوايا تكون نسبة س ي : ر ي :: س غ : رك
 وقد تبهرن ان ي ر = نج ب س و رك = $\frac{1}{3}$ (ب ف + د ح) فنسبة $\frac{ق}{3}$:
 نج ب س :: ج ا س : $\frac{1}{3}$ (ج ا ب + ج ا د)

فرع . اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا $\frac{ق}{3}$: نج ب س :: ج ا
 ب س : $\frac{1}{3}$ ج ا ب د اي نسبة نصف القطر الى نظير جيب قوس كسبة جيب القوس
 الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرض قوس = ا لنا $\frac{1}{3}$ ج ا = ل ج ا ×
 نج ا او جيب ل = ل ج ا × نج ا و ج ا = ل ج ا × نج ا فن جيب ا
 ونظير جيبها يوجد جيب ل

ثم $\frac{ق}{3}$: نج ا :: ج ا : $\frac{1}{3}$ (ج ا + ل ج ا) او ج ا = ل ج ا + ل نج ا
 'ا + ل ج ا' ويطرح ج ا من الجايين نصير ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا
 ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا
 ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا
 و

ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا
 وهكذا لاستعلام جيوب الاقواس التي فضلتها اكثر من ا . ليكن ا + ب + ا
 ل ب ثلاثة اقواس فضلتها اكثر من ا فحسب النظرية السابقة $\frac{ق}{3}$: نج ب ::
 ج ا (ا + ب) : $\frac{1}{3}$ (ج ا + ل ج ا) فاذا كان نصف القطر واحدا لنا ج ا +
 ج ا (ل ب + ا) = ل نج ب × ج ا (ا + ب) او ج ا (ل ب + ا) = ل نج ب ×
 ج ا (ا + ب) - ج ا

وعلى هذا الاسلوب يصطنع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوس فرض من صفر
 الى ٩٠° . و جدول المماسات يصطنع بانقسام جيب قوس على نظير جيبه لان م = ا
 نج ا . وبعد استعمال المماسات الى حد ٤٥° تستعلم البقية الى حد ٩٠°
 بقاعدة اخرى اسهل . لان ماس قوس اكبر من ٤٥° يعدل نظير الماس لقوس
 تحت ٤٥° مثل ما كان الاول فوق ٤٥° اي ماس ٥٠° = نظير ماس ٤٠° ونصف

القطر متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس. فاذا فرضت قوس ما
 $\frac{1}{\sin 40^\circ} = d$ لنا $m(40^\circ - d) : 1 :: 1 : m(40^\circ + d)$ وم $(40^\circ + d) = d =$

$$\frac{1}{\sin 40^\circ} = d$$

القطر تستعلم حسب (حد؟ فرع ٢) حيث يبرهن أن نصف القطر متناسب

متوسط بين نظير جيب قوس وقاطع أي قاطع $\frac{1}{\sin} =$

سهم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف القطر

يستخرج من النظرية السابقة بعض العبارات السهلة الاستعمال في حل
 العمليات

أولاً. إذا فرض القوس $a = s$ و $b =$ نصف القطر $s = r$
 فحينئذ $d = a + b$ و $a - b =$ ولنا ما تقدم برهانه
 $a : \sin b :: \sin a : d + (a + b)$ أي
 $d \times \sin b = \sin a + (a + b)$

ثانياً. لأن b ف r ك d متوازية والمخاطات b d f c قطعاً متناسباً
 فالخط f c الذي هو قوس f c y قد تنصف في k وكما نبرهن في النظرية
 ك y هو نصف مجموع f c y أي نظير الجيبين للقوسين a b و d وبمشابهة
 المثلثين y g s y k نسبة y s : y r : y g : y k . و g y هو نظير جيب

اس فإذا $\frac{q}{r} : \sin b :: \sin a : d + (a + b)$ أو
 $a : \sin b :: \sin a : d + (a + b)$ فإذا
 $d \times \sin b = \sin a + (a + b)$

ثالثاً. المثلثان r d s y g متشابهان. لأن k r m قائمة و y r قائمة فإذا
 طرحت الزاوية y r m فالزاوية d r $m =$ y r k أو y s g والزاويتان d r m
 s g y متساويتان لأنها قائمتان ففي المثلثين r d m s g y الاضلاع التي تلي
 الزوايا المتساوية هي متناسبة و y s : y g : d r : m o هو نصف قوس
 نظير الجيبين f c y h فلنا

$\frac{q}{r} : \sin a :: \sin b : d - (a + b)$ أو

١ : جا :: جب . $\frac{1}{3}$ نج (ا-ب) - $\frac{1}{3}$ نج (ا+ب) وايضاً

جا \times جب = $\frac{1}{3}$ نج (ا-ب) - $\frac{1}{3}$ نج (ا+ب)

رابعاً. في المثلثين ي س غ درم نسبة ي س : ي غ :: رد : دم ودم هو

نصف فضلة الجيبين دح وب ي فاذا

ق : $\frac{1}{3}$ نج اس :: جب س : $\frac{1}{3}$ جا د - $\frac{1}{3}$ جا ب او

١ : نج ا :: جب : $\frac{1}{3}$ جا (ا+ب) - $\frac{1}{3}$ جا (ا-ب) فاذا

نج ا \times جب = $\frac{1}{3}$ جا (ا+ب) - $\frac{1}{3}$ جا (ا-ب)

خامساً. اذا كان ا وب قوسين وكان نصف القطر واحداً فلنا

(١) جا \times نج ب = $\frac{1}{3}$ جا (ا+ب) + $\frac{1}{3}$ جا (ا-ب)

(٢) نج ا \times نج ب = $\frac{1}{3}$ نج (ا-ب) + $\frac{1}{3}$ نج (ا+ب)

(٣) جا \times جب = $\frac{1}{3}$ نج (ا-ب) - $\frac{1}{3}$ نج (ا+ب)

(٤) نج ا \times جب = $\frac{1}{3}$ جا (ا+ب) - $\frac{1}{3}$ جا (ا-ب)

ومن هذه الاربع يُستنتج اربع آخر

بجمع الاولى والرابعة جا \times نج ب + نج ا \times جب = جا (ا+ب)

بطرح الرابعة من الاولى جا \times نج ب - نج ا \times جب = جا (ا-ب)

بجمع الثانية والثالثة نج ا \times نج ب + جا \times جب = نج (ا-ب)

بطرح الثالثة من الثانية نج ا \times نج ب - جا \times جب = نج (ا+ب)

سادساً. اذا فرض ا+ب=ص و ا-ب=د فحسب الاولى من العبارات

السابقة وحسب السابقة الثانية $\frac{ص+د}{٢} = ا$ و $\frac{ص-د}{٢} = ب$

فجيب $\frac{ص+د}{٢} >$ نج $\frac{ص-د}{٢} = \frac{1}{3}$ جا ص + $\frac{1}{3}$ جا د . ولكن ص ود

دا الآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسميا ا وب كما في العبارات السابقة. فلنا

جا $\frac{ا+ب}{٢} \times$ نج $\frac{ا-ب}{٢} = \frac{1}{3}$ جا + $\frac{1}{3}$ جا ب

او $\frac{ا+ب}{٢} \times$ نج $\frac{ا-ب}{٢} = جا + جب$. ومن العبارة الثانية

السابقة لنا $\frac{ا+ب}{٢} \times$ نج $\frac{ا-ب}{٢} = نج ب + نج ا$ ومن الثالثة لنا

$$٢ \text{ ج } \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ نج } ب - \text{ نج } ا \text{ ومن الرابعة لنا}$$

$$٢ \text{ نج } ا \text{ ج } \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ ج } ا - \text{ ج } ب$$

وفي هذه العبارات حُصِبَ القوس ب اقصر من القوس ا
سابعاً، وعلى هذا الاسلوب نستخرج عبارات دالة على مماسات اقواس لان
مماس قوس يعدل الجيب مقسوماً على نظير الجيب

$$\text{م} (ا+ب) = \frac{\text{ج} (ا+ب)}{\text{نج} (ا+ب)} \text{ وقد تبرهن ان}$$

$$\text{ج} (ا+ب) = \text{ ج } ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب \text{ وايضاً ان}$$

$$\text{نج} (ا+ب) = \text{ نج } ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب \text{ فاذا}$$

$$\text{م} (ا+ب) = \frac{\text{ج} ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب}{\text{نج} ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب} \text{ ثم بقسمة الصورة}$$

والمخرج على نج ا \times نج ب لنا

$$\text{م} (ا+ب) = \frac{ا+ب}{ا-ب}$$

$$\text{وهكذا} \text{ م} (ا-ب) = \frac{ا-ب}{ا+ب}$$

(٨) اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المنوال فلنا

$$\frac{\text{ج} ا + \text{ج} ب}{\text{ج} ا - \text{ج} ب} = \frac{\text{نج} ا + \text{نج} ب}{\text{نج} ا - \text{نج} ب} \text{ وحسب (ق ٢ فرع ١)}$$

$$\frac{\text{نج} ا + \text{نج} ب}{\text{نج} ا - \text{نج} ب} = \frac{\text{ق} + \text{ق}}{\text{ق} - \text{ق}} \text{ وبالفرع الثاني}$$

$$\frac{\text{ج} ا + \text{ج} ب}{\text{ج} ا - \text{ج} ب} = \frac{\text{ق} + \text{ق}}{\text{ق} - \text{ق}} \text{ اولاً} \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = ١$$

$$\frac{\text{ج} ا + \text{ج} ب}{\text{ج} ا - \text{ج} ب} = \frac{١}{٣} \text{ م} (ا+ب)$$

تنبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بد من اعادة
الواحد اي $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ الذي قد ترك للاختصار لكونه واحداً فلا يعتد به عند
الضرب ولكن يعتبر في النسب

اصول قياس المثلثات الكروية

القضية الاولى

اذا قُطِعَتْ كُرَّةٌ بِسَطْحٍ مَارٍ بِمَرْكَزِهَا فَالْقَطْعُ دَائِرَةٌ مَرْكَزُهَا مَرْكَزُ الْكُرَّةِ
وَهِيَ تَعْدِلُ الدَّائِرَةَ الَّتِي بِدَوْرَانِهَا رُسِمَتِ الْكُرَّةُ

لَاَنَّ كُلَّ الْخَطُوطِ الْمُسْتَقِيمَةِ الْمَرْسُومَةِ مِنْ مَرْكَزِ الْكُرَّةِ إِلَى سَطْحِهَا تَعْدِلُ نِصْفَ
قَطْرِ نِصْفِ الدَّائِرَةِ الْمُحْدَثَةِ الْكُرَّةِ (حَد ٧ ك ٢ مضافات) فموضع تقاطع سطح بسيط
وسطح الكرة خط في سطح واحد وكل نقطة منه على بعد واحد من مركز الكرة فهي
محيط دائرة (حدا ١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او
نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها أُحْدِثَتِ الْكُرَّةُ فتعدل الدائرة التي كان
نصف الدائرة المحدثه نصفها

حدود

١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسطح بسيط مار بمركزها تسمى دائرة عظيمة
فرع كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتصف بعضها بعضاً لان
انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهاناً وخط تقاطعها قطر لكل واحدة منها
٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع الخطوط المستقيمة المرسومة
منها الى محيط الدائرة متساوية

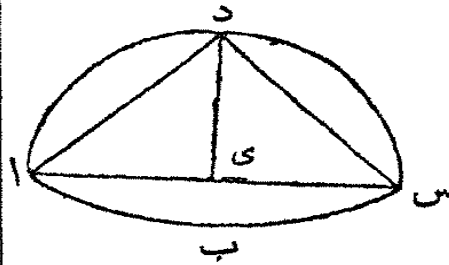
٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين
عظمتين لتقاطعان وهي تعدل ميل سطحي هاتين الدائرتين احدها على الاخر

٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث
دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو
مربع دائرة

لكن اب س دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرّ س د قوس دائرة عظيمة في د
ولاقى اب س في س فالقوس د س ربع دائرة
الدائرة التي س د قوس منها لتلاقى اب س
ايضاً في ا وليكن اس موضع تقاطع هاتين
الدائرتين العظيمتين فهو يمر في ي مركز الكرة .
ارسم دا د س . الخط ا د = د س (حد ٢)
فالقوس ا د = القوس د س (ق ٢٨ ك ٢) و ا د س نصف دائرة فكل واحدة من
القوسين ا د و د س ربع دائرة

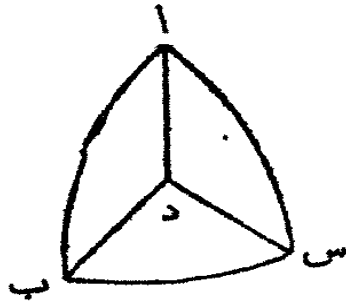


فرع اول . اذا رسم دى فالزاوية دى ا قائمة ودى عمودي على كل خط
يلاقيه في سطح الدائرة اب س فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات)
فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح
تلك الدائرة . وبالقرب كل خط من مركز الكرة عموداً على سطح دائرة عظيمة يلاقى
سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرع ثان . الدائرة اب س لها قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على
الجانب الاخر من سطحها وها نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح اب س . ولا يمكن
ان تكون نقطتان اخريان قطبي الدائرة اب س

القضية الثالثة

اذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين اخريين عظيمتين
فالقوس من الدائرة الاولى الواقع بين الاخرين هو قياس الزاوية
الكروية الحادثة بينهما راسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع
ليكن د مركز كرة وب ا س ا دائرتين عظيمتين تتقاطعان في ا وليكن ب س



قوس دائرة اخرى عظيمة قطبها ا. فالقوس ب س هو
قياس الزاوية الكروية ب ا س

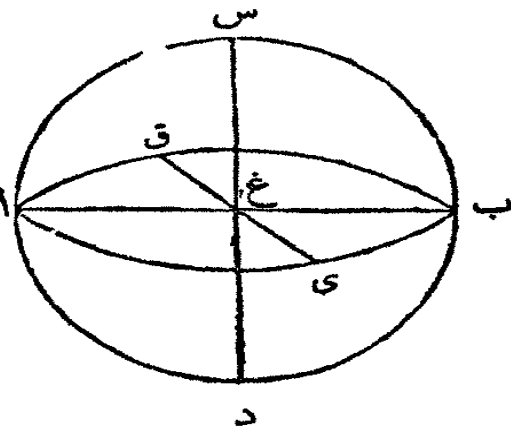
ارسم ا د ب د س. لان ا قطب ب س فالقوس
ا ب ربع دائرة واس كذلك (ق ٢) و ا د ب ا د س
قائمتان. فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس

ا ب على دائرة القوس اس (حد ٢) و (حد ٤ ك ٢ م) وتعديل الزاوية الكروية ب ا س
والقوس ب س نقيس الزاوية ب د س فهو يقيس الزاوية الكروية ب ا س ايضاً
فرع. اذا كان كل واحد من القوسين ا ب ا س المتقاطعتين في ا ربع دائرة
تكون ا قطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس نهايتي القوسين. لان ا ب و ا س
رُبعاً دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س قائمتان فالخط ا د عمود على السطح ب د س
اي على سطح الدائرة العظيمة المارة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة
المارة في ب وس (ق ا فرع ٢)

القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عمودياً على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط
كل واحدة منهما يمرّ بقطبي الاخرى. وبالقلب اذا مرّ محيط دائرة
عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح
الاخرى

لتكن اس ب د اى ب ق دائرتين عظمتين سطح الواحدة عمودي على



سطح الاخرى فقطبها اس ب د هما في محيط
اى ب ق فقطبها اى ب ق في محيط
اس ب د

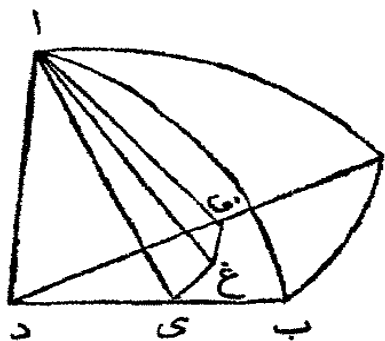
من غ مركز الكرة ارسم الخط ع س في
سطح اس ب د عموداً على ا ب. فلان غ س
في سطح اس ب د العمودي على اى ب ق ولانه
عمود على موضع تقاطع السطحين فهو عمود

على سطح اى ب ق (حد ٢ ك ٢ م) فالنقطة س هي قطب الدائرة اى ب ق (ق ٢
 فرع اول) واذا أُخرج س غ الى د تكون د قطب اى ب ق الآخر
 وهكذا اذا رسم ع ي في سطح اى ب ق عموداً على اب وأخرج الى ق يبرهن
 ان ي وق قطبا الدائرة اس ب د وبالقلب اذا كانت س قطباً للدائرة اى ب ق
 فالدائرة العظيمة المارة في س هي عمودية على اى ب ق. لانه اذا رسم س غ من
 القطب الى مركز الدائرة اى ب ق يكون عموداً على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل
 سطح ماز في س غ (ق ١٧ ك ٢ م) هو عمودي على سطح اى ب ق و سطح اس ب د
 هو ماز في س غ فهو عمود على اى ب ق
 فرع اول. في دائرتين عظيمتين اذا مرّت اولاهما في قطبي الثانية فالثانية
 تمرّ بقطبي الاولى
 فرع ثان. كل الدوائر العظيمة التي لها قطر مشترك تكون اقطابها في دائرة
 عظيمة سطحها عمودي على ذلك القطر

القضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقين تكون الزاويتان عند القاعدة
 متساويتين

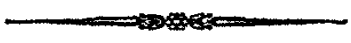
ليكن اب س مثلثاً كروياً. والضلع اب منه فليعدل الضلع اس منه فالزاوية
 الكروية اب س تعدل الكروية اس ب



ليكن د مركز الكرة. ا رسم د ب د س دا.
 ومن ا رسم اق عموداً على د س واى عموداً على س
 د ب وفي السطح د ب س ا رسم ق ع عموداً على
 د س وى غ عموداً على د ب وليلتقيان في غ. ا رسم اغ
 لان دى عمود على اى وى غ فهو عمود

على السطح الماز بهما (ق ٤ ك ٢ م) فكل سطح ماز في دى هو عمودي على سطح اى غ
 (ق ١٧ ك ٢ م) فالسطح د ب س عمودي على سطح اى غ. ولهذا السبب هو عمودي
 على سطح اق غ ايضاً فالخط اغ الذي هو موضع تقاطع السطحين اق غ اى ع هو

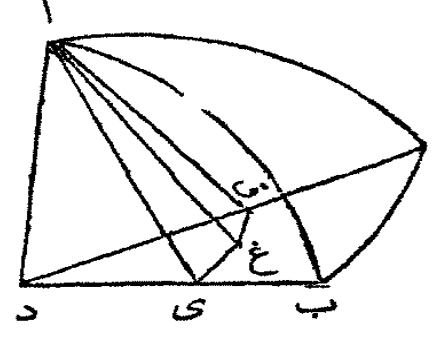
عموداً على سطح دب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزويتان اغى اغى ق قائمتان
 ولكن القوس اب يعدل القوس اس فالزاوية ادب = ادس . فالمثلثان
 ادى ادى لها الزويتان ادى ادى متساويتان وايضاً اى د اى د لانها
 قائمتان والصلع اد مشترك بينهما فالصلع اى يعدل الصلع اق (ق ٢٦ ك ١)
 ودى = دق ولان اغى اغى ق قائمتان فالمرتعان على اغى وغى يعدلان المربع
 على اى وكذلك اغ^٢ + غ^٢ ق^٢ = اق^٢ واي^٢ = اق^٢ فاذاً اغ^٢ + غ^٢ ق^٢ = اق^٢ + غ^٢ ق^٢
 وغى^٢ ق^٢ = غى^٢ ق^٢ فالزاوية اق غ = اى غ (ق ٨ ك ١) و اق غ هي
 الحادثة بين سطح ادس و سطح دب س (حد ٤ ك ٢ م) لان اق وق غ عمودان
 على دس موضع تقاطع السطحين فالزاوية اق غ = الزاوية الكروية اس ب (حد ٢)
 ولهذا السبب ايضاً اى غ = الزاوية الكروية اب س واي غ = اق غ فاذاً اب س
 = اس ب



القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزويتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث
 متساوي الساقين

يبرهن كما في القضية السابقة ان اع ق اغى قائمتان وان اق ع اى غ



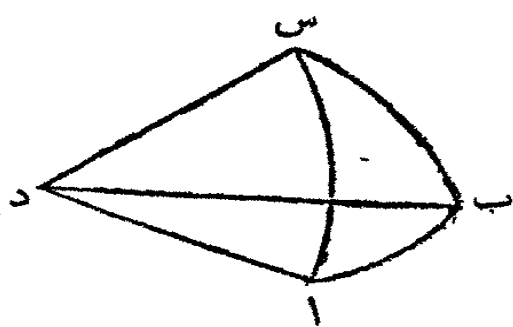
تعدلان الحادتين بين السطحين داس داب
 والسطح دب س وان اق ع = اى غ وان
 اق = اى تم دق^٢ + ق^٢ ا^٢ = دا^٢ + ودى^٢ + ا^٢ = ا^٢
 دا^٢ وا^٢ ق^٢ = اى^٢ فاذاً دق^٢ = دى^٢ ودق =
 دى فالزاوية داق = داي فالقوس اب =
 القوس اس



القضية السابعة

كل ضلعين من مثلث كروي هما معاً اطول من ضلعه الثالث

ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فكل ضلعين منه $اب$ و $ب س$ هما معاً أطول من الضلع الثالث $اس$



ليكن $د$ مركز الكرة. ارسم $د س$ و $د ب$ $دا$. فالزاوية المحيطة عند $د$ يحيط بها المثلث زاويا البسيطة $اد ب$ $اد س$ و $د س$ وكل اثنتين منها معاً $اد ب$ $ب د س$ اكبر من الثالثة $اد س$ (ق ٢٠ ك ٢ م) فكل اثنتين

من الاقواس $اب اس ب س$ التي تقيس هذه الزوايا هما معاً أطول من الثالث

القضية الثامنة

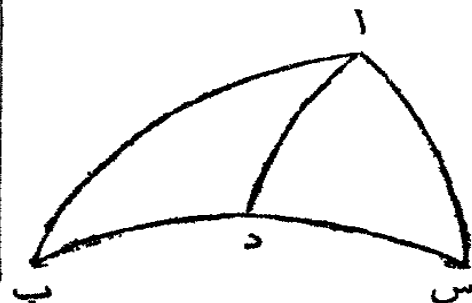
اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

في رسم القضية السابقة ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فاضلاعة الثلاثة $اب اس ب س$ هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

ليكن $د$ مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المحيطة عند $د$ هي معاً اقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢ م) فالاقواس التي تقيسها هي معاً اقل من اربعة ارباع دائرة او اقل من محيط الدائرة التي مركزها $د$ ونصف قطرها $اد$

القضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الاطول وبالعكس



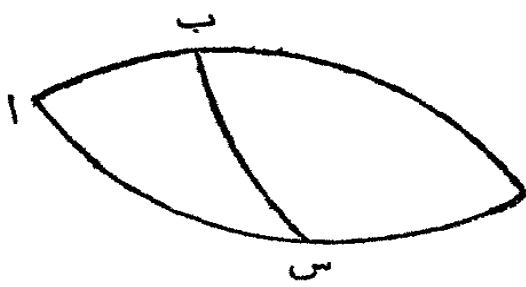
ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى $ا$ تقابل الضلع الاطول $ب س$. اجعل الزاوية $ب اد$ تعدل الزاوية عند $ب$ فالضلع $ب د = اد$ (ق ٦) و $اد + د س = ب س$ ولكن $(اد + د س) < اس$ (ق ٧) فاذا $ب س < اس$

وب $س$ يقيس الزاوية عند $ا$. واما قلب هذه القضية فقد سبق برهانه في ق ١٩ ك ١

القضية العاشرة

إذا كان مجموع ضلعي مثلث كروي أكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخليتين عند القاعدة أكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. وإذا عدل مجموعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين تعدل الخارجة. وإذا كان مجموعها أقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين أصغر من الخارجة. وإيضاً مجموع الداخليتين عند القاعدة أكبر من قائمتين أو يعدل قائمتين أو أصغر من قائمتين حسبما كان مجموع الضلعين أكثر من نصف دائرة أو يعدله أو أصغر منه

ليكن ab s مثلثاً كروياً ضلعاؤه ab و b s وقاعدته a s . أخرج احد



الضلعين ab والقاعدة as حتى يلتقيا

إيضاً في d . فالقوس ab نصف دائرة

والزاوية الكروية عند a تعدل الكروية

عند d لأن كل واحدة منهما هي ميل

الدائرة ab d على الدائرة as d

(١) إذا كان $ab + b$ s = نصف دائرة أو d فحينئذ b s = b d

والزاوية عند d (ق ٥) أو عند a = b s d أي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة

المقابلة

(٢) إذا كان $ab + b$ s أكبر من نصف دائرة أو من ab d فحينئذ b s

أكبر من b d والزاوية عند d أو أكبر من b s d (ق ٩)

(٣) وهكذا إذا كان $ab + b$ s أقل من نصف دائرة أو من ab d تكون

d أو أصغر من b s d . ثم b s d b s a تعدلان قائمتين. فإذا كانت a

أكبر من b s d يكون $a + s$ b أكبر من قائمتين. وإذا كان $a = b$ s d

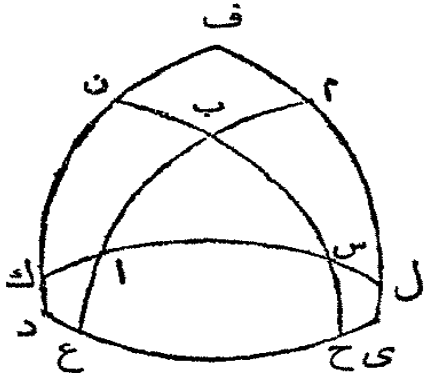
يكون $a + s$ b = قائمتين وإذا كان أصغر من b s d يكون $a + s$ b

أقل من قائمتين

القضية الحادية عشرة

اذا جعلت زوايا مثلث كروي اقطاب ثلاث دوائر عظيمة فهذه الدوائر
الثلاث بتقاطعها تُحدِث مثلثاً يسمى متمّ الاول. واضلاع احدها
متمّات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً وليكن ا و ب وس اقطاباً للدوائر العظام ف ي
ي د د ف التي تتقاطع في ف و ي ود. فاضلاع
المثلث ف ي د هي متمات لقيسة الزوايا ا و ب
وس اي ف ي ف ي متم ب ا س و د ي متم ا ب س
و د ف متم ا س ب. وايضاً ا س متم الزاوية د ف ي
و ا ب متم الزاوية ف ي د و ب س متم الزاوية
ي د ف. اخرج ب س الى ن و ح و ا ب الى م
و غ و ا س الى ك و ل



لانّ اقطب ف ي والدائرة ا س تمر في ا ف والدائرة ف ي تمر بقطب ا س
(ق ٤ فرع ١) ولانّ س قطب ف د فالدائرة ف د تمر بقطب ا س فقطب ا س
هو ف عند تقاطع القوسين ي ف د ف. وهكذا يبرهن ان د قطب ب س و ي
قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل و ي قطب ا م فالقوس ف ا ل ربع دائرة و ي م كذلك
(ق ٢) و ف ل م ي م ا و ف ي م ل معاً يعدلان نصف دائرة و م ل قياس
ب ا س (ق ٢) فاذا ف ي متم قياس ب ا س وهكذا في البقية
ولانّ س ن ربع دائرة و ب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معاً و ن ح
ب س معاً يعدلان نصف دائرة و ن ح قياس ف د ي فقياس ف د ي متم ب س
وهكذا في البقية

القضية الثانية عشرة

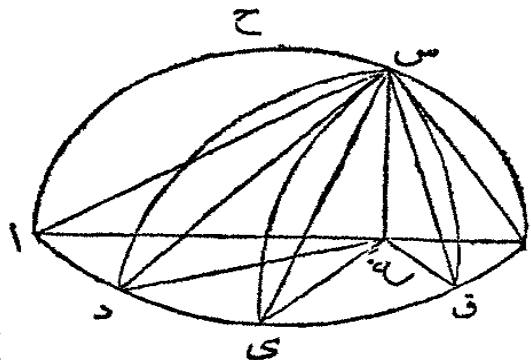
الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً أكبر من قائمتين واصغر من ست زوايا قائمة

في رسم القضية السابقة اقيسة الزوايا الثلاث ا ب س في المثلث ا ب س مع اضلاع المثلث المتمّ دى ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع ف دى الثلاثة معاً اقل من نصف دائرة (ق ٨) فاقيسة ا وب وس أكبر من نصف دائرة فالزوايا الثلاث ا وب وس أكبر من قائمتين ولأنّ الزوايا الداخلة من كل مثلث مع الخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة وحدها اقل من ست زوايا قائمة

القضية الثالثة عشرة

اذا رُسِمَتْ اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو المارّ بقطب تلك الدائرة ومتمّه هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى الاطول اطول من الابعده منه

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح وتكن س نقطة اخرى ومن س ليرسم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح ا المارّ بالقطب والاقصر هو س ب متم س ح ا ومن البقية فالاقرب الى س ح ا اي س د هو اطول من س ي الابعده منه . من س ا رسم س غ عموداً على ا ب فهو عمود على سطح ا د ب . ا رسم غ د غ ي غ ق ب س ا س د س ي س ق س ب لان ا ب قطر الدائرة ا د ب وغ نقطة



فيه غير المركز فالقسم اغ الذي فيه المركز هو اطول المخطوط (ق ٧ ك ٢) التي ترسم من غ الى المحيط وغ ب اقصرها وغ د الاقرب الى اغ اطول من غ ي الذي هو ابعد. ولكن المثلثات س غ ا س غ د لها قائمة عند غ واس^٢ = اغ^٢ + غ س^٢ ود س^٢ = دغ^٢ + غ س^٢ ولكن اغ^٢ + غ س^٢ < دغ^٢ + غ س^٢ لان اغ < دغ فاذا اس^٢ < دس^٢ واس^٢ < دس^٢ ولكن الوتر اس اطول من الوتر دس فالقوس اس اطول من القوس دس. وهكذا في البقية

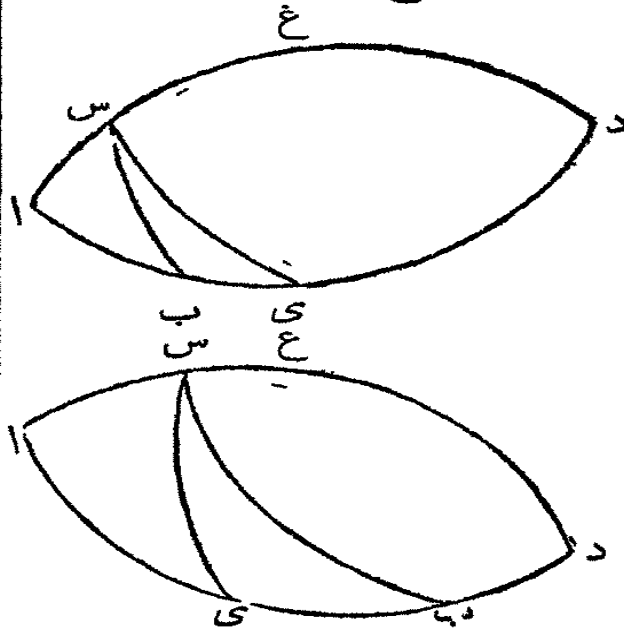


القضية الرابعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان المقابلتان لها من جنس واحد. اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كان اقل من ربع تكون الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن اب س مثلثا كرويا له قائمة عند ا فالضلع اب جنسه كجنس الزاوية

المقابلة اس ب



أخرج القوسين حتى تلتقيا ايضا في د وتَصِفْ ا د في ي. فيكون اس د نصف دائرة واب د نصف دائرة واي قوس ٩٠° وقد قُرِضَتْ س اب قائمة فسطح الدائرة اب د عمودي على سطح الدائرة اس د فقطب اس د انما هو في اب د (ق ٤ فرع اول) وهو في ي. ليكن ي س قوس دائرة عظيمة مارة في ي وس

فلكون ي قطب الدائرة اس د يكون ي س ربع دائرة (ق ٢) وسطح ي س عمودي على سطح الدائرة اس د (ق ٤) فالزاوية الكروية اس ي قائمة فاذا كان

اب اقصر من اى تكون اس ب اصغر من قائمة واذا كان اب اطول من اى
تكون اس ب اكبر من اس ي واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

القضية الخامسة عشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من
جنس واحد يكون الوتر اقل من ربع دائرة واذا كانا مختلفي الجنس
يكون الوتر اكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نصِّف ا د في غ فيكون غ قوس 90° وغ قطب

ا ب د

(١) ليكن اب اس اقل من 90° فلكون س نقطة في سطح الكرة غير قطب
اب د تكون القوس س غ د المارة بالقطب غ اطول من س ي وس ي اطول من
س ب (ق ١٢) وس ي ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا
يبرهن في المثلث س د ب ذي القائمة عند د الذي ضلعا س د و د ب اكبر من
ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

(٢) ليكن اس اقل من 90° و اب اكبر من 90° فلان س ب واقع بين
س غ د وس ي فهو اطول من س ي (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة

فرع اول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر اكثر من ربع
دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والا فمِنْ جنس واحد

فرع ثانٍ. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخريان من جنس الضلعين
المقابلين لها فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخريان مختلفتا

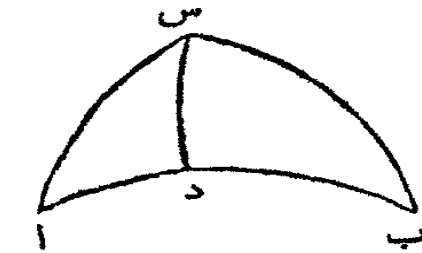
الجنس والا فمِنْ جنس واحد

فرع ثالث. الضلعان من جنس الزاويتين المقابلتين فاذا كانت زاوية والضلع
الذي يليها من جنس واحد فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب

القضية السادسة عشرة

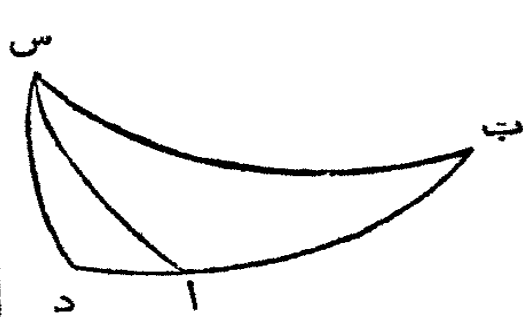
في مثلث كروي اذا رُسم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد واذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً وليرسم القوس س د من س عموداً على القاعدة ا ب



(١) ليقع س د داخل المثلث. فالزاويتان ا د س ب د س قائمتان فالزاويتان عند ا و ب هما من جنس س د (ق ١٤)

(٢) ليقع س د خارج المثلث فالزاوية عند ب

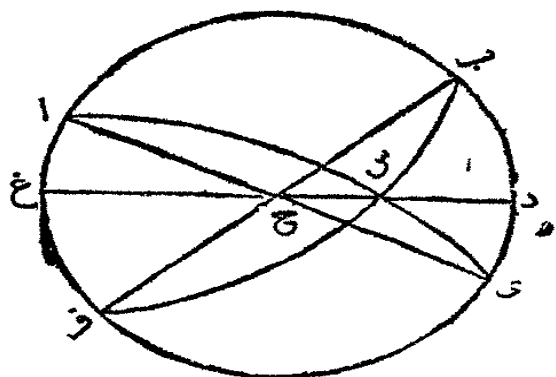


هي من جنس س د (ق ١٤) وس ا د من جنس س د فالزاويتان ب و س ا د من جنس واحد وب و س ا ب مختلفتا الجنس فرغ. اذا كان ا و ب من جنس واحد يقع العمود داخل المثلث والا فخارجه

القضية السابعة عشرة

اذا رُسم عموديّ على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث او كان اقرب الاثنتين الواقعين خارجه فاصغر قسيمي القاعدة يلي اقصر ضلعي المثلث اذا كان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة ويبي اطول الضلعين اذا كان مجتمعهما اكثر من نصف دائرة

ليكن ا ب ي ف دائرة عظيمة من كرة و ح قطبها و غ ح د دائرة مارة ب ف ح



وعمودية على ا ب ي ف . ولتكن ي وب
نقطتين في الدائرة ا ب ي ف على جانبي
د ولتكن د اقرب الى ي . ولتكن س نقطة
في الدائرة غ ح د بين ح ود . ا رسم القوسين
ي س ا ب س غ فكل واحدة منهما
نصف دائرة وي س ب ي س ف

ف س ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودات س د
وس غ

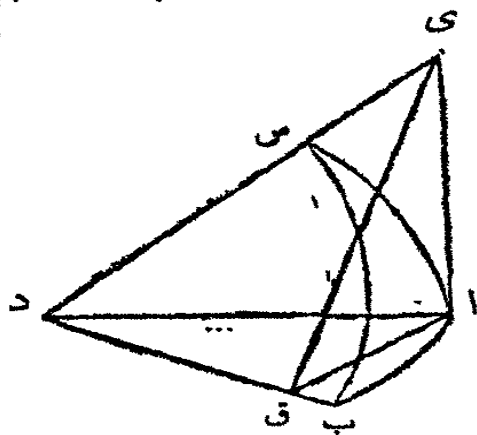
(١) لان س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول من
القوس س ب وس ا + س ي < س ب + س ي فيكون س ب + س ي اقل
من نصف دائرة وي د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ي س اقصر من س ب
(ق ١٢) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة
فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

(٢) في المثلث ف س ي الضلعان ف س س ي اقل من نصف دائرة
وي س اقصر من س ف لانه ابعد عن س ح غ . فاذا وقع العمود خارج المثلث
وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر
(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة
وا س اطول من س ف لان ي س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى
س ح غ فيكون ا غ اقصر قسما القاعدة وهو يلي الضلع الاطول
(٤) وفي المثلث ا س ب ا س وس ب معاً اطول من نصف دائرة وا س
اطول من ب س فاقصر قسما القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

القضية الثامنة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعين المحيطين
بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة جاس الضلع الاخر الى جاس
الزاوية التي تقابله

ليكن ab س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند a فنسبة $جا ب : ق = مم ا : س$: مم



ab س. لتكن d مركز الكرة. ارسم da db
 dc س. وارسم aq عموداً على b d فهو جيب
 ab ومن c ارسم الخط المستقيم cq عموداً
 على b d في سطح b d s وليلاق d s في
 y . ارسم ay

لكون الخط المستقيم dq عموداً على
 c aq y يكون عموداً ايضاً على سطح c y a

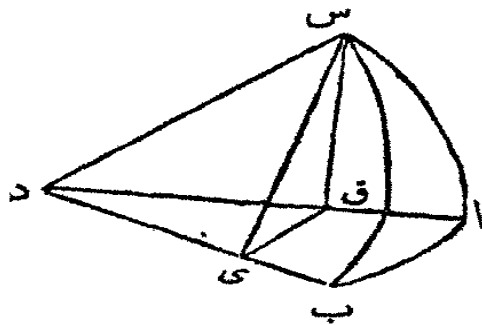
(ق ٤ ك ٢ م) فالسطح ab d المار في d c هو عمودي على السطح ay c (ق ١٧
 ك ٢ م) والسطح ay c عمودي على ab d . ولكن السطح as d او ay d ايضاً
 عمودي على ab d لان الزاوية الكروية b a s قائمة. فيكون الخط ay موضع
 تقاطع السطحين ay d c عمودياً على السطح ab d (ق ١٨ ك ٢ م) و y a c
 y a d قائمتين. فيكون ay ماس القوس as . وفي المثلث البسيط ay c d في
 القائمة عند a تكون نسبة $اق : ق = مم ا : س$: ماس الزاوية $اق$ y (مثلثات
 مستوية ق ١) ولكن $اق$ هو جيب القوس ab y ماس القوس as والزاوية
 $اق$ y هي ميل السطح s b d على السطح ab d (حد ٤ ك ٢ م) وتعديل الزاوية
 الكروية ab s فنسبة جيب القوس ab الى نصف القطر كنسبة ماس القوس
 as الى ماس الزاوية المقابلة ab s

فرغ. لانه بموجب هذه القضية $جا ب : ق = مم ا : س$: مم ab s
 ولان $ق : مم ا : س = مم ا : س$: مم ab s (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية)
 فبالمساواة $جا ب : مم ا : س = مم ا : س$: مم ab s : ق

القضية التاسعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب الوتر الى نصف القطر
 كجيب احد الضلعين الى جيب الزاوية التي تقابل ذلك الضلع

ليكن $اب$ س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة جيب الوتر $ب$ س الى نصف



القطر كنسبة جيب القوس $اس$ الى جيب الزاوية $اب$ س

ليكن $د$ مركز الكرة وليرسم $س$ $ي$ عموداً

على $دب$ فهو جيب القوس $س$ $ب$ ، ومن $ي$ ليرسم الخط المستقيم $ي$ $ق$ في السطح $اب$ $د$

عموداً على $ب$ $د$ وارسم $س$ $ق$ فيكون $س$ $ق$ عموداً على السطح $اب$ $د$ كما تقدم في

القضية السابقة فتكون $س$ $ق$ $د$ $س$ $ق$ $ي$ قائمتين و $س$ $ق$ جيب القوس $اس$ وفي

المثلث البسيط $س$ $ق$ $ي$ ذب القائمة $س$ $ق$ $ي$ تكون نسبة $س$ $ي$: $ق$: $س$ $ق$:

$ج$ $س$ $ي$ $ق$ ($ق$ $ا$ مثلثات مستوية) ولأن $س$ $ي$ $ق$ عمودان على $د$ $ي$ $ب$

الذي هو موضع تقاطع السطحين $س$ $ب$ $د$ $اب$ $د$ فالزاوية $س$ $ي$ $ق$ هي ميل

هذين السطحين احدهما على الآخر (حد $ك$ ٢ $م$) وهي تعدل الزاوية الكروية

$اب$ $س$ فنسبة جيب الوتر $ب$ $س$: $ق$: $ج$ القوس $اس$: $ج$ الزاوية

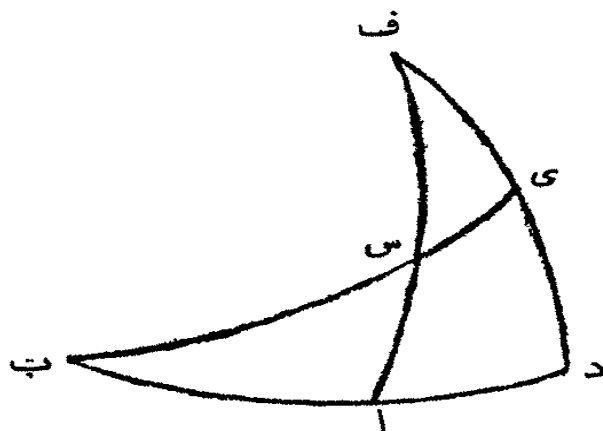
المقابلة $اب$ $س$

القضية العشرون

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة نظير جيب الوتر الى نصف

القطر كنظير ماس احدى الزاويتين الى ماس الزاوية الاخرى

ليكن $اب$ س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة نظير جيب الوتر $ب$ س الى



نصف القطر كنسبة نظير ماس الزاوية

$اب$ $س$ الى ماس الزاوية $اس$ $ب$

ارسم القوس $د$ $ي$ وليكن $ب$

قطبة وليلاق $اس$ في $ف$ و $ب$ $س$ في

$ي$. فلأن القوس $ب$ $د$ تمر في النقطة

$ب$ وهي قطب القوس $د$ $ف$ فالقوس

$د$ $ف$ تمر بقطب $ب$ $د$ ($ق$ ٤) ولأن

و(ق ا الكه) نج ا ب س : ق :: م ا ب : م ب س
 فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مماسي قوسين مثل ا ب و ب س هما
 بالتكافؤ كظيري مماسيها
 فرع ثانٍ . لان نج ا ب س : ق :: م ا ب : م ب س وايضاً ق : نج
 ب س :: م ب س : ق فبالمساواة نج ا ب س : م ب س :: م ا ب : ق اي
 نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير مماس الوتر كنسبة مماس
 الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

القضية الثانية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر
 يرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق :: ج س ي :
 ج س ف ي (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا و ج س ي = نج ب س و ج
 س ف ي = نج ا ب فنسبة نج س ا : ق :: نج ب س : نج ا ب

القضية الثالثة والعشرون

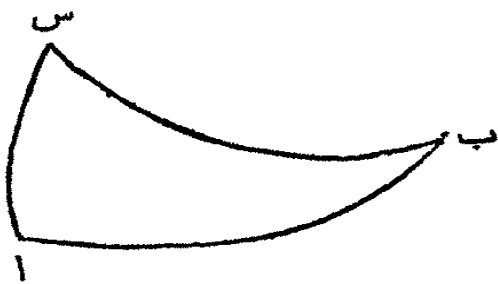
في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع الى جيب
 الزاوية الاخرى

يرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق :: ج ي ف : ج
 س ي ف (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا و ج ي ف = نج ا ب س و ج
 س ي ف = ج ب س ا فاذا نج س ا : ق :: نج ا ب س : ج ب س ا

القضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة لجيوب الزوايا التي تقابلها

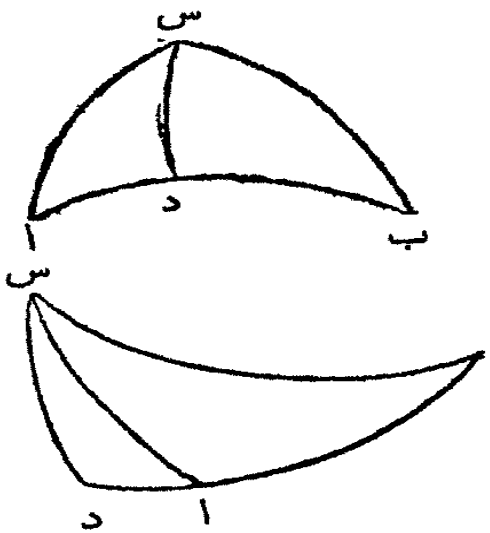
اولاً. ليكن اب س ذا قائمة عند ا فحسب (ق ١٩) نسبة جيب الوتر ب س



الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند ا كجيب الضلع اس الى جيب الزاوية عند ب وايضاً نسبة جيب ب س الى جيب الزاوية عند ا كجيب اب الى جيب الزاوية عند س (ق ١١ ك ٥) جيب الضلع اس الى جيب

الزاوية عند ب كجيب اب الى جيب الزاوية عند س

ثانياً. ليكن اب س مثلثاً كروياً غير ذي قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعه مثل



ب س الى جيب الاخرين اس كنسبة جيب الزاوية عند ا الى جيب الزاوية عند

ب. من س ا رسم قوس دائرة عظيمة س د عمودية على اب. ففي المثلث ذي القائمة

ب س د تكون نسبة جيب س : $\frac{1}{2} ق$:: ج س د : ج ب (ق ١٩) وفي المثلث

ا د س جيب اس : $\frac{1}{2} ق$:: جيب س د :

جيب ا فبالساواة بالقلب ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب. وهكذا يبرهن

ايضاً ان ج ب س : ج ا ب :: ج ا : ج س

القضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رسمت قوس عمودية من احدى الزوايا الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احدى الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسي الزاوية التي

انقسمت بالعمودية الى جيب قسمها الآخر

ليرسم كما في القضية السابقة ولكن س د عمودية على القاعدة ا ب فنسبة نظير

جيب ب : نج ا :: ج ب س د : ج ا س د

لان (ق ٢٢) نج س د : ا ب ق :: نج ب : ج د س ب وفي المثلث ذي القائمة

ا س د نج س د : ا ب ق :: نج ا : ج ا س د و (ق ١١ ك ه) نج ب : ج د س ب ::

نج ا : ج ا س د وبالمبادلة نج ب : نج ا :: ج ب س د : ج ا س د

القضية السادسة والعشرون

ليفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب ب س الى نظير جيب س ا كنسبة

نظير جيب ب د الى نظير جيب د ا

لانه في المثلث ب س د (ق ٢٢) نج ب س : نج ب د :: د س : ا ب ق و في

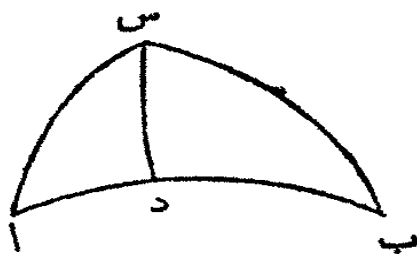
المثلث ا س د نج ا س : نج ا د :: نج د س : ا ب ق و (ق ١١ ك ه) نج ب س : نج ب

ب د :: نج ا س : نج ا د وبالمبادلة نج ب س : نج ا س :: نج ب د : نج ا د

القضية السابعة والعشرون

ليرسم كما تقدم فنسبة جيب ب د الى جيب د ا كنسبة حاس ب الى

حاس ا بالتكافؤ



في المثلث ب س د (ق ١٨) ج ب د : ا ب ق :: م د س : م ب وفي المثلث

ا س د ج ا د : ا ب ق :: م د س : م ا فبالمبادلة بالقلب ج ب د : ج ا د :: م

ا :: ب

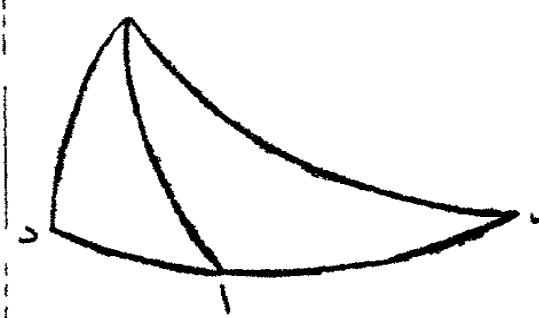
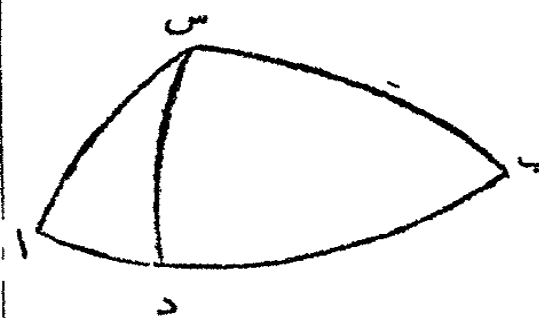
القضية الثامنة والعشرون

ليُرسم كما تقدم فنسبة نظير جيب احدى الزاويتين الحادتين بالعمودية الى نظير جيب الاخرى كما س واحد الضلعين الى ماس الاخر بالتكافؤ لأن (ق ٢١) نجوب س د : ا ق :: م س د : م ب س وايضا نجواس د : ا ق :: م س د : م اس فيالمبادلة بالقلب نجوب س د : نجواس د :: م اس : م ب س

القضية التاسعة والعشرون

في مثلث كروي اذا رسمت قوس عمودية من احدى زواياه الى الضلع المقابل او القاعدة فالقائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع قسي القاعدة في ماس نصف فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع ضلعي المثلث في ماس فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثا كرويا ولترسم القوس س د من الزاوية عند س عمودية على



القاعدة ا ب ثم لنفرض ب س = ا و اس = ب و ب د = م و ا د = ن فالقائم الزوايا $\frac{1}{2} (م + ن) \times \frac{1}{2} (م - ن) = \frac{1}{2} (ب + ا) \times \frac{1}{2} (ب - ا)$ لانه (ق ٢٦) نجوا : نجوب :: نجوم : نجون و (ق ٥) نجوا + نجوب : نجوا - نجوب :: نجوم + نجون : نجوم - نجون و (ق ٢) مثلثات مستوية) نجوا + نجوب : نجوا - نجوب :: نجوم + نجون : نجوم - نجون و (ق ١١ ك ه) نجوا + ب : م ا - ب :: نجوم + ن : نجوم - ن فنكون (ق ١١ ك ه) نجوا + ب : م ا - ب :: نجوم + ن : نجوم - ن

م $\frac{1}{2}$ (م - ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علق
واحد هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times ن $\frac{1}{2}$ (ا +
ب) : م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (م + ن) \times ن $\frac{1}{2}$ (م + ن) : م $\frac{1}{2}$ (م +
ن) \times م $\frac{1}{2}$ (م - ن). فالجزء الاول من هذه النسبة والثالث متساويان لان كل
واحد منهما يعدل مربع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع
متساويان (ق ٩ ك هـ) او م $\frac{1}{2}$ (م + ن) \times م $\frac{1}{2}$ (م - ن) = م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times
م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) او بترجيح الحروف الاصلية م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) \times م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا) =
م $\frac{1}{2}$ (ب + س + ا س) \times م $\frac{1}{2}$ (ب س - ا س)

فرع اول. لان اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ
فنسبة م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) : م $\frac{1}{2}$ (ب س + ا س) :: م $\frac{1}{2}$ (ب س - ا س) :
م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)

فرع ثان. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا د = ا ب
القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د - ا د = ا ب فعلى الحالة الاولى
تصير النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا

م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب س + ا س) :: م $\frac{1}{2}$ (ب س - ا س) : م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا) وفي
الحالة الثانية تصير بالقلب والمبادلة

م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب س + ا س) :: م $\frac{1}{2}$ (ب س - ا س) : م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا)
تنبيه * هذه القضية والاثنان الاثبات قد وضعهن المعلم نايير الاسكوتسي
وهن جزيلات الفائدة لسهولة استعمالهن في الانساب

القضية الثلثون

في مثلث كروي اذا رسمت عمودية من احدى زواياه على الضلع المقابل
او القاعدة تكون نسبة جيب مجتمع الزاويتين عند القاعدة الى جيب
فضلتها كنسبة جاس نصف القاعدة الى جاس نصف فضلة قسميها اذا
وقعت العمودية داخل المثلث. وكنسبة نظير جاس نصف القاعدة الى

نظير ماسّ مجتمع قسميها اذا وقعت العمودية خارج المثلث. ونسبة
جيب مجتمع الضلعين الى جيب فضلتهما كنسبة نظير ماسّ نصف
الزاوية بين الضلعين الى ماسّ نصف فضلة الزاويتين الحادتين بين
الضلعين والعمودية اذا وقعت داخل المثلث. والى ماسّ نصف
مجموعها اذا وقعت العمودية خارج المثلث

ليكن اب س مثلثا كرويا واد عمودية على القاعدة ب س فنسبة ج (س + ب)

: ج (س - ب) :: م ا ب س : م ا (ب د - د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث

وج (س + ب) :

ج (س - ب) ::

نم ا ب س : نم ا ب

(ب د + د س) اذا

وقعت ا د خارج المثلث

وايضا ج (ا ب +



اس) : ج (ا ب - ا س) :: نم ا ب ا س : نم ا ب ا س (ب ا د - س ا د) اذا وقعت ا د

داخل المثلث وج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم ا ب ا س : نم ا ب

(ب ا د + س ا د) اذا وقعت ا د خارج المثلث

لانه في المثلث ب ا س (ق ٢٧) م ب : ب م س :: ج س د : ج ب د و (ق ٤٥)

م س + م ب : م س - م ب :: ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د

وحسب السابقة التي نتلوهذه القضية م س + م ب : م س - م ب :: ج (س

+ ب) : ج (س - ب) وايضا ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د :: م ا ب

(ب د + س د) : م ا ب (ب د - س د) (ق ٣ مثلثات بسيطة) و (ق ٤٥)

ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م ا ب (ب د + س د) : م ا ب (ب د - س د)

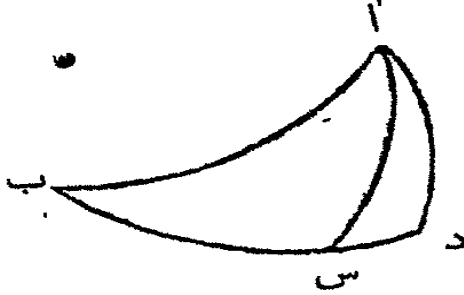
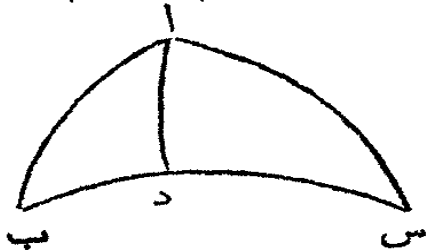
واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د = ب س فنسبة ج (س + ب) :

ج (س - ب) :: م ا ب س : م ا ب (ب د - س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث

ب د - س د = ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م ا ب (ب د +

س د) : م $\frac{1}{2}$ ب س او لكون مما سي قوسين كظييري حاسيها بالتكافؤ ج (س +
ب) : ج (س - ب) :: نم $\frac{1}{2}$ ب س : نم $\frac{1}{2}$ (ب د + س د)

بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية . فلان (ق ٢٨) م ا ب : م ا س



:: نجب س ا د :
نجد ب ا د تكون
م ا ب + م
ا س : م ا ب
- م ا س ::

نجد س ا د + نجد ب ا د : نجد س ا د - نجد ب ا د وحسب السابقة المذكورة اسفل
م ا ب + م ا س : م ا ب - م ا س :: ج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س)
و (فرع اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نجد س ا د + نجد ب ا د : نجد س ا د - نجد ب ا د
:: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د) فاذا (ق ١١ ك ه) ج (ا ب
+ ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د)
فاذا وقعت ا د داخل المثلث ب ا د + س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب + ا س) :

ج (ا ب - ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د)
واذا وقعت ا د خارج المثلث ب ا د - س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب +
ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : نم $\frac{1}{2}$ ب ا س اولان نم
 $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : نم $\frac{1}{2}$ ب ا س :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د)
فتكون نسبة ج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د
+ س ا د)

سابقة

نسبة مجموع حاسي قوسين الى فضلة حاسيها كنسبة جيب مجموع القوسين
الى جيب فضلتها

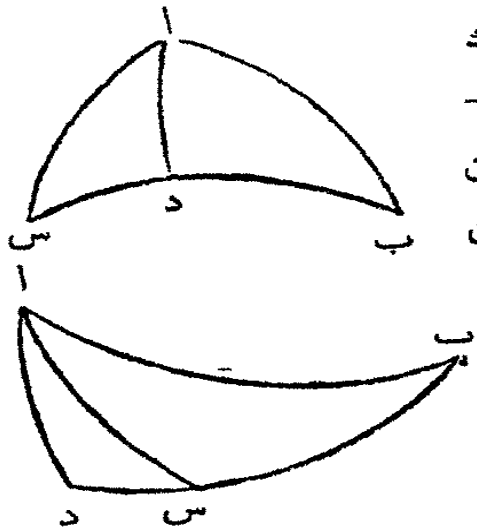
ليكن ا و ب قوسين فنسبة م ا + م ب : م ا - م ب :: ج (ا + ب)
: ج (ا - ب) لانه (حسب ع ٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) ج ا × نجب + نجا ×

$$\begin{aligned}
 & \text{ج ب} = \text{ج د} (1 + \text{ب}) \text{ فيا القسمة على نج ا} \times \text{نج ب لنا} \\
 & \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا}} + \frac{\text{ج ب}}{\text{نج ب}} = \frac{\text{ج د} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ اولان } \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا}} = \text{م ا لنا} \\
 & \text{م ا} + \text{م ب} = \frac{\text{ج د} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان} \\
 & \text{م ا} - \text{م ب} = \frac{\text{ج د} (1 - \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ فاذا نسبة} \\
 & \text{م ا} + \text{م ب} : \text{م ا} - \text{م ب} :: \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})
 \end{aligned}$$

القضية الحادية والثلاثون

في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع زاويتين منه الى جيب نصف فضلتهما كنسبة حاس نصف الضلع الذي يلي الزاويتين الى حاس نصف فضلة الضلعين اللذين يقابلان الزاويتين ونسبة نظير جيب نصف مجتمع هاتين الزاويتين الى نظير جيب فضلتهما كنسبة حاس نصف الضلع الذي يليهما الى حاس نصف مجتمع الضلعين اللذين يقابلانها

لنفرض ان $\text{س} + \text{ب} = \text{ص}$ و $\text{س} - \text{ب} = \text{د}$ والقاعدة $\text{ب س} = \text{ص}$ وفضلته قسي القاعدة اي $\text{ب د} = \text{س}$ فلان (ق ٢٠) $\text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب}) :: \text{م ا} : \text{م ب}$ تكون نسبة $\text{ج ا} : \text{ج ب} :: \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})$ ولكن $\text{ج ا} : \text{ج ب} = \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})$ فلنا $\text{ج ا} : \text{ج ب} = \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})$ وايضاً $\text{ج ا} : \text{ج ب} = \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})$ فلنا $\text{ج ا} : \text{ج ب} = \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})$ ثم في المثلث الكروي ا ب س قد تبرهن



ان نسبة جـس + جـب : جـس - جـب :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس
 و (حسب ع^٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) جـس + جـب = ٢ جـ١ (س + ب) +
 نجـ١ (س - ب) = ٢ جـص × نجـض وجـس - جـب = ٢ نجـ١ (س + ب)
 × جـ١ (س - ب) = ٢ نجـص × جـض فافاً نسبة ٢ جـص × نجـض : ٢ نجـ١
 ص × جـض :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس واذا قُرض ان ١
 (اب + اس) = ط و ١ (اب - اس) = ظ (ق ٢ مثلثات بسيطة) جـاب
 + جـاس : جـاب - جـاس :: م ١ (اب + اس) : م ١ (اب - اس) ::
 م ط : م ظ فنسبة جـص × نجـض : نجـص × جـض :: م ط : م ظ
 ولان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـض \times نجـض}{جـص \times نجـض} = \frac{جـض}{جـص}$ و $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـض \times نجـض}{جـص \times نجـض}$
 فيضرب اشياء متساوية في اشياء متساوية نصير

$$\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ظ}{م ط} = \frac{(جـض)^2 \times نجـص \times نجـض}{(جـص)^2 \times نجـص \times نجـض} = \frac{(جـض)^2}{(جـص)^2} \text{ ولكن}$$

(ق ٢٤) $\frac{م ١ (ب - د - د س)}{م ١ (اب - اس)} = \frac{م ١ (اب + اس)}{م ١ ب س}$ او $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ظ}$ فاذا

$$\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط \times ط}{م ب} \text{ وايضاً } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ظ}{م ط} \text{ ولكن } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ}$$

$\frac{م ظ}{م ط} = \frac{(جـض)^2}{(جـص)^2}$ فاذا $\frac{م ك}{م ب} = \frac{(جـض)^2}{(جـص)^2}$ و $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـض}{جـص}$ او نسبة
 جـص : جـض :: م ب : م ط او جـ (س + ب) : جـ (س - ب) ::

م ١ ب س : م ١ (اب - اس) وهذا القسم الاول من القضية
 ايضاً لان $\frac{م ظ}{م ط} = \frac{نجـص \times جـض}{جـص \times نجـض}$ او بالقلب $\frac{م ط}{م ظ} = \frac{جـص \times نجـض}{نجـص \times جـض}$

ولان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـض \times نجـض}{جـص \times نجـض}$ فبالضرب لنا $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} =$
 $\frac{(نجـص)^2}{(جـص)^2}$ وقد تبرهن ان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط \times ط}{م ب}$ فاذا $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} =$

$\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2}$ وقد تبرهن ان $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{(نجـص)^2}{(جـص)^2}$ فاذا $\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} =$

$$\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} \text{ وبالنتيجة } \frac{نح ص}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ او نسبة } نح ص : نح ض :: م ب : م ط$$

م ط او نج (س + ب) : نج (س - ب) :: م ب : م ط (س + ب)

وهذا القسم الثاني من القضية

فرع اول. اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية المتممة اب س (ق ١١) فبا ان جيب نصف مجتمع متمي قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجتمع القوسين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والمماسات لنصف مجتمع قوسين متمين او لنصف فضلتهما وبما ان مماس نصف متم قوس هو نظير المماس لنصف القوس فالنتيجة هي ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع ضلعين الى جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف فضلة الزاويتين اللتين تقابلاهما وايضاً نسبة نظير جيب نصف مجتمع هذين الضلعين الى نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف مجتمع الزاويتين المقابلتين لها

فرع ثان. اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي و ا ب س الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

$$(1) \text{ ج ا } (ا + ب) : \text{ ج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا - ب)$$

$$(2) \text{ نج ا } (ا + ب) : \text{ نج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا + ب)$$

$$(3) \text{ ج ا } (ا + ب) : \text{ ج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا - ب)$$

$$(4) \text{ نج ا } (ا + ب) : \text{ نج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا + ب)$$

عملية اولى

في مثلث كروي قائم الزاوية مفروض شيان من اجزائه الستة غير

القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر

هذه العملية لها ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبينة على المتلث

ا ب س ذي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل
ب س	ا س	١٩ (١٩) ا ق : ج ب س :: ج ب : ج ا س
و	ا ب	٢١ (٢١) ا ق : نج ب :: م ب س : م ا ب
ب	س	٢٠ (٢٠) ا ق : نج ب س :: م ب : م س
ا س	ا ب	١٨ (١٨) ا ق : ج ا س :: م س : م ا ب
و	ب س	٢١ (٢١) نج ب س : ا ق :: م ا س : م ب س
س	ب	٢٢ (٢٢) ا ق : نج ا س :: ج س : نج ب
ا س	ا ب	١٨ (١٨) م ب : م ا س :: ا ق : ج ا ب
و	ب س	١٩ (١٩) ج ب : ج ا س :: ا ق : ج ب س
ب	س	٢٢ (٢٢) نج ا س : نج ب :: ا ق : ج س
ا س	ا ب	٢٢ (٢٢) نج ا س : نج ب س :: ا ق : نج ا ب
و	ب	١٩ (١٩) ج ب س : ج ا س :: ا ق : ج ب
ب س	س	٢١ (٢١) م ب س : م ا س :: ا ق : نج ب س
ا ب	ب س	٢٢ (٢٢) ا ق : نج ا ب :: نج ا س : نج ب س
و	ب	١٨ (١٨) ج ا ب : ا ق :: م ا س : م ب
ا س	س	١٨ (١٨) ج ا س : ا ق :: م ا ب : م س
ب	ا ب	٢٢ (٢٢) ج ب : نج ب س :: ا ق : نج ا ب
و	ا س	٢٢ (٢٢) ج س : نج ب :: ا ق : نج ا س
س	ب س	٢٠ (٢٠) م ب : م س :: ا ق : نج ب س

جدول تُعرّف به اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق	
١	ا س وب من جنس واحد إذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب وب من جنس واحد وإلا فمختلفان
٢	(فرع ١٥)
٣	إذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون س وب من جنس واحد وإلا فمختلفان (١٥)
٤	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
٥	إذا كان ا س وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (فرع ١٥)
٦	ب و ا س من جنس واحد
٧	ملتبس
٨	ملتبس
٩	ملتبس
١٠	إذا كانت ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب و ا س من جنس واحد وإلا فمختلفان (١٥)
١١	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٢	إذا كانت ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا س وس من جنس واحد وإلا فمختلفان (فرع ١٥)
١٣	ب س $> ٩٠^\circ$ إذا كان ا ب و ا س من جنس واحد (فرع اول ١٥)
١٤	ب و ا س من جنس واحد (١٤)
١٤	س و ا ب من جنس واحد (١٤)
١٥	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
١٥	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٥	إذا كانت ب وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (١٥)

تنبيه * يراد بالملتبس ان المطلوب له قيمتان اي زاوية ما او ممتها

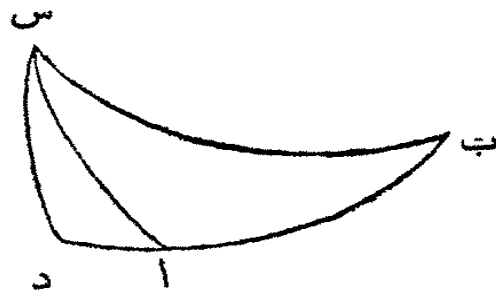
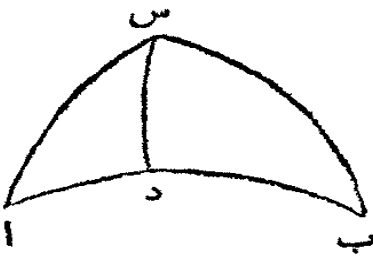
هذا الجدول مثل الاول غير انه قد فرض فيه ان \bar{A} = الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة \bar{a} وب \bar{B} = الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{b} وس \bar{C} = الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{c}

١	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	أ وب
٢	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
٣	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	
٤	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	ب وس
٥	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
٦	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	
٧	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	ب وب
٨	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
٩	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	
١٠	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	أ وب
١١	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
١٢	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	
١٣	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	ب وس
١٤	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
١٤	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	
١٥	$\bar{C} \times \bar{B} = \bar{A}$	\bar{a}	ب وس
١٥	$\bar{C} \times \bar{A} = \bar{B}$	\bar{b}	
١٦	$\bar{B} \times \bar{A} = \bar{C}$	\bar{c}	

عملية ثانية

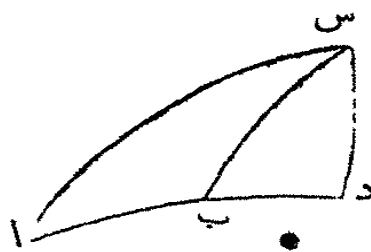
في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا ان نجد الثلاثة الأخر

تنبيه. في هذا الجدول اذا رايت حرف الحاء قدام رقم هندي هكذا (ح ٤) فالاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق والاعداد وحدها تشير الى قضايا اصول المثلثات الكروية



المحل	مطلوب	مفروض
<p>١ ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب فنسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د وج ب د : ج ا د :: م ا : م ب (٢٧) ب و ا من جنس واحد اذا كان ا ب < ب د والا فمختلفان (١٦)</p>	<p>احدى الزاويتين الاخرتين ب ب</p>	<p>الضلعان ا ب ا س والزاوية بينهما ا</p>
<p>٢ ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين على الضلع ا ب ثم نسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د ونج ا د : نج ب د :: نج ا س : نج ب س (٢٦) اذا كان ا د و د ب من جنس واحد يكون ا س و س ب من جنس واحد والا فمختلفان</p>	<p>الضلع الثالث ب س</p>	

مفروض	مطلوب	المحل
الزاويتان ا و ب	الضلع ب س	٣ من س طرف اس الذي يلي الضلع المطلوب ارسم س د عمودية على اب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة نج ب س د : نج ا س د :: م ا س : م ب س (٢٨) اذا كان ا و ب س د من جنس واحد يكون ب س > ٩٠° والا فاكبر من ٩٠°
والضلع بينهما اس	الزاوية الثالثة ب	٤ ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين على اب الضلع المقابل ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة ج ا س د : ج ب س د :: نج ا : نج ب (٢٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت اس ب اكبر من ب س د تكون ب و ا من جنس واحد والا فمختلفتان (١٦)
الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض اس		٥ ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب (٢٤) جنس ب س ملتبس الا اذا تعين كون ا + ب اكثر او اقل من ١٨٠° لكون اس + ب س اكثر او اقل من ١٨٠° (١٠)
ضلعان اس وب س والزاوية ا التي تقابل احدها ب س	الزاوية اس ب بين الضلعين المفروضين	٦ من اس ب الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على اب بين ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) وم ب س : م ا س :: نج ا س د : نج ب س د (٢٨) واس د ± ب س = اس ب وهي ملتبسة
	الضلع الثالث اب	٧ ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين المفروضين على اب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) ونج ا س : نج ب س :: نج ا د : نج ب د (٢٦) و ا ب = ا د ± ب د فيكون اب ملتبسا



مفروض	مطلوب	الحل
	الضلع ب س المقابل الزاوية الآخري المفروضة ا	٨ ج ب : ج ا :: ج ا س : ج ب س (٢٤) و ب س الضلع ب س المقابل الزاوية الآخري المفروضة ا من 180° حسبما كانت ا + ب أكثر او اقل من 180° (١٠)
زاويتان ا و ب والضلع ا س الذي يقابل احدهما ب	الضلع ا ب الذي يلي الزاويتين المفروضتين ا و ب	٩ من الزاوية المجهولة س ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ا ب ق : نج ا س :: م ا س : م ا د (ح ٢) و م ب : م ا ج ا د : ج ب د و ب د ملتبس فاذا ا ب = ا د ب د وله اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بانزوم كون ا ب اقل من 180°
	الزاوية الثالثة ا س ب	١٠ من الزاوية المطلوبة ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ا ب ق : نج ا س :: م ا س : م ا د (ح ٢) ونج ا : نج ب د :: ج ا س د : ج ب س د (٢٥) ب س د ملتبسة فاذا ا س ب = ا س د + ب س د ولها اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بانزوم كون ا س ب اقل من 180°

<p>١١ من س احدى الزاويتين الغير المطلوبتين ارسم س د عمودية على اب . ثم استعلم قوساً ي حتى تكون نسبة $م \text{ إلى } ا ب : م \text{ إلى } (ا س + ب س) :: م \text{ إلى } (ا س - ب س)$ فاذا كان اب اكبر من ي فيكون اب مجتمع اد ود ب وي فضلتهما واذا كان اب اصغر من ي يكون مجتمع اد ود ب واب فضلتهما (٢٩) وعلى الحالتين اد وب د معروفان وم اس : م اد :: ا ق : نجوا</p>	<p>احدى الزوايا ا</p>	<p>الاضلاع الثلاثة ا ب ا س ب س</p>
<p>١٢ افرض متمات الزوايا ا وب وس المفروضة آ وب وس واحسبها اضلاع مثلث كروية واستعلم بالحالة السابقة الزاوية من هذا المثلث التي تقابل الضلع آ فهي متم ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية امنة اي ب س (١١)</p>	<p>احد الاضلاع ب س</p>	<p>الزوايا الثلاثة ا وب وس</p>

في هذا الجدول قُرِضَت الزوايا ا وب وس كما تقدم والاضلاع التي تقابلها
وبَ وسَ وك وى يعدلان قسي القاعدة اوقسي الزاوية التي تقابلها

مفروض	مطلوب	الحل
ضلعان بَ وسَ والزاوية بينهما ا	ب	استعلم ك حتى ان مم ك : مم بَ × نج ا ثم مم ب = ا حك × ا م جد (س - ك)
الزاويتان ا وس	ا	استعلم ك كما تقدم ثم نج ا = نج ب' × نج (س - ك) نج ك
والضلع بَ	ب	استعلم ك حتى ان مم ك = نج ب' × مم ا ثم نج س = ٦ نج ك × م ب ا م
الضلعان ا وبَ والزاوية ا	س	استعلم ك حتى ان مم ك = مم بَ × نج ا واستعلم ي ٧ حتى ان نجى = نج ا' × نج ك س = ك + ي
الزاويتان ا وب	س	استعلم ك حتى ان مم ك = مم بَ × نج ا واستعلم ي ٩ حتى ان جى = مم ب' × ا م س = ك + ي
والضلع بَ	س	استعلم ك حتى ان مم ك = نج ب' × مم ا واستعلم ي ١٠ حتى ان جى = حك × نج ب س = ك + ي

المحل	مطلوب	معروض
<p>١١</p> <p>لفرض ان $\bar{a} + \bar{b} + \bar{s} = \bar{v}$</p> $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{v}) \times \bar{b}(\bar{v} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{v}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>او $\frac{\bar{a}(\bar{v} - \bar{s}) \times \bar{b}(\bar{b} - \bar{v})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{v}\bar{s}} = \frac{1}{3}$</p>	١	<p>١</p> <p>١</p> <p>١</p>
<p>١٢</p> <p>لفرض ان $\bar{a} + \bar{b} + \bar{s} = \bar{v}$</p> $\frac{\bar{a}(\bar{v} - \bar{s}) \times \bar{b}(\bar{v} - \bar{a})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{v}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>او $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{v}) \times \bar{b}(\bar{v} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{v}\bar{s}} = \frac{1}{3}$</p>	١	<p>١</p> <p>١</p> <p>١</p>

خاتمة اصول قياس المثلثات الكروية

في قواعد الاحراء الدائرة للمعلم ماييبر

قواعد الاجراء الدائرة التي استخرجها المعلم ماييبر الاسكوتسي من اصول قياس
المثلثات الكروية هي كثيرة الفوائد لسهولة حفظها واستعمالها في الحسابات واسطة
الاسباب او اللوعارثات

حدود

١ في مثلث كروي قائم الراوية اذا عَصَّ الطرف عن القائمة تبقى خمسة احراء
اي ثلاثة اصلاخ وراويتان غير قائمتين فالصلعان المحيطان بالقائمة وكالات الملتة
الاحراي الراويتين والوتر في الاحراء الدائرة مثال ذلك في المثلث ا ب س دي
القائمة عدا فالاجراء الدائرة هي ا س ا ب وكالات ب و س و س و س و س
بالاجراء الدائرة لانيها اذا عدت على ترتيب تدور حول المثلث

٢ اذا أُحِدَ واحد من هذه الاحراء الخمسة وسمي الوسط من الاربعة الباقية
اتمان واليان الوسط مبهما الموايلين احدهما
عن يمين الوسط والآخر عن يساره
والاحران هما المقابلان وبين كل واحد
مهما والوسط واحد من الموايلين
مثال ذلك في المثلث ا ب س فالاحراء



الدائرة حسب المبدأ الاول هي ا س ا ب ا - ب - ا - ب س - ا - س
وإذا حسنا ا س الوسط يكون ا ب و ا - س الموايلين و ا - ب و ا - س
ب س المقابلين وإذا حسنا ا ب الوسط يكون ا س و ا - ب الموايلين
ا - ب س و ا - س المقابلين وإذا حسنا ا س - ب س الوسط يكون
ا - ب س و ا - س الموايلين و ا - ب المقابلين وهكذا الى اخره وإذا
نقرر ذلك فمقدمة الاحراء الدائرة هي في هذه

القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في جيب
الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح مما سي الموالين او يعدل مسطح
نظيري جيبى المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يجعل كل جزء وسطاً في بونو ثم تقابل القضية على
احد البراهين السابق ذكرها، فاذا جعل ب س وسطاً لنا ٢٠ - ب و ٢٠ - س
المواليات ا ب و ا س المقابلان و ا ق × نج ب س = نم ب × نم س (حسب
ق ٢٠ فرع) و ا ق × نج ب س = نج ا ب × نج ا س (حسب ق ٢١)

فاذا قصدت ان تحل مسألة بواسطة هذه القضية فانظر الى ابي الاشياء المسماة
اعني المفروضين والمطلوب يجعل وسطاً لكي يكون الاخران على بعد واحد مه فلا
بد من وجود المطلوب في احدى النظريتين المذكورتين في القضية

فلو فرض ا ب و ا س وكان المطلوب س فالامر واضح انه اذا جعل ا ب
وسطاً يكون ب س وس المقابلين و ا ق × ج ا ب = ج س × ج ب س لان
ج س = نج (٢٠ - س) ونج (٢٠ - ب س) = ج ب س فاذا ج س =
ج ا ب
ج ب س

ولو فرض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطاً يكون
ا س و ٢٠ - ب س الموالين و ا ق × نج س = نم ا س × نم ب س او م ا س =
نج س / م ب س = نج س + م ب س لانه قد تبرهن سابقاً ان م ب س =
م ب س

وقد استخرج المعلم نايبر من القضية الحادية والتلخيص عبارات لحل المسائل في
مثلث غير دية قائمة، فاي فرض كما تقدم روايا المثلث ا ب و س والاصلاح التي
تقابلها ا ب و ب و س فلما اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان ب و س والزاوية ا بينهما
مطلوب الزاويتان ب و س