প্রবেশিকা-জ্যামিতি

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় কর্ত্তৃক প্রবেশিকা পরীক্ষার্থীদের
পাঠ্যরূপে অনুমোদিত।

প্রবেশিকা-জ্যামিতি

[ইউক্লিডের ১-৪ খণ্ডের সারাংশ লৈখিক ও তাত্ত্বিক প্রণালীতে আলোচিত]

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতাধ্যাপক

শ্রীসুরেন্দ্রমোহন গঙ্গোপাধ্যায়

ডি. এস্-সি., (পি.আর.এস.)

প্রণীত

দি বুক কোম্পানী লিমিটেড্

৪।৩ বি, কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা

১৩৪৩ বঙ্গাব্দ (১৯৩৬)

প্রকাশক—
শ্রীগিরীন্দ্রনাথ মিত্র
৪।৩ বি, কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা।

শ্রীসৌরীন্দ্রমোহন গঙ্গোপাধ্যায় কর্তৃক
সর্বসত্ব সংরক্ষিত।

প্রিণ্টার—শ্রীসমরেন্দ্রভূষণ মল্লিক
বাণী প্রেস
১৬নং হেমেন্দ্র সেন ষ্ট্রীট্‌, কলিকাতা।

ভূমিকা

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের নূতন প্রবর্তিত শিক্ষাপদ্ধতি অনুসারে প্রবেশিকা পরীক্ষার্থীদের বাংলা ভাষায় শিক্ষা দিবার ব্যবস্থা হওয়ায় যাবতীয় পাঠ্যপুস্তকই বাংলাভাষায় প্রকাশ করিবার প্রয়োজন হইয়াছে। এই উদ্দেশ্যে বর্তমান প্রবেশিকা-জ্যামিতি বাংলা ভাষায় প্রকাশ করা হইল। অধিকাংশ জ্যামিতি পুস্তকই ইংরেজী ভাষায় লিখিত ও প্রকাশিত। বাংলা ভাষায় প্রকাশিত পুস্তকের সংখ্যা অল্প, প্রণালী বিভিন্ন এবং প্রবেশিকা পরীক্ষার নির্দিষ্ট পাঠ্যতালিকা অনুসারে লিখিত নহে। এ পর্যন্ত বাংলা ভাষায় এই সব পুস্তক প্রণয়নের কোন আবশ্যকতা অনুভূত হয় নাই, অধিকন্তু বাংলা-পরিভাষায় গণিতীয় প্রতিশব্দের অভাব হেতু উহাদের প্রণয়নও বিশেষ আয়াসসাধ্য ছিল। বর্তমানে এই অভাব দূরীকরণার্থ বিশ্ববিদ্যালয় একটি গণিতীয় পরিভাষা প্রকাশ করিয়াছেন। উক্ত পরিভাষায় শব্দ-সংখ্যা যথেষ্ট না থাকিলেও, উহাদ্বারা মোটামুটি কার্যের সুবিধা হইয়াছে এবং ক্রম ব্যবহার-দ্বারা ভাষার উৎকর্ষ সাধিত হইলে বাংলা ভাষার একটি বিশেষ অভাব দূর হইবে।

বানান সম্বন্ধে বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক নির্দিষ্ট পন্থা অনুসৃত হইয়াছে। এবং বর্তমান পুস্তকের ভাষা বাংলা হইলেও চিত্রাদি সূচিত করিতে ইংরেজী বর্ণমালার অক্ষর সমূহ (letters) শুধু প্রতীকরূপে এবং অনুশীলনী সমূহে সাধারণত বাংলা অঙ্ক (figures) ব্যবহৃত হইয়াছে।

ইহার উদ্দেশ্য এই যে উচ্চগণিত-অধ্যয়ন-প্রয়াসী ছাত্রবর্গ ইহা-দ্বারা পরবর্তী স্তরের ইংরেজী পুস্তকের কতক পূর্বাভাস পাইবে। ব্যবহৃত বাংলা শব্দসমূহের ইংরেজী প্রতিশব্দ যথাস্থানে সন্নিবেশিত হইয়াছে। বিশ্ববিদ্যালয়-প্রকাশিত পারিভাষিক শব্দ ব্যতীত কয়েকটি নূতন বাংলা প্রতিশব্দ প্রচলিত রীতি অনুসারে গঠিত হইয়াছে। ক্রমে ব্যবহার-দ্বারা নানাবিধ সুবিধা ও অসুবিধা বিবেচনা পূর্বক ইহাদের পরিবর্তন, পরিবর্ধন বা অন্যপ্রকারে উৎকর্ষ সাধনের যথেষ্ট সুযোগ হইবে। এবং সর্ববাদিসম্মত একটি স্থায়ী পরিভাষা রচিত হইবে। অনেকস্থলে বিষয়ের প্রকৃত মর্ম প্রকাশ করিতে দুই বা তদধিক শব্দের মধ্যে একটি '-' চিহ্ন দিয়া উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া দেওয়া হইয়াছে। ইহা-দ্বারা অর্থ বুঝিবার সুবিধা হইবে।

ইউক্লিড জ্যামিতিশাস্ত্রের প্রবর্তক। আধুনিক জ্যামিতিকারগণ ইউক্লিডের প্রমাণ-প্রণালীর কতক ত্রুটি প্রদর্শন করিয়া থাকিলেও, তদপেক্ষা অন্য-কোন উন্নততর প্রণালী এ পর্যন্ত আবিষ্কৃত হয় নাই। কিন্তু অধিকাংশ শিক্ষার্থীর পক্ষে, বিশেষত যাহাদের গণিতশাস্ত্রে তত পারদর্শিতা নাই, অথবা যাহাদের পক্ষে উহার তত্ত্বীয়জ্ঞানের বিশেষ আবশ্যকতা নাই, তাহাদের পক্ষেও কিয়ৎপরিমাণে মানসিক উৎকর্ষলাভ বাঞ্ছনীয় বলিয়া, এই পুস্তকের প্রথমাংশে প্রমাণাদি ইউক্লিডের প্রণালী অনুসারে দেওয়া হইয়াছে; কিন্তু তাঁহার ক্রম সর্বত্র রক্ষিত হইতে পারে নাই। কারণ, আধুনিক প্রণালীতে বিষয়ের গুরুত্বানুসারে উহাদের পর্যায় নির্ধারিত হইয়াছে। এইজন্য সরলরেখা, কোণ, ঋজুরেখ ক্ষেত্র, বৃত্ত প্রভৃতির ধর্ম যথাক্রমে আলোচিত হইয়াছে। সমান্তরাল সরলরেখার ধর্ম সরলরেখার সাধারণ ধর্ম-সাহায্যেই আলোচিত হইয়াছে বটে, কিন্তু ইউক্লিডের প্রমাণও পরে যথাস্থানে সন্নিবেশিত হইয়াছে। কোনও বিষয়ের তত্ত্বীয় আলোচনার পরই তৎসম্বন্ধীয় সম্পাদ্যগুলির অবতারণা করা হইয়াছে।

ইউক্লিডের সমগ্র সম্পাদ্য ও উপপাদ্যসমূহ ধারাবাহিকরূপে সন্নিবেশিত হয় নাই, কারণ উহাদের কয়েকটি অপর কয়েকটির অনুসিদ্ধান্তরূপে প্রমাণ করা যায় বলিয়া সেইরূপেই যথাস্থানে উল্লিখিত হইয়াছে।

উপপাদ্য ও সম্পাদ্যগুলির পর তৎসংশ্লিষ্ট কয়েকটি সহজ অনুশীলনী এবং বিভিন্ন বিষয়ের আলোচনার পর কতক বিবিধ অনুশীলনী সন্নিবিষ্ট হইয়াছে। উহাদের মধ্যে কতকগুলি সংখ্যাত্মক ও ব্যবহারিক অনুশীলনীও দেওয়া হইয়াছে। ইহাদের সমাধান-দ্বারা মূলবিষয়টির সত্যতা সহজেই অনুমিত হইবে।

আলোচ্য বিষয় সমূহ ছয়টি বিভিন্ন অধ্যায়ে বিভক্ত করা হইয়াছে।

(১) সরলরেখা ও কোণ (Straight lines and angles)
ঋজুরেখ ক্ষেত্র (Rectilinear figures)

(২) ক্ষেত্রফল বা কালি (Areas)

(৩) বৃত্ত (Circle)

(৪) বৈজিকসূত্রের জ্যামিতিক পরিচয় (Geometric representation of Algebraic formulæ)

(৫) অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

(৬) ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

প্রথম চার অধ্যায়ে প্রবেশিকা পরীক্ষার্থীদের অবশ্য পঠনীয় (compulsory) বিষয় সমূহ এবং পঞ্চম ও ষষ্ঠ অধ্যায়ে অতিরিক্ত (additional) বিষয় সমূহ আলোচিত হইয়াছে। অনুশীলনী সমূহের কতকগুলি রচিত এবং কতক বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের প্রশ্নপত্র বা বর্তমান প্রচলিত পুস্তকাদি হইতে সংগৃহীত হইয়াছে।

এই পুস্তকের পাণ্ডুলিপি প্রণয়নে দমদম কৃষ্ণকুমার হিন্দু একাডেমীর অন্যতম গণিত-শিক্ষক শ্রীমান্ অমূল্যচরণ মুখোপাধ্যায় বি. এস্‌সি. এবং মুদ্রাঙ্কন বিষয়ে শ্রীমান্ রবীন্দ্র নাথ চক্রবর্তী বি. এ. এবং শ্রীমান্

মহেন্দ্র নাথ চক্রবর্ত্তী যথেষ্ট সাহায্য করিয়াছে। এজন্য তাহারা ধন্যবাদার্হ। যাহাদের পুস্তকাদি হইতে সাহায্য পাইয়াছি তাহাদের নিকট আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করিতেছি। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পুস্তকখানার মুদ্রাঙ্কন কার্য শেষ করিতে হইয়াছে বলিয়া দুই এক স্থানে মুদ্রাকর ভ্রম-প্রমাদ ঘটিবার সম্ভাবনা রহিয়াছে। শিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের নিকট সনির্বন্ধ অনুরোধ এই যে পুস্তকখানার উন্নতিকল্পে তাহাদের কোন প্রস্তাব অনুগ্রহপূর্বক জানাইলে বিশেষ বাধিত হইব।

সর্বশেষে বক্তব্য এই যে উদ্দেশ্যে পুস্তকখানা প্রকাশিত হইল, সেই উদ্দেশ্য কিয়ৎ পরিমাণে সিদ্ধ হইলেও পরিশ্রম সফল জ্ঞান করিব।

ব্রজবাস, মতিঝিল, দমদম।
লক্ষ্মীপূর্ণিমা, ১৩৪৩।

গ্রন্থকার

সূচীপত্র

বিষয়			পৃষ্ঠা
উপক্রমণিকা	...	...	১-১৬
জ্যামিতি শাস্ত্রের উৎপত্তি	...	...	১
জ্যামিতির দুইটি শাখা	...	...	২
জ্যামিতির মৌলিকতত্ত্ব	...	...	৩
সরল ও বক্ররেখা	...	...	৫
কোণ	...	...	৬
পরিমাণ-ভেদে কোণের নামকরণ	...	...	৯
বৃত্ত	...	...	১০
স্বীকার্য বিষয়	...	...	১১
স্বতঃসিদ্ধ	...	...	১৩
প্রতিজ্ঞা ও প্রতিজ্ঞার অঙ্গ	...	...	১৫
সাংকেতিক চিহ্ন	...	...	১৬
প্রথম অধ্যায়			
প্রথম পরিচ্ছেদ			
সরলরেখা ও কোণ (১ম—৩য় উপপাদ্য)		...	১৭-২৫
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ			
সমান্তরাল সরলরেখা (৪র্থ—৭ম উপপাদ্য)		...	২৫-৩৭
প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ	...	...	৩২
ইউক্লিডের সমান্তরাল স্বতঃসিদ্ধ	...	...	৩৪
তৃতীয় পরিচ্ছেদ			
ঋজুরেখ ক্ষেত্র—ত্রিভুজ (৮ম—২১শ উপপাদ্য)		...	৩৮-৭৬

বিষয় পৃষ্ঠা

বাহুভেদে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ ৩৯
কোণভেদে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ ৪০

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

চতুর্ভুজ—সামান্তরিক (২২শ-২৩শ উপপাদ্য) ... ৭৭-৯০
অভিক্ষেপ ৮১
বিবিধ সমাধান ৮৪-৮৯

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

সরলরেখা ও কোণ সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য (১ম-১৫শ সম্পাদ্য) ৯১-১১৮
সঞ্চারপথ (Locus) (২৪শ-২৫শ উপপাদ্য) ... ১১৯-১২১
দুই বা তদধিক সঞ্চারপথের ছেদ ১২২
বিবিধ প্রশ্নের সমাধান ১২৪-১২৯

দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

ক্ষেত্রফল বা কালি (২৬শ-৩১শ উপপাদ্য) ... ১৩১-১৫৮
বিবিধ সমাধান ১৪২-১৪৫
পিথাগোরাসের উপপাদ্য ১৪৬-১৫৪

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য (১৬শ-১৭শ সম্পাদ্য) ... ১৫৯-১৬২
বিবিধ সমাধান ১৬২-১৬৪

তৃতীয় অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

বৃত্তের ধর্ম (৩২শ-৩৮শ উপপাদ্য) ১৬৫-১৮৪
সাধাবণ ধর্ম ১৬৭
প্রতিসাম্য-ধর্ম ১৬৮

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

বৃত্তাংশস্থ কোণ (৩৯শ-৪৪শ উপপাদ্য) ... ১৮৫-২০১

বিষয় পৃষ্ঠা

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

স্পর্শক (৪৫শ-৪৮শ উপপাদ্য) ২০২-২১৭
অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ ২০৩

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

বৃত্ত সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য (১৮শ-২৮শ সম্পাদ্য) ... ২১৮-২৪৬
বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক ২২৩
বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল ২৩৯
বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ২৪০
বিবিধ সমাধান ২৪২-২৪৫

চতুর্থ অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

বৈজিক সূত্রের জ্যামিতিক পরিচয়
(৪৯শ-৫৫শ উপপাদ্য) ... ২৪৭-২৬৫
ত্রিভুজের তিন বাহুর বর্গের পরস্পর সম্বন্ধ ... ২৬১

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

বৃত্ত সম্বন্ধীয় আয়ত (৫৬শ উপপাদ্য) ... ২৬৬-২৬৯

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

ঋজুরেখ ক্ষেত্র ও বৃত্তাঙ্কন (২৯শ-৩১শ সম্পাদ্য) ... ২৭০-৩০৪
মাধ্যানুপাতিক ছেদ (Medial section) ... ২৭৪
বিবিধ বৃত্তাঙ্কন ২৭৭-২৯৪
পাদরেখা বা সিম্‌সনরেখা (Simson's line) ... ২৮৩
নব-বিন্দু বৃত্ত (Nine-points circle) ... ২৮৯
সমকোণীয় বৃত্ত (Orthogonal circles) ... ২৯৫
মূলাক্ষ (Radical axis) ২৯৬
মূলকেন্দ্র, সমাক্ষবৃত্ত ২৯৭-২৯৮

প্রবেশিকা-জ্যামিতি

উপক্রমণিকা

১। জ্যামিতি (Geometry) শাস্ত্রের উৎপত্তি

জ্যামিতি শব্দের ব্যুৎপত্তি হইতে বুঝা যায় যে ইহা জমির পরিমাপ-সম্বন্ধীয় একটি শাস্ত্র। পুরাকালে মিশরদেশে নীল নদের উভয় পার্শ্বস্থ ভূমি সর্বদা বন্যা-প্লাবিত হইত। বন্যার জল সরিয়া গেলে জমির সীমানা প্রভৃতির কোনই চিহ্ন থাকিত না। ফলে, মালিকদিগের **স্ব স্ব** জমি নির্দেশ করা বিশেষ কষ্টসাধ্য হইত। এই অসুবিধা দূর করিবার জন্যই মিশরীয়গণ নিজ নিজ জমি জরিপ করিয়া উহার একটি নক্সা রাখিতে বাধ্য হইত। যাহা হউক, নীল নদের বন্যার জন্যই এই শাস্ত্রের উদ্ভব কিনা ঠিক বলা না গেলেও, পৌরাণিক গ্রন্থাদি হইতে জানা যায় যে মিশরবাসিগণ এই শাস্ত্রের যে ভিত্তি স্থাপন করিয়া গিয়াছিলেন তাহার উপরই পরবর্তী গ্রীসদেশীয় ঔপপত্তিক জ্যামিতি গড়িয়া উঠিয়াছিল। প্রথমত থেল্‌স (Thales) নামক জনৈক গ্রীক মনীষী মিশর হইতে গ্রীসদেশে এই শাস্ত্রের আমদানি করেন। পরে অন্যান্য অনেক গণিতজ্ঞ ব্যক্তি ইহার সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্যের আবিষ্কার করেন। সর্বশেষে ইউক্লিড নামক এক প্রবীণ জ্যামিতিকার ঐ সব সত্য সংগ্রহ করিয়া 'Elements' নামে একখানি প্রসিদ্ধ পুস্তক প্রণয়ন করেন। এই পুস্তকে ইউক্লিডের নিজের আবিষ্কার কতদূর সন্নিবিষ্ট হইয়াছে বলা যায় না; কিন্তু তিনিই প্রথম তাঁহার পূর্ববর্তিগণের সম্পূর্ণ এবং অসম্পূর্ণ সিদ্ধান্তসমূহ সংগ্রহ পূর্বক সমগ্র জ্যামিতি শাস্ত্রটিকে নিয়ন্ত্রিত করিয়া প্রণালীশুদ্ধ ও ধারাবাহিকরূপে প্রকাশ করেন। ক্রমে পূর্ববর্তিগণের কার্যকলাপ লুপ্ত হইয়া ইউক্লিডের এই পুস্তক সর্বত্র প্রচলিত ও সমাদৃত

হওয়াই তাহার প্রবর্তিত পদ্ধতির উৎকর্ষতার প্রকৃষ্ট প্রমাণ। এই Elements ই বিংশ শতাব্দী পর্যন্ত পৃথিবীর সর্বত্র সমাদৃত হইয়া ইউক্লিডের নাম চিরস্মরণীয় করিয়া রাখিয়াছে এবং তিনি জ্যামিতি শাস্ত্রের স্রষ্টিকর্তা বলিয়া প্রসিদ্ধি লাভ করিয়াছেন। বর্তমান আধুনিক জ্যামিতি তাঁহার পুস্তকেরই একটি পরিবর্তিত ও উন্নত সংস্করণমাত্র। পরবর্তী জ্যামিতিকারগণ ইউক্লিডের পদ্ধতির কিছু কিছু ত্রুটি দেখাইয়া নন্-ইউক্লিডিয়ান (Non-Euclidian) জ্যামিতি নামে আর একটি পদ্ধতির প্রবর্তন করিয়াছেন বটে, কিন্তু ব্যবহারিক জগতে ইউক্লিডের পদ্ধতি চিরকাল প্রচলিত থাকিবে।

ইউক্লিডের জন্মস্থান বা তাঁহার পিতামাতা-সম্বন্ধে ঠিক কিছু জানা যায় না। তিনি প্রথম টোলিমির (Ptolemy) রাজত্ব-সময়ে (খ্রীঃ পূঃ অব্দ ৩২৩-২৮৪) আলেকজান্দ্রিয়ায় বাস করিতেন। তাঁহার Elements ১৩ খণ্ডে বিভক্ত ছিল। উহার কতকগুলি বর্তমানে লোপ পাইয়াছে। Elements ব্যতীত ইউক্লিড আরও কয়েকখানি উচ্চাঙ্গের জ্যামিতি প্রণয়ন করিয়াছিলেন।

২। জ্যামিতির দুইটি শাখা

(১) ব্যবহারিক জ্যামিতি (Practical Geometry)

জ্যামিতির যে শাখায় বস্তু-সমূহের আকৃতি বা পরিমাণ-সম্বন্ধে চিত্রাঙ্কনপ্রণালী নির্দেশিত হয় তাহাকে 'ব্যবহারিক জ্যামিতি' বলে। ইহাতে প্রস্তাবিত বিষয়গুলি চিত্রাঙ্কন দ্বারা নিষ্পন্ন হয়। এইরূপ নিষ্পন্ন বিষয়গুলির সাধারণ নাম 'সম্পাদ্য' (**Problem**).

(২) তত্ত্বীয় (Theoretical) বা ঔপপত্তিক (Demonstrative) জ্যামিতি।

জ্যামিতির যে শাখায় অঙ্কিত ক্ষেত্রাদির বিচার দ্বারা জ্যামিতিক সত্য সমূহ প্রমাণিত হয় এবং প্রমাণিত সত্য হইতে অন্যান্য নূতন তত্ত্ব

অবধারিত হয় তাহাকে 'তত্ত্বীয়' বা 'ঔপপত্তিক' জ্যামিতি বলে। ইহার প্রস্তাবিত বিষয়গুলি প্রমাণ দ্বারা নিষ্পন্ন হয়। এইরূপে নিষ্পন্ন বিষয়গুলির সাধারণ নাম "উপপাদ্য" (**Theorem**).

৩। জ্যামিতির মৌলিক তত্ত্ব

বিন্দু, রেখা এবং তল-সম্বন্ধে সকলেরই একটা ধারণা আছে। কিন্তু জ্যামিতি শাস্ত্রে এই শব্দ কয়টি এক একটি বিশিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত হইয়া থাকে। সমস্ত শাস্ত্রটির ভিত্তি এই তিনটি প্রধান মৌলিক ধারণার (notion) উপর প্রতিষ্ঠিত।

(১) জ্যামিতিক বিন্দু (Point)

যাহার অবস্থিতি আছে, কিন্তু কোন বিস্তৃতি বা পরিমাণ নাই তাহাকেই জ্যামিতিক বিন্দু বলা হয়।

"বিন্দু" বলিলে কেবল মাত্র কোথায় বিন্দুটি অবস্থিত তাহাই জ্ঞাপন করে। ইহার পরিমাণ—দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ—সম্বন্ধে কোন ভাবই জ্ঞাপন করে না। পেন্সিলের সূক্ষ্ম অগ্রভাগ দ্বারা কাগজের উপর একটি ফুট্‌কি দিলেই সাধারণত উহাকে বিন্দু বলিয়া ধরা হয়। যত সূক্ষ্মই হউক না কেন এই চিহ্নটি কিছু-না-কিছু স্থান অধিকার করিবেই; সুতরাং ইহা প্রকৃত জ্যামিতিক বিন্দু হইতে পারে না। তবে উহা যতই সূক্ষ্ম হইবে ততই প্রকৃত জ্যামিতিক বিন্দুর অনুরূপ হইবে। বর্ণমালার একটি অক্ষর দ্বাবা একটি বিন্দু জ্ঞাপন করা হয়, যথা— **ক** বিন্দু, বা A বিন্দু।

(২) জ্যামিতিক রেখা (Line)

যাহার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু বিস্তার বা বেধ নাই তাহাকে জ্যামিতিক রেখা বলা হয়। কয়েকটি বিন্দু পাশাপাশি বসাইলেই একটি রেখা উৎপন্ন হয়। সুতরাং বিন্দুর গতি দ্বারাই রেখা উৎপন্ন হয়, এরূপ মনে করা যাইতে পারে। পেন্সিলের সূক্ষ্ম অগ্রভাগ কাগজের উপর টানিলে যে দাগ পড়ে তাহাই রেখার অনুরূপ। কিন্তু দাগটি যতই সূক্ষ্ম হউক না

কেন ইহার কিছু-না-কিছু বিস্তার থাকিবেই। সুতরাং ইহা কখনই জ্যামিতিক রেখা হইতে পারে না। তবে রেখাটি যতই সূক্ষ্ম হইবে অঙ্কিত দাগটি ততই জ্যামিতিক রেখার অনুরূপ হইবে।

(৩) **জ্যামিতিক তল (Surface)**

যাহার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে, কিন্তু বেধ নাই তাহাকেই জ্যামিতি শাস্ত্রে 'তল' বলা হয়।

যে-কোন কঠিন বস্তুর বহিরাবরণই তল এবং উহা তল দ্বারা সীমাবদ্ধ এরূপ মনে করা যাইতে পারে। কয়েকটি রেখা পাশাপাশি সাজাইলেও তল হয়। সুতরাং রেখার চালনে তল উৎপন্ন হয় এরূপ মনে করা যাইতে পারে। টেবিলের উপরিভাগ, ঘরের মেঝে, একটি ফুটবলের উপরিভাগ প্রভৃতি তলের দৃষ্টান্ত। কিন্তু এই সব তলের ধারণা করিতে হইলে উহাদের কিছু বেধ আছে মনে করিতে হয়, কিন্তু জ্যামিতিক তলের কোনই বেধ নাই।

৪। বিন্দু, রেখা ও তলের পরস্পর সম্বন্ধ

(১) কোন কঠিন বস্তু তল দ্বারা সীমাবদ্ধ হইতে পারে, এবং কোন চলন্ত রেখা দ্বারাও তল উৎপন্ন হইতে পারে।

(২) তল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ এবং দুইটি তলের ব্যবচ্ছেদেও রেখা উৎপন্ন হইতে পারে। অথবা কোন চলন্ত বিন্দু দ্বারাও রেখা উৎপন্ন হয়।

(৩) রেখা দুইটি বিন্দুদ্বারা সীমাবদ্ধ এবং দুইটি রেখার পরস্পর ব্যবচ্ছেদেও এক বা তদধিক বিন্দু উৎপন্ন হইতে পারে।

৫। ঘন বস্তু (Solid)

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট যে-কোন বস্তুকেই ঘন পদার্থ বলে। সচরাচর যে সকল বস্তু দেখিতে পাওয়া যায় উহারা সমস্তই ঘন বস্তু যথা—**পুস্তক**, দালান, ফুটবল, লেবু ইত্যাদি।

এইসব ঘন বস্তুর আকৃতি ও পরিমাণ এবং পরস্পরের সম্বন্ধ আলোচনা করাই জ্যামিতি শাস্ত্রের প্রধান উদ্দেশ্য।

৬। **রেখা দুই প্রকার**—সরলরেখা ও বক্ররেখা।

(ক) **সরলরেখা (Straight Line)**

যে রেখার সকল অংশই এক দিকে প্রসারিত তাহাকে সরলরেখা বলে। প্রকৃতপক্ষে সরলরেখার ধারণা এত সহজ ও পরিচিত যে কোন ভাষাদ্বারা উহাকে সহজতর করিয়া প্রকাশ করা যায় না। তবে সরল-রেখার কতকগুলি সাধারণ ধর্ম আছে তদ্দ্বারাই ইহার প্রকৃত পরিচয় পাওয়া যায়। যথা—

(১) দুইটি সরলরেখা দ্বারা কোন স্থান (তল) সীমাবদ্ধ করা যায় না। সুতরাং দুইটি বিন্দু একাধিক সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত হইতে পারে না।

(২) একটি সরলরেখার যে-কোন অংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় অপর কোন অংশের উপর স্থাপিত করিলে দুইটি অংশই সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

(৩) প্রান্তবিন্দু দুইটির মধ্যস্থ ক্ষুদ্রতম বা সংক্ষিপ্ত দূরত্বই একটি সরলরেখা।

প্রান্তবিন্দুজ্ঞাপক দুইটি অক্ষর দ্বারা উহাদের মধ্যস্থ সরলরেখাটি জ্ঞাপন করা হয়। যথা—A এবং B দুইটি প্রান্তবিন্দুর মধ্যস্থ রেখাকে AB সরলরেখা বলা হয়।

(খ) **বক্ররেখা (Curved Line)**

যে রেখার বিভিন্ন অংশ বিভিন্ন দিকে প্রসা-রিত তাহাকে বক্ররেখা বলে।

৭। **তল দুই প্রকার**—সমতল ও বিষমতল।

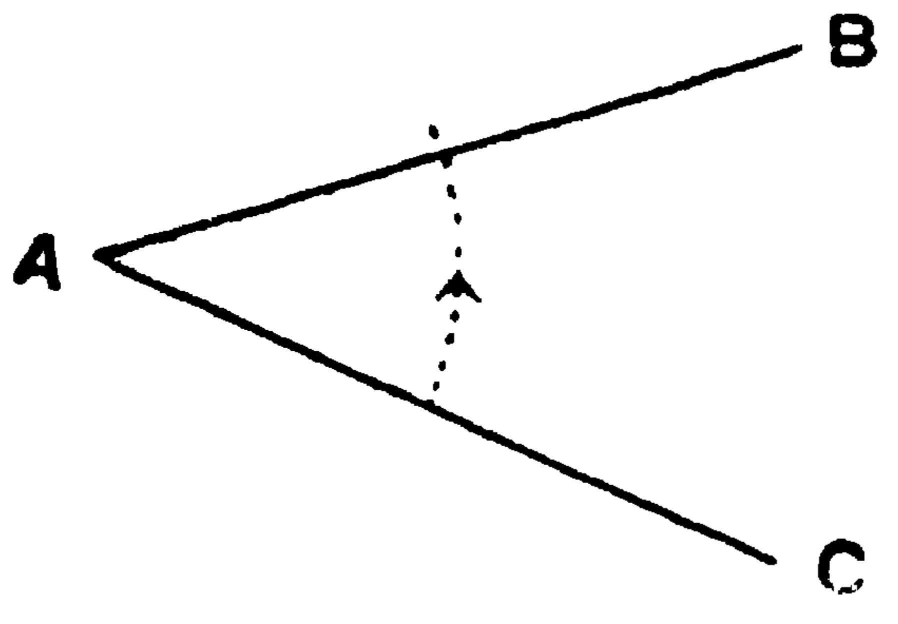
(ক) **সমতল (Plane)**—যে তল সমান অর্থাৎ উঁচু নীচু নহে তাহাকে সমতল বলে। সমতলে যে-কোন দুইটি বিন্দু কল্পনা করিলে উহাদের সংযোজক সরলরেখাটি সর্বতোভাবে এই তলের সহিত মিলিত হইয়া অবস্থিতি করে। সমতলকে সমপৃষ্ঠও বলা হয়। যথা—ঘরের মেঝে।

(খ) **বিষমতল**—যে তল উঁচু নীচু তাহাকে বিষমতল বা অসমতল বলা হয়। যথা—পাহাড়ের রাস্তা।

৮। **কোণ (Angle)**

দুইটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে তাহারা ঐ বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এরূপ বলা হয়। ঐ দুই সরলরেখাকে ঐ কোণের দুইটি বাহু (arms) এবং বিন্দুটিকে উহার শীর্ষ (vertex) বলে।

যথা—AB এবং AC দুইটি সরলরেখা A বিন্দুতে মিলিত হইয়া একটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। AB এবং AC রেখাদ্বয় ইহার **বাহু** এবং A বিন্দু ইহার **শীর্ষ**। এই কোণটিকে "BAC কোণ" এরূপে সূচিত করা হয়। যে স্থলে বুঝিবার কোন অসুবিধা না হয়, সে স্থলে শুধু A অক্ষরটি দ্বারাও BAC কোণটিকে নির্দেশ করা যায়। সাধারণত কোণকে '∠' সাংকেতিক চিহ্নটি দ্বারা সূচিত করা হয়।



১ম মন্তব্য—তিনটি অক্ষর দ্বারা 'কোণ' লিখিত ও পঠিত হয়। শীর্ষ-বিন্দু-জ্ঞাপক অক্ষরটি অপর দুইটি অক্ষরের মধ্যে লিখিতে হয়।

২য় মন্তব্য—দুইটি বক্ররেখা, বা একটি সরল ও একটি বক্ররেখা দ্বারাও কোণ উৎপন্ন হইতে পারে। দুইটি সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণকে 'সরলরৈখিক কোণ' বলে।

৯। কোণের পরিমাণ

কোণ কি বস্তু তাহা বুঝিতে হইলে, মনে কর AB রেখাটির A বিন্দু স্থির আছে কিন্তু উহা ঘুরিয়া AC অবস্থানে আসিয়াছে। যে ঘূর্ণন-প্রক্রিয়া দ্বারা AB রেখাটি AC অবস্থানে আসিতে পারে তাহাকেই 'কোণ' বলা হয়। AB অবস্থান হইতে AC অবস্থানে আসিতে AB বাহুটির যে পরিমাণ ঘূর্ণন আবশ্যক হয়, সেই ঘূর্ণনের পরিমাণকেই BAC কোণের পরিমাণ বলা যাইতে পারে। কোণের বাহু দুইটি যত বড়ই হউক না কেন, ঘূর্ণন পরিমাণ সমানই থাকে। সুতরাং কোণের পরিমাণের সহিত বাহুদ্বয়ের কোন সম্বন্ধ নাই বুঝিতে হইবে।

১০। কোণ মাপিবার একক

যেমন দৈর্ঘ্য মাপিবার জন্য ইঞ্চি, ফুট, হাত ইত্যাদি এক একটি এককের পরিমাণ নির্দিষ্ট আছে, সেইরূপ কোণ মাপিবার জন্যও একটি একক নির্দেশ করিয়া লইতে হয়। যে-কোন মাপের একটি কোণকেই একক ধরিয়া ইহার সহিত তুলনাপূর্বক অন্যান্য সমস্ত কোণের পরিমাণ স্থির করা যাইতে পারে। কিন্তু সর্বসম্মতিক্রমে কয়েকটি একক স্থির করা হইয়াছে এবং উহাদের সাহায্যেই কোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট হইয়া থাকে।

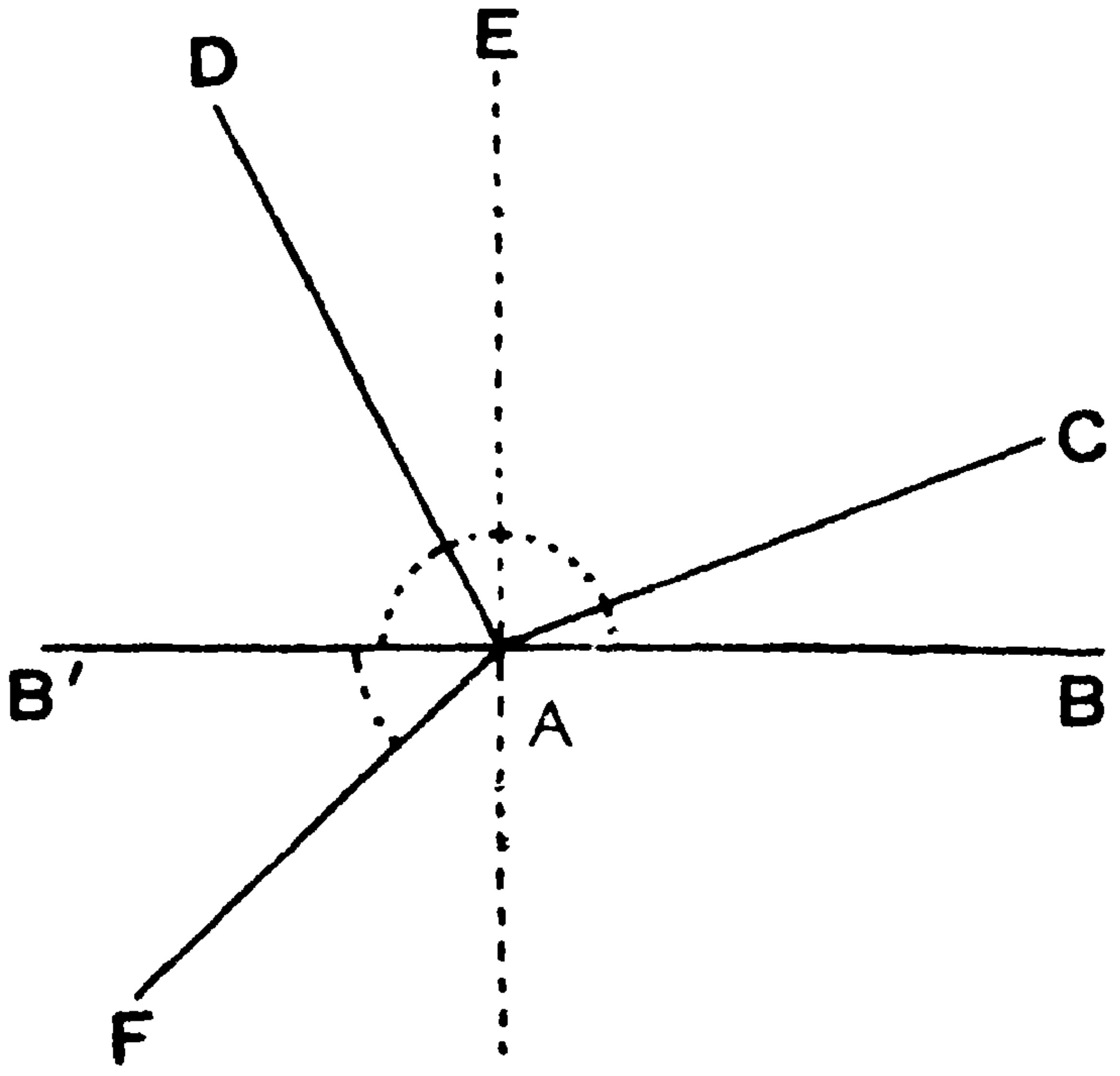
কোণের একটি বাহু শীর্ষ-বিন্দুর চারদিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরিয়া আসিয়া অপর বাহুটির সঙ্গে মিলিত হইতে যে পরিমাণ ঘূর্ণন আবশ্যক তাহাকেই কোণের একক ধরা যাইতে পারে। কিন্তু তাহা না ধরিয়া তাহার এক চতুর্থাংশকে একটি একক ধরা হয় এবং উহাকে এক **সমকোণ** বলে। সুতরাং একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের পরিমাণ চার সমকোণ।

১১। সন্নিহিত কোণ ও সমকোণ

সন্নিহিত কোণ (Adjacent Angles)—দুইটি কোণের একটি সাধারণ বাহু থাকিলে এবং উহারা সাধারণ বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত

হইলে, উক্ত কোণ দুইটিকে **সন্নিহিত কোণ** বলা হয়। BAC এবং DAC কোণ দুইটির সাধারণ বাহু AC এবং ইহারা AC বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত। এই কোণ দুইটিকে সন্নিহিত কোণ বলে।

সমকোণ (Right Angle)—একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যদি উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেককে এক সমকোণ বলে, এবং এই রেখা দুইটির একটিকে অপরটির লম্ব (Perpendicular) বলে।



চিত্রে AE সরলরেখা BAB′ রেখার উপর দণ্ডায়মান হওয়ায় সন্নিহিত BAE এবং B′AE কোণ দুইটি সমান হইয়াছে। সুতরাং ইহারা প্রত্যেকেই একটি সমকোণ এবং AE রেখাটি BAB′ রেখাটির উপর লম্ব।

দ্রষ্টব্য—এখন সহজেই বুঝা যায় যে সমকোণগুলি পরস্পর সমান। এই জন্যই সমকোণকে একক ধরিয়া কোণের পরিমাণ নির্ধারণ করা যায়। আরও সূক্ষ্মরূপে কোণের পরিমাণ নির্ধারণ করিবার জন্য এক সমকোণকে সমান ৯০ ভাগে বিভক্ত করিয়া উহার এক এক ভাগকে একটি একক ধরা হইয়া থাকে এবং প্রত্যেকটিকে ডিগ্রি (degree) বা অংশ বলে।

সুতরাং ১ **সমকোণ**=৯০ ডিগ্রি।

ডিগ্রি প্রকাশ করিবার চিহ্ন (°), যথা—৫ ডিগ্রি = ৫° ।

প্রত্যেক ডিগ্রিকে আবার সমান ৬০ ভাগে বিভক্ত করিয়া এক এক ভাগকে 'কলা' বা 'মিনিট' (minute) বলা হয় । মিনিটের চিহ্ন—(′), যথা— ৮ মিনিট = ৮′ । প্রত্যেক মিনিটকে আবার সমান ৬০ ভাগে বিভক্ত করিয়া এক এক ভাগকে সেকেণ্ড (second) বা বিকলা (″) বলে ; যথা— ৬ বিকলা = ৬″ ।

সূক্ষ্মভাবে কোণের পরিমাণ করিতে হইলে, ডিগ্রি, মিনিট বা সেকেণ্ড—ইহার যে-কোন একটিকে একক ধরা যাইতে পারে ।

১২ । পরিমাণ-ভেদে কোণের নামকরণ

(১) **সূক্ষ্মকোণ** (**Acute Angle**)—এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে সূক্ষ্মকোণ বলে । চিত্রে BAC কোণটি সূক্ষ্মকোণ, কারণ উহা BAE সমকোণটি হইতে ক্ষুদ্রতর ।

(২) **স্থূলকোণ** (**Obtuse Angle**)—এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণকে স্থূলকোণ বলে । চিত্রে BAD কোণটি স্থূলকোণ, কারণ উহা BAE সমকোণটি হইতে বৃহত্তর ।

(৩) **সরলকোণ** (**Straight Angle**)—যখন কোণের একটি বাহু অপর বাহুটির বিপরীত দিকে (কিন্তু একই সরলরেখায়) অবস্থান করে, তখন উহাকে **সরলকোণ** বলে ।

চিত্রে BAB′ কোণটি একটি সরল কোণ, কারণ উহার দুইটি বাহু BA এবং B′A একই সরল রেখার বিপরীত দিকে অবস্থিত ।

সুতরাং সরলকোণ = ২ সমকোণ = ১৮০° ।

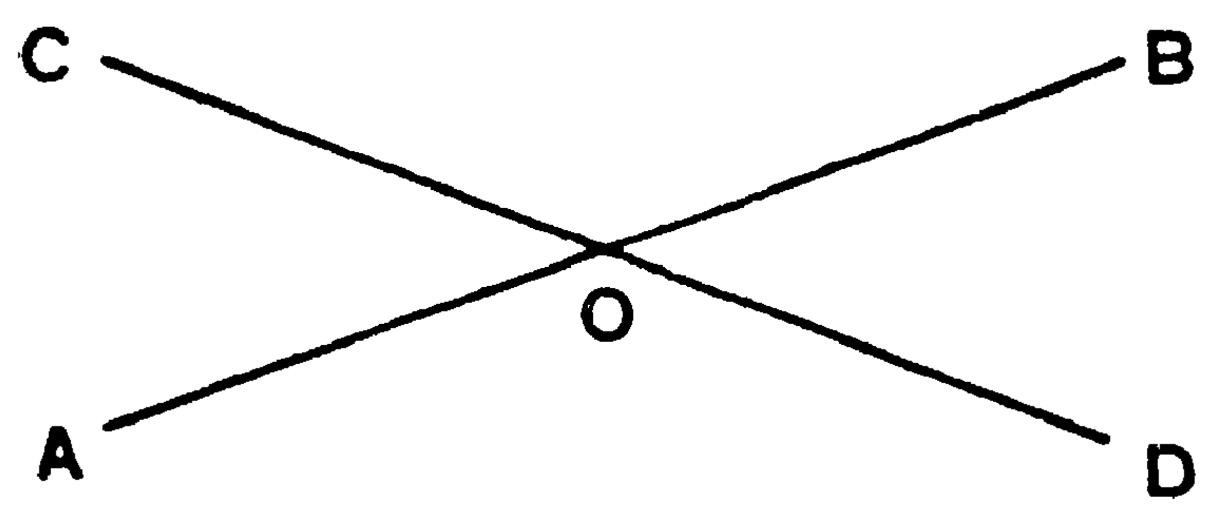
(৪) **প্রবৃদ্ধ কোণ** (**Reflex Angle**)—দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে **প্রবৃদ্ধ** কোণ বলে ।

চিত্রে BAF কোণটি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর । সুতরাং ∠BAF একটি প্রবৃদ্ধ কোণ ।

টীকা—দুইটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহার একটি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং অপরটি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। বিশেষ করিয়া কিছু না বলা থাকিলে ক্ষুদ্রতর কোণটিকেই ধরিতে হয়।

(৫) **বিপ্রতীপ (Vertically Opposite) কোণ**

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে ছেদ-বিন্দুতে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয় উহাদের পরস্পর বিপরীত দিক্‌স্থ দুই দুইটি কোণকে



বিপ্রতীপ কোণ বলে। AB ও CD সরল রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছিন্ন হইয়া AOC, BOD এবং AOD, BOC চারটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। ইহাদের মধ্যে AOC কোণ BOD কোণের বিপরীত এবং AOD কোণ BOC কোণের বিপরীত দিকে অবস্থিত।

$\angle$AOC ও $\angle$BOD পরস্পর বিপ্রতীপ বা বিপরীত কোণ।

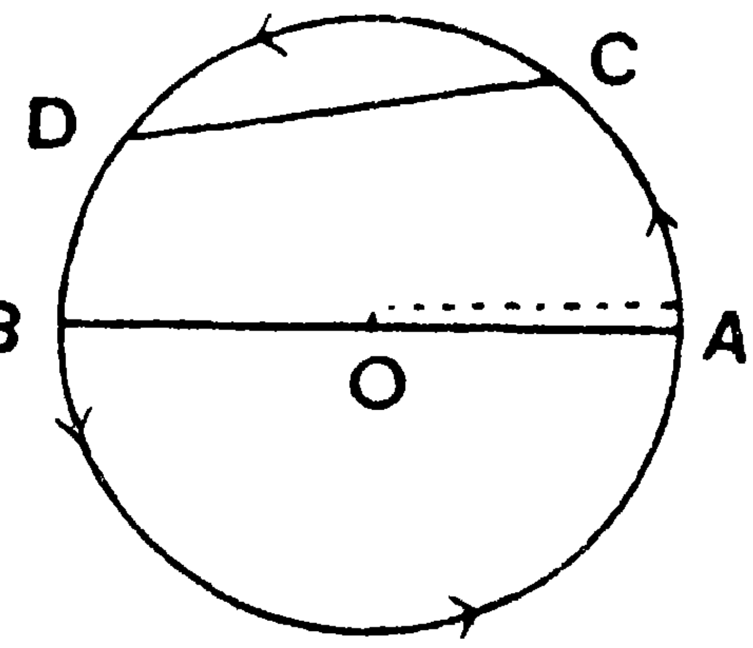
$\angle$AOD ও $\angle$BOC পরস্পর বিপ্রতীপ বা বিপরীত কোণ।

১৩। বৃত্ত (Circle)

কোন বিন্দু একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু হইতে নিয়ত সমান দূরে অবস্থিত থাকিয়া উহার চতুর্দিকে ঘুরিয়া আসিলে যে বক্র রেখাটি উৎপন্ন হয় তাহাকে, অর্থাৎ কোন স্থির বিন্দু হইতে নিয়ত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চার-পথকে (locus) বৃত্ত বলে।

উক্ত বক্ররেখাটি দ্বারা সমতলের সীমাবদ্ধ অংশকেও কখনও কখনও বৃত্ত বলা হয়।

চিত্রে স্থির বিন্দু O হইতে নিয়ত সমান দূরে অবস্থিত A বিন্দুটি O এর চারদিকে ঘুরিয়া যে ACDBA বক্ররেখাটি উৎপন্ন করিয়াছে, উহাই একটি বৃত্ত। O স্থির বিন্দুটিকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) এবং সঞ্চারপথ-রেখাটিকে উহার **পরিধি** (circumference) বলে। কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাকে **ব্যাসার্ধ** (radius) বলে। চিত্রে OA একটি ব্যাসার্ধ। সুতরাং বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি পরস্পর সমান।



কোন সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উভয় দিকে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত হইলে ঐ রেখাকে বৃত্তেব **ব্যাস** (diameter) বলে। চিত্রে AOB একটি ব্যাস।

পরিধির কোন অংশকে **চাপ** (arc) বলে। চিত্রে পরিধির CD অংশ একটি চাপ। চাপের প্রান্ত-বিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাকে বৃত্তের **জ্যা** (chord) বলে। চিত্রে CD রেখা একটি জ্যা।

১ম দ্রষ্টব্য—পরিধির উপরিস্থ সকল বিন্দুই কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

২য় দ্রষ্টব্য—প্রত্যেক ব্যাস দ্বারা বৃত্তটি সমান দুই ভাগে বিভক্ত হয়।

তৈল কাগজে একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহা সাবধানে কাটিয়া লও। এখন উহাকে AB ব্যাসের বরাবর ভাজ কর। এইরূপে বৃত্তের দুইটি অংশ পরস্পর মিলিয়া যাইবে। সুতরাং ব্যাস দ্বারা বৃত্তটি সমান দুই ভাগে বিভক্ত হইল। এইরূপে আর একটি ব্যাসের বরাবর ভাজ করিলেও দেখা যাইবে যে দুইটি অংশ মিলিয়া গিয়াছে।

১৪। স্বীকার্য বিষয় (Postulates)

ব্যবহারিক জ্যামিতিতে চিত্রাঙ্কন দ্বারা রৈখিক ক্ষেত্রাদির সাহায্যে জ্যামিতিক সত্য প্রতিষ্ঠিত হয়, এবং তজ্জন্য আবশ্যক মত সরলরেখা,

বৃত্ত প্রভৃতি অঙ্কিত করিবার প্রয়োজন। এই সব অঙ্কন-কার্যের সুবিধার জন্য যথাসম্ভব অল্প সংখ্যক কয়েকটি সহজ স্বীকারোক্তি করিয়া লইতে হয়, এবং ইহাদের সাহায্যেই আবশ্যক চিত্রাদি অঙ্কিত করা হইয়া থাকে। এই সব সহজ সাধ্য অঙ্কন-প্রক্রিয়ার স্বীকারোক্তিগুলিকে **স্বীকার্য** বলে।

ইউক্লিডের জ্যামিতিতে তিনটি সাধারণ ও সহজ অঙ্কন-ক্রিয়ার সম্ভাবনা স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে—

স্বীকার করা হইল যে—

১ম স্বীকার্য—কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অপর একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা টানা যায়।

২য় স্বীকার্য—কোন নির্দিষ্ট সসীম সরল রেখাকে উভয় দিকে সরলরেখাক্রমে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

৩য় স্বীকার্য—যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

দ্রষ্টব্য—এস্থলে লক্ষ্য করিতে হইবে যে উপরি উক্ত স্বীকার্য ক্রিয়াগুলি সম্পাদন করিবার জন্য একটি রুলার ও একটি কম্পাস যন্ত্রের আবশ্যক। এরূপ অঙ্কিত চিত্রগুলি ঠিক পূর্বপ্রদত্ত সংজ্ঞানুসারেই হইয়াছে এরূপ মনে করিতে হইবে; কিন্তু যত সূক্ষ্মভাবেই অঙ্কিত করা যাউক না কেন, চিত্রগুলি কখনও একেবারে ঠিক জ্যামিতিক চিত্রের রূপ পাইবে না। তবে ধরিয়া লইতে হইবে যে উহারা কাল্পনিকভাবে নির্ভুল হইয়াছে।

১ম টীকা—৩য় স্বীকার্য হইতে দেখা যায় যে প্রথমত কম্পাস যন্ত্রের সাহায্যে যে-কোন সরলরেখার দৈর্ঘ্য ঠিক করিয়া লইয়া, পরে যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং উক্ত রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়। সুতরাং ইহা দ্বারা ইহাও বুঝা যায় যে, কোন বৃহত্তর একটি রেখা হইতে লঘুতরের সমান করিয়া একটি অংশ ছেদ করা যাইতে পারে।

২য় টীকা—উপরি উক্ত তিনটি স্বীকার্য বিষয় ব্যতীত অঙ্কন-সম্বন্ধে আরও কয়েকটি বিষয় কল্পনা দ্বারা স্বীকার করিয়া লওয়া হয়। ইহাদিগকে 'কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন' বলা যায়। যথাস্থানে উহাদের উল্লেখ করা হইবে।

১৫। স্বতঃসিদ্ধ (Axioms)

জ্যামিতির ঔপপত্তিক শাখায় অঙ্কিত ক্ষেত্রাদির বিচার দ্বারা কতকগুলি জ্যামিতিক সত্য প্রমাণিত হয় এবং প্রমাণিত সত্য হইতে নূতন তত্ত্ব অবধারিত হয়। গণিতশাস্ত্রের সমস্ত বিচার-কার্যই কতকগুলি মূলতত্ত্বের সাহায্যে সম্পন্ন হয়। এই তত্ত্বগুলি এত সহজ ও সরল যে উহারা কোন সরলতর সত্য হইতে নির্ণীত হইতে পারে না; কাজেই ইহাদের কোন প্রমাণও আবশ্যক হয় না। ইহাদের সত্যের প্রতীতি স্বভাবতই মনে উদয় হয় এবং বিনা প্রমাণেই গৃহীত হইয়া থাকে। এইজন্য ইহাদিগকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে; অর্থাৎ স্বতঃপ্রতীয়মান কতকগুলি সত্যের নাম স্বতঃসিদ্ধ। সমগ্র জ্যামিতি শাস্ত্রই এইরূপ কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত এবং সমস্ত জ্যামিতিক সিদ্ধান্তই এই সকল হইতে নির্ণীত।

স্বতঃসিদ্ধগুলিকে দুই শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়—

সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ—কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ গণিতশাস্ত্রের সকল রাশির পক্ষেই প্রযোজ্য। ইহাদিগকে সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ বলা যায়—

(১) যে সকল বস্তু একই বস্তুর সমান তাহারা পরস্পর সমান।

(২) সমান সমান বস্তুতে সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান।

(৩) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান।

(৪) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান রাশি দিয়া গুণ করিলে গুণফলগুলি পরস্পর সমান।

(৫) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান রাশি দিয়া ভাগ করিলে ভাগফলগুলি পরস্পর সমান।

(৬) অসমান বস্তুগুলিতে সমান সমান বস্তু যোগ করিলে তাহাদের সমষ্টিগুলিও পরস্পর অসমান।

(৭) অসমান বস্তুগুলি হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলিও পরস্পর অসমান।

(৮) কোন পূর্ণরাশি উহার অংশ হইতে বৃহত্তর।

জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ—কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ শুধু জ্যামিতিক রাশিতেই প্রযোজ্য, তাহাদিগকে জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ বলে।

(১) দুইটি বিন্দুর মধ্যস্থ সরলরেখাই উহাদের লঘুতম দূরত্ব।

(২) দুইটি সরলরেখার দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকিলে তাহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়।

(৩) যে যে বস্তু (রেখা, কোণ বা সামতলিক ক্ষেত্র) একটির উপর আর একটি স্থাপিত হইলে পরস্পরের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যায় তাহারা পরস্পর সমান।

টীকা—এই স্বতঃসিদ্ধটি দ্বারা যে প্রক্রিয়া সূচিত হয় তাহাকে 'উপরিপাত' (Superposition) বলে। ইহা একটি মানসিক প্রক্রিয়া মাত্র। বস্তুত কোন জ্যামিতিক চিত্রকে এক স্থান হইতে তুলিয়া এবং উহার আকারের কোন পরিবর্ত্তন না করিয়া অন্য চিত্রের উপর স্থাপন করা সম্ভবপর নহে। ইউক্লিড তাঁহার জ্যামিতিতে এই প্রক্রিয়াটির সাহায্য লইয়া থাকিলেও ইহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া উল্লেখ করেন নাই।

উপরি উক্ত স্বতঃসিদ্ধগুলি ব্যতীত আরও কতকগুলি জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ ঔপপত্তিক জ্যামিতিতে ব্যবহৃত হয়; সেগুলি যথাস্থানে বিবৃত করা হইবে।

১৬। প্রতিজ্ঞা (Proposition)

সমতলের উপর যে সমস্ত রেখা বা ক্ষেত্রাদি অঙ্কিত করা যায় তাহাদের সাধারণ ধর্মই সামতলিক জ্যামিতির আলোচ্য বিষয়। এই আলোচ্য বিষয়সমূহ কতকগুলি ভিন্ন ভিন্ন প্রস্তাবে বিভক্ত করিয়া লওয়া হয়। উহাদিগকে প্রতিজ্ঞা বলে।

প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার—সম্পাদ্য ও উপপাদ্য।

(১) **সম্পাদ্য (Problem)**—যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক রেখা বা ক্ষেত্রাদি অঙ্কন করিবার প্রস্তাব থাকে তাহাকে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা বলে।

(২) **উপপাদ্য (Theorem)**—যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক সত্যের যাথার্থ্য প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা বলে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যাহা দেওয়া আছে তাহার নাম **কল্পনা** (hypothesis) এবং যাহা প্রমাণ করিতে হয় তাহার নাম **সিদ্ধান্ত** (conclusion)।

১৭। প্রতিজ্ঞার অঙ্গ

প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার ৪টি অঙ্গ—(১) সাধারণ নির্বচন (২) বিশেষ নির্বচন (৩) অঙ্কন ও (৪) প্রমাণ।

(১) **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)

সাধারণ ভাষায় প্রতিজ্ঞার মুখ্য উদ্দেশ্য বিবৃতির নাম সাধারণ নির্বচন।

(২) **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation)

কোন চিত্রের উল্লেখ করিয়া অক্ষর সাহায্যে সাধারণ নির্বচনটি বিশেষ-রূপে পুনরাবৃত্তি করার নাম বিশেষ নির্বচন।

(৩) **অঙ্কন** (Construction)

সম্পাদ্যের সমাধান ও উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য প্রয়োজনীয় সরলরেখা, বৃত্তাদি অঙ্কিত করার নাম অঙ্কন।

(৪) **প্রমাণ** (Proof)

সম্পাদ্য ও উপপাদ্যের প্রস্তাবিত বিষয়টি যে ভাবে যুক্তির সাহায্যে সম্পাদিত বা প্রমাণিত হয় তাহাকে প্রমাণ বলে।

সম্পাদ্যের শেষে "ইহাই সম্পাদ্য বিষয়"—'ই. স. বি.' এই তিনটি সাংকেতিক অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যায়। উপপাদ্যের শেষে "ইহাই উপপাদ্য বিষয়"—'ই. উ. বি.' এই তিনটি সাংকেতিক অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

১৮। অনুসিদ্ধান্ত (**Corollary**)

যে সত্য কোন প্রমাণিত সত্য হইতে সহজেই প্রমাণ করা যায় তাহাকে অনুসিদ্ধান্ত বলে। ইহার সত্যতা মূল উপপাদ্যটি হইতে অনায়াসে অনুমান করিয়া লওয়া যায়,—কোনও ভিন্ন প্রমানের আবশ্যক করে না।

১৯। কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন

ব্যবহারিক জ্যামিতিতে কতকগুলি অঙ্কনের প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হয়। ঔপপত্তিক জ্যামিতিতে কল্পনা দ্বারা ঐ সব প্রক্রিয়া সম্পাদিত হইয়া থাকে।

২০ সাংকেতিক চিহ্ন

জ্যামিতিতে নিম্নলিখিত প্রতীক ও সাংকেতিক চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হয় –

$\because$	যেহেতু	$\angle$	কোণ (angle)
$\therefore$	অতএব	Δ	ত্রিভুজ (triangle)
$=$	সমান	$\bigcirc$	বৃত্ত (circle)
$\equiv$	সর্বসম (congruent)	$\square$	বর্গক্ষেত্র (square)
$\parallel$	সমান্তরাল (parallel)	▭	আয়তক্ষেত্র (rectangle)
			ইত্যাদি

প্রথম অধ্যায়

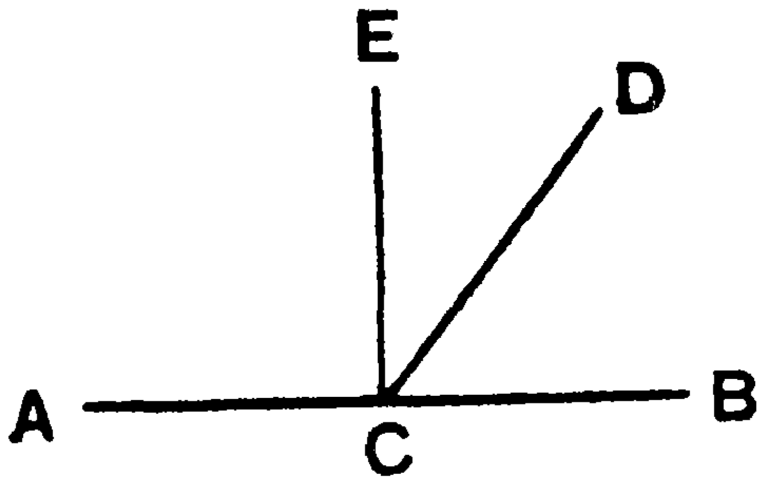
প্রথম পরিচ্ছেদ

সরলরেখা (Straight Line) ও কোণ (Angle)

১ম উপপাদ্য—(ইউক্লিড—১।১৩)

সাধারণ নির্বচন—কোন সরলরেখা অন্য এক সরলরেখার সহিত এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

বিশেষ নির্বচন—মনে কর CD সরলরেখা AB সরলরেখার C বিন্দুতে মিলিত হইয়া ACD ও BCD দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।



যদি CD রেখা ABএর উপর লম্ব হয়, তবে ACD ও BCD কোণ দুইটির প্রত্যেকেই সমকোণ। সুতরাং তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

অঙ্কন—যদি CD রেখা AB এর উপর লম্ব না হয়, AB রেখার C বিন্দুতে উহার উপর CE লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ— $\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD$

সুতরাং, $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle ECD + \angle BCD$

আবার, $\angle ACE + \angle ECB = \angle ACE + \angle ECD + \angle BCD$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle ECB$

$=$ ২ সমকোণ।

[**ই. উ. বি.**]

দ্রষ্টব্য—প্রথম উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচনে দেওয়া আছে "একটি সরলরেখা অন্য সরলরেখার এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিয়াছে"—ইহাই **কল্পিত অংশ** বা **কল্পনা** (hypothesis)। আর প্রমাণ করিতে হইবে যে, "তাহারা দুই সমকোণের সমান"—ইহাই **সিদ্ধান্ত** বা **সাধ্য** (conclusion)।

১ম অনুসিদ্ধান্ত—দুইটি সরলরেখা এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

২য় অনুসিদ্ধান্ত—কতকগুলি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে উহার চারদিকে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

সম্পূরক কোণ—যদি দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তবে উহাদের একটিকে অপরটির "সম্পূরক কোণ" (supplementary angle) বলে। উপরের চিত্রে ACD ও BCD কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

পূরক কোণ—যদি দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হয়, তবে উহাদের একটিকে অপরটির "পূরক কোণ" (complementary angle) বলে। উপরের চিত্রে BCD ও DCE কোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

৩য় অনুসিদ্ধান্ত—

(১) সমান সমান বা একই কোণের সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

(২) সমান সমান বা একই কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

অনুশীলনী

১। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণ নির্ণয় কর—

৯৭° ; ৩৫° ১৯′ ; ১৩২° ২৫′ ৫৩″ ; ১$\frac{১}{২}$ সমকোণ।

[উত্তর—৮৩° ; ১৪৪° ৪১′ ; ৪৭° ৩৪′ ৭″ ; $\frac{১}{২}$ সমকোণ বা ৪৫°]।

২। নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণ নির্ণয় কর—

৪৬° ; ৪২° ১৩′ ; ৭৫° ৩২′ ৫৩″ ; $\frac{১}{৪}$ সমকোণ।

[উঃ—৪৪° ; ৪৭° ৪৭′ ; ১৪° ২৭′ ৭″ , $\frac{৩}{৪}$ সমকোণ।]

৩। নিম্নলিখিত সময়ে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর—

৩ টা. ; ৯ টা. ; ১২ টা.।

[উঃ—৯0° ; ৯0° ; 0°।]

৪। সম্পূরক কোণ দুইটির একটি অন্যটির দ্বিগুণ হইলে, কোণ দুইটি কত ? [উঃ—৬০° ও ১২০°।]

৫। দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যদি উহাদের অন্তর্ভূত একটি কোণ সমকোণ হয়, তবে অন্য কোণ তিনটিও সমকোণ হইবে।

৬। প্রমাণ কর যে একটি সূক্ষ্মকোণের সম্পূরক কোণ একটি স্থূলকোণ।

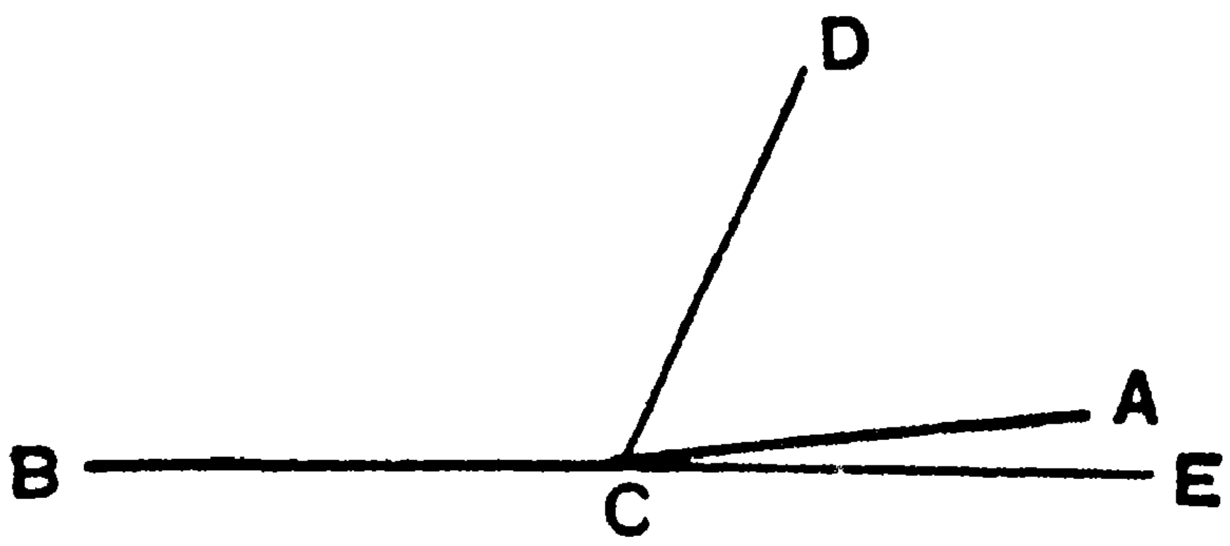
৭। একটি কোণ তাহার পূরক কোণের সমান হইলে, বলত কোণটি কত ডিগ্রি ? [উঃ—৪৫°।]

২য় উপপাদ্য—(ইউক্লিড—১।১৪)

(১ম উপপাদ্যের বিপরীত)

সাধারণ নির্বচন—এক সরলরেখার কোন এক বিন্দুতে ঐ রেখার উভয় পার্শ্বস্থিত অপর দুইটি সরলরেখা সংলগ্ন হইলে যদি উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়, তবে উক্ত দুইটি সরলরেখা একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

বিশেষ নির্বচন—মনে কর CD সরলরেখার C বিন্দুতে উহার উভয় পার্শ্বস্থ EC ও BC সরলরেখাদ্বয় সংলগ্ন হওয়ায় সন্নিহিত ECD ও BCD কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, EC ও BC রেখাদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।



অঙ্কন—যদি EC ও BC রেখাদ্বয় একই সরলরেখা না হয়, BC কে A পর্যন্ত বর্ধিত কর। এখন দেখাইতে হইবে যে, CA ও CE একই সরলরেখা।

প্রমাণ—যেহেতু CD সরলরেখা BA রেখার সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ $\angle BCD + \angle ACD$ = দুই সমকোণ [১ম উপঃ]

কিন্তু $\angle BCD + \angle ECD$ = দুই সমকোণ [কল্পনা]

∴ $\angle BCD + \angle ACD = \angle BCD + \angle ECD$ [১ম স্বতঃ]

এই সমান সমান কোণ-সমষ্টি হইতে $\angle BCD$ বাদ দিলে—

$\angle ACD = \angle ECD$ [৩য় স্বতঃ]

$\therefore$ CA ও CE একই সরলরেখা।

কিন্তু অঙ্কনানুসারে, BC ও CA একই সরলরেখা।

$\therefore$ BC ও CE একই সরলরেখায় অবস্থিত। [**ই. উ. বি.**]

বিকল্প প্রমাণ—যদি EC ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত না হয়, মনে কর CA ও BC একই সরলরেখা।

পূর্বপ্রকারে প্রমাণ করা যায় যে—

$\angle ECD = \angle ACD,$

অর্থাৎ সম্পূর্ণ $\angle ECD$ উহার অংশ $\angle ACD$ এর সমান হয়; কিন্তু তাহা হইতে পারে না। [৮ম স্বতঃ]

সুতরাং CA রেখা BC রেখার সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত হইতে পারে না। এই প্রকারে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, EC ব্যতীত অন্য কোন সরলরেখাই BC এর সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়।

সুতরাং EC ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত। [**ই. উ. বি.**]

১ম দ্রষ্টব্য—দ্বিতীয় উপপাদ্যের প্রথমোক্ত প্রমাণ অর্থাৎ যে প্রমাণে যুক্তিদ্বারা সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাহাকে **অন্বয়ী** (direct) প্রমাণ বলে। শেষোক্ত প্রমাণ অর্থাৎ যে প্রমাণে সিদ্ধান্তের বিপরীত কল্পনা করত উহার অসত্যতা দেখাইয়া প্রকারান্তরে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, তাহাকে **ব্যতিরেকী** (indirect) প্রমাণ বলে।

২য় দ্রষ্টব্য—এই উপপাদ্যের **কল্পনা**—"সন্নিহিত ECD, ও BCD কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণ"। এবং **সিদ্ধান্ত**—"EC ও BC একই সরলরেখা"। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে ১ম উপপাদ্যের কল্পনা ও

সিদ্ধান্ত যথাক্রমে ২য় উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত ও কল্পনা। এই জন্য ২য় উপপাদ্যকে ১ম উপপাদ্যের **বিপরীত উপপাদ্য** বলে।

বিপরীত উপপাদ্য—যদি একটি উপপাদ্যের কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে অন্য একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত ও কল্পনা হয়, তবে একটিকে অপরটির "বিপরীত উপপাদ্য" (Coverse Theorem) বলে।

মনে রাখিও যে, কোন একটি প্রতিজ্ঞা সত্য হইলেও তাহার বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি সর্বদা সত্য নাও হইতে পারে।

অনুশীলনী

১। চারটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইয়া উৎপন্ন কোণ চারটি প্রত্যেকেই সমকোণ হইলে, সরলরেখা চারটি দুই সরলরেখায় অবস্থিত।

২। পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন চারটি কোণের দ্বিখণ্ডক (bisector) চারটির মধ্যে দূরবর্তী দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩। AB সরলরেখার O বিন্দুতে উহার বিপরীত দিকে OC ও OD সরলরেখাদ্বয় মিলিত হওয়ায়, AOD ও BOC কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইল। প্রমাণ কর যে, OC এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৪। তিনটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যদি উহাদের অন্তর্ভূত উৎপন্ন কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি অপরটির লম্ব হয়, তাহা হইলে বহিঃস্থ সরলরেখা দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

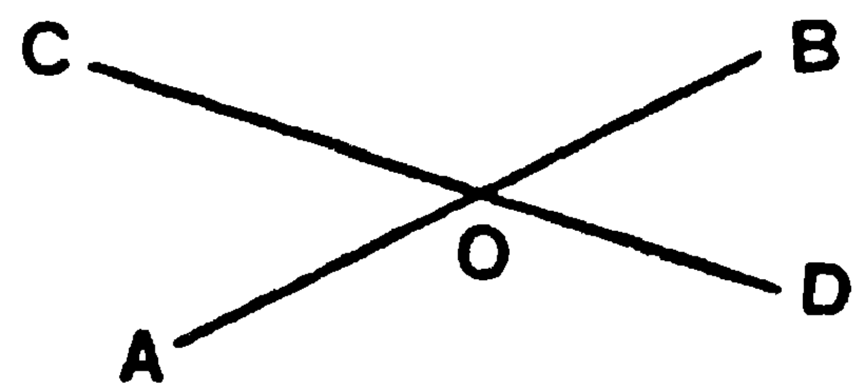
৫। OA, OB, OC, OD সরলরেখা চতুষ্টয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle DOA$। প্রমাণ কর যে, OC ও OA একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩য় উপপাদ্য—(ইউক্লিড—১।১৫)

সাধারণ নির্বচন—দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়।

বিশেষ নির্বচন—মনে কর AB ও CD দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $\angle AOD = \angle BOC$, (২) $\angle AOC = \angle BOD$.



প্রমাণ—AO সরলরেখা CD এর সহিত O বিন্দুতে সংলগ্ন হওয়ায়

$\angle AOD + \angle AOC =$ দুই সমকোণ। [১ম উপঃ]

আবার, CO সরলরেখা AB এর সহিত O বিন্দুতে সংলগ্ন হওয়ায়

$\angle AOC + \angle BOC =$ দুই সমকোণ। [১ম উপঃ]

$\therefore \angle AOD + \angle AOC = \angle AOC + \angle BOC$. [১ম স্বতঃ]

এই সমান সমান সমষ্টি হইতে সাধারণ $\angle AOC$ বাদ দিলে,

$\angle AOD = \angle BOC$. [৩য় স্বতঃ]

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle AOC = \angle BOD$.

[ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। দুইটি সরলরেখা পরস্পর এক বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, কোন একটি কোণের দ্বিখণ্ডক বর্ধিত হইয়া উহার বিপ্রতীপ কোণকেও দ্বিখণ্ডিত করিবে।

২। বিপ্রতীপ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩। OA, OB, OC, OD সরলরেখা চতুষ্টয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। ∠BOC = ∠AOD এবং ∠AOB = ∠COD। প্রমাণ কর যে, AOC ও BOD উভয়ই এক একটি সরলরেখা।

৪। দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয়, উহার একটি ৮০° হইলে অন্যগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[উঃ—১০০°, ৮০°; ১০০°।]

বিবিধ অনুশীলনী

১। ABC কোণের BD দ্বিখণ্ডক। E বিন্দু পর্যন্ত DB বর্ধিত হইল। প্রমাণ কর যে, ∠ABE = CBE.

২। যদি CO সরলরেখা AB সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হয়, এবং XO, YO যথাক্রমে AOC ও BOC কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক হয়, তবে ∠XOY একটি সমকোণ।

টীকা—একটি কোণের দ্বিখণ্ডক রেখাকে উহার অন্তর্দ্বিখণ্ডক (internal bisector) বলে। উক্ত কোণের একটি বাহু বর্ধিত করিলে যে সন্নিহিত কোণটি উৎপন্ন হয় তাহার দ্বিখণ্ডক রেখাকে ঐ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক (external bisector) বলে। সুতরাং উপরের সত্যটিকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়:—

কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত হইবে।

৩। AB সরলরেখার O বিন্দু হইতে বিপরীত পার্শ্বে OC এবং OD সরলরেখা টানা হইল। ∠AOC = ∠BOD এবং AB এর উপর OD লম্ব। প্রমাণ কর যে, ∠AOC = ∠BOC.

৪। ∠AOB এর দ্বিখণ্ডক OC রেখা। AOB কোণের বহিঃস্থ একটি সরলরেখা OD। প্রমাণ কর যে, ∠DOA + ∠DOB = 2∠DOC.

৫। ∠AOB একটি সূক্ষ্মকোণ। প্রমাণ কর যে, AOB সূক্ষ্মকোণ ও AOB স্থূলকোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৬। AOB সরলরেখা কোন কাগজের উপর অঙ্কিত করিয়া উহাকে O বিন্দুতে ভাঁজ করিলে, যদি OA রেখা OB রেখার উপর পতিত হয়, তবে ঐ কাগজের ভাঁজ-রেখাটি AB এর লম্ব হইবে।

৭। AE ও BE দুইটি সরলরেখা E বিন্দুতে মিলিত হইল। EC ও ED রেখাদ্বয় যথাক্রমে EA ও EB এর উপর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে, ∠CED এবং ∠AEB পরস্পর সমান বা সম্পূরক।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

সমান্তরাল (Parallel) সরলরেখা (Straight Lines)

সমান্তরাল সরলরেখা—

জ্যামিতি-শাস্ত্রে সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধে ধারণা করা একটু কঠিন। এক সমতলের দুইটি সরলরেখা সর্বদা একই দিকে প্রসারিত হইতে থাকিলে উহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়। রেলপথের লাইন্ দুইটি সম্বন্ধে চিন্তা করিলেই সমান্তরাল সরলরেখার কতকটা ধারণা হইতে পারে। রেল পথে যতদূরই যাওয়া যায় দেখা যাইবে যে, রেলের লাইন দুইটি কোথাও মিলিয়া যায় নাই, বরাবর একই দিকে চলিয়াছে এবং তাহাদের মধ্যস্থ দূরত্বও কখন কমবেশী হয় না। রেলের লাইন দুইটিকে সমান্তরাল সরলরেখার একটি দৃষ্টান্তস্বরূপ ধরা যাইতে পারে। কিন্তু বিবেচনা করিয়া দেখিতে হইবে যে, সমান্তরাল রেখাদ্বয় কখনও পরস্পর মিলিত হইতে পারে কি না। ঐ সব রেখা-ক্রমে যে দিকেই অগ্রসর হওয়া যায়, দেখা যাইবে

যে তাহাদের মধ্যবর্ত্তী দূরত্ব সর্বদা সমানই আছে। উহারা কখনও মিলিতেছে না। ইহা হইতে এই সিদ্ধান্তই করা যায় যে, সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় কখনও মিলিত হইতে পারে না।

সুতরাং সমান্তরাল সরলরেখার সাধারণ ধর্ম ঃ—

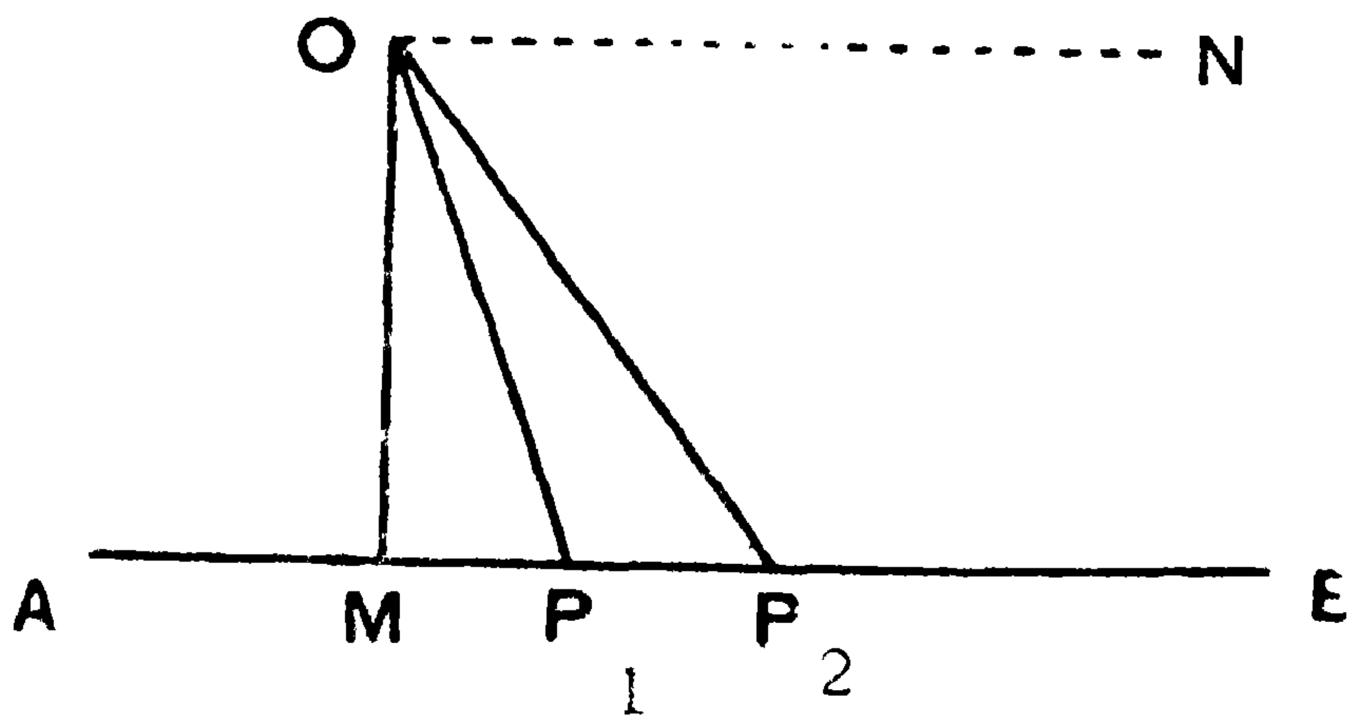
(১) তাহারা একই সমতলে অবস্থিত হইবে,

(২) তাহাদের পরস্পরের দূরত্ব সর্বত্র একই হইবে,

(৩) উভয়দিকে যদৃচ্ছা বর্ধিত হইলেও তাহারা কখনও মিলিত হইবে না, অর্থাৎ উহারা সর্বদা একইদিকে প্রসারিত থাকিবে।

মনে রাখিতে হইবে যে বিভিন্ন সমতলের দুইটি সরলরেখা যদিও একই দিকে প্রসারিত হইয়া কখনও মিলিতে পারে না, কিন্তু তথাপি উহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা যায় না।

অন্য প্রকার—প্রকারান্তরেও সমান্তরাল সরলরেখার ধারণা করা যাইতে পারে। মনে কর O বিন্দু দিয়া অঙ্কিত OP রেখা কোন সরলরেখা AB কে কোন বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OP রেখা O বিন্দুর চারপার্শ্বে ঘুরাইলে উহা AB রেখাকে P_1, P_2,···প্রভৃতি বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে। OP যখন OM অবস্থানে আসে, তখন OM রেখা AB এর উপর লম্ব হয়। কিন্তু যেমন OP ঘুরিতে থাকে, AB এর সহিত উহার ছেদ



বিন্দুটিও ক্রমেই M বিন্দুটি হইতে দূরে সরিয়া যায়; এবং OP ও AB এর অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণও ক্রমেই কমিতে থাকে। অবশেষে OP রেখা

যখন ON অবস্থানে আসে, তখন ছেদ বিন্দুটি M অথবা O বিন্দু হইতে বহুদূরে (অনন্তে) সরিয়া যায়। OP এবং AB এর অন্তর্ভূত কোণটিও ক্রমে কমিয়া অবশেষে একেবারে শূন্য হইয়া যায়, অর্থাৎ OP (ON) এবং AB রেখাদ্বয় একইদিকে প্রসারিত হয়।

ইহা হইতে বুঝা যায় যে, সমান্তরাল সরলরেখাগুলি অনন্তে (infinity) মিলিত হইতে পারে, কিন্তু ইহাদের কোন-একটি রেখাক্রমে যতদূর ইচ্ছা অগ্রসর হইলেও কখনও ঐ বিন্দুতে পৌছান যাইবে না। স্বতরাং আনুমানিক ভাবে সমান্তরাল সরলরেখা অনন্তে মিলিত হইলেও কার্যত তাহারা কখনও মিলিত হয় না। এইজন্য জ্যামিতিশাস্ত্রে নিম্নলিখিত সংজ্ঞাটিই সাধারণত গৃহীত হইয়া থাকে—

সংজ্ঞা—যদি এক সমতলস্থ দুই কিম্বা তদধিক সরলরেখাকে উভয়দিকে যদৃচ্ছা বর্ধিত করিলেও তাহারা কখনও পরস্পর মিলিত না হয়, তাহা হইলে এই সরলরেখাগুলিকে **সমান্তরাল সরলরেখা** বলে।

উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে সহজেই অনুমিত হইবে যে সমান্তরাল সরলরেখাগুলি সর্বদা একই দিকে প্রসারিত। কোন নির্দিষ্ট অক্ষরেখা (line of reference) হইতে উহাদের দিক্ নিরূপিত হইলে, ঐ অক্ষরেখার সহিত উহাদের নতি (inclination) একই হইবে। অতএব ঐ রেখার সহিত তুলনায় উহারা একই দিকে প্রসারিত হইবে। স্বতরাং সমান্তরাল সরলরেখার নিম্নলিখিত সংজ্ঞাটিও দেওয়া যাইতে পারে—

এক সমতলস্থ দুই সরলরেখা বিভিন্ন অবস্থান হইতে সর্বদা একই দিকে প্রসারিত হইলে উহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে*।

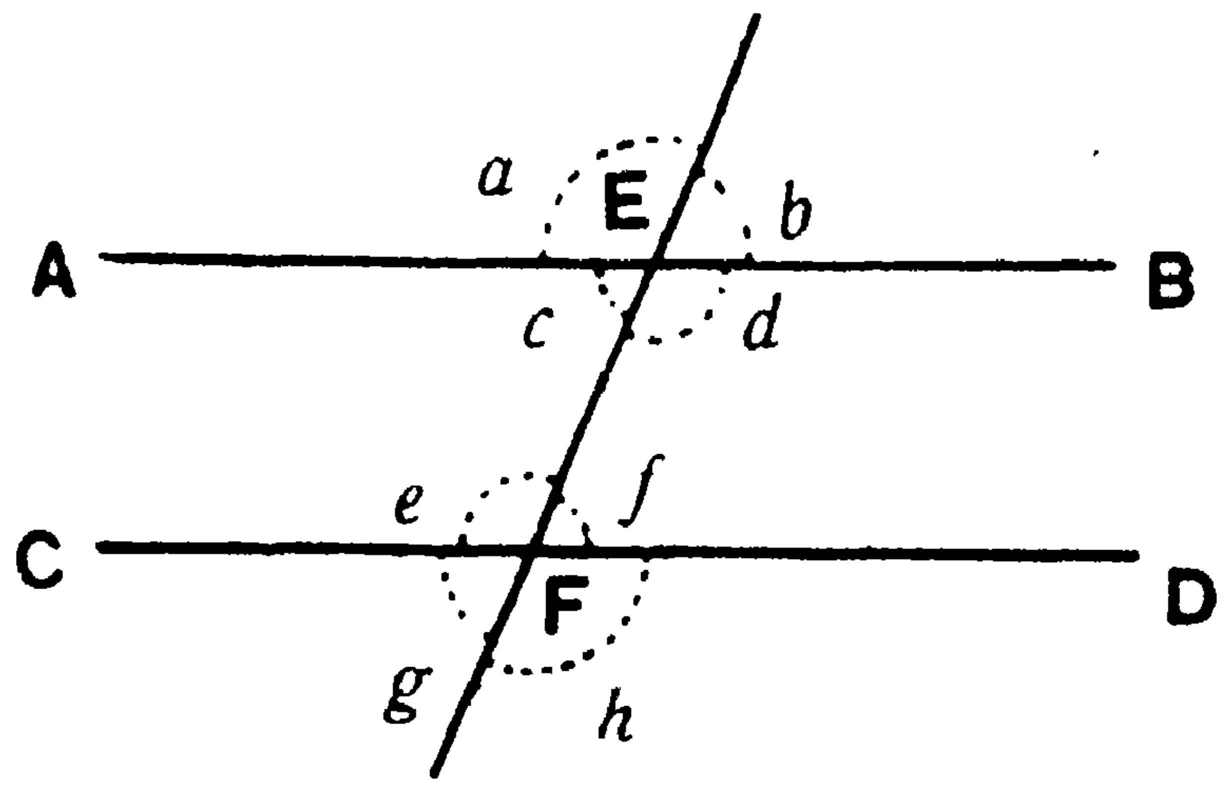
* দুইটি সরলরেখার মধ্যস্থ দূরত্ব সর্বদা সমান থাকিলে উহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা যাইতে পারে।

একান্তর (Alternate) ও অনুরূপ (Corresponding) কোণ—

EF সরলরেখাটি AB ও CD অপর দুইটি সরলরেখাকে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিলে আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। এই কোণগুলির বিশেষ বিশেষ নাম দেওয়া হইয়া থাকে।

(১) c, f এবং d, e কোণ পরস্পর **একান্তর কোণ**।

(২) b, f; a, e; d, h এবং c, g কোণ পরস্পর **অনুরূপ কোণ**।



(৩) a, b, g, h কোণগুলি **বহিঃকোণ** (exterior angle).

(৪) c, d, e, f কোণগুলি **অন্তঃকোণ** (interior angle).

কখন কখন b এবং f কোণদ্বয়কে যথাক্রমে EF রেখার বহিঃকোণ এবং অন্তঃবিপরীত কোণ বলা হয়।

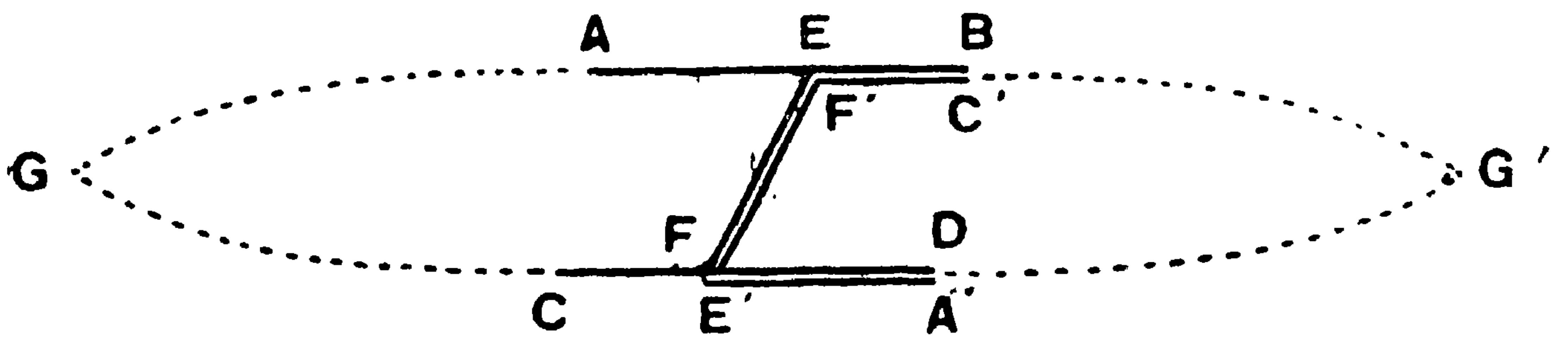
(৫) EF সরলরেখাটিকে **ভেদক** (transversal) বলা হয়।

৪র্থ উপপাদ্য—(ইউ—১।২৭)

সাঃ নিঃ—একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে, যদি একান্তর কোণগুলি সমান হয়, তবে ঐ দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর EF সরলরেখা (ভেদক) AB ও CD সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করায় ∠AEF = একান্তর ∠EFD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।



অঙ্কন—যদি AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল না হয়, তবে উহারা উভয় দিকে বর্ধিত হইলে যে-কোন একদিকে মিলিত হইবে। মনে কর উহারা A ও C বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়া G বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন তৈল কাগজে AEFCG ক্ষেত্রের অনুরূপ A′E′F′C′G′ ক্ষেত্রটি অঙ্কিত করিয়া, উহাকে উল্টাইয়া ঐ সমতলে এমনভাবে স্থাপন কর যেন E′ বিন্দু F বিন্দুর উপর এবং F′ বিন্দু E বিন্দুর উপর পতিত হয়। কিন্তু G′ বিন্দুটি G বিন্দুর বিপরীত দিকে পড়ে।

প্রমাণ—যেহেতু ∠A′E′F′ = ∠AEF = ∠EFD,

∴ E′A′ রেখা FD রেখার উপর অবস্থিত হইবে।

আবার, ∠E′F′C′ = ∠EFC

= ∠EFD এর সম্পূরক

= ∠AEF এর সম্পূরক = ∠FEB ;

স্থতরাং F′C′ রেখা EB রেখার উপর অবস্থিত হইবে।

অতএব EB ও FD রেখাদ্বয় যথাক্রমে B ও D বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়া G′ বিন্দুতে মিলিত হইবে। অর্থাৎ AB ও CD সরলরেখা দুইটি উভয় দিকে বর্ধিত হইয়া G এবং G′ বিন্দুতে মিলিত হইয়া সমতলের একটি অংশ সীমাবদ্ধ করিবে। কিন্তু ইহা অসম্ভব। অতএব AB ও CD রেখাদ্বয় A ও C বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়া পরস্পর মিলিত হইতে পারে না। এইরূপ উহারা B ও D বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়াও মিলিত হইতে পারে না। অর্থাৎ AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

[ই. উ. বি.]

বিকল্প প্রমাণ—সমান্তরাল সরলরেখার দ্বিতীয় সংজ্ঞা হইতেও এই উপপাদ্যটির সত্যতা সহজেই উপলব্ধি হইবে :—

(২৮ পৃষ্ঠার চিত্রে), $\angle c =$ বিপ্রতীপ $\angle b =$ অনুরূপ $\angle f$;

অর্থাৎ AB ও CD সরলরেখাদ্বয় EF রেখার E ও F বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। EF রেখা হইতে দিক্ নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে EF রেখার সহিত AB ও CD রেখার নতি (inclination) সমান। সুতরাং AB ও CD রেখা EF (অক্ষ) রেখা হইতে সর্বদা একই দিকে প্রসারিত। এইরূপে যে-কোন রেখা হইতে দিক্ নির্ণয় করিলেও দেখা যাইবে যে উহারা সর্বদা একই দিকে প্রসারিত। সুতরাং AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

মন্তব্য—এস্থলে শুধু সরলরেখার সাধারণ ধর্মের সাহায্যে বর্তমান উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল। ৮ম উপপাদ্যের ৪র্থ অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে আর একটি প্রমাণ দেওয়া যাইতে পারে (৪২ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য)। ইউক্লিড এই শেষোক্ত প্রকারেই বর্ত্তমান উপপাদ্যটি প্রমাণ করিয়াছেন।

৫ম উপপাদ্য—(ইউ—১।২৮)

সাঃ নিঃ—একটি সরলরেখা (ভেদক) অন্য দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি,

(১) অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়,

অথবা (২) ভেদকের এক পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়,

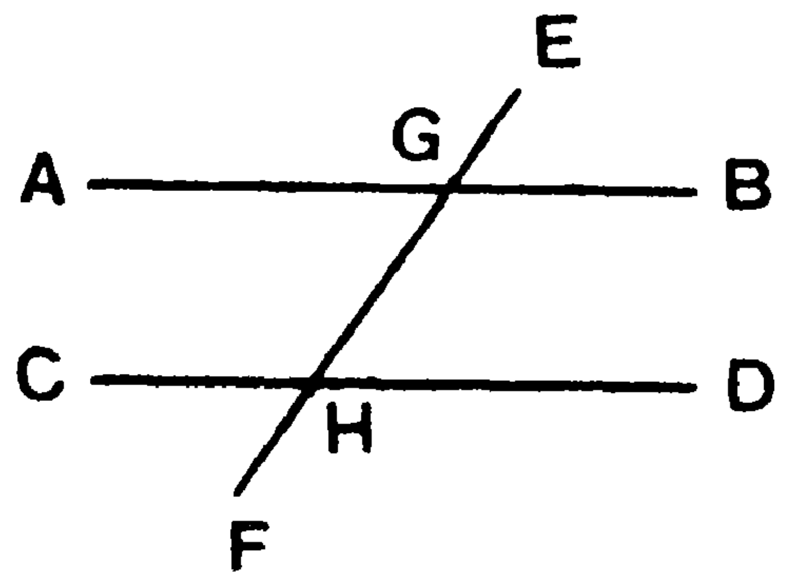
তবে ঐ দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর EF ভেদক AB ও CD সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করায়,

(১) ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD,

অথবা (২) EF রেখার এক পার্শ্বস্থ ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।



প্রমাণ—(১) ∠AGH = বিপ্রতীপ ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD ;

অর্থাৎ ∠AGH = একান্তর ∠GHD

সুতরাং AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল। [৪র্থ উপঃ]

(২) ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ ;

কিন্তু ∠AGH + ∠BGH = দুই সমকোণ। [১ম উপঃ]

∴ ∠BGH + ∠GHD = ∠AGH + ∠BGH ;

এই সমান সমান সমষ্টি হইতে ∠BGH বাদ দিয়া—

∠AGH = একান্তর ∠GHD.

AB ও CD সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল। [**ই. উ. বি.**]

অনুশীলনী

১। যদি দুই বা তদধিক সরলরেখা একই সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

২। চারটি রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হইলে বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

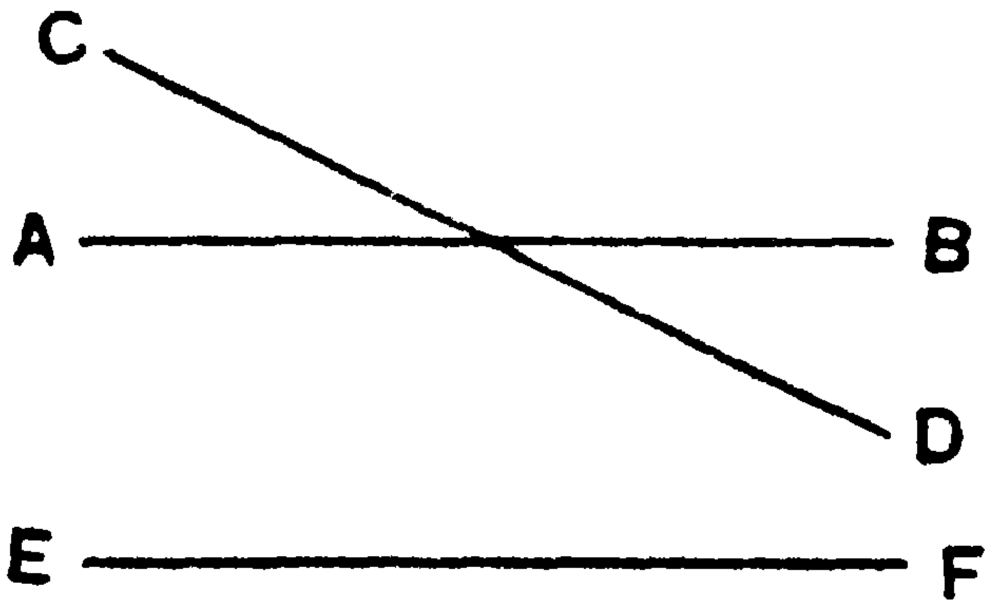
৩। AB ও CD সরলরেখা দুইটিকে EF ভেদক যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি $\angle AGE + \angle CHF =$ দুই সমকোণ হয়, তবে AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল্ হইবে।

৪। কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর কেবলমাত্র একটি লম্ব টানা যাইতে পারে।

৫। একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখার উপর পতিত হইয়া দুইটি সমান একান্তর কোণ উৎপন্ন করিলে, উহাদের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

৬। AB রেখার A বিন্দুতে AB এর সহিত ৪০° কোণ করিয়া AC রেখা টান। এবং C বিন্দু দিয়া AC এর অপর পার্শ্বে উহার সহিত ৪০° কোণ করিয়া CD রেখা টান। বলিতে পার AB ও CD রেখা পরস্পর সমান্তরাল কিনা?

প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ (Playfair's Axiom)—**দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়ই কোনও তৃতীয় সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।**



অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল কেবলমাত্র একটি সরলরেখাই টানা যায়। যথা—AB ও CD সরলরেখা-দ্বয় পরস্পর ছেদ করিয়া, উভয়ই কোন তৃতীয় EF সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

৬ষ্ঠ উপপাদ্য—(ইউ—১।২৯)

(৪র্থ ও ৫ম উপপাদ্যের বিপরীত)

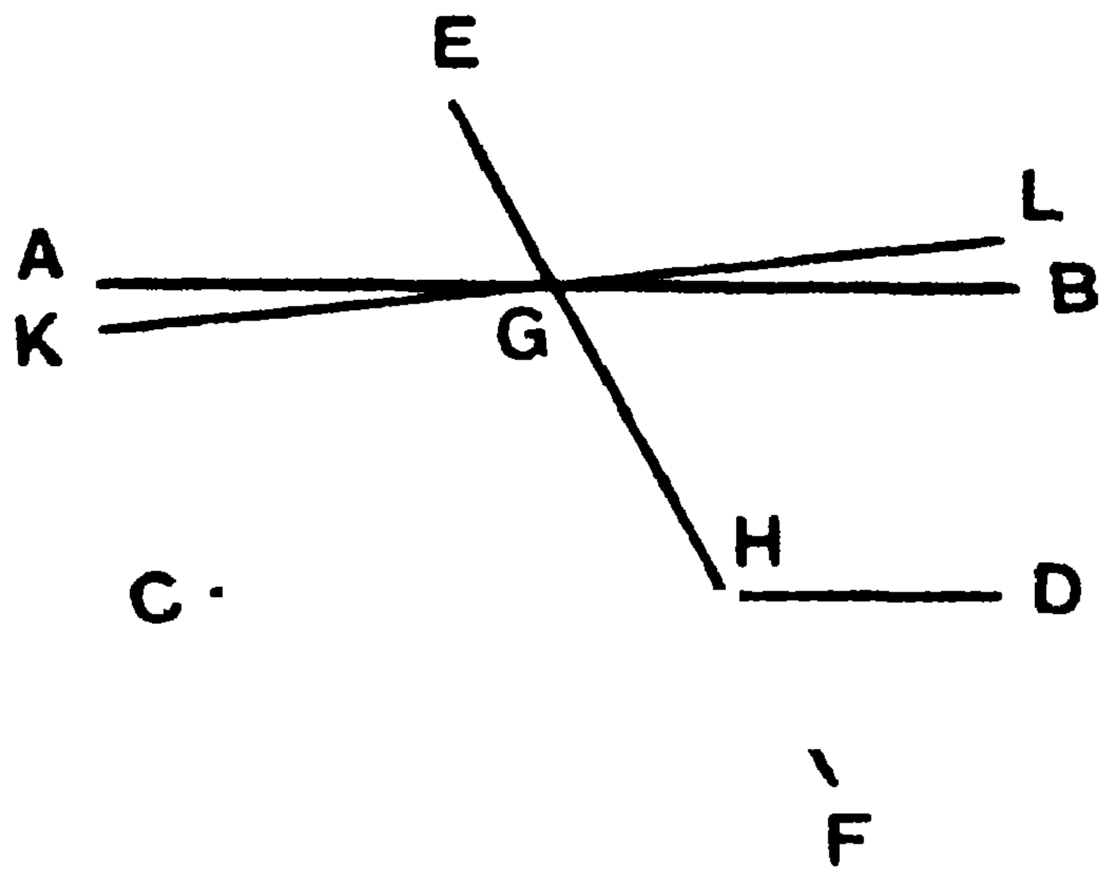
সাঃ নিঃ—কোন সরলরেখা (ভেদক) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(১) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে,

(২) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে,

এবং (৩) ঐ ভেদকের একই পার্শ্বস্থিত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে—



(১) ∠AGH = একান্তর ∠GHD,

(২) ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD,

এবং (৩) EF ভেদকের একই পার্শ্বস্থ ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ।

প্রমাণ— (১) যদি ∠AGH ও ∠GHD পরস্পর সমান না হয়, মনে কর ∠GHD অপেক্ষা ∠AGH বৃহত্তর। এখন KGL রেখা টানিয়া ∠KGH কে ইহার একান্তর ∠GHD এর সমান কর।

∴ KG সরলরেখা CD সরলরেখার সমান্তরাল। [৪র্থ উপঃ]

কিন্তু AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং KG এবং AB দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাই CD সরল রেখাটির সমান্তরাল হইবে, কিন্তু ইহা অসম্ভব। [প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ]

সুতরাং ∠GHD অপেক্ষা ∠AGH বৃহত্তর নহে।

এইরূপে দেখা যায় যে, ∠GHD অপেক্ষা ∠AGH ক্ষুদ্রতরও নহে।

অর্থাৎ ∠AGH = একান্তর ∠GHD.

(২) ∠EGB = বিপ্রতীপ ∠AGH [৩য় উপঃ]

= একান্তর ∠GHD,

∴ ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD.

(৩) যেহেতু ∠BGH + ∠BGE = দুই সমকোণ ;

এবং ∠BGE = অনুরূপ ∠GHD,

∴ ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ।

[ই. উ. বি.]

অনু—যদি একটি কোণের বাহুদ্বয় যথাক্রমে অপর একটি কোণের বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল হয়, তবে ঐ কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

ইউক্লিডের সমান্তরাল স্বতঃসিদ্ধ—

কোন সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি উহার একই পার্শ্বের অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ সরলরেখাদ্বয় বর্ধিত হইলে, উক্ত ভেদকের যে পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সেই পার্শ্বে পরস্পর মিলিত হইবে।

ইহাই ইউক্লিডের ১২শ স্বতঃসিদ্ধ (Parallel Axiom)। পরবর্তী জ্যামিতিকারগণ ইহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গ্রহণ করিতে অস্বীকৃত হইয়া

উপপাদ্য হিসাবে প্রমাণ করিতে প্রয়াস পান। কিন্তু অকৃতকার্য হইয়া ইহাকে বর্জন করত জ্যামিতি শাস্ত্রের আর একটি নূতন পদ্ধতি প্রবর্তন করেন। সেই পদ্ধতিই বর্তমানে নন্-ইউক্লিডিয়ান (Non-Euclidean) জ্যামিতি নামে পরিচিত।

অনুশীলনী

১। কোন সরলরেখা কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখার একটির উপর লম্ব হইলে, প্রত্যেকটির উপরই লম্ব হইবে।

২। প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটি উহাদের সমান্তরাল দুইটি রেখার অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমান।

৩। চারটি রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুযুগল সমান্তরাল হইলে, উহার কোণ চতুষ্টয়ের সমষ্টি চার সমকোণ হইবে।

৪। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখার উপর দুইটি লম্ব টানিলে তাহারা সমান্তরাল হইতে পারে না।

৫। কোন সরলরেখা কতিপয় সমান্তরাল সরলরেখার একটিকেও ছেদ করিলে, উহাদের সকলকেই ছেদ করিবে।

৬। চারটি রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুযুগল সমান্তরাল হইলে, বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। এবং উহাদের একটি কোণ সমকোণ হইলে প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ হইবে।

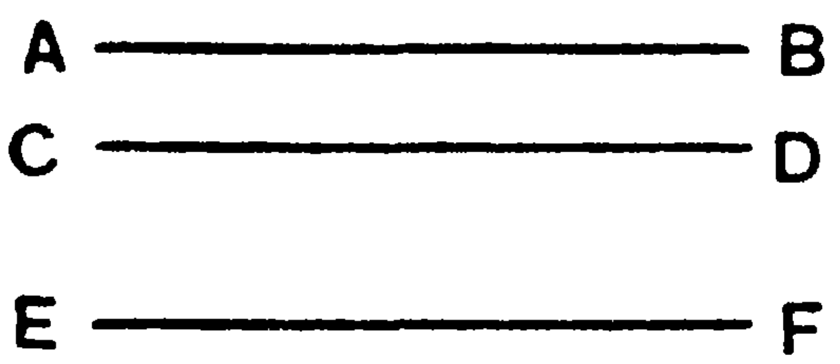
৭। AB ও CD সরলরেখা দুইটি যথাক্রমে EF ও GH সরলরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব হইলে, এবং EF রেখা GH রেখার সমান্তরাল হইলে, AB রেখা CD রেখার সমান্তরাল হইবে।

৮। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে কোন একটি সরলরেখা ছেদ করিলে, চারটি অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডকগুলি-দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল ও প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হইবে।

৭ম উপপাদ্য—(ইউ—১।৩০)

সাঃ নিঃ—যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB ও CD সরলরেখা দুইটি উভয়ই EF সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB রেখা CD রেখার সমান্তরাল।



প্রমাণ—যদি AB রেখা CD রেখার সমান্তরাল না হয়, তবে উহা-দিগকে উভয়দিকে যথেষ্ট পরিমাণে বর্ধিত করিলে যে দিকেই হউক না কেন উহারা পরস্পর ছেদ করিবে। তখন পরস্পরচ্ছেদী AB ও CD সরলরেখা দুইটি উভয়ই একই EF রেখার সমান্তরাল হইবে। কিন্তু ইহা হইতে পারে না। [প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ]

সুতরাং AB ও CD রেখাদ্বয়কে উভয়দিকে বর্ধিত করিলেও তাহারা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না। অর্থাৎ AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। **[ই. উ. বি.]**

মন্তব্য। LMN একটি ভেদক অঙ্কিত করিয়া দেখা যাইতে পারে যে AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

বিবিধ অনুশীলনী

১। কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার কোন-একটির সমান্তরাল হইলে অন্যটিরও সমান্তরাল হইবে।

২। AB ও AC রেখা দুইটি DE রেখার সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩। যদি কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার কোন একটিরও সমান্তরাল না হয়, তবে অন্যটিরও সমান্তরাল হইতে পারে না।

৪। একই দিকে অঙ্কিত দুইটি কোণের একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান্তরাল হইলে, ঐ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটিও সমান্তরাল হইবে।

৫। AB এবং CD দুইটি সরল দণ্ড যথাক্রমে A ও C দুইটি কীলকের চতুর্দিকে ঘুরিতেছে। AB মিনিটে ১২ বার এবং CD মিনিটে ১৫ বার ঘুরে। যদি উহারা একই অভিমুখে সমান্তরাল থাকিয়া ঘুরিতে আরম্ভ করে, তবে কতক্ষণ পরে উহারা (১) বিপরীত অভিমুখে, (২) পুনরায় একই অভিমুখে থাকিয়া সমান্তরাল হইবে?

[উঃ—(১) ১০ সেকেণ্ড; (২) ২০ সেকেণ্ড।]

৬। যদি কোন সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করায়, উহার বিপরীত পার্শ্বস্থ বহিঃকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি সমান্তরাল হয়, তবে ঐ সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

৭। যদি AB ও CD সরলরেখা দুইটিকে EF রেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করায়, $\angle AGE = \angle FHD$ হয়, তবে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

৮। যদি কোন সরলরেখা অন্য দুইটি সরলরেখার মধ্যে কেবল একটির উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইতে পারে না।

৯। চারটি সরলরেখা-দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুযুগল পরস্পর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, ঐ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণ চতুষ্টয়ের দ্বিখণ্ডক-দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুযুগল সমান্তরাল এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হইবে।

তৃতীয়

ঋজুরেখ (Rectilinear) ক্ষেত্র (Figures)

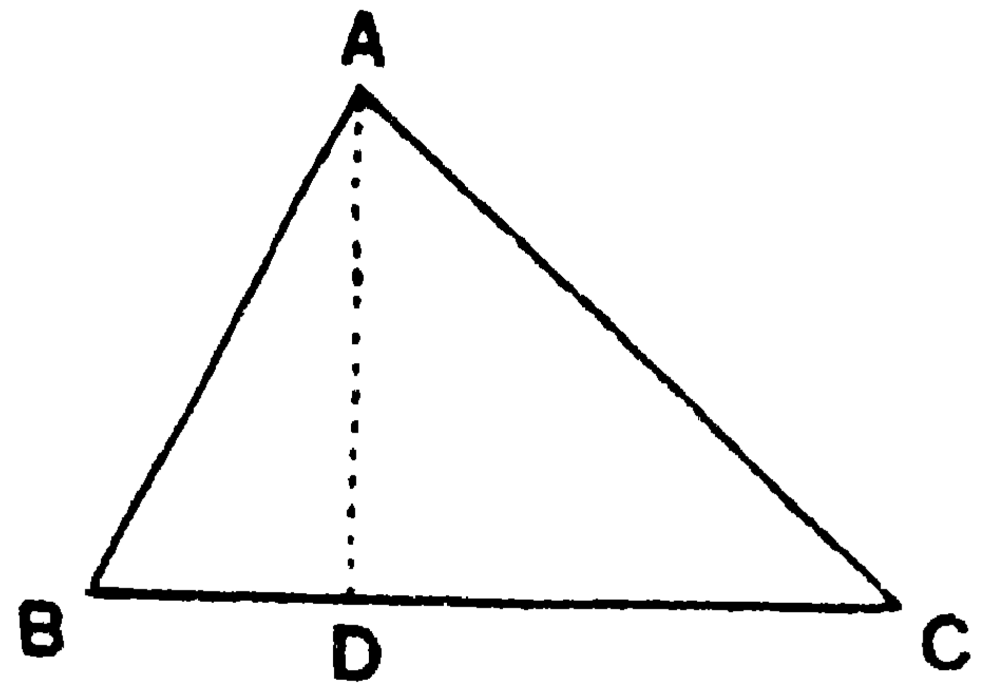
ত্রিভুজ (Triangle)

ঋজুরেখ ক্ষেত্র—

তিন বা তদধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রগুলির সাধারণ নাম "ঋজুরেখ ক্ষেত্র", বা· "সরলরৈখিক ক্ষেত্র" (rectilinear figure)। সীমানা-সূচক সরলরেখাগুলিকে ঐ ক্ষেত্রের **বাহু** (side) এবং বাহুগুলির পরস্পর মিলনে উৎপন্ন কোণগুলিকে ঐ ক্ষেত্রের **কোণ** বলে। বাহুসমূহের দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা (perimeter) বলে।

তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (triangle), চারটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **চতুর্ভুজ** (quadrilateral), পাঁচটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **পঞ্চভুজ** (pentagon), ছয়টি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **ষড়ভুজ** (hexagon) বলে। এইরূপ বহু সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (polygon) বলে।

ত্রিভুজ—AB, BC ও CA তিনটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত না হইলেই সমতলের একটি ABC অংশ সীমাবদ্ধ করিবে। এই সীমাবদ্ধ ABC



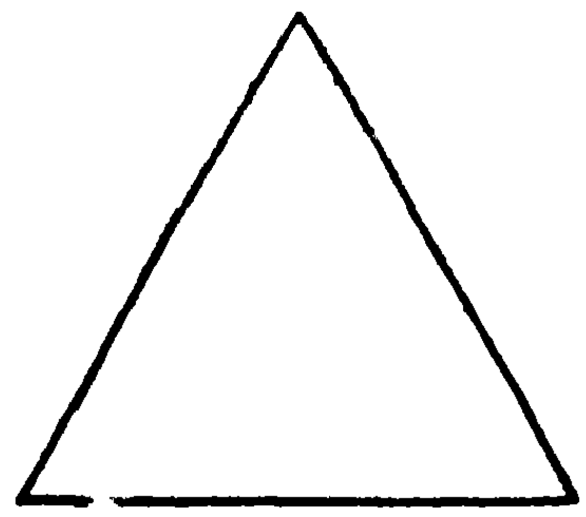
অংশকেই ত্রিভুজ বলে। এবং উহা "ABC ত্রিভুজ" এইরূপে সূচিত হয়। উহার তিনটি বাহু AB, BC এবং CA। BC বাহুর উপর

ত্রিভুজটিকে দণ্ডায়মান মনে করিলে, BC বাহুকে ABC ত্রিভুজের **ভূমি** (base) বলে এবং উহার বিপরীত কৌণিক-বিন্দু A কে **শীর্ষ** (vertex) বলে। এবং বিপরীত BAC কোণকে **শিরঃকোণ** (vertical angle) বলে।

শীর্ষ-বিন্দু A হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব টানিলে, AD কে ABC ত্রিভুজের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (altitude) বলে। শীর্ষ হইতে ভূমির মধ্যবিন্দু-যোজক রেখাকে ত্রিভুজের **মধ্যমা** (median) বলে।

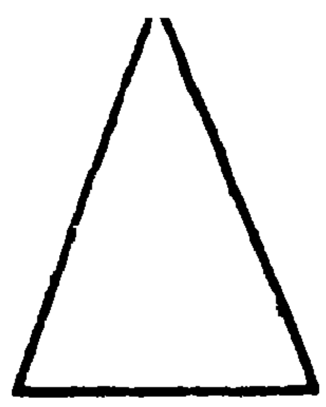
বাহু-ভেদে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ—

(১) **সমবাহু ত্রিভুজ**—কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর সমান হইলে উহাকে সমবাহু ত্রিভুজ (equilateral triangle) বলে।



সমবাহু ত্রিভুজ

(২) **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ**—কোন ত্রিভুজের মাত্র দুইটি বাহু সমান হইলে উহাকে **সমদ্বিবাহু** (isosceles) ত্রিভুজ বলে। ইহার সমান বাহুদ্বয়কে বাহু এবং অপর বাহুটিকে ভূমি বলে।



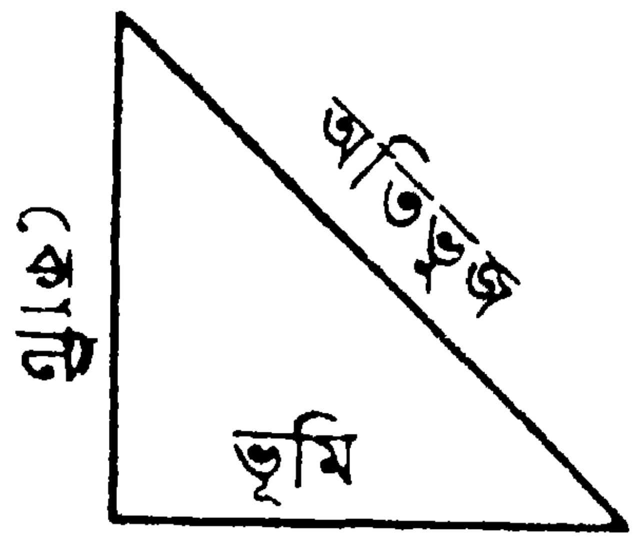
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ

(৩) **বিষমবাহু ত্রিভুজ**—যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর অসমান, তাহাকে **বিষমবাহু** (scalene) ত্রিভুজ বলে।

বিষমবাহু ত্রিভুজ

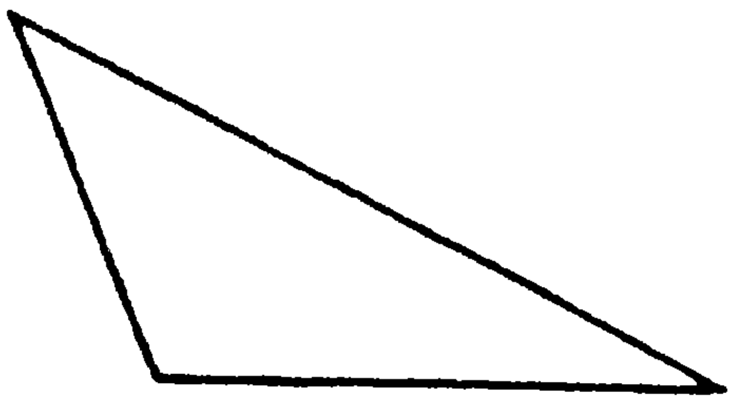
কোণ-ভেদে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ—

(১) **সমকোণী ত্রিভুজ**—যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী** (right-angled) ত্রিভুজ বলে। সমকোণের সম্মুখীন বাহুটিকে **অতিভুজ** (hypotenuse) বলে এবং অপর দুই বাহুর একটিকে **ভূমি** ও অপরটিকে **কোটি** বলে। সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।

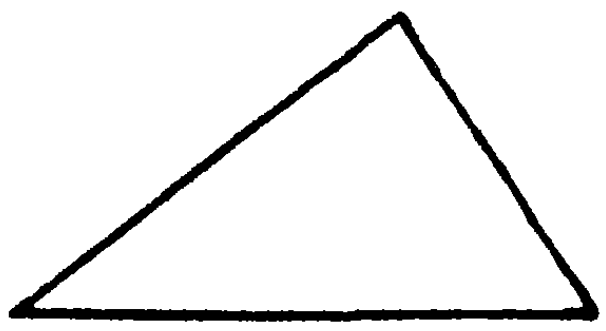


সমকোণী ত্রিভুজ

(২) **স্থূলকোণী ত্রিভুজ**—যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহাকে **স্থূলকোণী** (obtuse-angled) ত্রিভুজ বলে। ইহার অপর দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।


স্থূলকোণী ত্রিভুজ

(৩) **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ**—যে ত্রিভুজের তিনটি কোনই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে **সূক্ষ্মকোণী** (acute-angled) ত্রিভুজ বলে। একটি বা দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হইলেই ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হয় না। কারণ, সমকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজেও দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকে।


সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ

বিবিধ প্রকার বহুভুজ—

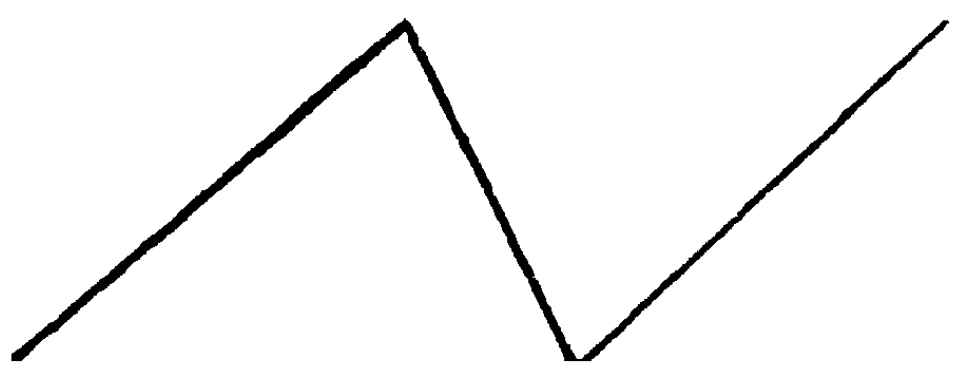
চতুর্ভুজের বিপরীত শীর্ষ-যোজক সরলরেখাকে উহার **কর্ণ** (diagonal) বলে। যে বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান তাহাকে **সুষম** (regular) বহুভুজ বলে। যে বহুভুজের প্রত্যেকটি কোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট তাহাকে **ঋজু** (convex) বহুভুজ বলে। বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির যোজক সরলরেখা সমূহকে ইহার **কর্ণ** বলে।

৮ম উপপাদ্য—(ইউ—১।৩২)

সাঃ নিঃ—কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন—BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। এখন C বিন্দু হইতে BA বাহুর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান।



প্রমাণ—AC একটি ভেদক BA ও CE দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACE$. [৬ষ্ঠ উপঃ]

আবার, BC ভেদক BA ও CE দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ $\angle ABC =$ অনুরূপ $\angle ECD$ [৬ষ্ঠ উপঃ]

সুতরাং, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$

$\therefore$ $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$

$= \angle ACD + \angle ACB$

$=$ দুই সমকোণ। [১ম উপঃ]

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। [ইউ—১।১৭]

২য় অনু—কোন একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি অন্য একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টির সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটির অবশিষ্ট কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

৩য় অনু—কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণটি দূরবর্তী অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান হইবে। [ইউ—১।৩২]

৪র্থ অনু—কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণটি দূরবর্তী অন্তঃকোণ দুইটির যে-কোনটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[ইউ—১।১৬]

টীকা—ইউক্লিডের ১ম খণ্ড ১৬শ উপপাদ্য এস্থলে বর্তমান উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তরূপে দেওয়া হইল। কিন্তু ইউক্লিড এই উপপাদ্যটির একটি স্বতন্ত্র প্রমাণ দিয়াছেন। এস্থলে ৮ম উপপাদ্যের সাহায্যে ৪র্থ উপপাদ্যটির একটি বিকল্প প্রমাণ দেওয়া হইল।

৪র্থ উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

প্রমাণ—(চতুর্থ উপপাদ্যের চিত্র দেখ) AB রেখা CD রেখার সমান্তরাল না হইলে, উহারা যে কোন দিকে বর্ধিত হইলেই মিলিত হইবে। সম্ভব হইলে, মনে কর উহারা A ও C বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়া G বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন GEF ত্রিভুজের GF বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

∴ EFD বহিঃকোণ AEF অন্তর্বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

কিন্তু কল্পনানুসারে, $\angle AEF = \angle EFD$.

সুতরাং AB এবং CD রেখাদ্বয় A ও C বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইয়া মিলিত হইতে পারে না। এইরূপে দেখা যাইতে পারে যে, উহারা B ও D বিন্দুর দিকে বর্ধিত হইলেও মিলিত হইতে পারে না।

∴ AB রেখা CD রেখার সমান্তরাল।

১। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পূরক হইলে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

২। প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্তত দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবে।

৩। কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার উপর একটি মাত্র লম্ব টানা যায়।

৪। একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার উপর দুইটির অধিক সমান সরলরেখা টানা যায় না।

৫। ত্রিভুজের একটি বাহু উভয় দিকে বর্ধিত হইলে বহিঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৬। কতকগুলি সরলরেখা দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে উৎপন্ন একান্তর কোণগুলির অন্তর সর্বদা এক হইবে।

৭। শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৮। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি অবশিষ্ট কোণটির সমান হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

৯। একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে একই পার্শ্বের অন্তঃকোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমকোণ উৎপন্ন করে।

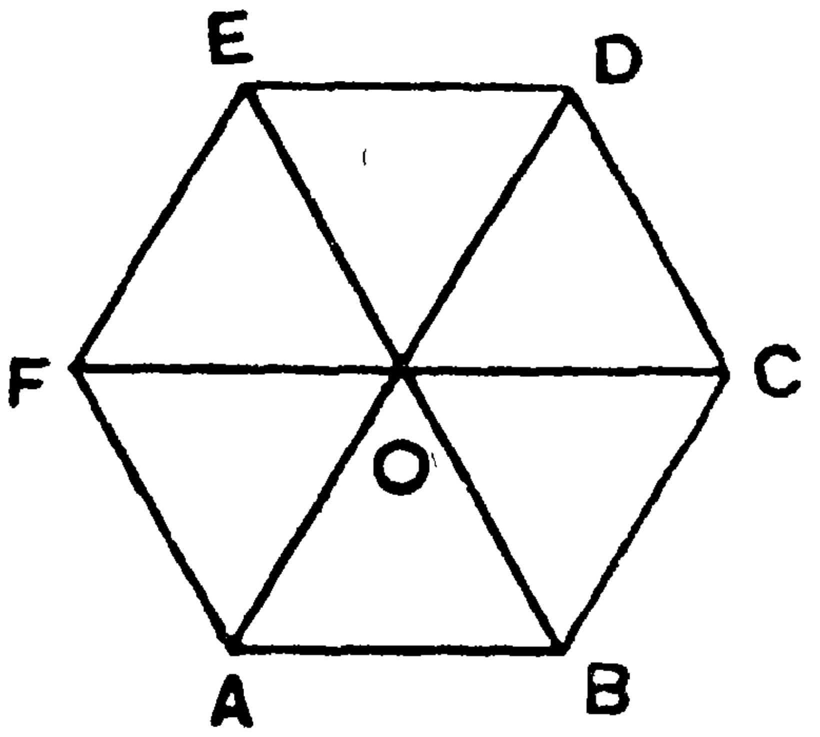
১০। ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইল। যদি $\angle ACD =$ ১৪০° এবং $\angle BAC =$ ৫০°, অপর দুইটি অন্তঃকোণের পরিমাণ কত? [উঃ – ৪০° ও ৯০°।]

১১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডকে ভূমির সমান্তরাল হইবে।

৯ম উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণের সহিত একত্রযোগে উক্ত ক্ষেত্রের বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ-সংখ্যক সমকোণের সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABCDEF একটি ষড়ভুজ। ক্ষেত্রের অভ্যন্তরস্থ যে-কোন O বিন্দুকে উহার প্রত্যেক শীর্ষ-বিন্দুর সহিত যোগ করিলে ছয়টি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।



প্রমাণ—এই ছয়টি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির কোণ-সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। সুতরাং ছয়টি ত্রিভুজের সমস্ত কোণগুলির সমষ্টি = ১২ সমকোণ।

কিন্তু এই ছয়টি ত্রিভুজের কোণসমূহ ষড়ভুজ ক্ষেত্রের ছয়টি অন্তঃকোণ এবং O বিন্দুস্থ ছয়টি কোণের সমষ্টির সমান।

এবং O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি = চার সমকোণ।

∴ ষড়ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি + চার সমকোণ = ১২ সমকোণ।

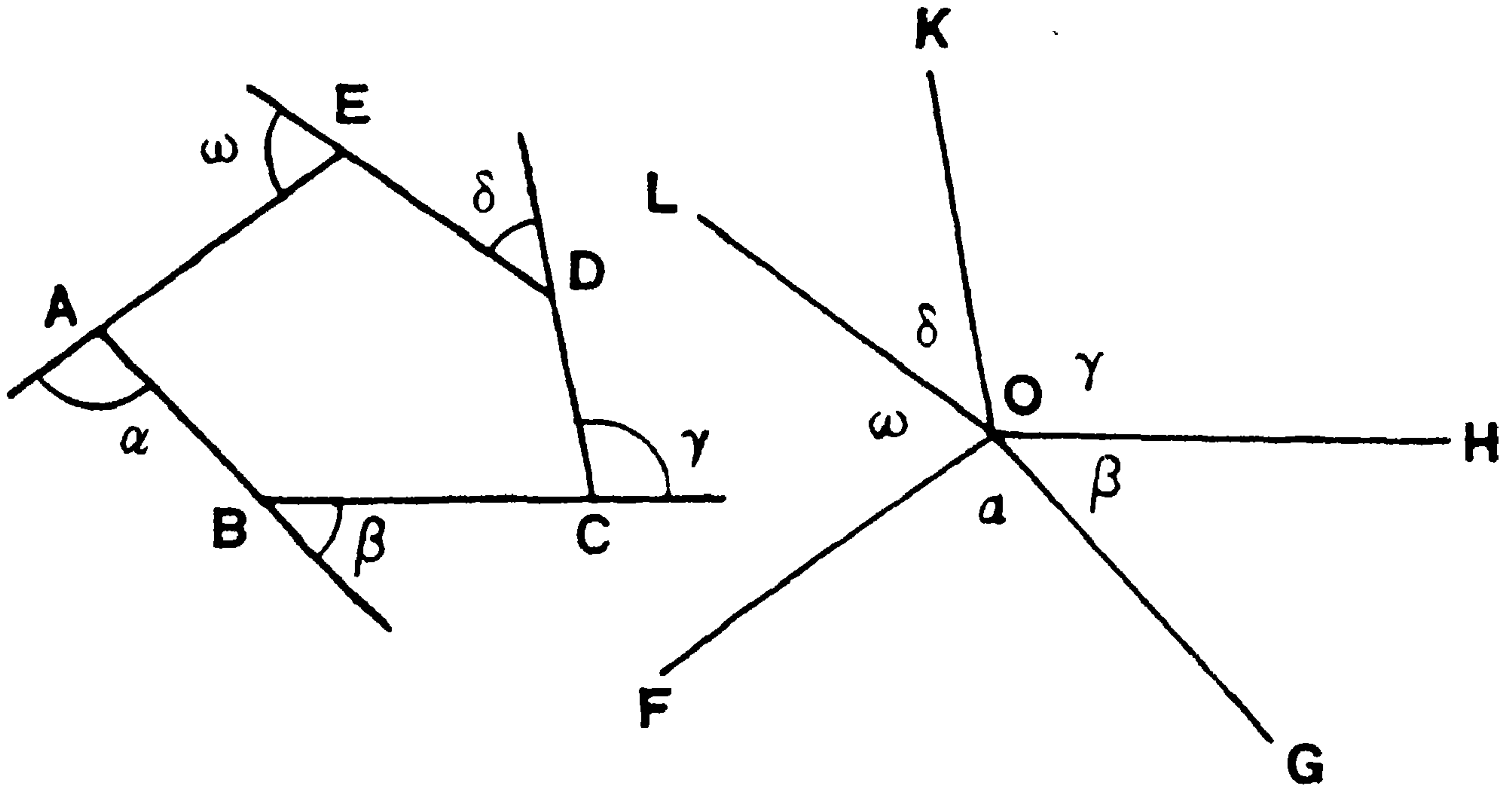
এইরূপে কোন বহুভুজের বাহু-সংখ্যা n হইলে, উক্ত বহুভুজের অন্তঃকোণগুলি চার সমকোণের একত্রযোগে $2n$ সমকোণের সমান হইবে।

অনু—প্রবৃদ্ধকোণশূন্য বহুভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একদিকে বর্ধিত হইলে, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণের সমান হইবে।

মনে কর ABCDE একটি প্রবৃদ্ধকোণশূন্য বহুভুজ এবং ইহার বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একদিকে বর্ধিত হইয়া α, β, γ, δ, ω বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে—

$\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta+\angle\omega=$ চার সমকোণ।

কোন বিন্দু O হইতে OF, OG, OH, OK, OL সরলরেখাগুলি যথাক্রমে EA, AB, BC, CD ও DE এর সমান্তরাল করিয়া টান।



AB রেখা OG রেখার সমান্তরাল এবং EA রেখা OF রেখার সমান্তরাল, এবং উহারা একই দিকে অঙ্কিত হইয়াছে।

$\therefore \qquad \angle\alpha=\angle FOG$; [৬ষ্ঠ উপঃ, অনুঃ]

এইরূপে, $\angle\beta=\angle GOH$, $\angle\gamma=\angle HOK$,

$\angle\delta=\angle KOL$, $\angle\omega=\angle LOF$.

$\therefore \quad \angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta+\angle\omega$

$=\angle FOG+\angle GOH+\angle HOK+\angle KOL+\angle LOF$

= চার সমকোণ। [১ম উপঃ, ২য় অনুঃ]

[ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে বর্ধিত হইলে উহার অন্তত দুইটি উৎপন্ন বহিঃকোণ স্থূলকোণ হইবে।

২। n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের পরিমাণ $=\frac{2(n-2)}{n}$ সমকোণ।

৩। সুষম পঞ্চভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। [উঃ—১০৮°।]

৪। সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির প্রত্যেকটি ১৫০° হইলে, উহার বাহু-সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ—১২।]

৫। ABCD চতুর্ভুজের $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ যথাক্রমে $2\angle A$, $3\angle A$, $4\angle A$ এর সমান হইলে, সমস্ত কোণগুলির ডিগ্রি-পরিমাণ নির্ণয় কর।

[উঃ —৩৬°, ৭২°, ১০৮°, ১৪৪°।]

৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ। $\angle A$ এবং $\angle B$ এর দ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে $\angle C + \angle D = 2\angle E$.

৭। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ যথাক্রমে $2\angle A$ ও $3\angle A$ এর সমান হইলে, কোণগুলির ডিগ্রি-পরিমাণ নির্ণয় কর।

[উঃ—৩০°, ৬০°, ৯০°।]

৮। কোন বহুভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে বর্ধিত হইলে যদি শীর্ষবিন্দুস্থ বহিঃকোণগুলির সমষ্টি—

(১) অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির অর্ধেক হয়,

(২) অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির সমান হয়,

(৩) অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির দ্বিগুণ হয়,

তাহা হইলে বহুভুজগুলির বাহু-সংখ্যা কত হইবে?

[উঃ—(১) ৬; (২) ৪; (৩) ৩]

১০ম উপপাদ্য—(ইউ—১।৪)

সাঃ নিঃ—যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং এই সমান সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান অর্থাৎ সর্বসম (congruent) হইবে।

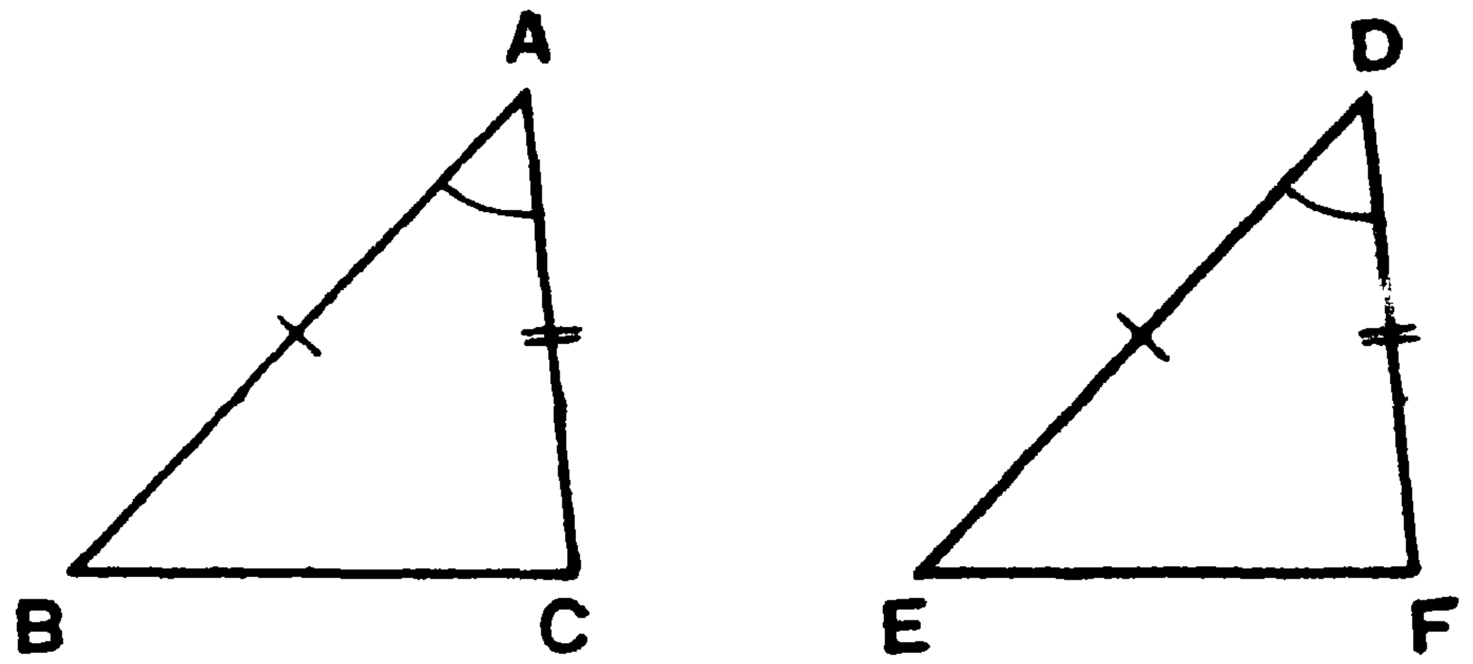
বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির—

AB বাহু = DE বাহু

AC বাহু = DF বাহু

এবং উহাদের অন্তর্ভূ্ত $\angle BAC = \angle EDF$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।



প্রমাণ—ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, AB বাহু DE বাহুর সমান বলিয়া, B বিন্দুটি E বিন্দুর উপর পড়িবে। এবং $\angle BAC = \angle EDF$ বলিয়া, AC বাহুও DF বাহুর উপর পড়িবে।

আবার, AC বাহু DF বাহুর সমান বলিয়া, C বিন্দুটিও F বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। সুতরাং BC বাহুটি EF বাহুর সহিত মিলিয়া যাইবে। [জ্যামিতিক ২য় স্বতঃসিদ্ধ।]

সুতরাং ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজটির সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ উহারা সর্বসম হইবে।

∴ $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. [ই. উ. বি.]

১ম দ্রষ্টব্য—ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ায় দেখা যাইতেছে যে, BC বাহু = EF বাহু ; $\angle ABC = \angle DEF$; $\angle ACB = \angle DFE$; ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

লক্ষ্য করিবে যে ত্রিভুজ দুইটির যে কোণগুলি সমান প্রমাণিত হইল উহারা সমান সমান বাহুর সম্মুখীন।

২য় দ্রষ্টব্য—'উপরিপাত' প্রক্রিয়া-দ্বারা এই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল। ইহা একটি মানসিক প্রক্রিয়া মাত্র। অনেক সময় দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের একটির সহিত আর একটিকে সর্বতোভাবে মিলাইতে হইলে উপরিপাতের পূর্বে আবশ্যকমত একটিকে উল্টাইয়া লইতে হয়।

অনুশীলনী

১। সমবাহু ত্রিভুজের কোন কোণের দ্বিখণ্ডক রেখা-দ্বারা ত্রিভুজটি সমান দুইভাগে বিভক্ত হয়।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক রেখা ভূমিকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩। AB রেখা CD রেখাকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AB রেখার উপরস্থ যে-কোন বিন্দু, C এবং D বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

৪। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্ব যদি ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৫। AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিল। প্রমাণ কর যে, AED ত্রিভুজটি CEB ত্রিভুজটির সর্বসম হইবে।

৬। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক রেখার উপরস্থ যে-কোন বিন্দু ভূমির প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে।

৭। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB=AC। AB ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে D ও E বিন্দু এমনভাবে লওয়া হইল যেন, AD=AE. প্রমাণ কর যে, ADC ত্রিভুজ≡AEB ত্রিভুজ।

৮। AOB কোণের OA ও OB বাহুদ্বয় হইতে যথাক্রমে OA=OB অংশ ছেদ করা হইল। AOB কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর C একটি বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, AC=BC এবং CO রেখা ∠ACB কে দ্বিখণ্ডিত করে।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় উহাদের বিপরীত বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সহিত যোগ করিলে যোজক-রেখা দুইটি সমান হইবে।

১০। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. BE ও CD যথাক্রমে F ও G পর্যন্ত বর্ধিত হইল যেন, EF=BE, এবং DG=CD. প্রমাণ কর যে, AG ও AF একই সরলরেখায় অবস্থিত।

১১। কোন ত্রিভুজের যে-কোন শিরঃকোণ হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব উক্ত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

১২। ABCD একটি চতুর্ভুজ। যদি AD=BC এবং ∠DAB=∠CBA. প্রমাণ কর যে, BD=AC.

১৩। ABCD চতুর্ভুজের AD বাহু BC বাহুর সমান এবং ∠ADC=∠BCD. যদি CD বাহুর মধ্যবিন্দু E হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AE=BE.

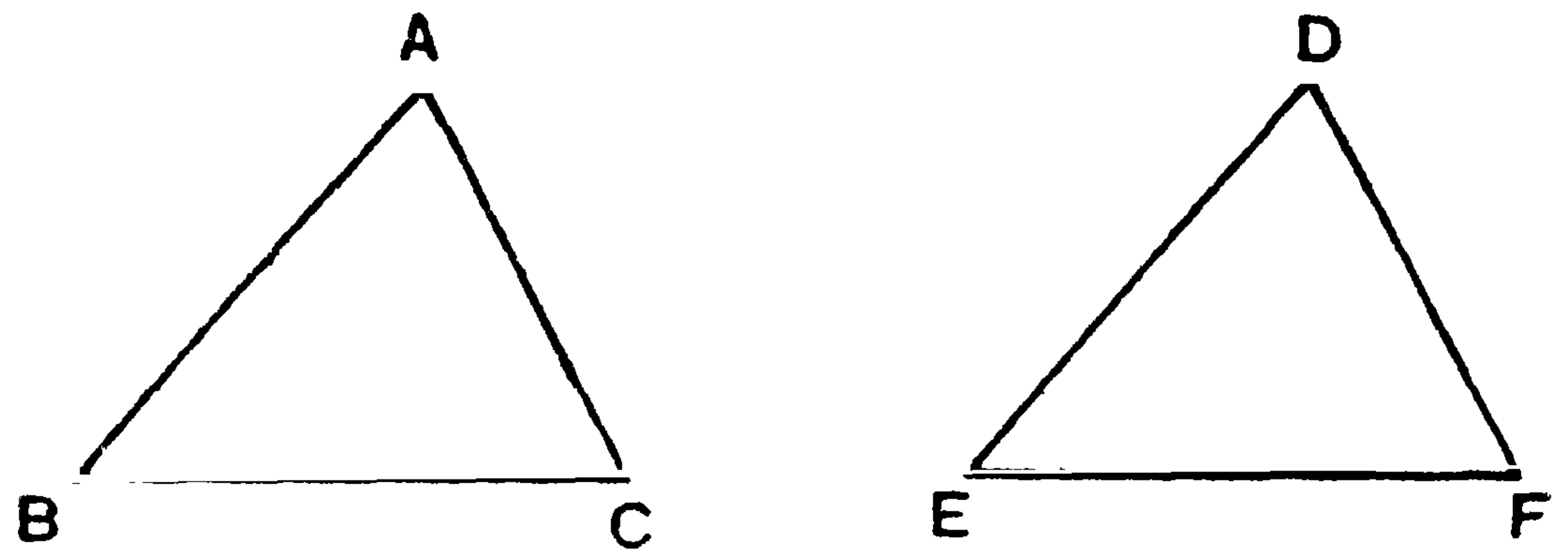
১১শ উপপাদ্য—(ইউ—১।২৬)

সাঃ নিঃ—যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ যথাক্রমে অন্যটির দুই কোণের সমান হয় এবং একটির যে-কোন একটি বাহু অন্যটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির—

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$,

এবং BC বাহু = EF বাহু।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ— যেহেতু, $\angle A = \angle D$ এবং $\angle B = \angle E$,

সুতরাং ABC ত্রিভুজের অবশিষ্ট $\angle C$ = DEF ত্রিভুজের অবশিষ্ট $\angle F$.

এখন ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজটির উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং BC বাহু EF বাহুর উপর পড়ে। কাজেই, C বিন্দুটি F বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে।

আবার, $\angle B = \angle E$ বলিয়া, BA বাহুও ED বাহুর উপর পড়িবে।

এবং $\angle C = \angle F$ বলিয়া, CA বাহুটিও FD বাহুর উপর পড়িবে।

সুতরাং A বিন্দুটি ED ও FD এই উভয় রেখার উপর অবস্থিত হওয়ায়, উহাদের ছেদ-বিন্দু Dএর সহিত মিলিত হইবে।

অর্থাৎ ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজটির সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$ [ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

২। একটি ত্রিভুজের কোন কোণের দ্বিখণ্ডক রেখাস্থ যে-কোন বিন্দু উহার পার্শ্ববর্তী বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

৩। AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু C ভেদ করিয়া একটি সরলরেখা টানা হইল। উহার উপর A এবং B বিন্দু হইতে AD ও BF দুইটি লম্বপাত করা হইল। প্রমাণ কর যে, AD = BF.

৪। ABC ত্রিভুজের B শীর্ষবিন্দু হইতে A কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর BDE লম্ব ঐ দ্বিখণ্ডকের সহিত D বিন্দুতে এবং AC বাহুর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, BD = DE.

৫। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু ভেদ করিয়া যে-কোন সরলরেখা অঙ্কিত হইলে, সমান্তরাল রেখাদ্বয়-দ্বারা উহার ছিন্ন অংশ উক্ত বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৬। ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর B বিন্দু হইতে লম্ব টানা হইল। যদি উহা AC এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\angle BDA = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$

এবং $\angle CBD = \frac{1}{2}(\angle ABC \sim \angle ACB)$

৭। একটি ত্রিভুজের কোন দুই কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে O বিন্দু হইতে বাহুত্রয়ের উপর পাতিত লম্ব তিনটি পরস্পর সমান।

৮। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া DBC ও ECB কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, F বিন্দু হইতে AD ও AE রেখার উপর লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

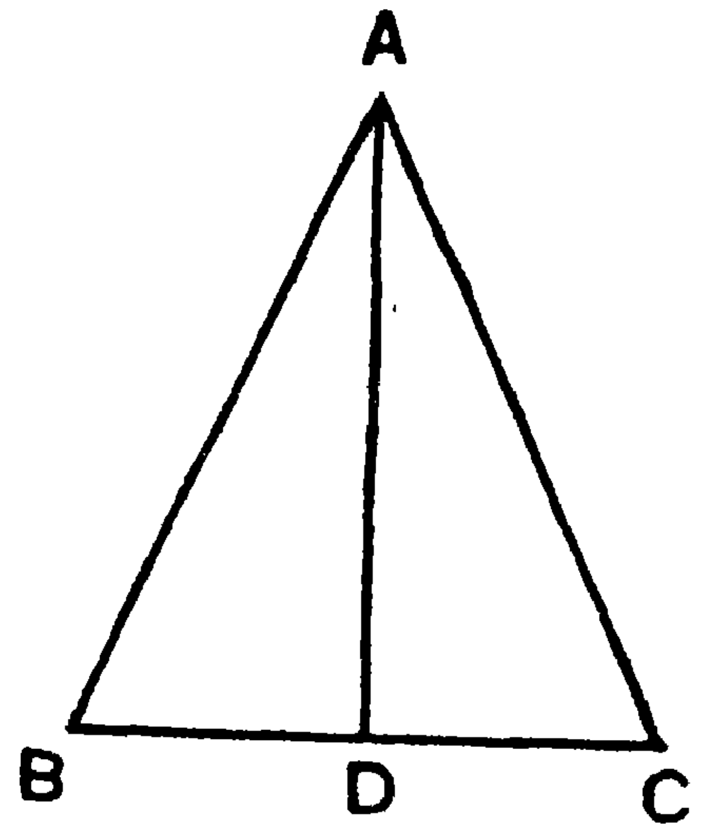
১২শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৫)

সাঃ নিঃ—সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

বিঃ নিঃ—ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB বাহু = AC বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

অঙ্কন—মনে কর A শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক AD সরলরেখা BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।



প্রমাণ— ABD এবং ACD দুইটি ত্রিভুজের—

AB বাহু = AC বাহু, AD একটি সাধারণ বাহু।

এবং সমান সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত $\angle BAD = \angle CAD$;

সুতরাং ABD ও ACD ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [১০ম উপঃ]

$\therefore \quad \angle ABC = \angle ACB$. **[ই. উ. বি.]**

বিকল্প প্রমাণ—ABC ত্রিভুজকে AD রেখা-ক্রমে ভাঁজ করিলে AC বাহু AB বাহুর উপর পতিত হইবে। কারণ, $\angle CAD = \angle BAD$;

এবং C বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়িবে, কারণ AC = AB.

সুতরাং DC রেখা DB রেখার সহিত মিলিয়া যাইবে এবং $\angle ACD$ ও $\angle ABD$ এর সহিত মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ $\angle ABC = \angle ACB$. **[ই. উ. বি.]**

১ম অনু—সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় বর্ধিত করিলে ভূমির অপর-পার্শ্বের বহিঃকোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

২য় অনু—সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ-দ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩য় অনু—সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

অনুশীলনী

১। সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের পরিমাণ কত?

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ভূমির মধ্য-বিন্দু-সংযোজক রেখা ভূমির উপর লম্ব হয় এবং শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩। প্রমাণ কর যে, উক্ত রেখা ত্রিভুজটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে। [তৈল কাগজে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহাকে শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক-বরাবর ভাজ করিলে ত্রিভুজটির দুইটি অংশ পরস্পর মিলিয়া যাইবে। দ্বিখণ্ডক রেখাটিকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসমরেখা (line of symmetry) বলে।]

৪। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। D, E ও F যথাক্রমে BC, CA, ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজটিও সমদ্বিবাহু।

৫। BC রেখার একই পার্শ্বে ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, $\angle ABD = \angle ACD$.

৬। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু হইতে ভূমির বিপরীত প্রান্তদ্বয়-সংযোজক রেখা দুইটি সমান।

৭। ABC ত্রিভুজের $AB = AC$; BC এর উপর X ও Y দুইটি বিন্দু লও যেন, $\angle BAX = \angle CAY$ হয়। প্রমাণ কর যে, $BX = CY$ এবং $AX = AY$।

৮। ABC ত্রিভুজের AB = AC ; ∠ABC ও ∠ACB এর দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় AC ও AB বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD = CE। BD ও CE রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে OBC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৯। ABC ত্রিভুজের AB = AC। CA ও BA যথাক্রমে Y ও Z বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া AY = AZ হইল। এবং BY ও CZ বর্ধিত হইয়া O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, OB = OC.

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিকে উভয়দিকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BD = CE হইল। প্রমাণ কর যে, AD = AE.

১১। সমবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা তিনটি পরস্পর সমান।

১২। যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর উপরস্থ যথাক্রমে A′, B′ ও C′ বিন্দু যোগ করিলে A′B′C′ ত্রিভুজটি সমবাহু হয়, তবে প্রমাণ কর যে B′AC′, C′BA′ ও A′CB′ ত্রিভুজ তিনটি সর্বসম।

১৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB অতিভুজ = 2AC। প্রমাণ কর যে, ∠CAB = 2∠CBA.

[AC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া AC = CD হইলে,

△ABC ≡ △BCD এবং ABD ত্রিভুজটি সমবাহু।]

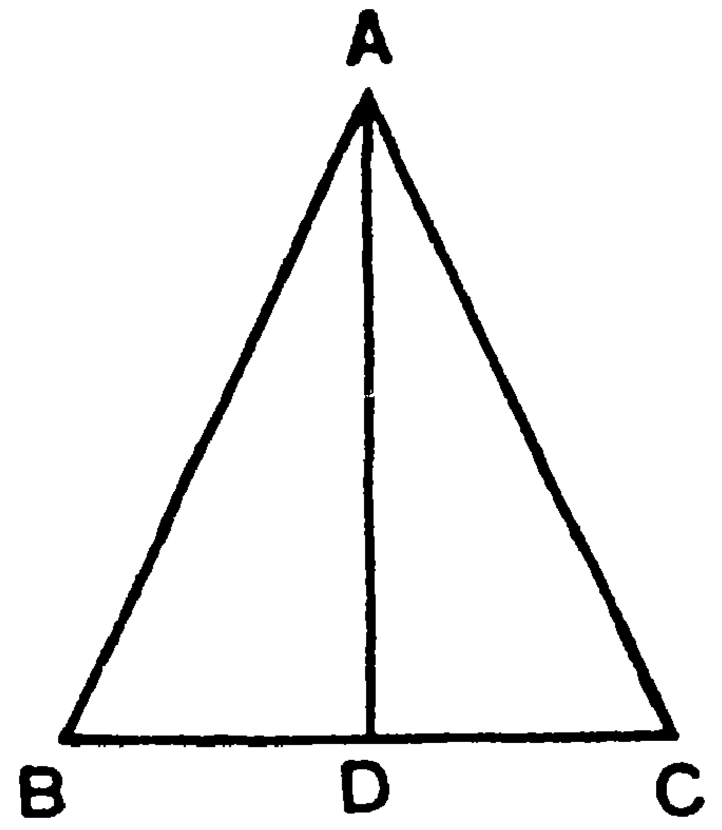
১৪। ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ BC ভূমির উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, AD অথবা AD বর্ধিত হইয়া BC ভূমিকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৩শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৬)

(এই উপপাদ্যটি ১২শ উপপাদ্যের বিপরীত)

সাঃ নিঃ—কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান হইলে, এই দুই কোণের সম্মুখীন বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠ABC = ∠ACB। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC বাহু = AB বাহু।



প্রমাণ—মনে কর BAC কোণের দ্বিখণ্ডক AD সরলরেখা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, ABD ও ACD দুইটি ত্রিভুজের ∠ABD = ∠ACD এবং ∠BAD = ∠CAD ; AD একটি সাধারণ বাহু।

∴ △ABD ≡ △ACD [১১শ উপঃ]

∴ AC = AB. [**ই. উ. বি.**]

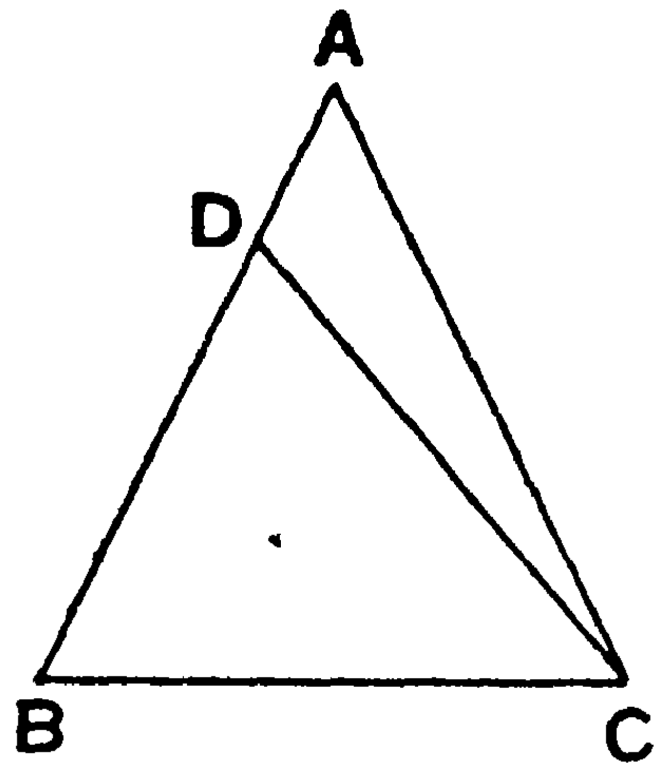
বিকল্প প্রমাণ—যদি AB বাহু AC বাহুর সমান না হয়, মনে কর উহাদের মধ্যে AC অপেক্ষা AB বৃহত্তর। BA হইতে AC এর সমান করিয়া BD অংশ ছেদ কর এবং CD যোগ কর।

DBC ও ABC ত্রিভুজের, DB = AC এবং BC একটি সাধারণ বাহু।

সমান সমান বাহুর অন্তর্ভূত ∠DBC = ∠ACB.

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম অর্থাৎ △DBC ≡ △ABC. [১০ম উপঃ]

কিন্তু DBC ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের একটি অংশ, সুতরাং উহার সমান হইতে পারে না। অতএব AC অপেক্ষা AB বৃহত্তর নহে। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, AC অপেক্ষা AB ক্ষুদ্রতরও নহে।



সুতরাং AB ও AC বাহুদ্বয় অসমান নহে, অর্থাৎ AB = AC.

[ই. উ. বি.]

অনু—কোন ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

১ম দ্রষ্টব্য—১৩শ উপপাদ্যটি ১২শ উপপাদ্যের বিপরীত। কারণ,—

১২শ উপপাদ্যে— { কল্পনা—বাহু দুইটি সমান। সিদ্ধান্ত—বিপরীত কোণ দুইটি সমান।

১৩শ উপপাদ্যে— { কল্পনা—কোণ দুইটি সমান। সিদ্ধান্ত—বিপরীত বাহু দুইটি সমান।

২য় দ্রষ্টব্য—তৈল কাগজের সাহায্যে ১২শ ও ১৩শ উপপাদ্যের সত্য পরীক্ষা করা যায়। ABC ত্রিভুজটিকে আঁকিয়া কাগজ হইতে কাটিয়া পৃথক্ করিয়া লও। পরে উহাকে উল্টাইয়া কাটা কাগজের ফাঁকের মধ্যে বসাইয়া দেও। এখন দেখিবে যে, এই কাগজের ত্রিভুজটি উক্ত ফাঁকের সহিত মিলিয়া গিয়াছে। সুতরাং এক দিকের বাহু ও কোণ অপর দিকের বাহু ও কোণের সমান—ইহাই প্রমাণিত হইল।

অনুশীলনী

১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BD = CD.

২। কোন ত্রিভুজের বাহু দুইটিকে বর্ধিত করিলে যদি ভূমি-সংলগ্ন বহিঃকোণ দুইটি সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু প্রমাণ কর।

৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজের উপর D একটি বিন্দু লও যেন, ∠DBA = ∠DAB। প্রমাণ কর যে, AD = CD.

৪। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ও AC সমান বাহুদ্বয় বর্ধিত করিয়া ভূমি-সংলগ্ন বহিঃকোণদ্বয় BD ও CD রেখাদ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল। যদি BD ও CD পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে BD = CD.

৫। ABC ও DBC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজদ্বয় BC ভূমির দুই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, AD যোগ করিলে, উহা BAC ও BDC কোণ-দ্বয়কে দ্বিখণ্ডিত করে।

৬। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজের মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, 2DB = AC.

৭। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে DE রেখা BC ভূমির সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, AD = AE.

৮। ABC ত্রিভুজের A ও B শীর্ষবিন্দু হইতে উহাদের সম্মুখীন বাহুদ্বয়ের উপর AD ও BE লম্ব। AB বাহুর মধ্য বিন্দু F হইলে, প্রমাণ কর যে, EF = FD. [সংকেত—EF = $\frac{1}{2}$AB = FD.]

৯। ৮ম অনুশীলনীতে D বিন্দু হইতে DE রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব EF এর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, FE = FG.

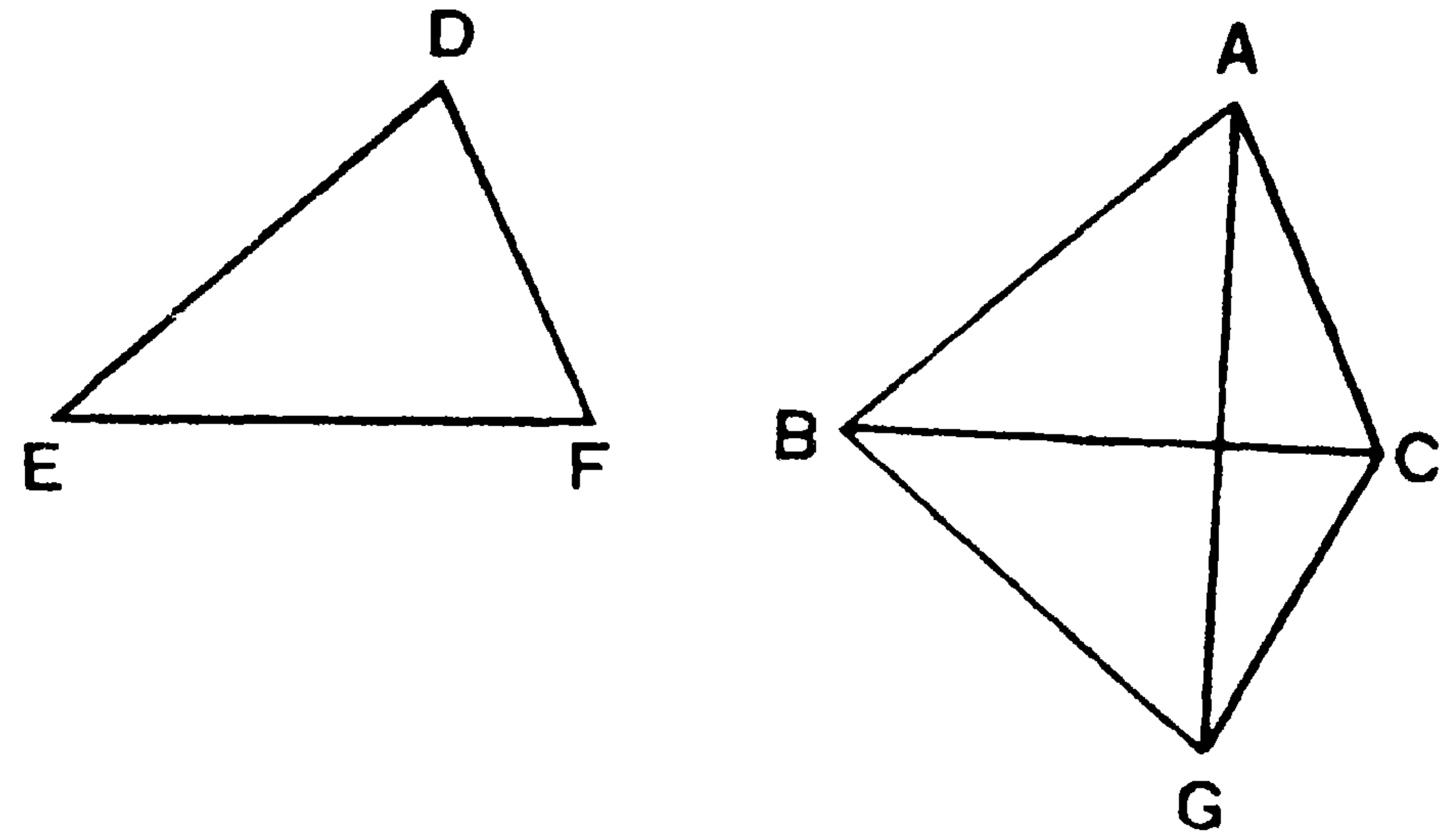
১৪শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৮)

সাঃ নিঃ—যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু যথাক্রমে অপরটির তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের—

AB বাহু = DE বাহু, AC বাহু = DF বাহু

BC বাহু = EF বাহু।



(১ম চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ত্রিভুজটি সর্বতোভাবে DEF ত্রিভুজটির সমান।

প্রমাণ—DEF ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজটির উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন, E বিন্দু B বিন্দুর উপর এবং EF বাহু BC বাহুর উপর পড়ে; কিন্তু BC এর যে পার্শ্বে A বিন্দুটি আছে D বিন্দুটি যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

তাহা হইলে EF বাহু BC বাহুর সমান বলিয়া, F বিন্দুটি C বিন্দুর উপর পড়িবে। মনে কর DEF ত্রিভুজের নূতন অবস্থানে BCG ত্রিভুজটি হইল। AG যোগ কর।

এখন, ABG ত্রিভুজের, AB বাহু = DE = BG বাহু

$\therefore \quad \angle BGA = \angle BAG.$

আবার, ACG ত্রিভুজের, AC বাহু = DF = GC বাহু ;

$\therefore \quad \angle CGA = \angle CAG.$

সুতরাং $\angle BAG + \angle CAG = \angle BGA + \angle CGA$;

অর্থাৎ সম্পূর্ণ $\angle BAC$ = সম্পূর্ণ $\angle BGC = \angle EDF.$

এখন, ABC ও GBC ত্রিভুজ দুইটির—

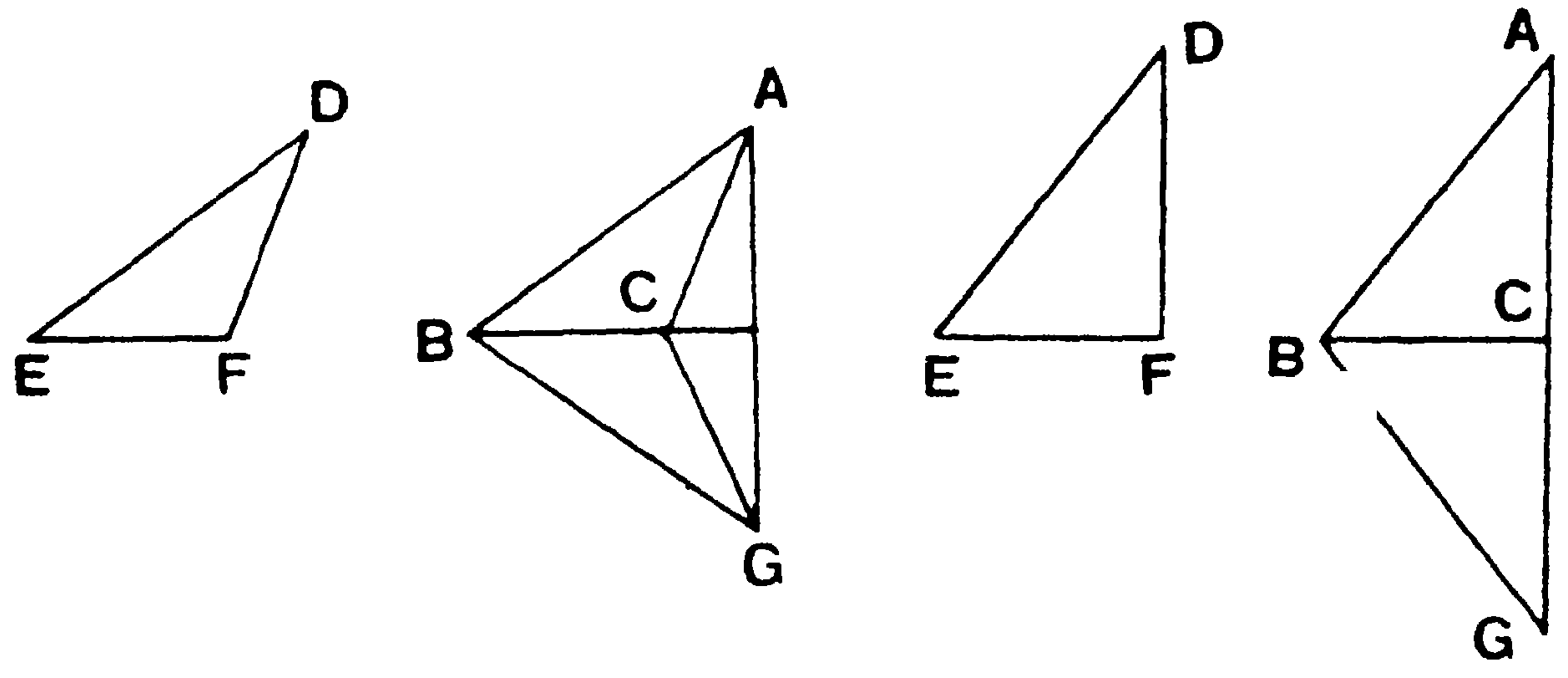
AB বাহু = BG বাহু, AC বাহু = CG বাহু

এবং $\angle BAC = \angle BGC$;

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle GBC$ অথবা $\triangle DEF$ সর্বসম। [১০ম উপঃ]

অর্থাৎ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$ [**ই. উ. বি.**]

দ্বিতীয় অবস্থান—উপরে মাত্র যে স্থলে AG রেখাটি ABC ও GBC উভয় ত্রিভুজের মধ্যে পড়ে তাহাই দেখান হইয়াছে। ত্রিভুজ দুইটি যখন সূক্ষ্মকোণী হয় তখনই এইরূপ হইবে। কিন্তু ত্রিভুজদ্বয়



(২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

স্থূলকোণী বা সমকোণী হইলেও ঐ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায়। ২য় চিত্রে স্থূলকোণী ও ৩য় চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজের অবস্থানও দেখান হইল। বৃহত্তর বাহুটিকে লইয়া প্রথম উপরিপাত আরম্ভ করিলেই সত্যটি সহজে প্রমাণিত হইবে।

১ম দ্রষ্টব্য—বর্তমান উপপাদ্যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম দেখান হইয়াছে, সুতরাং সমান সমান বাহুর সম্মুখস্থ কোণগুলিও যথাক্রমে সমান।

২য় দ্রষ্টব্য—এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যটি এইরূপ হইবে—"যদি একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে অন্য ত্রিভুজের কোণগুলির সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটির বাহুগুলিও যথাক্রমে পরস্পর সমান হইবে।" কিন্তু মনে রাখিও, এই বিপরীত উপপাদ্যটি সকল সময় সত্য নহে। কারণ, সদৃশকোণী (equiangular) ত্রিভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান নাও হইতে পারে।

টীকা—দুইটি ত্রিভুজের সর্বতোভাবে সমানতা সম্বন্ধে ১০ম, ১১শ ও ১৪শ উপপাদ্যে আলোচিত হইয়াছে। এই তিনটি উপপাদ্য হইতে দেখা যায় যে দুইটি ত্রিভুজ সর্বতোভাবে সমান হইতে হইলে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি জানা থাকা আবশ্যক—

(১) একের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপরের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান।

(২) একের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরের দুইটি কোণ ও অনুরূপ একটি বাহুর সমান।

(৩) একের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপরের তিনটি বাহুর সমান।

অনুশীলনী

১। প্রমাণ কর যে সমান সমান ভূমির উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজগুলি সর্বসম।

২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন B ও C কোণের দ্বিখণ্ডক রেখা D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, AD রেখা $\angle A$ কে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের D একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এরূপস্থানে লওয়া হইল যেন, $\angle DBC = \angle DCB$। প্রমাণ কর যে, AD রেখা $\angle A$ কে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৪। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হইলে উহার বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে এবং বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

৫। ABCD চতুর্ভুজের AB বাহু = AD বাহু এবং CB বাহু = CD বাহু। প্রমাণ কর যে, AC কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে।

৬। সমবাহু ত্রিভুজের তিন বাহুর তিনটি মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় সেইটিও একটি সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৭। D ও E বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু। DO ও EO যথাক্রমে BC ও CA বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $\angle OAB = \angle OBA$.

৮। ABC ত্রিভুজের AB বাহু = AC বাহু। AB ও AC বাহুর উপর D ও E বিন্দুদ্বয় A বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। প্রমাণ কর যে, ABE ও ACD ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

৯। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সহিত সমান কোণ করিয়া BD ও CE রেখা টানা হইল। ইহারা সম্মুখীন বাহুর সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল এবং পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। $\angle AFE = \angle AFD$ হইলে, প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

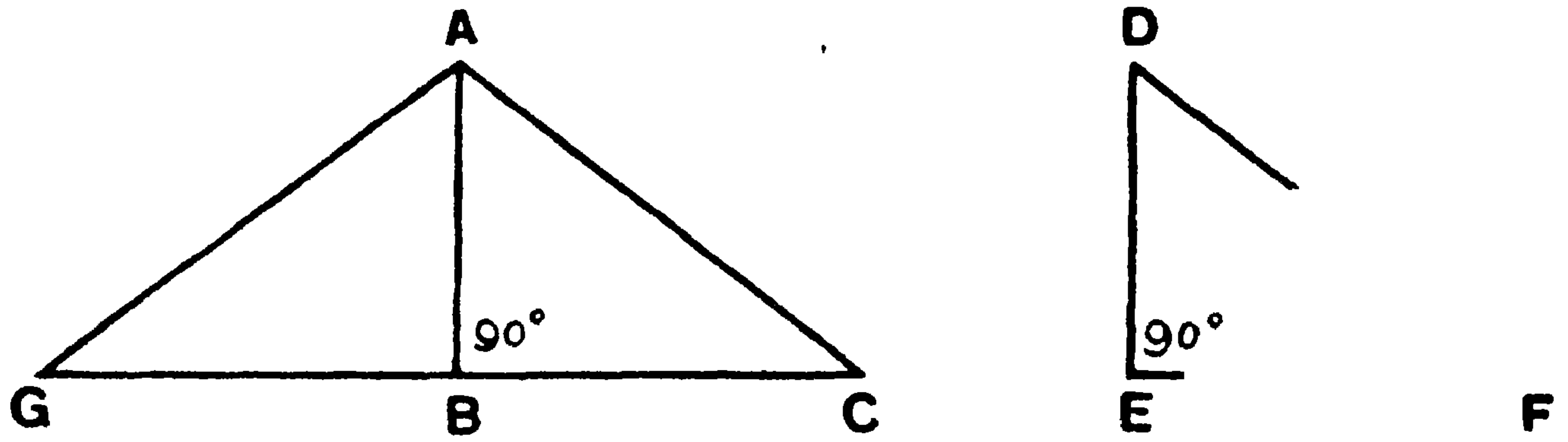
১০। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। AD রেখা BC ভূমিকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া E পর্যন্ত বর্ধিত হইল যেন, AD = DE. AB ও AC বাহুর মধ্য বিন্দুর সহিত E বিন্দু যোগ করিলে উহারা BC বাহুকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AFEG চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান।

১৫শ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—যদি দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একের অতিভুজ এবং এক বাহু যথাক্রমে অন্যের অতিভুজ ও এক বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ও DEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের AB বাহু = DE বাহু এবং AC অতিভুজ = DF অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, সমকোণী ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।



প্রমাণ—DEF ত্রিভুজটিকে ABC ত্রিভুজের উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যেন, E বিন্দু B বিন্দুর উপর, ED বাহু BA বাহুর উপর পতিত হয়। কিন্তু F বিন্দু যেন C বিন্দুর বিপরীত দিকে থাকে। তাহা হইলে, ED বাহু BA বাহুর সমান বলিয়া, D বিন্দু A বিন্দুর উপর পড়িবে।

এখন মনে কর ABG ত্রিভুজটিই DEF ত্রিভুজের নূতন অবস্থান।

∠ABC ও ∠ABG প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, BG ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। [২য় উপঃ]

আবার, AG = DF = AC ;

∴ ∠ACG = ∠AGC = ∠DFE. [১২শ উপঃ]

এখন, ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের, ∠ABC = ∠DEF ;

∠ACB = ∠DFE এবং AC বাহু = DF বাহু।

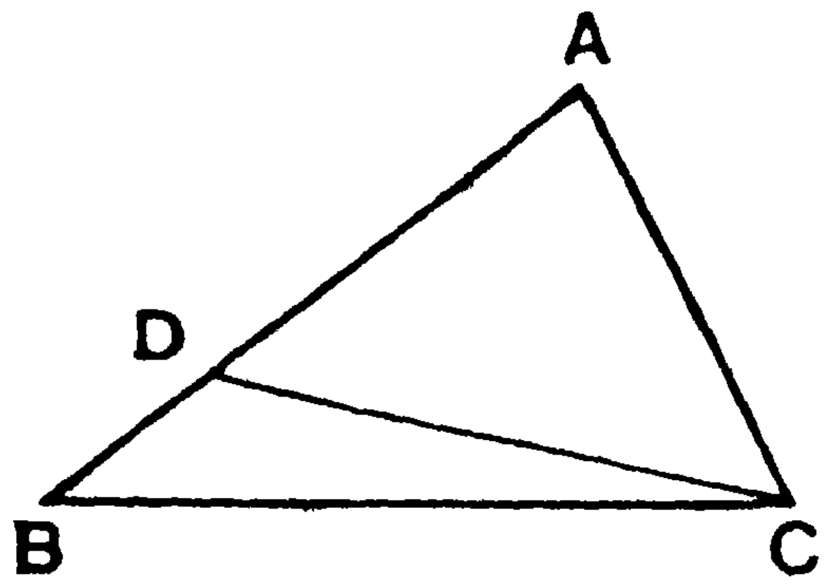
সুতরাং ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান, অর্থাৎ সর্বসম হইল। [১১শ উপঃ]

[ই. উ. বি.]

১৬শ উপপাদ্য—(ইউ—১।১৮)

সাঃ নিঃ—যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হয়, তবে বৃহত্তর বাহুর সম্মুখীন কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর সম্মুখীন কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহু $>$ AC বাহু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle$ABC অপেক্ষা $\angle$ACB বৃহত্তর।



অঙ্কন—বৃহত্তর AB বাহু হইতে AC এর সমান করিয়া AD অংশ ছেদ কর। CD যোগ কর।

প্রমাণ— AD = AC বলিয়া, $\angle$ADC = $\angle$ACD [১২শ উপঃ]

কিন্তু BDC ত্রিভুজের ADC বহিঃকোণটি অন্তর্বিপরীত DBC কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [৮ম উপঃ, ৪ অনুঃ]

সুতরাং $\angle$ABC অপেক্ষা $\angle$ADC অর্থাৎ $\angle$ACD বৃহত্তর।

কিন্তু $\angle$ACD অপেক্ষা $\angle$ACB বৃহত্তর।

$\therefore$ $\angle$ABC অপেক্ষা $\angle$ACB আরও বৃহত্তর।

[**ই. উ. বি.**]

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, $\angle$ACB একটি সূক্ষ্মকোণ। AC বাহু বৃহত্তম হইলে, $\angle$BAC ও $\angle$BCA উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হইবে।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি অন্য দুই বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, শিরঃকোণটি ৬০° অপেক্ষা বৃহত্তর।

৩। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমাটি BC এর অর্ধেকের সমান, তদপেক্ষা বৃহত্তর, অথবা ক্ষুদ্রতর হইলে, A কোণটি সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ, বা স্থূলকোণ হইবে।

৪। ABC ত্রিভুজের AC বাহু AB অপেক্ষা বৃহত্তর নহে। প্রমাণ কর যে, শীর্ষবিন্দু A হইতে BC পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন AD রেখা AB হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে, D বিন্দুটি B ও C এর অন্তর্বর্তী হইবে।

৫। ABC ত্রিভুজের A শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক BC ভূমির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে AE মধ্যমা AC বাহু ও AD দ্বিখণ্ডকের অন্তর্বর্তী হইবে।

৬। ABCD চতুর্ভুজের AB বাহু AD বাহুর সমান, কিন্তু BC বাহু DC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, ∠ABC অপেক্ষা ∠ADC বৃহত্তর।

৭। কোন চতুর্ভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহু পরস্পর বিপরীত। প্রমাণ কর যে, ক্ষুদ্রতম বাহুর সংলগ্ন প্রত্যেকটি কোণ উহার বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৮। ABCD চতুর্ভুজের ∠ABC = ∠BCD, কিন্তু CD বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, ∠ADC অপেক্ষা ∠BAD বৃহত্তর।

৯। ১৬শ উপপাদ্যের সাহায্যে ১২শ উপপাদ্যটির একটি ব্যতিরেকী (indirect) প্রমাণ দাও।

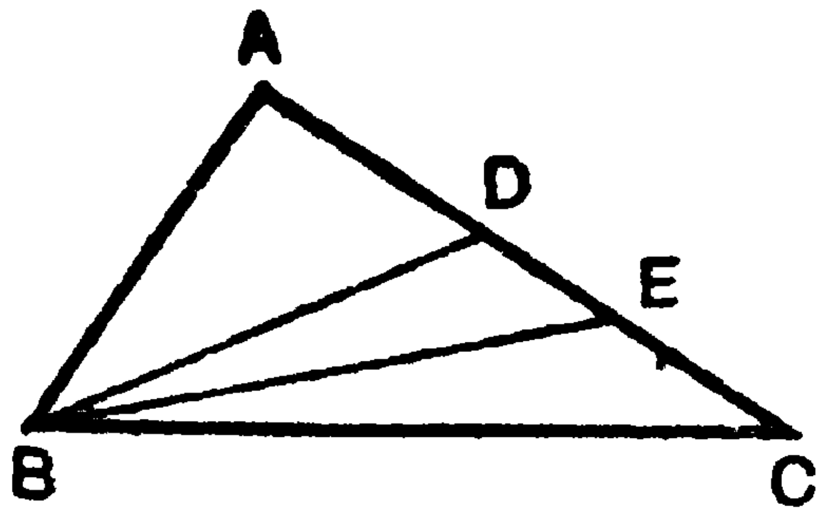
১৭শ উপপাদ্য—(ইউ—১।১৯)

(এই উপপাদ্যটি ১৬শ উপপাদ্যের বিপরীত)

সাঃ নিঃ—কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হইলে বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের সম্মুখীন বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠ACB অপেক্ষা ∠ABC বৃহত্তর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB বাহু অপেক্ষা AC বাহু বৃহত্তর।

প্রমাণ—যদি AB বাহু অপেক্ষা AC বাহু বৃহত্তর না হয়, তবে AC বাহু AB বাহুর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।



যদি AC বাহু = AB বাহু, তবে ∠ACB = ∠ABC ; [১২শ উপঃ]

কিন্তু কল্পনানুসারে উহারা সমান নহে।

আবার, যদি AB বাহু অপেক্ষা AC বাহু ক্ষুদ্রতর হয়, তবে

∠ACB অপেক্ষা ∠ABC ক্ষুদ্রতর। [১৬শ উপঃ]

কিন্তু কল্পনানুসারে ইহাও সত্য নহে। সুতরাং AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নহে। অতএব AB বাহু অপেক্ষা AC বাহু বৃহত্তর হইবে। [**ই. উ. বি.**]

টীকা—ইউক্লিড এই উপপাদ্যটিতে প্রমাণের যে প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন তাহাকে 'নিঃশেষ প্রক্রিয়া' (Proof by exhaustion) বলে। ইহাতে কয়েকটি সম্ভবপর কল্পনার একটি ব্যতীত আর সকলগুলিকেই অসত্য প্রমাণ করিয়া অবশিষ্ট কল্পনাটির সত্যতা প্রতিপন্ন করা হয়।

বিকল্প প্রমাণ—∠ACB এর সমান ∠ABD অঙ্কিত কর। মনে কর ∠DBC এর BE দ্বিখণ্ডক AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

∠ABE = ∠ABD + ∠DBE = ∠ACB + ∠CBE = ∠AEB ;

∴ AE = AB ; কিন্তু AC > AE. ∴ AC > AB.

অনুশীলনী

১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তম বাহু।

২। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর দুইটির অধিক সমান সরলরেখা টানা যায় না।

৩। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির যে-কোন বিন্দু হইতে শিরঃকোণ পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অন্য দুই বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৪। ABC ত্রিভুজের B ও C শীর্ষবিন্দুর বহিঃকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, CD অপেক্ষা BD বৃহত্তর হইবে।

৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমি D পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, প্রমাণ কর যে, AB অপেক্ষা AD বৃহত্তর।

৬। ABC ত্রিভুজের A-কোণ স্থূলকোণ। D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, BC > DE.

৭। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজের উপর D একটি বিন্দু লওয়া হইল যেন, AD অপেক্ষা CD বৃহত্তর হয়। প্রমাণ কর যে, BD রেখা AD অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু CD অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৮। ABC ত্রিভুজের BA বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইল। এবং ∠CAD ও ∠CBA এর দ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইল। BE রেখা AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে EF > AF.

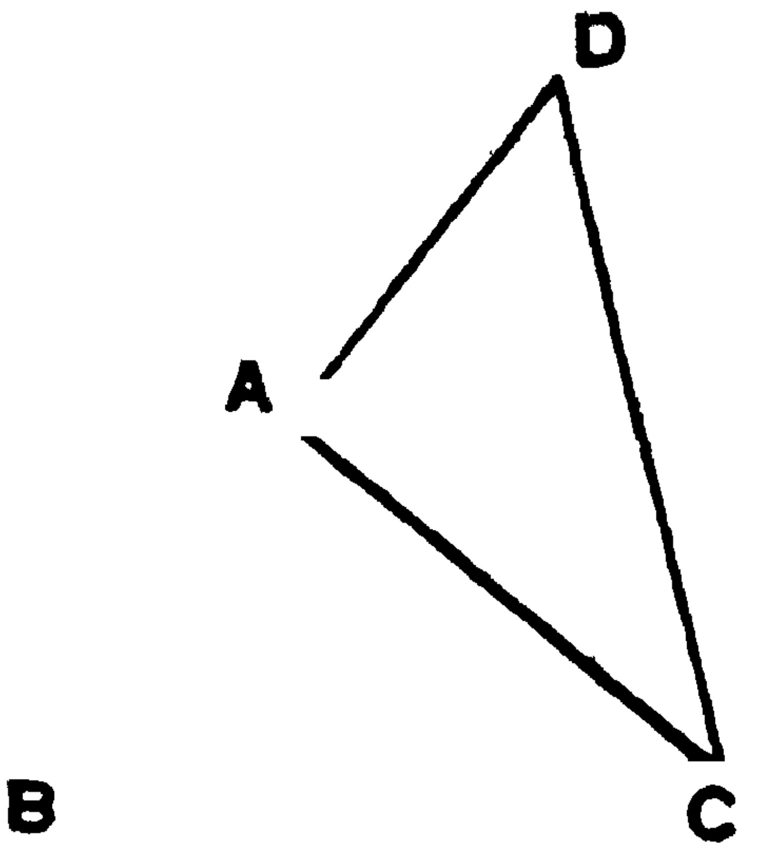
১৮শ উপপাদ্য—(ইউ—১।২০)

সাঃ নিঃ—কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিঃ নিঃ— ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর,

অর্থাৎ $AB+AC > BC$, ইত্যাদি।

অঙ্কন— BA সরলরেখাকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং AC এর সমান AD অংশ ছেদ কর। DC যোগ কর।



প্রমাণ— $AC=AD$ বলিয়া, $\angle ACD=\angle ADC$.

এখন, $\angle ACD$ অপেক্ষা $\angle BCD$ বৃহত্তর;

সুতরাং, $\angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BDC$ অপেক্ষাও $\angle BCD$ বৃহত্তর;

অতএব BC বাহু অপেক্ষা BD বৃহত্তর। [১৭শ উপঃ]

কিন্তু $BD=BA+AD=BA+AC$;

$\therefore \quad BA+AC > BC$.

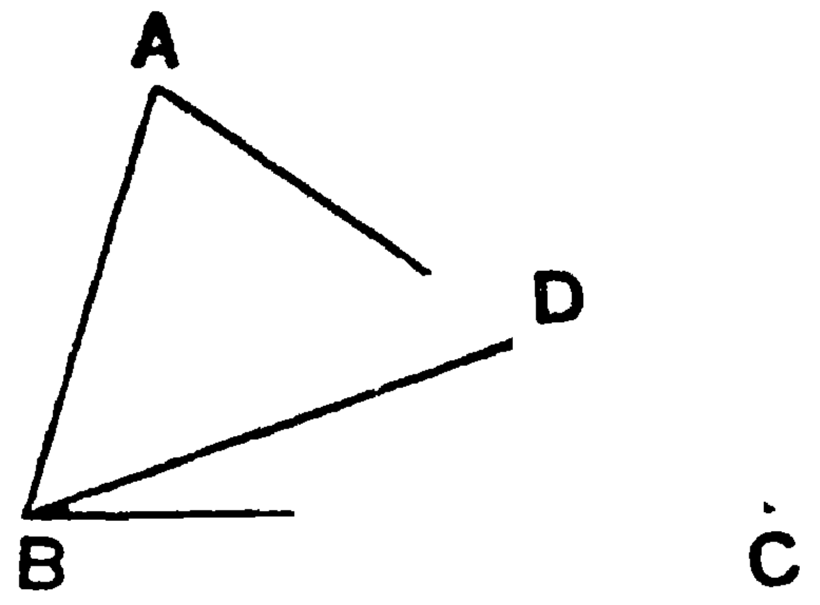
এইরূপে, $AB+BC > AC$ এবং $AC+CB > AB$.

[ই. উ. বি.]

অনু—ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

ABC ত্রিভুজের AB বাহু $<$ AC বাহু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AC-AB < BC$.

AC হইতে AB বাহুর সমান AD অংশ ছেদ কর। BD যোগ কর।



প্রমাণ— AB = AD বলিয়া, ∠ABD = ∠ADB.

কিন্তু ∠ABD অপেক্ষা ∠BDC বৃহত্তর, [৮ম উপঃ, ৪ অনুঃ]

অর্থাৎ ∠ADB অপেক্ষা ∠BDC বৃহত্তর ;

আবার, ∠DBC অপেক্ষা ∠ADB বৃহত্তর।

∴ ∠DBC অপেক্ষা ∠BDC আরও বৃহত্তর।

∴ BC > DC, অর্থাৎ, DC < BC. [১৭শ উপঃ]

স্নুতরাং AC − AB < BC.

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

২। কোন চতুর্ভুজের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৩। ত্রিভুজের অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে যে-কোন বাহুর শেষ প্রান্তদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি অন্য দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। কিন্তু উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি বৃহত্তর হইবে।

৪। ত্রিভুজের অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে কৌণিক-বিন্দু তিনটির দূরত্বের সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

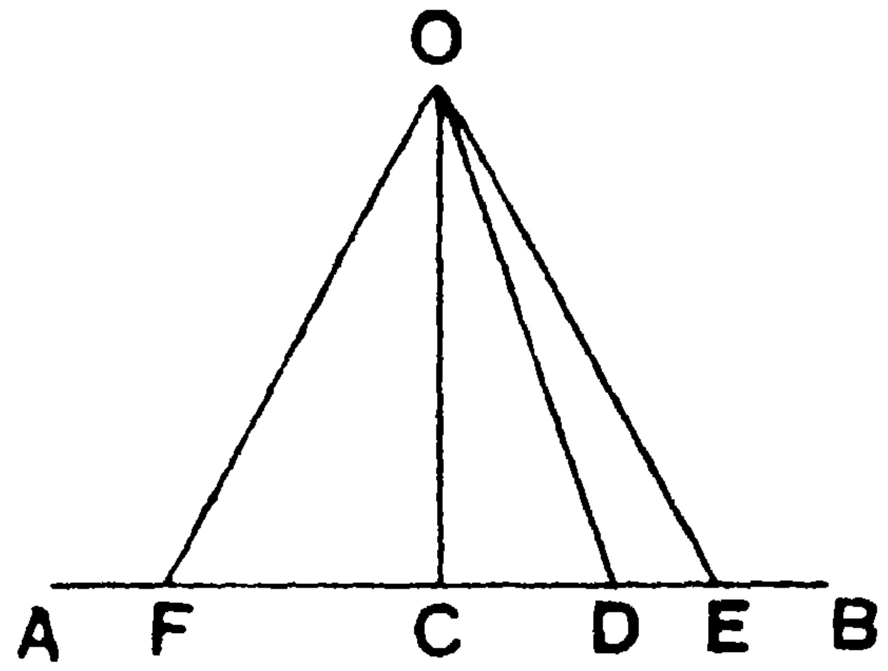
৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির D একটি বিন্দু এবং AB বাহুর উপর E একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। প্রমাণ কর যে, DE এবং DB এর অন্তর AC এবং AEএর অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৬। ABC ত্রিভুজের BA বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইল। DAC কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর E একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, EB + EC > AB + AC.

১৯শ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যাইতে পারে তন্মধ্যে লম্বটির দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।

বিঃ নিঃ—মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে উহার উপর OC লম্ব এবং OD যে-কোন একটি তির্যক রেখা অঙ্কিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, OC রেখা OD হইতে ক্ষুদ্রতর।



প্রমাণ— OCD ত্রিভুজের CD বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হওয়ায়, অন্তর্বিপরীত ∠OCD অপেক্ষা ∠ODE বৃহত্তর। [৮ম উপঃ, ৪ অনুঃ]

কিন্তু ∠OCD = এক সমকোণ।

∴ ∠ODE একটি স্থূলকোণ; সুতরাং ∠ODC একটি সূক্ষ্মকোণ।

∴ ∠ODC অপেক্ষা ∠OCD বৃহত্তর।

সুতরাং OC অপেক্ষা OD বৃহত্তর; [১৭শ উপঃ]

অর্থাৎ OD অপেক্ষা OC ক্ষুদ্রতর।

[ই. উ. বি.]

মন্তব্য—ইহার বিপরীত উপপাদ্যটি সত্য, অর্থাৎ O বিন্দু হইতে AB রেখা পর্যন্ত অঙ্কিত রেখা সমূহের মধ্যে OC সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হইলে, OC রেখাই AB এর উপর লম্ব হইবে।

১ম অনু—লম্বের পাদদেশ হইতে সমান দূরে ছেদকারী তির্যক্-রেখাগুলি পরস্পর সমান।

OE এবং OF তির্যক রেখাদ্বয় AB কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিল যেন, CE = CF. এখন OCE এবং OCF দুইটি ত্রিভুজের—

CE = CF ; OC একটি সাধারণ বাহু, এবং $\angle OCE = \angle OCF$;

সুতরাং $\triangle OCE \equiv \triangle OCF$, এবং OE = OF.

২য় অনু—দুইটি তির্যকের মধ্যে লম্বের অধিকতর নিকটবর্তীটি দূরবর্তী তির্যক অপেক্ষা সর্বদা ক্ষুদ্রতর।

মনে কর, OE অপেক্ষা OD তির্যক OC লম্বের অধিকতর নিকটবর্তী ; সুতরাং CE > CD. প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD রেখা < OE রেখা।

এখন $\angle OCE$ অপেক্ষা $\angle OEB$ বৃহত্তর ;

সুতরাং $\angle OEB$ একটি স্থূলকোণ এবং $\angle OED$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

আবার, $\angle OCD$ অপেক্ষা $\angle ODE$ বৃহত্তর বলিয়া, $\angle ODE$ একটি স্থূলকোণ।

$\therefore$ $\angle OED$ অপেক্ষা $\angle ODE$ বৃহত্তর।

অতএব OE > OD ; অর্থাৎ OD < OE.

অনুশীলনী

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় বিপরীত বাহুদ্বয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু অন্য দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী।

৩। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমিকে অন্য দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় যথাক্রমে D ও E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া DBC ও ECB বহিঃকোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক-রেখাদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, F বিন্দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

৫। কোন নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে ক্ষুদ্রতরটি উক্ত বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সহিত ক্ষুদ্রতর কোণ উৎপন্ন করে।

২০শ উপপাদ্য—(ইউ—১।২৪)

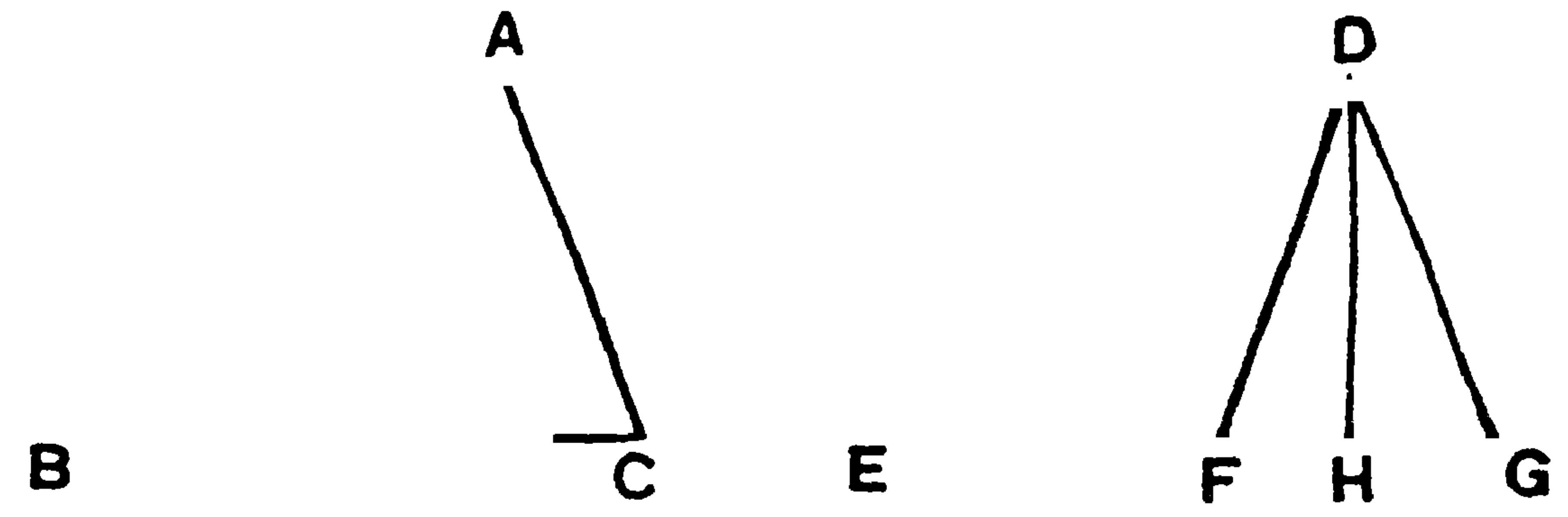
সাঃ নিঃ—যদি দুইটি ত্রিভুজের একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একের ঐ দুই বাহুর অন্তর্ভূর্ত কোণ অন্যের অনুরূপ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ বৃহত্তর কোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভূমি অন্য ত্রিভুজের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের—

$AB = DE, \quad AC = DF$;

কিন্তু $\angle EDF$ অপেক্ষা $\angle BAC$ বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC ভূমি $>$ EF ভূমি।

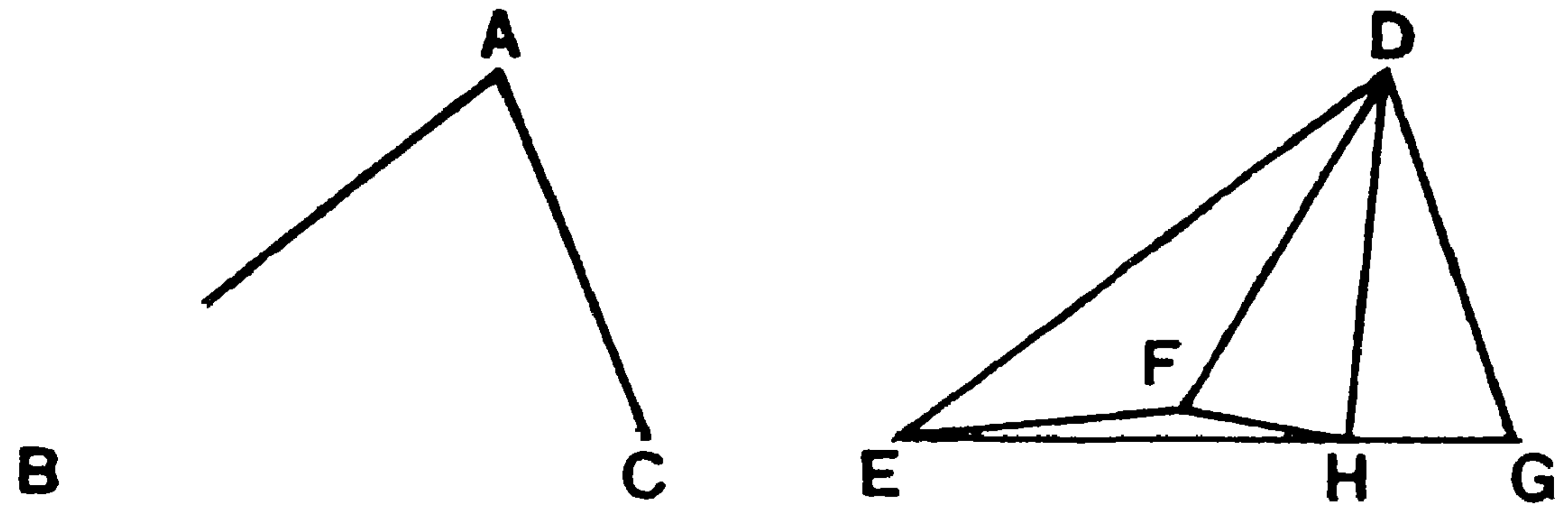


প্রমাণ—ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পতিত হয়। AB বাহু DE বাহুর সমান বলিয়া, B বিন্দুও E বিন্দুর উপর পড়িবে।

কিন্তু $\angle EDF$ অপেক্ষা $\angle BAC$ বৃহত্তর বলিয়া, AC বাহুটি $\angle EDF$ এর বাহিরে পড়িবে। মনে কর, C বিন্দু G বিন্দুতে পতিত হইল। অর্থাৎ DEG ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

এখন যদি EG বাহু F বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, তবে EF অপেক্ষা EG বৃহত্তর। অর্থাৎ BC ভূমি EF ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কিন্তু যদি তাহা না হয়, তবে মনে কর DH রেখা $\angle FDG$ কে দ্বিখণ্ডিত করিয়া EG রেখাকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।



এখন DHF ও DHG দুইটি ত্রিভুজের—

DF = DG, এবং DH একটি সাধারণ বাহু।

এবং $\angle FDH = \angle GDH$. $\therefore$ HF = HG. [১০ম উপঃ]

আবার, EFH ত্রিভুজে, $EH + HF > EF$. [১৮শ উপঃ]

$\therefore$ $EH + HG < EF$; অর্থাৎ $BC > EF$.

[**ই. উ. বি.**]

অনুশীলনী

১। যদি AB এর D মধ্যবিন্দুতে $\angle ADC$ একটি স্থূলকোণ অঙ্কিত করা হয়, তবে BC অপেক্ষা AC বৃহত্তর হইবে।

২। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা। $\angle ADB$ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, AB অপেক্ষা AC বৃহত্তর হইবে।

৩। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BD এবং CE সমান করা হইল। যদি AB অপেক্ষা AC বৃহত্তর হয়, তবে প্রমাণ কর যে, DC অপেক্ষা BE বৃহত্তর।

৪। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। ABC একটি স্থূলকোণ হইলে, প্রমাণ কর যে BD অপেক্ষা AC বৃহত্তর।

৫। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুতে যথাক্রমে E ও D বিন্দু লওয়া হইল যেন, BD ও CE সমান হয়। প্রমাণ কর যে, AC অপেক্ষা AB বৃহত্তর হইলে, DC অপেক্ষা BE বৃহত্তর।

২১শ উপপাদ্য—(ইউ—১।২৫)

(এই উপপাদ্যটি ২০শ উপপাদ্যের বিপরীত)

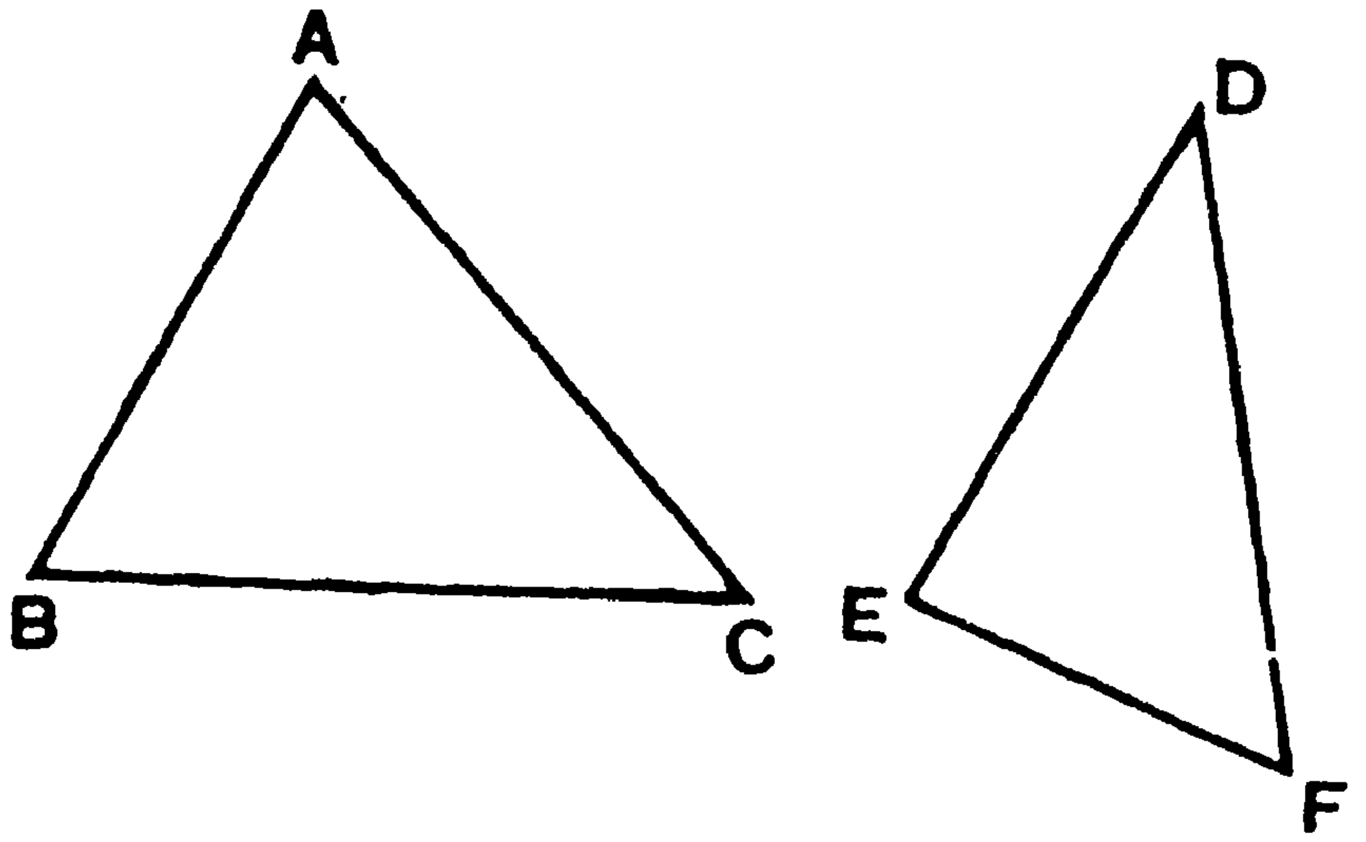
সাঃ নিঃ—যদি দুই ত্রিভুজের একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একের ভূমি অন্যের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে বৃহত্তর ভূমি-বিশিষ্ট ত্রিভুজের শিরঃকোণ অন্য ত্রিভুজের শিরঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

বিঃ নিঃ— মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির—

AB বাহু = DE বাহু, AC বাহু = DF বাহু,

কিন্তু, BC ভূমি $>$ EF ভূমি।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle$EDF অপেক্ষা $\angle$BAC বৃহত্তর।



প্রমাণ— যদি $\angle$EDF অপেক্ষা $\angle$BAC বৃহত্তর না হয়, তবে $\angle$BAC, $\angle$EDF এর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি $\angle$BAC = $\angle$EDF, তবে BC বাহু = EF বাহু [১০ম উপঃ]

কিন্তু ইহা কল্পনার বিপরীত।

আবার, যদি $\angle$EDF অপেক্ষা $\angle$BAC ক্ষুদ্রতর হয়, তবে

BC ভূমি $<$ EF ভূমি। [২০শ উপঃ]

কিন্তু কল্পনানুসারে EF অপেক্ষা BC ক্ষুদ্রতর নয়।

সুতরাং ∠BAC, ∠EDF এর সমান অথবা ∠EDF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয় ;

অর্থাৎ ∠EDF অপেক্ষা ∠BAC বৃহত্তর। [ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা এবং AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, ∠ADB একটি সূক্ষ্মকোণ।

২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A শিরঃকোণ এবং D উহার অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। যদি ∠DBC অপেক্ষা ∠DCB বৃহত্তর হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ∠CAD অপেক্ষা ∠BAD বৃহত্তর।

৩। ABCD চতুর্ভুজের AD বাহু = BC বাহু এবং ∠ADC অপেক্ষা ∠BCD ক্ষুদ্রতর। প্রমাণ কর যে, ∠ABC অপেক্ষা ∠BAD ক্ষুদ্রতর।

৪। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া BD, CE এর সমান হইল। যদি DC অপেক্ষা BE বৃহত্তর হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AB অপেক্ষা AC বৃহত্তর।

৫। ABCD চতুর্ভুজের AD = BC এবং BD অপেক্ষা AC বৃহত্তর। প্রমাণ কর যে, ∠BCD অপেক্ষা ∠ADC বৃহত্তর।

বিবিধ অনুশীলনী

১। AOB কোণের দ্বিখণ্ডক OC রেখা। AO বাহুর সমান্তরাল CD রেখা OB বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে DO = DC.

২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি ভূমির সহিত শিরঃকোণের অর্ধেকের সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৩। ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডক ও A বিন্দু হইতে উহার সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্ভূত কোণ, B এবং C কোণের অন্তরের অর্ধেক হইবে।

৪। ABC ত্রিভুজের B এবং C কোণ যথাক্রমে BO ও CO রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল। প্রমাণ কর যে, A বিন্দু হইতে BO ও CO এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির অন্তর্ভূত কোণ $৯০^\circ - \frac{1}{2}A$ কোণের সমান।

৫। ABC ত্রিভুজের AB বাহু এবং AC বাহু বর্ধিত করিয়া বহিঃকোণ দুইটি BO ও CO দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল। প্রমাণ কর যে, A বিন্দু হইতে BO এবং CO এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির অন্তর্ভূত কোণ $৯০^\circ + \frac{1}{2}A$ এর সমান।

৬। একটি চতুর্ভুজের দুইটি বাহু সমান্তরাল কিন্তু অসমান। প্রমাণ কর যে, অন্য বাহু দুইটি বর্ধিত হইয়া পরস্পরকে ছেদ করিবে।

৭। ABC, ABD, CDE তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, E, A ও B বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৮। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC বাহুর উপর AD লম্ব। প্রমাণ কর যে, AD এর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলি ABC ত্রিভুজের বাহু-গুলির সহিত সমকোণে মিলিত হয়।

৯। ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে AD ও AE রেখা BC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি BAD কোণ C কোণের এবং CAE কোণ B কোণের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A বিন্দু হইতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব DE রেখাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১০। কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি এবং শিরঃকোণের অন্তর দুই সমকোণের সমান হইবে।

১১। **সুষম** বহুভুজের একটি অন্তঃকোণ ১৬৮° হইলে, উহার বাহু-সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ—৩০।]

১২। AOB সমকোণের মধ্যস্থ যে-কোন বিন্দু P হইতে AO বাহুর উপর PM লম্ব টানিয়া উহাকে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল, যেন MQ = PM, এবং BO বাহুর উপর PN লম্ব টানিয়া উহাকে R পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল, যেন NR = PN। প্রমাণ কর যে, QR রেখা O বিন্দু দিয়া যাইবে।

১৩। যদি একটি ত্রিভুজ সম্পূর্ণরূপে অন্য একটি ত্রিভুজের অভ্যন্তরে স্থাপন করা যায়, তবে উহার পরিসীমা ক্ষুদ্রতর হইবে।

১৪। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB বাহুর যে-কোন বিন্দু D হইতে BC ভূমির উপর পাতিত লম্ব উহাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। বর্ধিত ED বর্ধিত CA বাহুর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, DFA ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

১৫। ABCD সমবাহু চতুর্ভূজের B ও D শীর্ষবিন্দুদ্বয় এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

১৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা E পর্য্যন্ত বর্ধিত হইয়া DE = AD হইল। E বিন্দুকে যথাক্রমে AB ও AC সমান-বাহুদ্বয়ের P ও Q মধ্যবিন্দুর সহিত সংযুক্ত করিলে EP ও EQ রেখাদ্বয় BC ভূমিকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AFEG একটি সমবাহু চতুর্ভুজ।

১৭। ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। প্রমাণ কর যে, ADEF ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

১৮। ABC ও ABD দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ। AB কে E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BE কে AB এর সমান কর। CD ও DE যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, CDE একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

১৯। সুষম ষড়্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে, বহিঃকোণটি সমবাহু ত্রিভুজের একটি অন্তঃকোণের সমান হইবে।

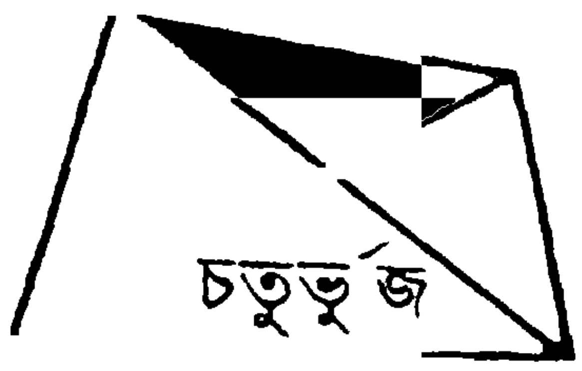
২০। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় হইতে উহার ভূমির যে-কোন বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা একই হইবে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

চতুর্ভুজ—সামান্তরিক

চতুর্ভুজ ও তাহার প্রকার ভেদ—

১। **চতুর্ভুজ**—চারটি সরলরেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের নাম চতুর্ভুজ (Quadrilateral)। সুতরাং চতুর্ভুজের চারটি বাহু এবং

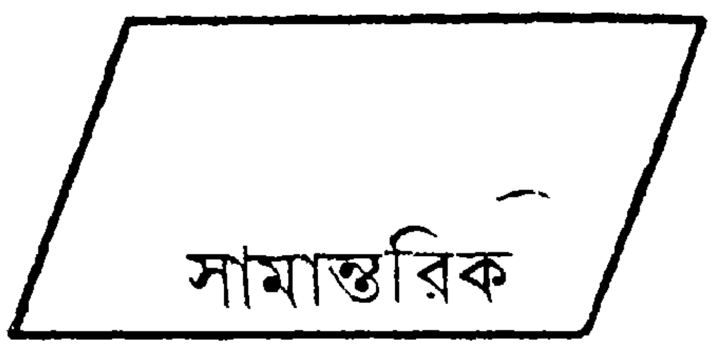


চারটি শীর্ষবিন্দু। প্রত্যেক শীর্ষবিন্দুতে একটি শিরঃকোণ উৎপন্ন হয়।

দুইটি বিপরীত দিকৃস্থ শীর্ষবিন্দু-সংযোজক রেখাকে উহার কর্ণ (diagonal) বলে। সুতরাং চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ আছে এবং প্রত্যেক কর্ণ দ্বারা চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়।

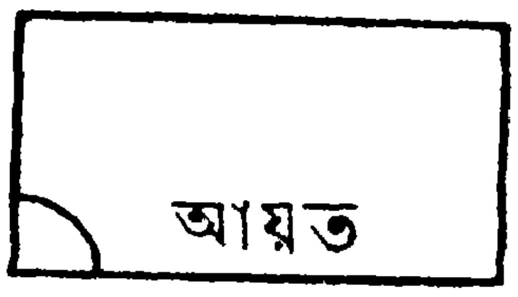
দ্রষ্টব্য। সীমা-নির্দেশক চারটি সরলরেখা একবিন্দুতে মিলিত হইলে কোন চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইতে পারে না।

২। **সামান্তরিক ক্ষেত্র**—যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি



পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে সামান্তরিক ক্ষেত্র (Parallelogram) বলে।

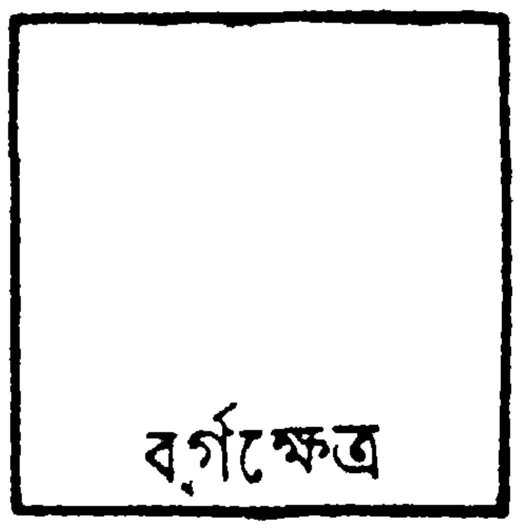
৩। **আয়তক্ষেত্র**—যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ



তাহাকে আয়ত ক্ষেত্র বা আয়ত (Rectangle) বলে।

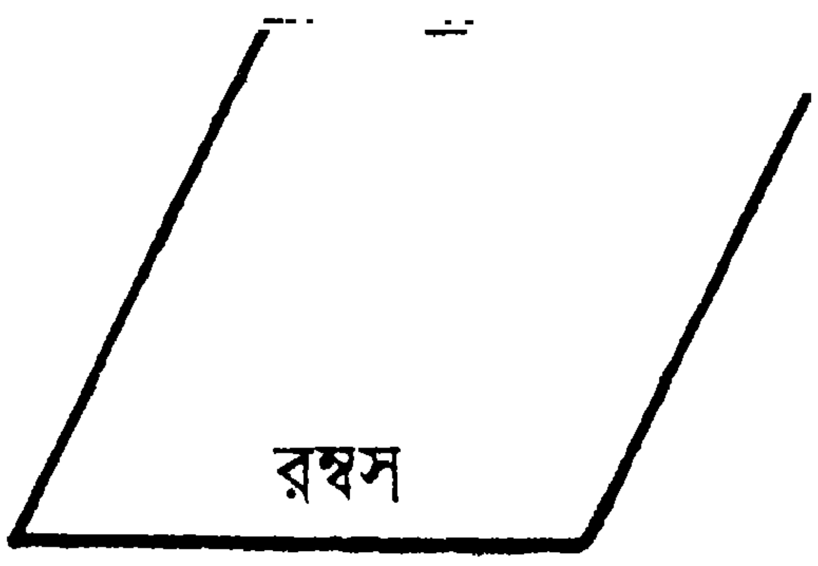
টীকা—আয়তের একটি কোণ সমকোণ হওয়াতে, উহার চারটি কোণই সমকোণ।

৪। **বর্গক্ষেত্র**—যে আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত দুইটি বাহু সমান



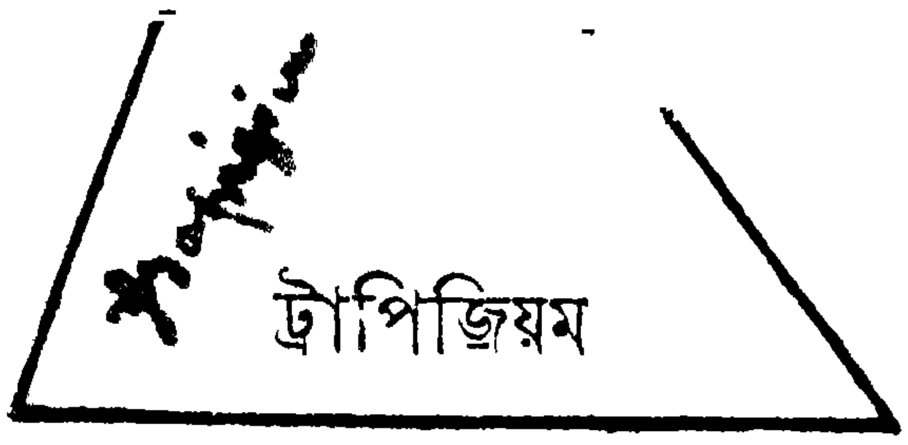
তাহাকে বর্গক্ষেত্র (Square) বলে।

টীকা—বর্গক্ষেত্রের চারটি বাহু পরস্পর সমান এবং কোণগুলি প্রত্যেকটি সমকোণ।



৫। **সমবাহু চতুর্ভুজ বা রম্বস**—যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহাকে সমবাহু-চতুর্ভুজ বা রম্বস (Rhombus) বলে।

৬। **ট্রাপিজিয়ম**—যে চতুর্ভুজের কেবল দুইটি বাহু সমান্তরাল তাহাকে ট্রাপিজিয়ম (Trapizium) বলে।



৭। **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম**—যে ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহু দুইটি সমান তাহাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম বলে।

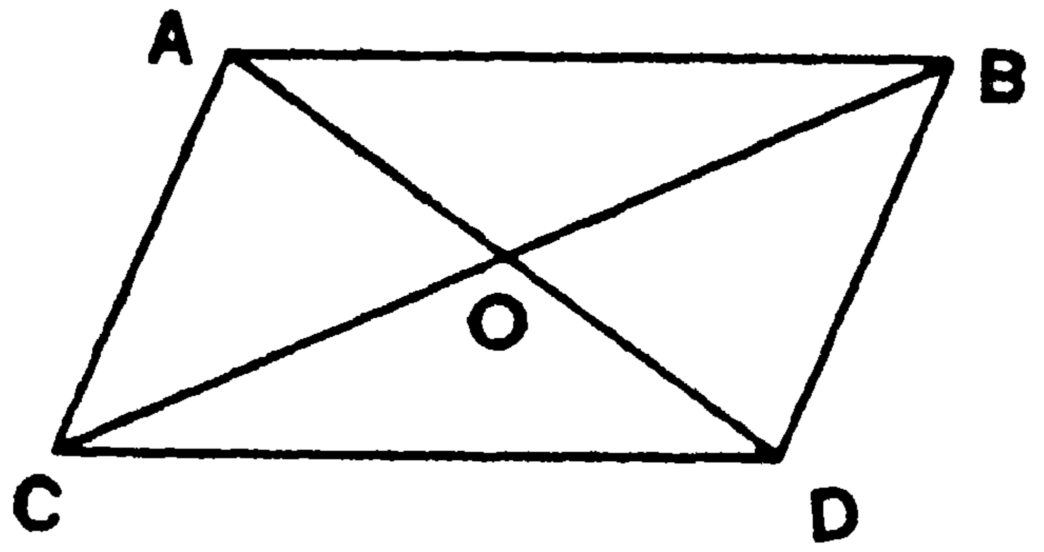
২২শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৩৪)

সাঃ নিঃ—কোন সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান এবং উহার প্রত্যেকটি কর্ণ উহাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABCD একটি সামান্তরিক এবং AD ও BC উহার কর্ণদ্বয়। প্রমাণ করিতে হইবে যে—

AB = CD ; AC = BD ; ∠BAC = ∠BDC ; ∠ACD = ∠ABD ;

এবং AD ও BC কর্ণদ্বয় ABCD সামান্তরিকটিকে দ্বিখণ্ডিত করে।



প্রমাণ—AB বাহু CD বাহুর সমান্তরাল এবং BC ভেদক উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

∴ ∠ABC = একান্তর ∠BCD. [৬ষ্ঠ উপঃ]

আবার, AC বাহু BD বাহুর সমান্তরাল এবং BC ভেদক উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

∴ ∠ACB = একান্তর ∠CBD. [৬ষ্ঠ উপঃ]

এখন ABC ও BCD দুইটি ত্রিভুজের—

∠ABC = ∠BCD, ∠ACB = ∠CBD,

এবং BC উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

∴ △ABC ≡ △BCD, [১১শ উ

সুতরাং BC কর্ণ ABCD সামান্তরিকটিকে দ্বিখণ্ডিত করিল ;

AB = CD, AC = BD এবং ∠BAC = ∠BDC.

এইরূপে AD কর্ণ নিয়া দেখান যাইতে পারে যে—

$$\angle ABD = \angle ACD,$$

এবং AD কর্ণ ABCD সামান্তরিকটিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

[**ই. উ. বি.**]

১ম অনু—সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাদের ছেদ বিন্দুতে পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হয়।

মনে কর, ABCD সামান্তরিকের AD ও BC কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO = OD এবং BO = OC.

প্রমাণ—AOC ও BOD দুইটি ত্রিভুজের—

$\angle ACO =$ একান্তর $\angle DBO$, [৬ষ্ঠ উপঃ]

$\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$, [৩য় উপঃ]

এবং $AC = BD$; [২২শ উপঃ]

$\therefore \triangle AOC \equiv \triangle BOD$. [১১শ উপঃ]

সুতরাং $AO = OD$ এবং $CO = OB$. [**ই. উ. বি.**]

২য় অনু—কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ হইবে।

৩য় অনু—বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলিও প্রত্যেকটি সমকোণ।

অনুশীলনী

১। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান হইলে উহা একটি ন্তরিক হইবে।

কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে উহা ন্তরিক হইবে।

৩। যে চতুর্ভুজের কর্ণগুলি পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে উহা একটি সামান্তরিক।

৪। বর্গক্ষেত্রের অথবা রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের লম্ব ও দ্বিখণ্ডক।

৫। কোন সামান্তরিকের সন্নিহিত কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

৬। একটি কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা সামান্তরিকের দুই বিপরীত বাহু-দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, উহা ঐ মধ্যবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৭। সামান্তরিকের বিপরীত কোণদ্বয় হইতে অপর কর্ণের উপর লম্বপাত করিলে লম্ব দুইটি সমান হইবে এবং উহাদের পাদবিন্দুদ্বয় কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

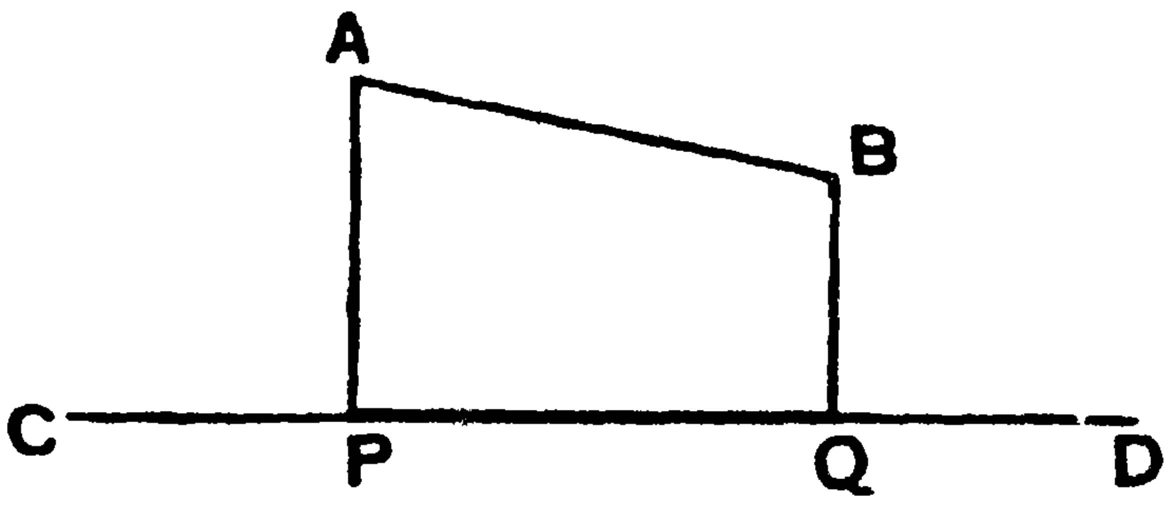
৮। ABCD ট্রাপিজিয়মের BC ও AD বাহুদ্বয় পরস্পর সমান। প্রমাণ কর যে, $\angle A = \angle B$.

৯। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া AD = DE হইল। প্রমাণ কর যে, ABEC একটি সামান্তরিক।

১০। কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু এবং দুইটি বিপরীত স্থূলকোণ সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

[৪র্থ সমাধান দ্রষ্টব্য, ৮৭ পৃষ্ঠা]

অভিক্ষেপ—যদি কোন সরলরেখার প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় হইতে অন্য একটি সরলরেখার উপর লম্ব পাতিত হয়, তবে উক্ত লম্বদ্বয়-দ্বারা শেষোক্ত সরলরেখার ছিন্ন-অংশকে দ্বিতীয় রেখার উপর প্রথম রেখার অভিক্ষেপ (Projection) বলে।



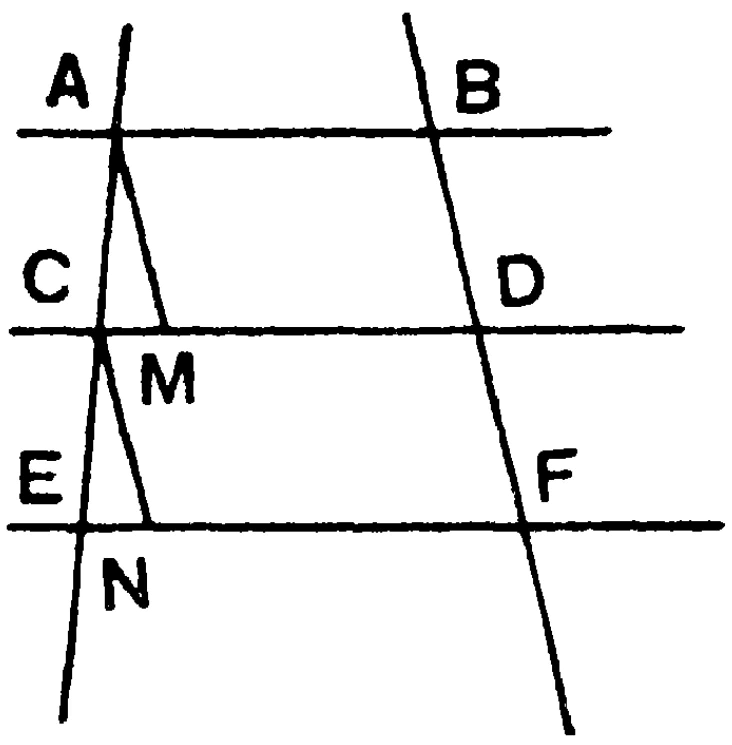
AB সরলরেখার প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে CD রেখার উপর AP ও BQ লম্ব পাতিত হইলে, AP ও BQ লম্বদ্বারা CD এর ছিন্ন-অংশ PQ কে CD রেখার উপর AB এর ‘অভিক্ষেপ’ বলে।

২৩শ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—তিন বা তদধিক সমান্তরাল সরলরেখা-দ্বারা ছিন্ন কোন একটি ভেদকের অংশগুলি পরস্পর সমান হইলে, অপর কোন ভেদকের ছিন্ন অংশগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB, CD ও EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা-দ্বারা ছিন্ন AE ভেদকের AC ও CE অংশ পরস্পর সমান। প্রমাণ করিতে হইবে যে, অপর একটি BF ভেদকেরও ঐরূপ ছিন্ন-অংশ BD ও DF পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর A ও C বিন্দু হইতে BF এর সমান্তরাল AM ও CN রেখা CD ও EF রেখাকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল।



প্রমাণ— CD ও EF রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল এবং AE ভেদক উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

∴ $\angle$ACM = অনুরূপ $\angle$CEN. [৬ষ্ঠ উপঃ]

আবার, AM ও CN উভয়ই BF এর সমান্তরাল বলিয়া উহারা পরস্পর সমান্তরাল। [৭ম উপঃ]

∴ $\angle$ECN = অনুরূপ $\angle$CAM ;

এখন, ACM ও CEN দুইটি ত্রিভুজের—

$\angle$ACM = $\angle$CEN, $\angle$CAM = $\angle$ECN এবং AC = CE.

অতএব $\triangle ACM \equiv \triangle CEN$; $\therefore$ AM = CN.

আবার, ABDM একটি সামান্তরিক ; $\therefore$ AM = BD ;

এবং CDFN একটি সামান্তরিক ; $\therefore$ CN = DF.

সুতরাং BD = DF. [ই. উ. বি.]

অনু—সমান্তরাল সরলরেখা সমূহের সাধারণ একটি লম্ব অঙ্কিত করিলে ঐ লম্বের উপর যে-কোন ভেদকের ছিন্ন অংশ-সমূহের অভিক্ষেপ সমান হইবে।

অনুশীলনী

১। AB, CD ও EF তিনটি সরলরেখা-দ্বারা ছিন্ন যে-কোন ভেদকের অংশগুলি সমান হইলে, সরলরেখা তিনটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

২। ABCD একটি সামান্তরিক। E এবং F যথাক্রমে AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, BF এবং ED রেখা AC কে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে।•

৩। ABCD ও ABEF দুইটি সামান্তরিক। CE এবং DF যোগ করিলে CDFE একটি সামান্তরিক হইবে।

৪। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর অসমান।

৫। ABCD একটি সামান্তরিকের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G ও H. প্রমাণ কর যে, EFGH একটি সামান্তরিক।

৬। ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে BC এর সমান্তরাল সরলরেখাটি BAC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের সহিত যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, EF = BC.

৭ ।মদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডব ধা দুইটি বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, DE রেখা BC ভূমির সমান্তরাল।

৮। ABC ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত সরলরেখার উপর BP ও CQ লম্ব অঙ্কিত করা হইল। BC বাহুর মধ্যবিন্দু M। প্রমাণ কর যে, MP = MQ.

৯। ২৩শ উপপাদ্যের চিত্রে প্রমাণ কর যে, CD রেখা AB ও EF এর সমষ্টির অর্ধেক।

১০। AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, AD ও BC পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১১। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হইলে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। প্রমাণ কর যে, কোন আয়তক্ষেত্রের কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান।

১২। ABC ত্রিভুজের AC বাহু D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল। AB এবং BC বাহুর উপর যথাক্রমে ABEF ও BCGH দুইটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে, EH = 2BD.

[সংকেত—EBHP সামান্তরিক আঁক।]

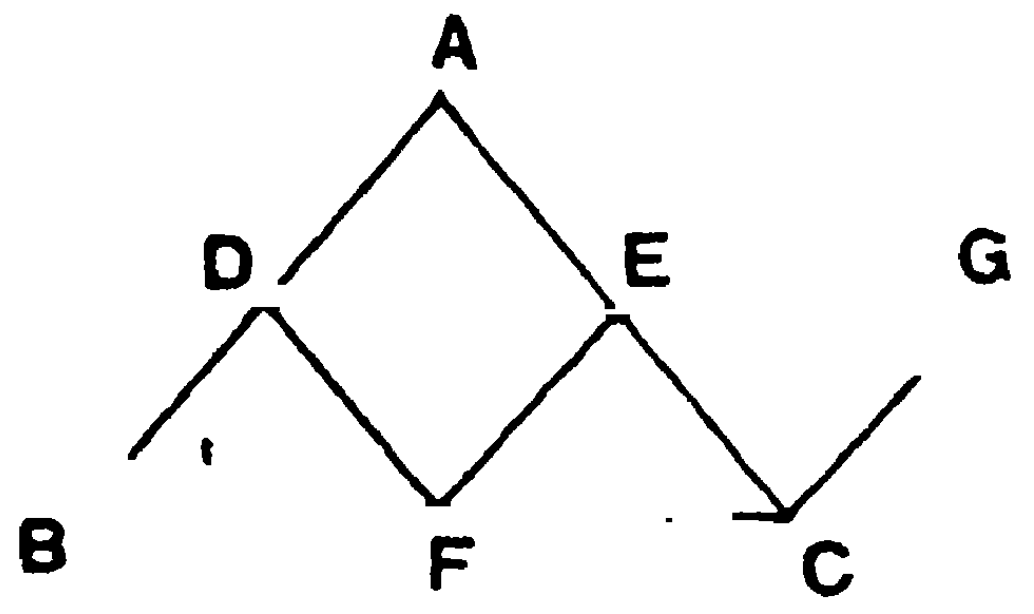
১৩। ABCD একটি সামান্তরিক এবং CD এর উপর P একটি বিন্দু। যথাক্রমে PA ও PB এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DE ও CF রেখাদ্বয় বর্ধিত AB কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, EFএর দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান অর্থাৎ P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

বিবিধ সমাধান

১। কোন ত্রিভুজের একবাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিলে উহা অন্য বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়া BC ভূমি[illegible] সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DE রেখা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ [illegible] প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC বাহু E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

ACএর সমান্তরাল করিয়া DF রেখা অঙ্কিত কর। মনে কর DF, BC কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন DECF একটি সামান্তরিক হইল।



প্রমাণ— ADE এবং DBF তুইটি ত্রিভুজের—

AD = DB ; ∠DAE = অনুরূপ ∠BDF,

এবং ∠ADE = অনুরূপ ∠DBF ;

∴ ত্রিভুজ তুইটি সর্বসম। ∴ AE = DF = EC.

২। কোন ত্রিভুজের তুই বাহুর মধ্য বিন্দুর যোজক-রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E (১ম সমাধানের চিত্র)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE সরলরেখা BC এর সমান্তরাল ও ইহার অর্ধেক। BA বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত CG রেখা বর্ধিত DE রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ— ADE এবং CEG তুইটি ত্রিভুজের—

∠AED = বিপ্রতীপ ∠CEG ; ∠ADE = একান্তর ∠CGE,

এবং AE = EC ;

∴ ত্রিভুজ তুইটি সর্বসম।

সুতরাং DE = EG. ∴ DG = 2DE ; এবং CG = DA = DB .

এখন, DB সরলরেখা CG সরলরেখার সমান ও সমান্তরাল।

∴ DGCB একটি সামান্তরিক।

∴ DG অথবা DE সরলরেখা BC এর সমান্তরাল।

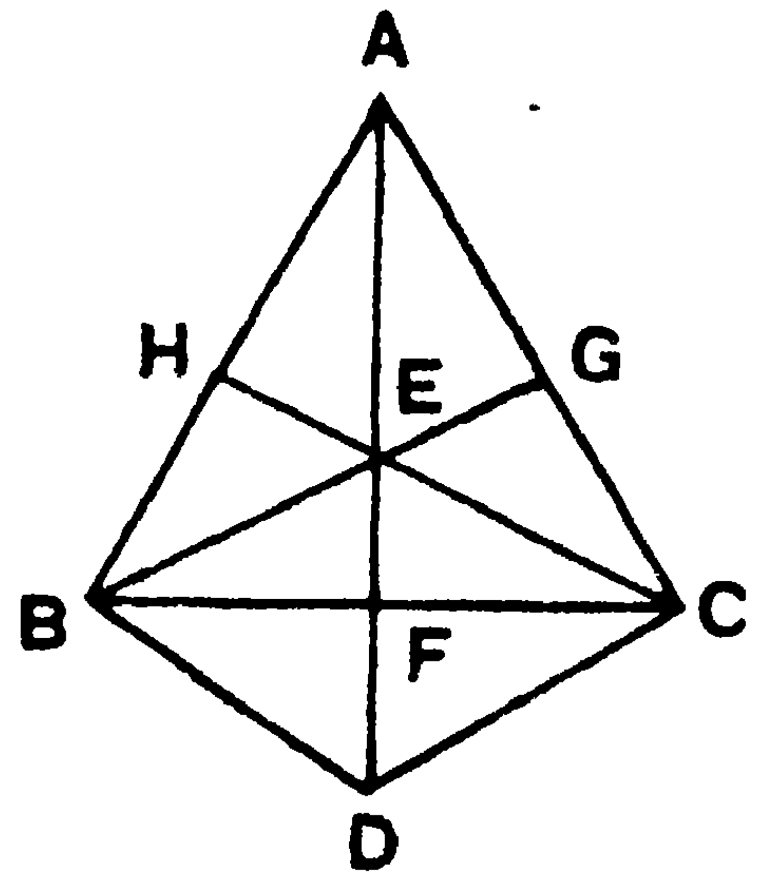
এবং $BC = DG = 2DE$.

৩। কোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর ABC ত্রিভুজের BG ও CH মধ্যমা দুইটি E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, বর্ধিত AE রেখা BC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করিলে, AF রেখাটি তৃতীয় মধ্যমা হইবে, অর্থাৎ $BF = FC$.

প্রমাণ—C বিন্দু দিয়া GB এর সমান্তরাল CD সরলরেখা টান। CD বর্ধিত AF রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। BD সংযুক্ত কর।

এখন, ACD ত্রিভুজের, $AG = GC$ এবং GE, CD এর সমান্তরাল।



∴ $AE = ED$.

আবার, $AH = HB$; সুতরাং HE, BD এর সমান্তরাল।

অর্থাৎ CE, BD এর সমান্তরাল।

∴ BDCE চতুর্ভুজ একটি সামান্তরিক।

ইহার BC ও DE দুইটি কর্ণ F বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

∴ $BF = FC$;

সুতরাং ABC ত্রিভুজের তৃতীয় মধ্যমা AF.

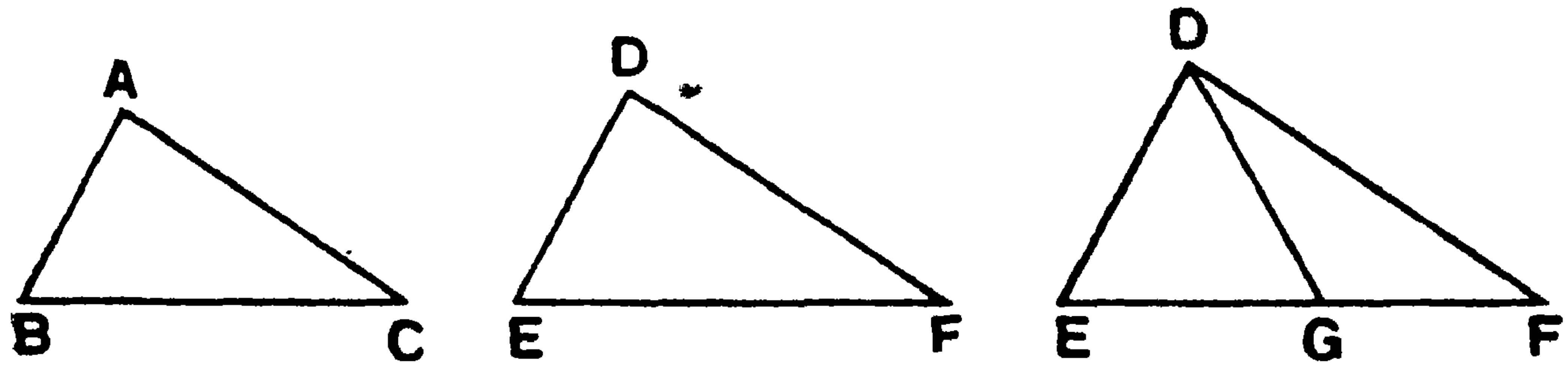
অনু— $AE = DE = 2EF$; অর্থাৎ EF সরলরেখা AF এর তৃতীয়াংশ

এইরূপে, $EG=\frac{1}{3}BG$, $EH=\frac{1}{3}CH$.

সংজ্ঞা—মধ্যমাত্রয়ের সম্পাত-বিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (centroid) বলা হয়।

৪। যদি দুইটি ত্রিভুজের একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং একের একটি বাহুর সম্মুখীন কোণ অন্য ত্রিভুজের অনুরূপ কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে, অথবা ত্রিভুজ দুইটির অন্য বাহুদ্বয়ের সম্মুখীন কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে।

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের AB বাহু = DE বাহু, AC বাহু = DF বাহু এবং $\angle ABC=\angle DEF$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, অথবা $\angle BAC+\angle EDF$ = দুই সমকোণ হইবে।



প্রমাণ— ACB কোণটি DFE কোণের সমান কিম্বা অসমান হইবে।

(১) যদি সমান হয়, তবে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির—

$AB=DE$, $\angle ABC=\angle DEF$,

এবং $\angle ACB=\angle DFE$;

স্থতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [১১শ উপঃ]

(২) যদি $\angle ACB$ ও $\angle DFE$ অসমান হয়, তবে BAC কোণের সমান করিয়া EDG কোণ অঙ্কিত কর যেন, DG, EF (কিম্বা বর্ধিত EF) বাহুকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, ABC, DEG দুইটি ত্রিভুজের—

$AB=DE$, $\angle ABC=\angle DEG$,

এবং $\angle BAC=\angle EDG$;

$\therefore$ AC = DG এবং $\angle$ACB = $\angle$EGD. [১১শ উপঃ]

আবার, DF = AC = DG ;

$\therefore$ $\angle$DFG = $\angle$DGF. [১২শ উপঃ]

কিন্তু, $\angle$EGD + $\angle$DGF = ২ সমকোণ ;

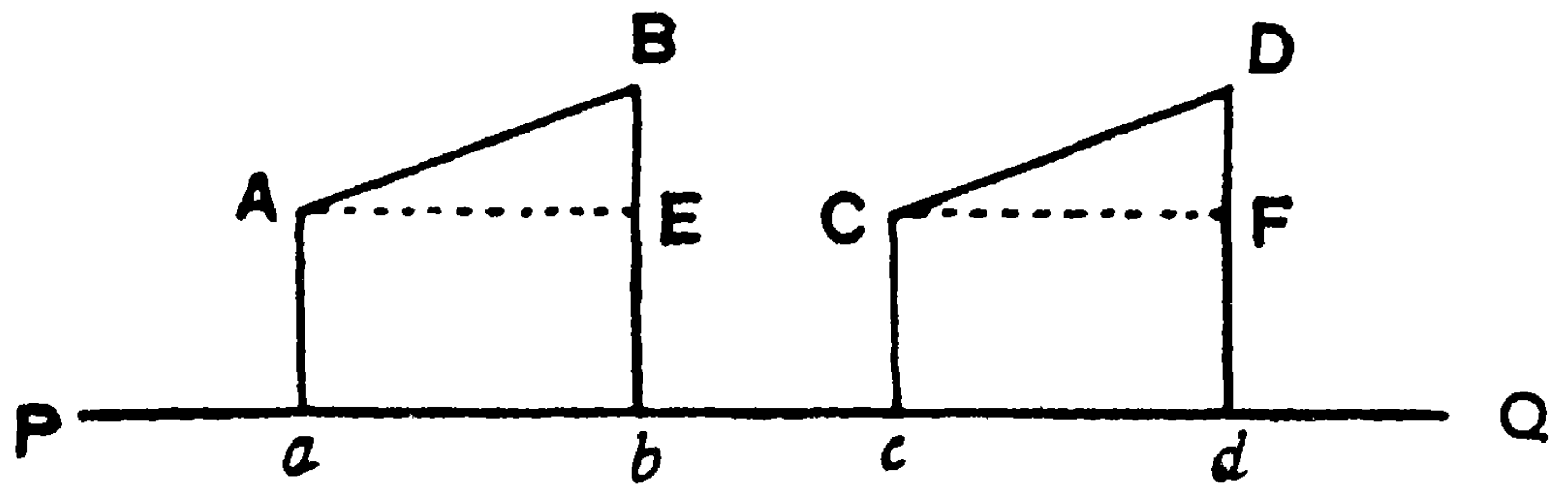
সুতরাং $\angle$EGD + $\angle$DFG = ২ সমকোণ,

অর্থাৎ $\angle$ACB + $\angle$DFE = ২ সমকোণ।

৫। কোন সরলরেখার উপর দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখার অভিক্ষেপ (Projection) সমান হইবে।

মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা এবং PQ রেখার উপর যথাক্রমে *ab* ও *cd* উহাদের অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $ab = cd$.



PQ এর সমান্তরাল করিয়া A এবং C বিন্দু হইতে AE ও CF রেখা অঙ্কিত কর, যেন উহারা B*b* ও D*d* লম্বদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ—AE ও CF রেখা PQ এর সমান্তরাল বলিয়া উহারা পরস্পর সমান্তরাল। সুতরাং BAE ও DCF কোণের বাহুদ্বয় যথাক্রমে পরস্পর সমান্তরাল এবং $\angle$BAE = $\angle$DCF.

ABE ও CDF দুইটি ত্রিভুজের—

$\angle$BAE = $\angle$DCF, $\angle$AEB = $\angle$CFD = এক সমকোণ।

এবং AB = CD, $\therefore$ AE = CF. [১১শ উপঃ]

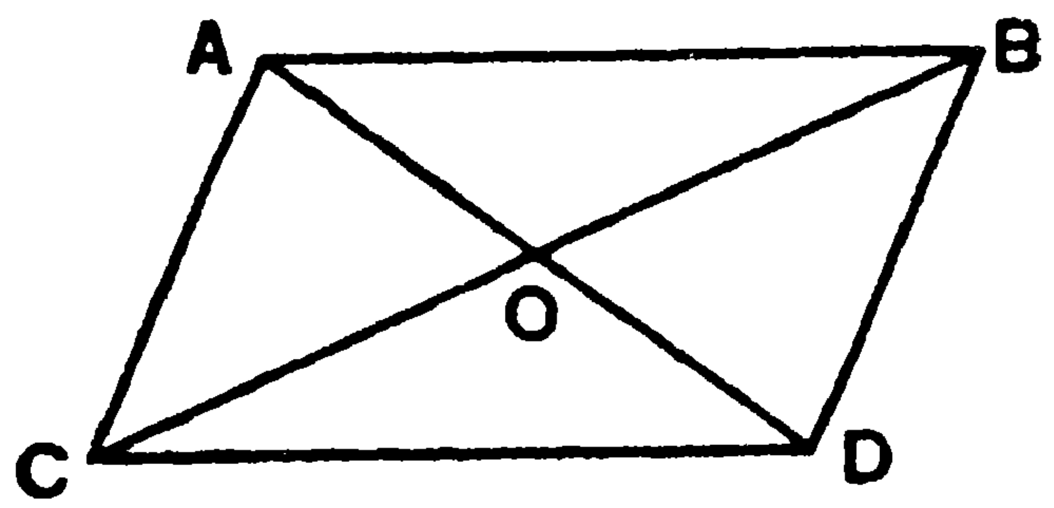
কিন্তু AE = ab এবং CF = cd. $\therefore$ $ab = cd$.

৬। দুইটি সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখার একই দিকের প্রান্তবিন্দু-সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। (ইউ—১।৩৩)

মনে কর, AB ও CD দুই সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখা এবং AC, BD সরলরেখাদ্বয় উহাদের একই দিকের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC ও BD পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

BC যোগ কর।



প্রমাণ—এখন, AB ও CD সমান্তরাল এবং BC (ভেদক) উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে। ∴ ∠ABC = একান্তর ∠BCD ; [৬ষ্ঠ উপঃ]

ABC, BCD ত্রিভুজ দুইটির, AB = CD ; BC উভয়ের সাধারণ বাহু।

এবং ∠ABC = ∠BCD ; ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [১০ম উপঃ]

∴ AC = BD এবং ∠ACB = একান্তর ∠CBD ;

সুতরাং AC ও BD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। [৪র্থ উপঃ]

বিবিধ অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুর যোজক-রেখাগুলি ত্রিভুজটিকে চারটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

২। ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর যোজক-রেখা শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩। কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক হইবে।

৪। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর যোজক-রেখা দুইটি পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৫। ট্রাপিজিয়মেব সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্য-বিন্দু-যোজক রেখার দ্বিগুণ হইবে।

৬। কোন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

৭। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার পরিসীমার $\frac{3}{4}$ অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং বৃহত্তম কোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমাটি ক্ষুদ্রতম।

৮। যে-কোন ত্রিভুজের অসমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত শিবঃকোণের দ্বিখণ্ডক ঐ কোণ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা ও লম্বের অন্তর্বর্তী হইবে।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির যে-কোন বিন্দু হইতে অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি ভূমির যে-কোন প্রান্তবিন্দু হইতে উহার বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যের সমান।

১০। ABC সমকোণী ত্রিভুজের C কোণটি সমকোণ এবং BC, CA, ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D,E,F. যদি EF এবং DF (অথবা বর্ধিত EF, DF) C বিন্দু হইতে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বের সহিত যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে মিলিত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, AG ও BH পরস্পর সমান্তরাল।

১১। ABC ত্রিভুজের AB বাহু AC বাহুর দ্বিগুণ। BA কে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া উৎপন্ন বহিঃকোণ CAD, AE রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল। যদি AE বর্ধিত BC এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BE এর মধ্যবিন্দু C।

১২। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. BE এর সমান্তবাল করিয়া অঙ্কিত FG রেখা বধিত DEকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, CFG ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমান।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

ব্যবহারিক জ্যামিতি

সরলরেখা ও কোণ-সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

চিত্রাঙ্কনে যন্ত্র ব্যবহার—পূর্বে বলা হইয়াছে যে, জ্যামিতির ব্যবহারিক শাখায় চিত্রাঙ্কন দ্বারাই প্রস্তাবিত বিষয়গুলি নিষ্পন্ন হয় এবং এই নিষ্পন্ন বিষয়গুলিকে সম্পাদ্য বলে। এই সব জ্যামিতিক চিত্র যতদূর-সম্ভব নির্ভুল ও সূক্ষ্মভাবে অঙ্কিত করা আবশ্যক, নচেৎ নিষ্পন্ন বিষয়গুলির যাথার্থ্য সহজে উপলব্ধি হয় না। এইজন্য জ্যামিতিক-চিত্রাঙ্কনে একটি রুলার ও কম্পাস যন্ত্র বিশেষ আবশ্যক। সমান্তরাল সরলরেখা প্রভৃতি আঁকিবার জন্য ত্রিকোণীরও আবশ্যক হয়। বর্ত্তমান সম্পাদ্যগুলির অঙ্কনে স্কেলের (scale) ব্যবহার করা হয় নাই। কারণ এই সব অঙ্কনে কোন রেখা বা কোণের পরিমাণ করিবার আবশ্যক হয় নাই। প্রত্যেক সম্পাদ্যের একটি করিয়া ঔপপত্তিক প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে; তথাপি অঙ্কন শুদ্ধ হইল কি না পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত। অঙ্কনের জন্য আবশ্যকীয় রেখাগুলি হইতে পৃথক করিবার উদ্দেশ্যে প্রমাণের জন্য যে সব রেখা প্রভৃতি আবশ্যক হইয়াছে তাহা বিন্দু-দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

ব্যবহারিক জ্যামিতিতে সাধারণত নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলির ব্যবহার হয়—

(১) একখানা রুলার (Ruler)। উহার একধারে সেণ্টিমিটার, মিলিমিটার এবং অপর ধারে ইঞ্চি এবং ইঞ্চির দশাংশগুলি অঙ্কিত থাকে।

(২) দুই খানা সেট্ স্কোয়ার (Set Squares); একখানা ৪৫° কোণ-বিশিষ্ট, অপর খানি ৬০° ও ৩০° কোণ-বিশিষ্ট।

(৩) একটি পেন্সিল-কম্পাস (Pencil-Compass)।

(৪) একটি স্ক্রু-বিশিষ্ট সূক্ষ্মাগ্র কম্পাস (Screw-Compass)।

(৫) একটি অর্ধবৃত্তাকৃতি কোণমান যন্ত্র বা চাঁদা (Protractor)।

দ্রষ্টব্য। মাপ-অনুসারে অঙ্কনে এই সব যন্ত্রের ব্যবহার আবশ্যক। সম্পাদ্যের অঙ্কনে শুধু রুলার ও কম্পাস হইলেই চলে।

১ম সম্পাদ্য—(ইউ—১।৯)

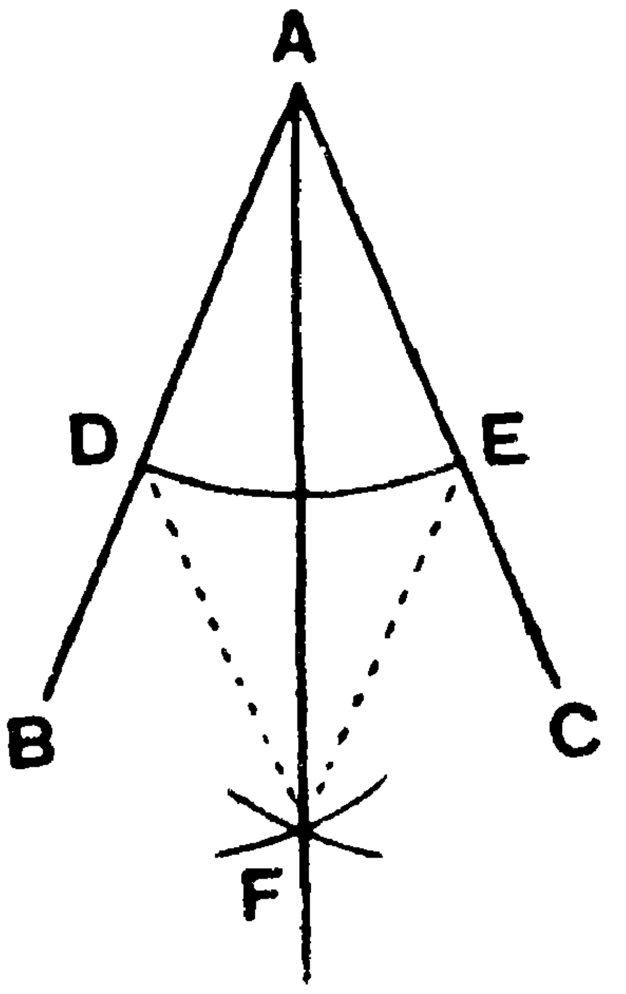
সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ। ইহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই চাপ AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার, D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DE রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই চাপদ্বয় পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিল।

AF যোগ করিলেই BAC কোণটি AF রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।



প্রমাণ— DF ও EF সংযুক্ত কর।

ADF ও AEF দুইটি ত্রিভুজের—

AD = AE ; DF = EF ; এবং AF উভয়ের সাধারণ বাহু।

সুতরাং $\triangle$ ADF $\equiv \triangle$ AEF [১৪শ উপঃ]

$\therefore$ $\angle$DAF = $\angle$EAF ;

অর্থাৎ $\angle$BAC, AF রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল। **[ই. স. বি.]**

টীকা—এই প্রকারে কোন নির্দিষ্ট কোণকে, চার, আট প্রভৃতি সমান অংশে বিভক্ত করা যায়।

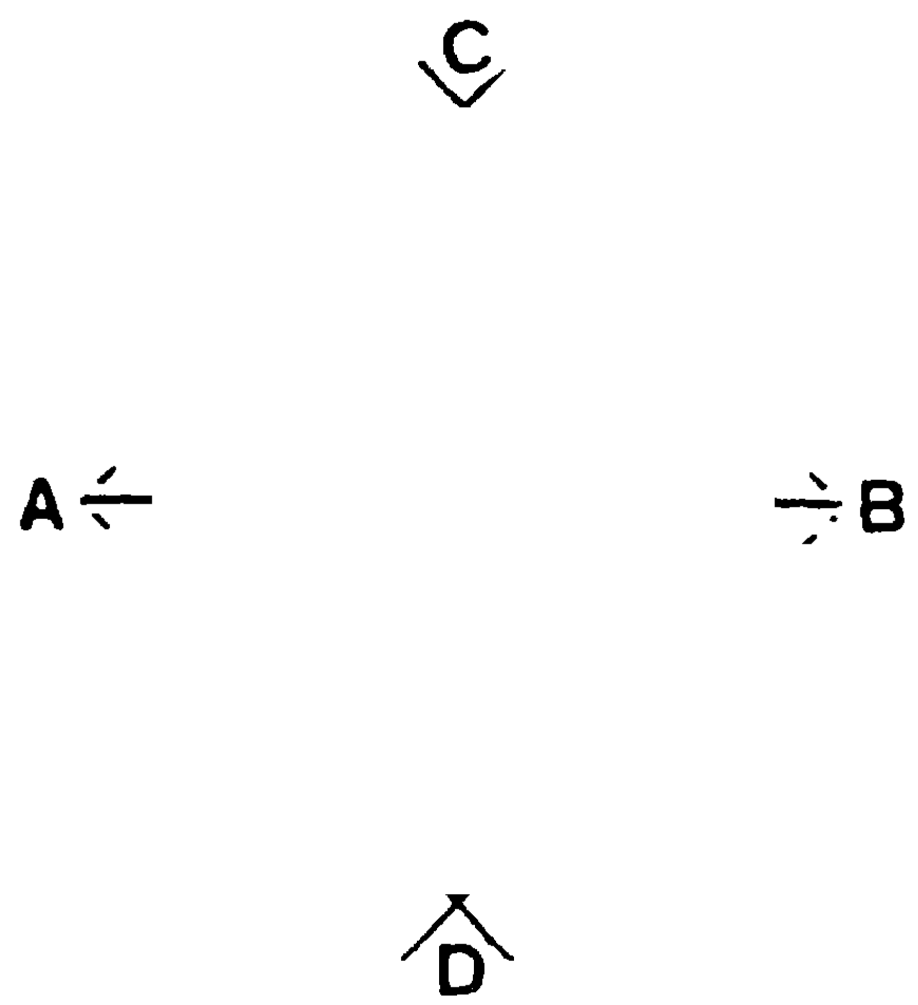
২য় সম্পাদ্য—(ইউ—১।১০)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ইহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। পুনরায় B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া BA ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর এই দুইটি বৃত্ত পরস্পর C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

CD সংযুক্ত কর। CD রেখা AB রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিলে, AB রেখা O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।



প্রমাণ—AC, BC, BD ও AD সংযুক্ত কর।

ACD ও BCD দুইটি ত্রিভুজের—

AC = BC এবং AD = BD ; CD উভয়ের সাধারণ বাহু।

∴ △ ACD ≡ △ BCD ; সুতরাং ∠ACD = ∠BCD. [১৪শ উপঃ]

আবার, AOC ও BOC দুইটি ত্রিভুজের—

CA = CB, OC উভয়ের সাধারণ বাহু।

এবং $\angle ACO = \angle BCO$;

$\therefore \triangle AOC \equiv \triangle BOC$; সুতরাং $OA = OB$ [১০ম উপঃ]

অর্থাৎ AB রেখা O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল। [**ই. স. বি.**]

১ম টীকা—AB এর সমান ব্যাসার্ধ না লইয়া ABএর অর্ধেক অপেক্ষা বড় ব্যাসার্ধ লইলেই চলিতে পারে। এমন ব্যাসার্ধ নিতে হইবে যেন বৃত্ত দুইটি C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর অর্ধেক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ব্যাসার্ধ নিলে চাপ দুইটি ছেদ করিবে না।

২য় টীকা—পূর্বোক্ত নিয়মে পুনরায় AO ও BO রেখার প্রত্যেককে দ্বিখণ্ডিত করিলে AB রেখাটি সমান চার অংশে বিভক্ত হইবে। এইরূপে AB রেখাকে ৮, ১৬, ইত্যাদি সমান অংশে বিভক্ত করা যায়।

অনুশীলনী

১। একটি সমকোণকে দ্বিখণ্ডিত কর এবং প্রত্যেক অংশ ৪৫° হইল কিনা দেখ।

২। AB রেখা CD রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। OE এবং OF রেখাদ্বারা AOC এবং AOD কোণদ্বয়কে দ্বিখণ্ডিত কর। OE এবং OF এর অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ কত? OG রেখা BOD কোণের দ্বিখণ্ডক হইলে, OE এবং OG একই রেখায় অবস্থিত হইবে, প্রমাণ কর।

৩। একটি কোণকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, এক অংশ অপরের $\frac{১}{৩}$ হয়।

৪। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশ অপর অংশের $\frac{১}{৭}$ অংশ হয়।

৫। দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর ও সমষ্টি দেওয়া আছে, উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। ত্রিভুজের ভূমির উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন, শিরঃকোণ হইতে ঐ বিন্দুর যোজক-সরলরেখা অন্য দুই বাহুর সমষ্টির অর্ধেক হয়।

৩য় সম্পাদ্য—(ইউ—১।১১)

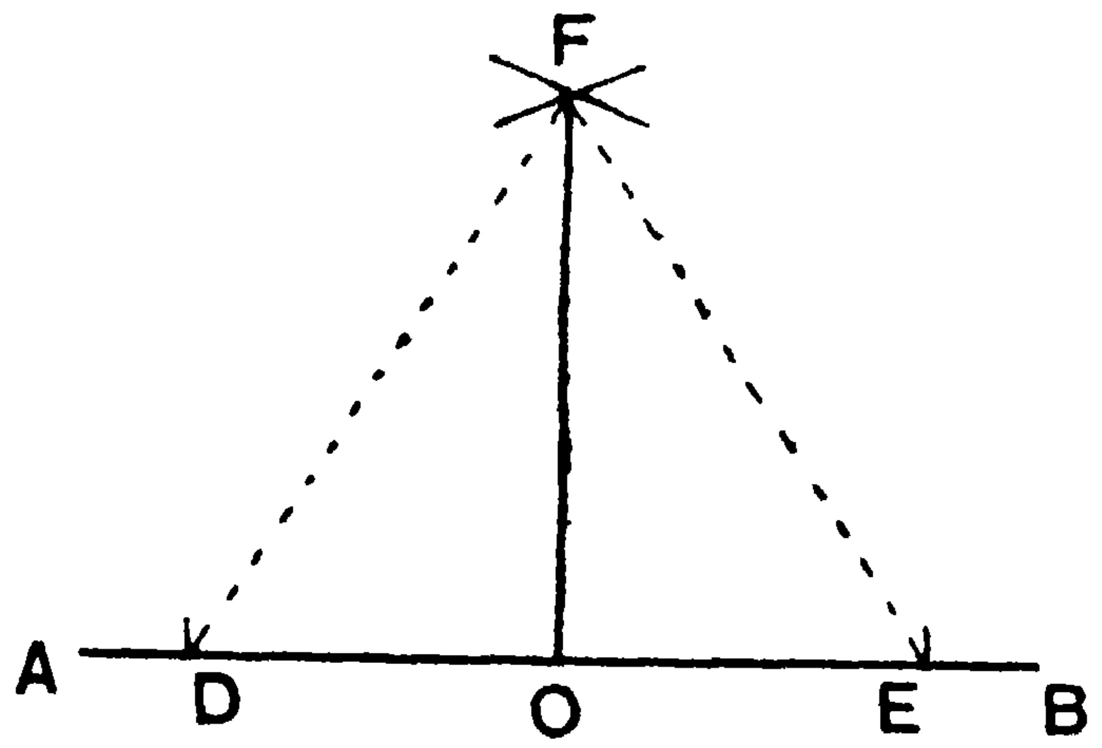
সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে করে AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দু হইতে AB রেখার উপর একটি লম্ব আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন—O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ AB রেখাকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, যথাক্রমে D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DE (কিম্বা DE এর অর্ধাধিক) ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই চাপদ্বয় পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিল। OF সংযুক্ত কর।

এখন OF রেখাই O বিন্দুতে AB এর উপর লম্ব হইবে।



প্রমাণ— FD ও FE যোগ কর।

DOF ও EOF দুইটি ত্রিভুজের—

DO = OE এবং DF = EF,

OF উভয়ের সাধারণ বাহু।

∴ $\triangle$ DOF ≡ $\triangle$ EOF, সুতরাং $\angle$DOF = সন্নিহিত $\angle$EOF ;

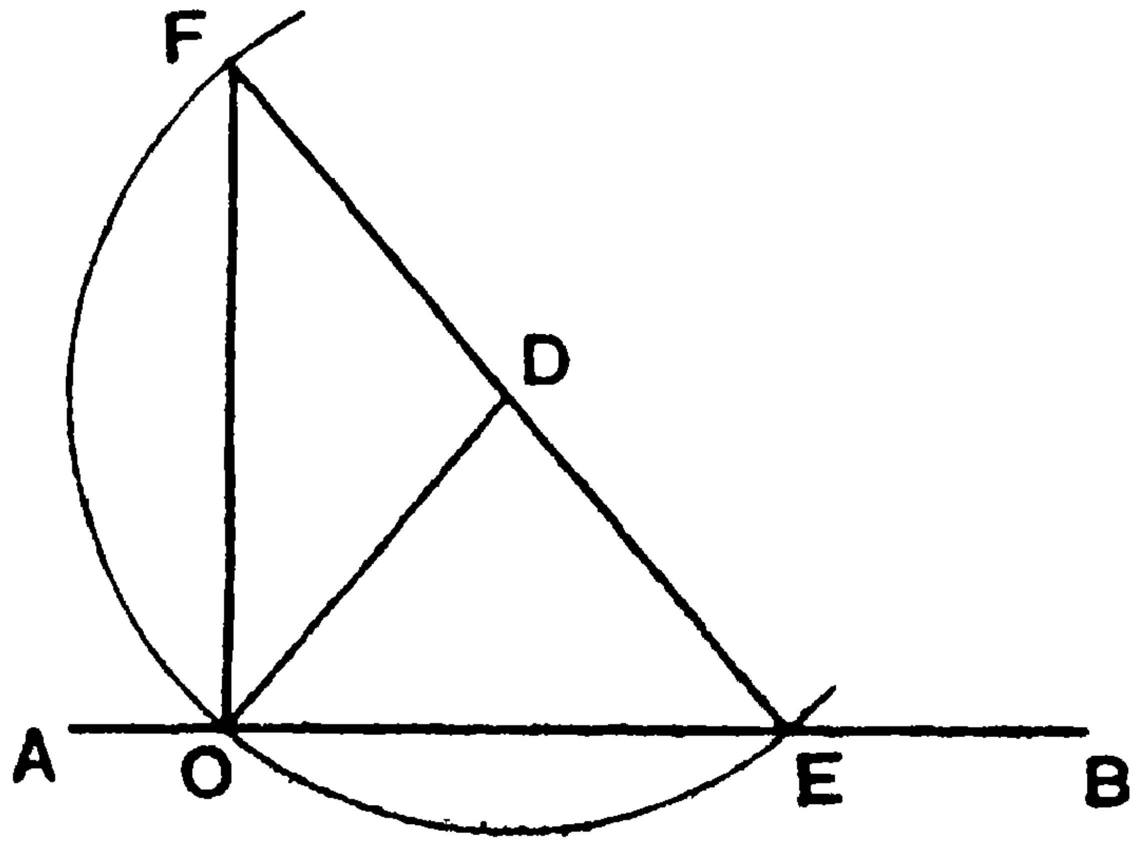
[১৪শ উপঃ]

অতএব ইহারা প্রত্যেকেই একটি সমকোণ, অর্থাৎ OF, AB এর লম্ব।

[ই. স. বি.]

দ্রষ্টব্য। D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে দুইটি চাপ অঙ্কিত করা হইল উহাদের ব্যাসার্ধ DE রেখার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে চাপদ্বয় F বিন্দুতে ছেদ করিবে না।

দ্বিতীয় প্রকার—AB রেখার বহিঃস্থ D বিন্দু লও। D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর এই বৃত্ত AB রেখাকে O এবং E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন ED যোগ করিয়া ED রেখাকে পরিধির F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। FO যোগ কর। এখন OF রেখাই AB রেখার উপর লম্ব হইবে।



প্রমাণ— OD যোগ কর।

FD = DO ; ∴ ∠DFO = ∠DOF
এবং ED = OD ; ∴ ∠DOE = ∠DEO } [১২শ উপঃ]

∴ ∠FOE = ∠FOD + ∠DOE

= দুই সমকোণের অর্ধেক = এক সমকোণ। [৮ম উপঃ]

সুতরাং OF রেখা AB রেখার উপর লম্ব। **[ই. স. বি.]**

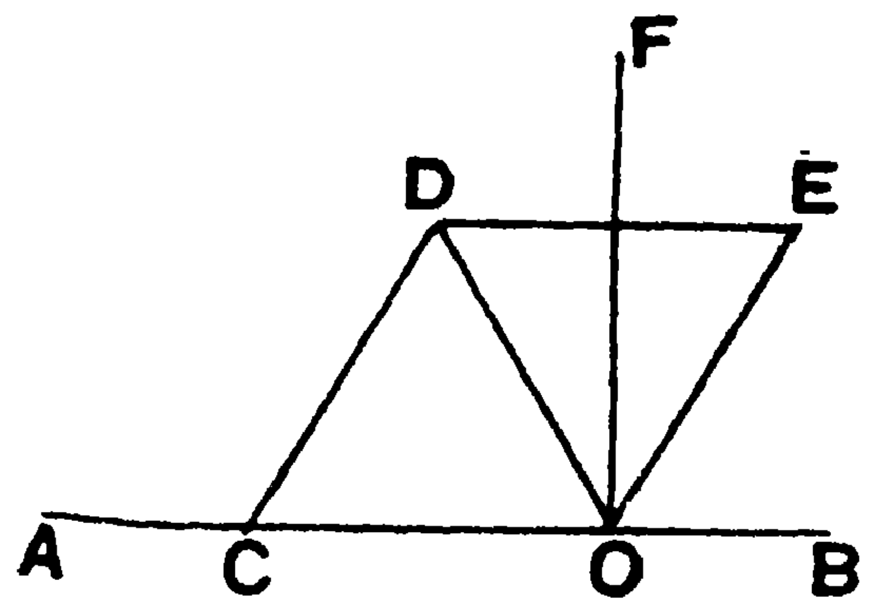
দ্রষ্টব্য। O বিন্দুটি AB রেখার প্রান্তবিন্দু হইলে এই প্রকারে লম্ব আঁকিতে হয়।

তৃতীয় প্রকার—মনে কর AB রেখার O নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যেন, এই চাপ AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ আঁক যেন, এইটি পূর্বের চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ আঁক যেন, ইহা প্রথম চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করে। এখন OD ও OE যোগ করিয়া OF রেখা দ্বারা DOE কোণকে দ্বিখণ্ডিত কর।

[১ম সম্পাদ্য]



তাহা হইলে OF রেখাই AB রেখার উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ— DE যোগ কর।

এখন, DCO ও EOD ত্রিভুজ দুইটিই সমবাহু।

$\therefore$ $\angle DOC = \angle DOE = \frac{2}{3}$ সমকোণ $=$ ৬০°।

$\therefore$ $\angle DOC + \angle DOF = \angle DOC + \frac{1}{2}\angle DOE =$ এক সমকোণ।

[**ই. স. বি.**]

অনুশীলনী

১। রুলার এবং কম্পাসের সাহায্যে ৪৫° একটি কোণ অঙ্কিত কর।

২। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৩। কোন রম্বসের কর্ণ দুইটি দেওয়া আছে। রম্বসটি অঙ্কিত কর।

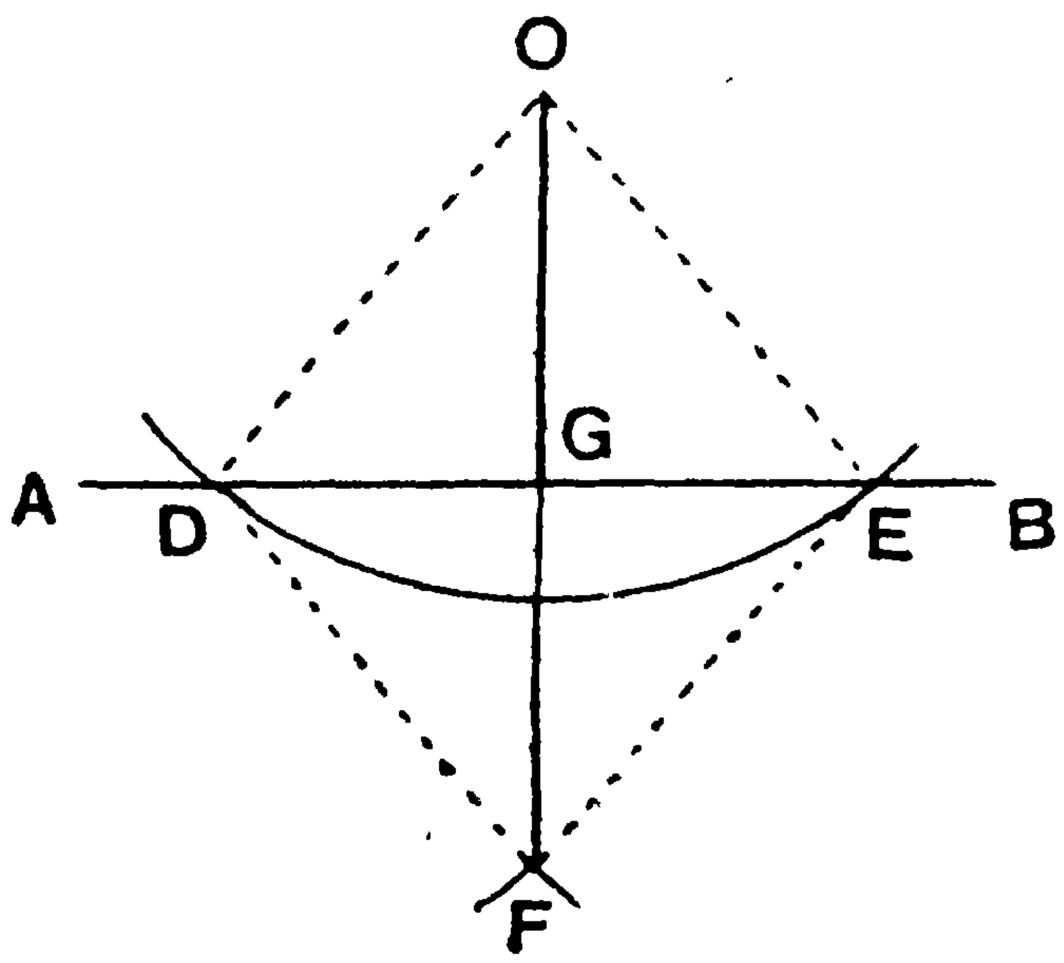
৪। একটি নির্দিষ্ট রেখার অন্তর্গত এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন, উহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়। এরূপ অঙ্কন কখন অসম্ভব হইবে?

৫। তৃতীয় সম্পাদ্যের সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি রেখা টান।

৪র্থ সম্পাদ্য—(ইউ—১।১২)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট অসীম সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। O বিন্দু হইতে AB রেখার উপর একটি লম্ব আঁকিতে হইবে।



অঙ্কন—AB রেখার মধ্যে E একটি বিন্দু লও। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OE ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ AB রেখাকে E ও D বিন্দুতে ছেদ করিল (যদি E ব্যতীত অন্য কোন D বিন্দুতে ছেদ না করে, তবে OE রেখাই AB এর লম্ব হইবে)।

আবার, E ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OE এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক যেন, উহারা পরস্পর O এবং F বিন্দুতে ছেদ করিল। OF যোগ কর। মনে কর OF রেখা AB রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, OG রেখাই AB রেখার উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ— OE, EF, DF এবং OD সংযুক্ত কর।

এখন, DOF ও EOF দুইটি ত্রিভুজের—

OD = OE এবং FD = FE ; OF উভয়ের সাধারণ বাহু।

∴ ∠DOF = ∠EOF. [১৪শ উপঃ]

আবার, DOG এবং EOG দুইটি ত্রিভুজের—

OD = OE ; OG উভয়ের একটি সাধারণ বাহু ;

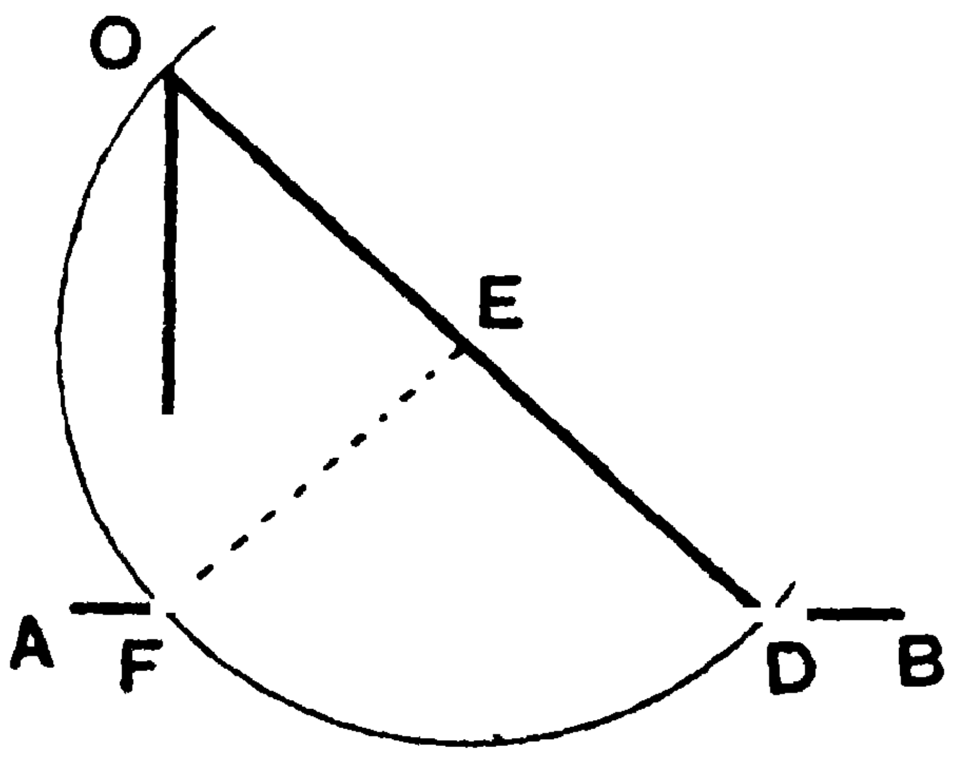
এবং ∠DOG = ∠EOG ;

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [১০ম উপঃ]

∴ ∠DGO = সন্নিহিত ∠EGO = এক সমকোণ।

অর্থাৎ OG রেখা AB রেখার উপর লম্ব। [**ই. স. বি.**]

দ্বিতীয় প্রকার—AB রেখার যে-কোন D বিন্দু নিয়া DO যোগ কর এবং OD রেখাকে E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। এখন E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া EO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর এই বৃত্ত AB রেখাকে F ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। OF যোগ করিলে, OF রেখাই AB এর উপর লম্ব হইবে।

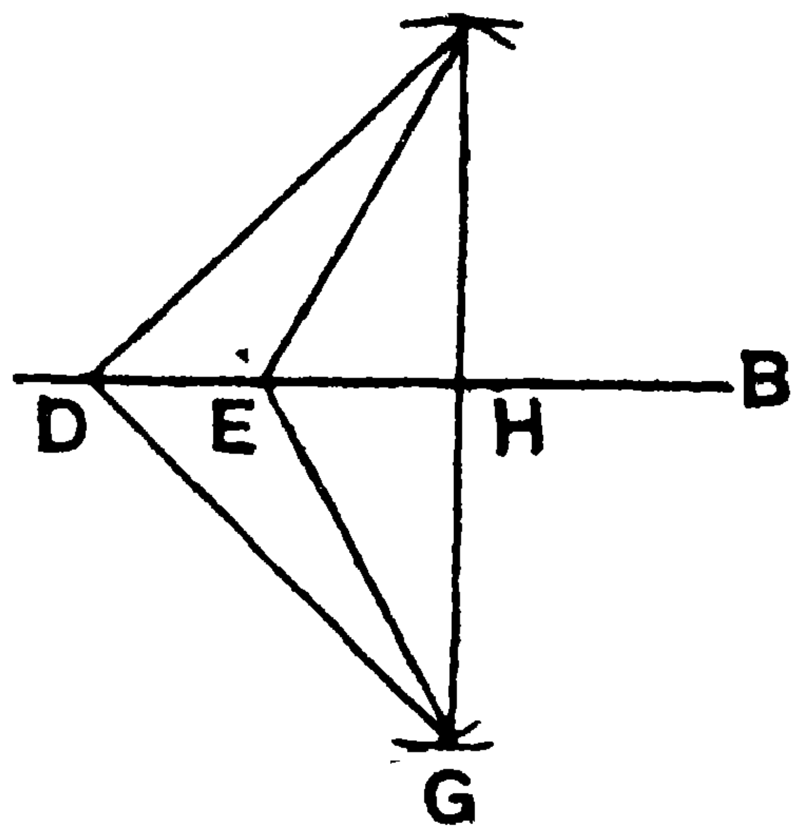


প্রমাণ— তৃতীয় সম্পাদ্যের ২য় অঙ্কনানুসারে OFD একটি সমকোণ।

∴ OF রেখা AB রেখার উপর লম্ব।

তৃতীয় প্রকার—AB রেখার মধ্যে D ও E দুইটি বিন্দু লও। D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে DO এবং EO ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর উহারা AB রেখার বিপরীত দিকে O ও G

বিন্দুতে ছেদ করিল। OG সংযুক্ত কর। মনে কর OG রেখা AB রেখাকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। এই OH রেখাই AB রেখার উপর লম্ব হইবে।



প্রমাণ—OD, OE, GE এবং GD যোগ কর। এখন ১৪শ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, DOE ও DGE ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$$\therefore \quad \angle ODE = \angle GDE.$$

আবার, ১০ম উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে ODH ও GDH ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $\angle DHO$ = সন্নিহিত $\angle DHG$ = এক সমকোণ।

অতএব OH রেখা AB রেখার উপর লম্ব। [**ই. স. বি.**]

মন্তব্য—ব্যবহারক্ষেত্রে ৩য় ও ৪র্থ সম্পাদ্যের অঙ্কন ব্যবহৃত হয় না। সেট স্কোয়ারের (set squares) সাহায্যে আরও সহজে লম্ব অঙ্কিত হইয়া হইয়া থাকে।

অনুশীলনী

১। AB রেখার C বিন্দুতে AB এর সহিত সমান কোণ করিয়া CD ও CE রেখা টান। DCE কোণকে CF রেখা দ্বিখণ্ডিত করিলে, CF রেখাই AB এর উপর লম্ব হইবে। (৫ম সম্পাদ্য দ্রষ্টব্য)

২। ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর লম্ব অঙ্কিত কর। এই লম্ব তিনটি কি এক বিন্দুতে মিলিত হইল?

৩। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর দুইটি সমান সরলরেখা এরূপভাবে অঙ্কিত কর যেন, উহারা পরস্পর লম্ব হয়।

[O নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে AB || CD রেখার উপর OEF লম্ব টান। EA হইতে EH = OF এবং FD (অথবা FC) হইতে FK = OE কাটিয়া লও। OH, OK নির্ণেয় রেখাদ্বয়।]

৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

৫। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একই পার্শ্বস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন দুইটি সরলরেখা অঙ্কিত কর, যাহারা ঐ সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিয়া ঐ রেখাকে একই বিন্দুতে ছেদ করিবে। নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে কিরূপ হইবে?

৬। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি সরলরেখা টান যাহার উপর অপর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে লম্ব টানিলে উহারা পরস্পর সমান হইবে। কোন্ ক্ষেত্রে ইহা অসম্ভব হইবে?

৭। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন, ঐ বিন্দু হইতে AB ও AC বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান হয়।

৮। ABCD রম্বসের A শীর্ষবিন্দু হইতে BD কর্ণের উপর লম্ব টানিয়া দেখাও যে, এই লম্ব BD কর্ণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৯। ৪র্থ সম্পাদ্যে নির্দিষ্ট সরলরেখাটি 'অসীম' হইবার আবশ্যকতা কি?

১০। ABCD একটি চতুর্ভুজ। এরূপ একটি E বিন্দু নির্দেশ কর যেন, EA ও EB যথাক্রমে EC ও ED এর সমান হয়।

৫ম সম্পাদ্য—(ইউ—১।২৩)

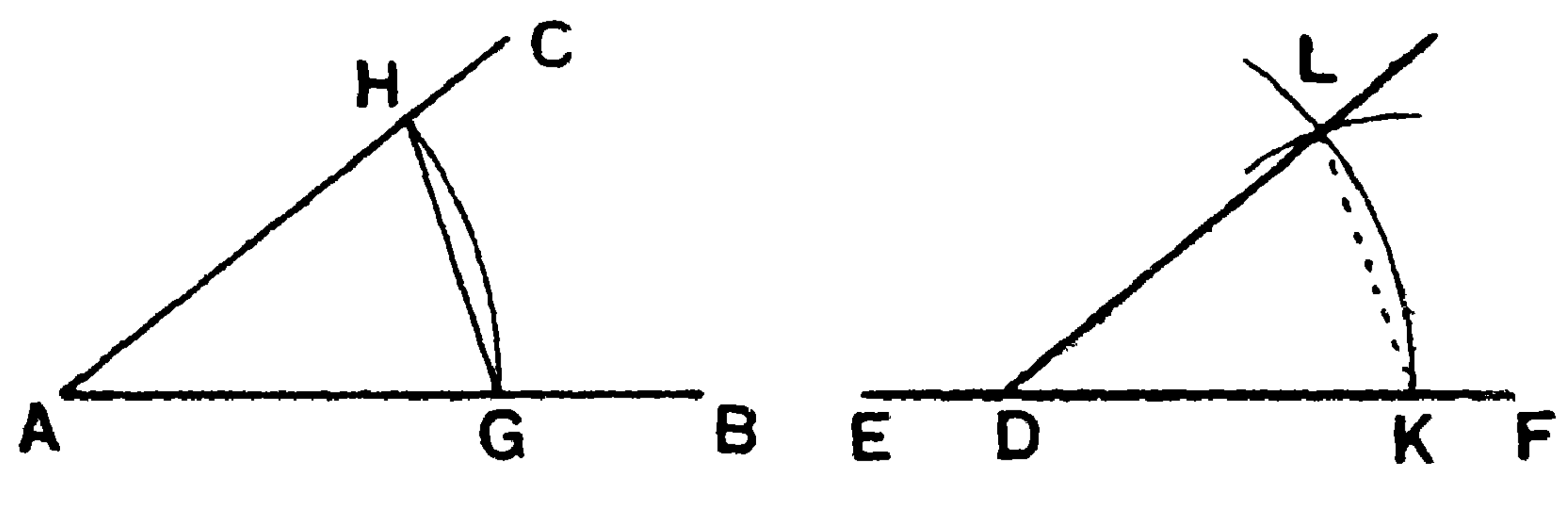
সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, AB সরলরেখার A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও LDK একটি নির্দিষ্ট কোণ। এখন A বিন্দুতে LDK কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—মনে কর, D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অঙ্কিত বৃত্তের চাপ DL ও DK বাহুকে যথাক্রমে L ও K বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বোক্ত ব্যাসার্ধের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তের চাপ আঁক। মনে কর উক্ত চাপ AB রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার, G বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া LK রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তের চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ পূর্বাঙ্কিত চাপকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। AH যোগ কর। এখন GAH কোণটিই উদ্দিষ্ট কোণ হইবে।



প্রমাণ— LK এবং HG যোগ কর।

GAH ও KDL দুইটি ত্রিভুজের—

AG = DK, AH = DL এবং GH = LK ;

$\therefore \quad \angle GAH = \angle KDL.$ [১৪শ উপঃ]

[ই স বি.]

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের সর্বসম একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

২। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর এরূপ একটি D বিন্দু নির্ণয় কর যেন, AD রেখা AB ও AC এর সমষ্টির অর্ধেক হয়।

৩। কোন সরলরেখার বিপরীত দিকে অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে এমন দুইটি সমান সরলরেখা অঙ্কিত কর, যাহারা উক্ত সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৪। ABC ত্রিভুজের বর্ধিত BC বাহুর উপর A ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্দেশ কর।

৫। একটি সমকোণী ত্রিভুজকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত কর।

৬। একটি নির্দিষ্ট কোণের এক বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন, অন্য বাহুর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কৌণিক-বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব সমান হয়।

৭। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন, উহারা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত একইদিকে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের (১) সমষ্টি, (২) অন্তর একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[সংকেত ঃ—AB নির্দিষ্ট রেখা, P নির্দিষ্ট বিন্দু। P হইতে AB পর্যন্ত PC রেখা টান এবং PC এর P বিন্দুতে (১) প্রদত্ত সমষ্টির সম্পূরক কোণ, (২) প্রদত্ত অন্তরের সমান কোণ অঙ্কিত কর।]

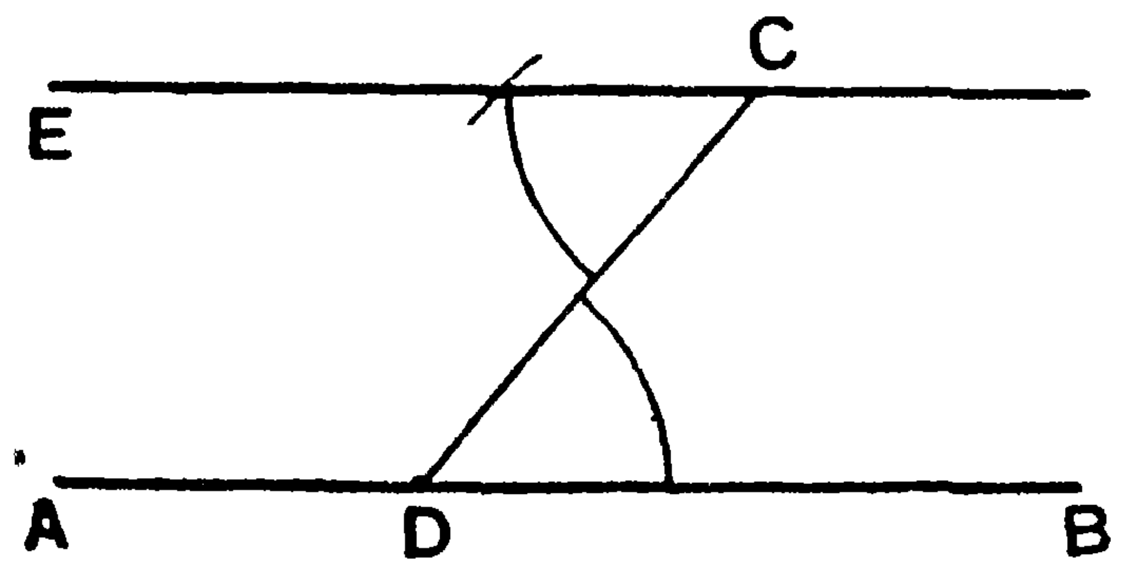
৮। BAC কোণের AB বাহুর উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে এরূপ একটি সরলরেখা টান, যাহা AC বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, $\angle APQ = 2\angle AQP$.

৬ষ্ঠ সম্পাদ্য—(ইউ—১।৩১)

সাঃ নিঃ—একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া এই সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C ইহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু হইতে AB রেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

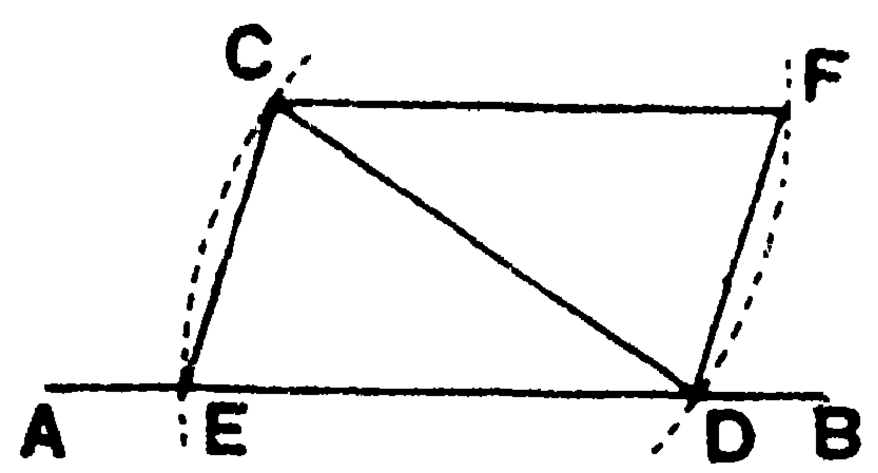
অঙ্কন—AB সরলরেখার মধ্যে D একটি বিন্দু লও। DC যোগ কর। CD রেখার C বিন্দুতে ∠CDB এর সমান করিয়া ∠DCE অঙ্কিত কর। [৫ম সঃ]



প্রমাণ—এখন ∠CDB = একান্তর ∠DCE বলিয়া,

CE রেখা AB রেখার সমান্তরাল। [**ই. স. বি.**]

দ্বিতীয় প্রকার—AB রেখার মধ্যে কোন একটি D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, DC এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ



AB রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CD ব্যাসার্ধ লইয়া DF চাপ অঙ্কিত কর। D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CE এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ DF

চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন CF যোগ করিলে CF রেখাই AB এর সমান্তরাল হইবে।

কারণ, CED ও CFD ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে পরস্পর সমান। সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $\angle$FCD = একান্তর $\angle$CDE.

অতএব CF রেখা AB রেখার সমান্তরাল। [**ই. স. বি.**]

অনুশীলনী

১। কোন নিদিষ্ট কোণের অন্তর্বর্তী একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন, কোণের বাহুদ্বয়-দ্বারা উহার ছিন্ন অংশ নির্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

২। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল এমন একটি রেখা টান যেন, উহা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিলে, DE রেখা BD ও CE এর (১) সমষ্টি, বা (২) অন্তরের সমান হয়।

[(১) B ও C কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হইলে, F হইতে BC এর ॥ DE রেখা টান। (২) $\angle$B অপেক্ষা $\angle$C বৃহত্তর হইলে, এবং $\angle$B এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও $\angle$C এর বহির্দ্বিখণ্ডক F বিন্দুতে মিলিলে, F বিন্দু হইতে BC এর ॥ DE রেখা টান।]

৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB অতিভুজের উপর এরূপ একটি D বিন্দু নির্ণয় কর যেন, D বিন্দু হইতে AC এর উপর অঙ্কিত লম্ব DB এর সমান হয়।

৪। একটি নিদিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টান যেন, উহা কোন নির্দিষ্ট BAC কোণের বাহুদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিলে AB = BC হয়।

৫। AB সরলরেখার A ও B বিন্দুতে উহার উপর দুইটি লম্ব আঁক। লম্বদ্বয়ের AC ও BD সমান অংশ কাটিয়া লইয়া CD যোগ করিলে, CD রেখা AB এর সমান্তরাল হইবে প্রমাণ কর।

৭ম সম্পাদ্য

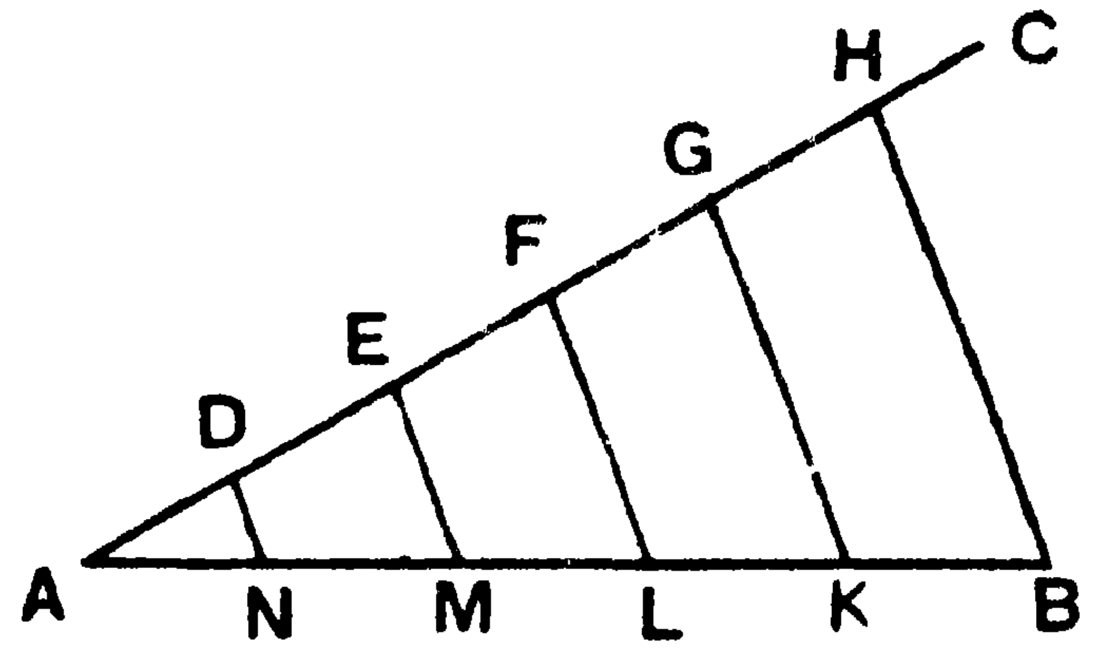
সাঃ নিঃ—একটি সসীম সরলরেখাকে যতগুলি-ইচ্ছা সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, AB সসীম সরল রেখাটিকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন—A বিন্দু হইতে AB এর সহিত যে-কোন কোণের সমান কোণ করিয়া AC রেখা টান।

AC রেখা হইতে যথাক্রমে AD, DE, EF, FG ও GH পাঁচটি সমান অংশ ছেদ কর। HB যোগ কর।

এখন, মনে কর D, E, F ও G বিন্দু হইতে HB রেখার সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DN, EM, FL ও GK রেখাগুলি AB রেখাকে যথাক্রমে N, M, L ও K বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, AN, NM, ML, LK ও KB অংশগুলি পরস্পর সমান হইবে।



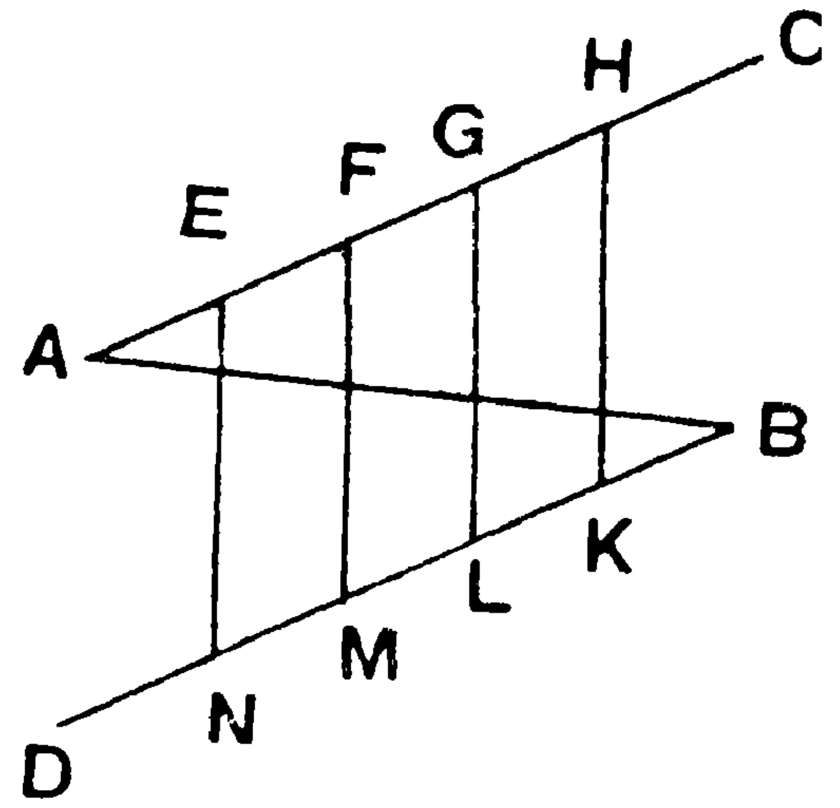
প্রমাণ— DN, EM, FL, GK ও HB রেখাসমূহ পরস্পর সমান্তরাল,

এবং AD = DE = EF = FG = GH.

∴ AN = NM = ML = LK = KB. [২৩শ উপঃ]

[ই. স. বি.]

বিকল্প অঙ্কন—A বিন্দু হইতে AB এর সহিত যে-কোন কোণ করিয়া AC একটি রেখা টান এবং উহা হইতে AE, EF, FG ও GH সমান চার অংশ কাটিয়া লও।



B বিন্দু হইতে CAএর সমান্তরাল BD রেখা টান। এবং BD হইতে AC রেখার অংশগুলির সমান BK, KL, LM ও MN অংশ ছেদ কর।

এখন, EN, FM, GL ও HK সংযুক্ত করিলে উহারা AB রেখাকে যথাক্রমে চারটি বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং ঐ চার বিন্দুতে AB রেখাটি সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইবে।

বিবিধ অনুশীলনী

১। একটি সরলরেখার $\frac{২}{৩}$ অংশের সমান একটি সরলরেখা আঁক।

২। একটি সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশ অপর অংশের এক পঞ্চমাংশ হয়।

৩। নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি সরলরেখা আঁকিয়া উহাকে সমান সাত অংশে বিভক্ত কর।

৪। কোন ত্রিভুজের কোণ-দ্বিখণ্ডকগুলির সম্পাত বিন্দু নির্ণয় কর।

৫। AB ও CD দুইটি পরস্পর সমান নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বিন্দু O নির্ণয় কর যেন, OAB ও OCD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়।

৬। ABC ত্রিভুজের AB বাহুতে D একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন, BC এর সমান্তরাল DE রেখা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিলে, DE = DB হয়।

৭। একটি সমকোণকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, এক অংশ অপর অংশের $\frac{1}{2}$ হয়।

৮। A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। CD সরলরেখার মধ্যে A ও B হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্দেশ কর। কখন ইহা অসম্ভব হইবে ?

৯। AB ও CD দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখা। অপর একটি সরলরেখা EFএর মধ্যে AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর। সর্বদাই কি এরূপ অঙ্কন সম্ভবপর হয় ?

১০। A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। আর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু C এর মধ্য দিয়া A ও B হইতে সমদূরবর্তী একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর। এইরূপ অঙ্কনের সম্ভাবনা আলোচনা কর।

১১। C বিন্দু হইতে AB রেখা পর্যন্ত 1″ দীর্ঘ একটি রেখা টান। কয় প্রকারে অঙ্কন সম্ভব হইবে ? কখনও অসম্ভব হইবে কি ?

১২। P, Q এবং R তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে। P বিন্দু দিয়া এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন, Q বিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব R বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দ্বিগুণ হয়।

[সংকেত :—QR যোগ কর এবং QR (অথবা বর্ধিত QR) এর উপর O বিন্দু নির্ণয় কর যেন, QO = 2RO হয়। PO যোগ কর।]

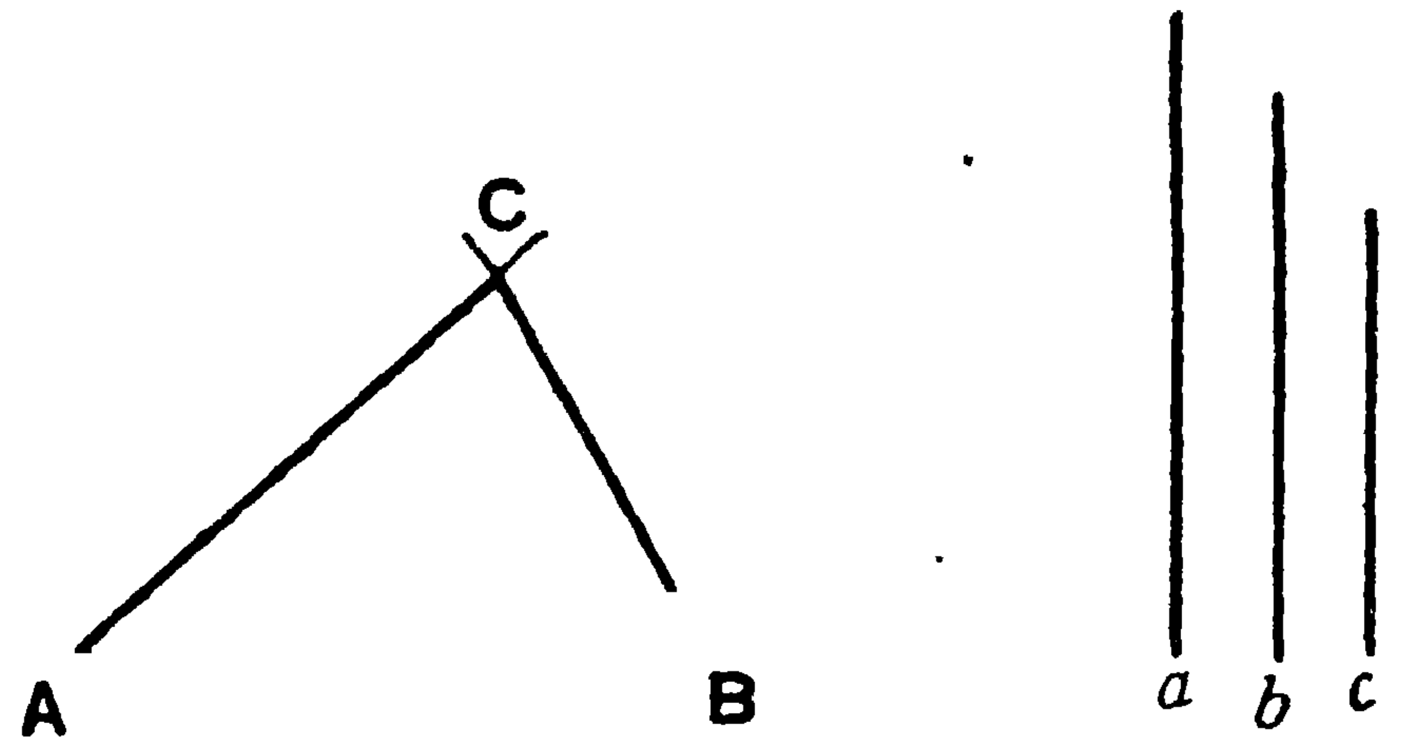
১৩। শুধু রুলার এবং কম্পাস ব্যবহার করিয়া ৩০° একটি কোণ অঙ্কিত কর এবং তোমার অঙ্কনের যুক্তি দেখাও।

১৪। ABC একটি সরলরেখা। AB = ১″ এবং BC = ১·৪৬″। A হইতে ২″ দূরে এবং B ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী D একটি বিন্দু নির্দেশ কর। ABC হইতে D এর দূরত্ব মাপ।

৮ম সম্পাদ্য—(ইউ—১।২২)

সাঃ নিঃ—তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c তিনটি সরলরেখার সমান দেওয়া আছে। এমন একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার তিনটি বাহু যথাক্রমে a, b এবং c এর সমান হয়।



অঙ্কন—AB একটি সরলরেখা টানিয়া উহা হইতে a এর সমান করিয়া AB অংশ ছেদ কর।

A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও c এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক। মনে কর ঐ দুইটি চাপ পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC যোগ কর।

এখন ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে, কারণ ABC ত্রিভুজের AB, CA ও BC বাহুত্রয় যথক্রমে a, b ও c এর সমান। [**ই. স. বি.**]

১ম দ্রষ্টব্য। যে চাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করিল তাহাদের অবশিষ্টাংশ AB রেখার অপর পার্শ্বে C′ আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। এইরূপ AC′B ত্রিভুজটিও উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ বলিয়া গণ্য হইতে পারে। সুতরাং উপরি উক্ত অঙ্কনে নির্দিষ্ট মাপের দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

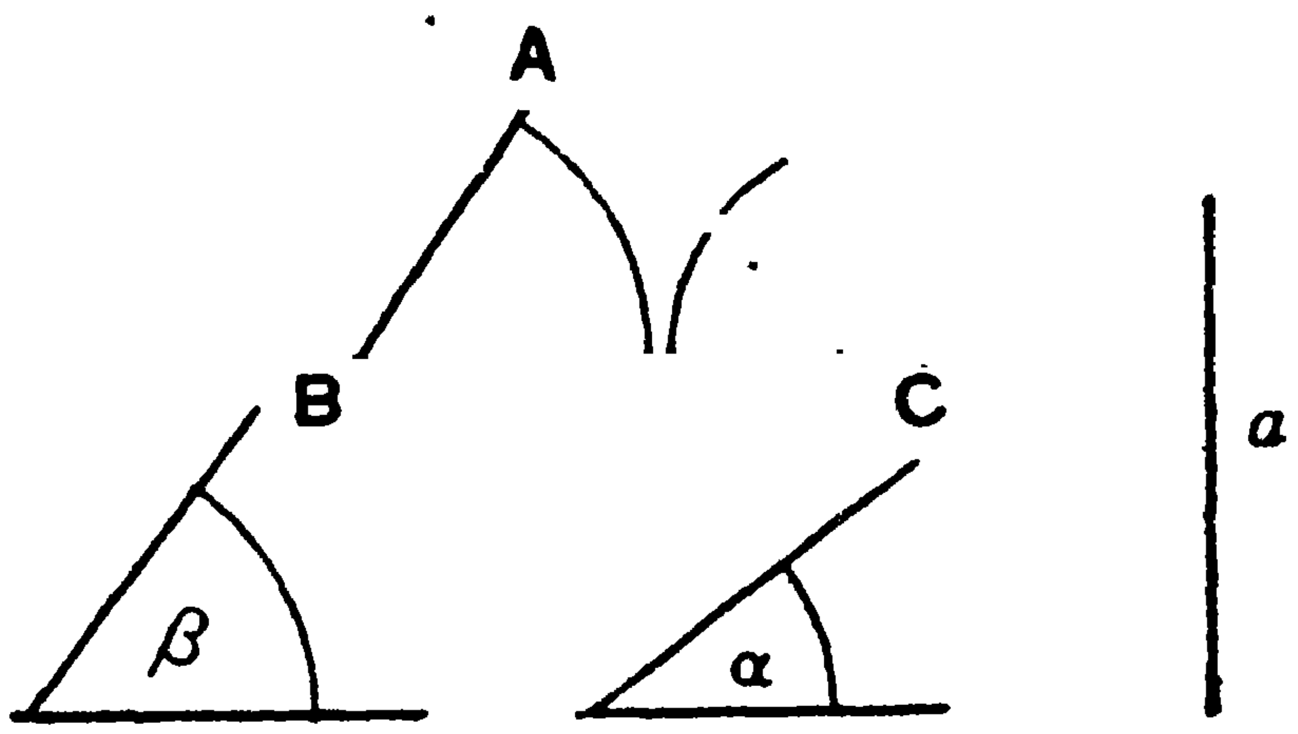
২য় দ্রষ্টব্য। উপরের চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ না করিলে C বিন্দুটি পাওয়া যাইবে না। সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখাত্রয়ের যে কোণ দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে কোন ত্রিভুজ আঁকা যাইতে পারে না। (১৮শ উপঃ)

৯ম সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও উহাদের সংলগ্ন বাহুটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর α ও β দুইটি কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা দেওয়া আছে। একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে, যাহার দুইটি কোণ α ও β এর সমান এবং উহাদের সংলগ্ন বাহুটি a রেখার সমান হইবে।

অঙ্কন—a রেখার সমান BC রেখা আঁক। B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে β ও α কোণ দুইটির সমান করিয়া CBA ও BCA কোণ দুইটি আঁক। [৫ম সঃ]



মনে কর BA ও CA রেখাদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। কারণ, ইহার দুইটি কোণ ও সংলগ্ন বাহুটি যথাক্রমে নির্দিষ্ট α ও β কোণদ্বয় এবং a রেখার সমান।

[**ই. স. বি.**]

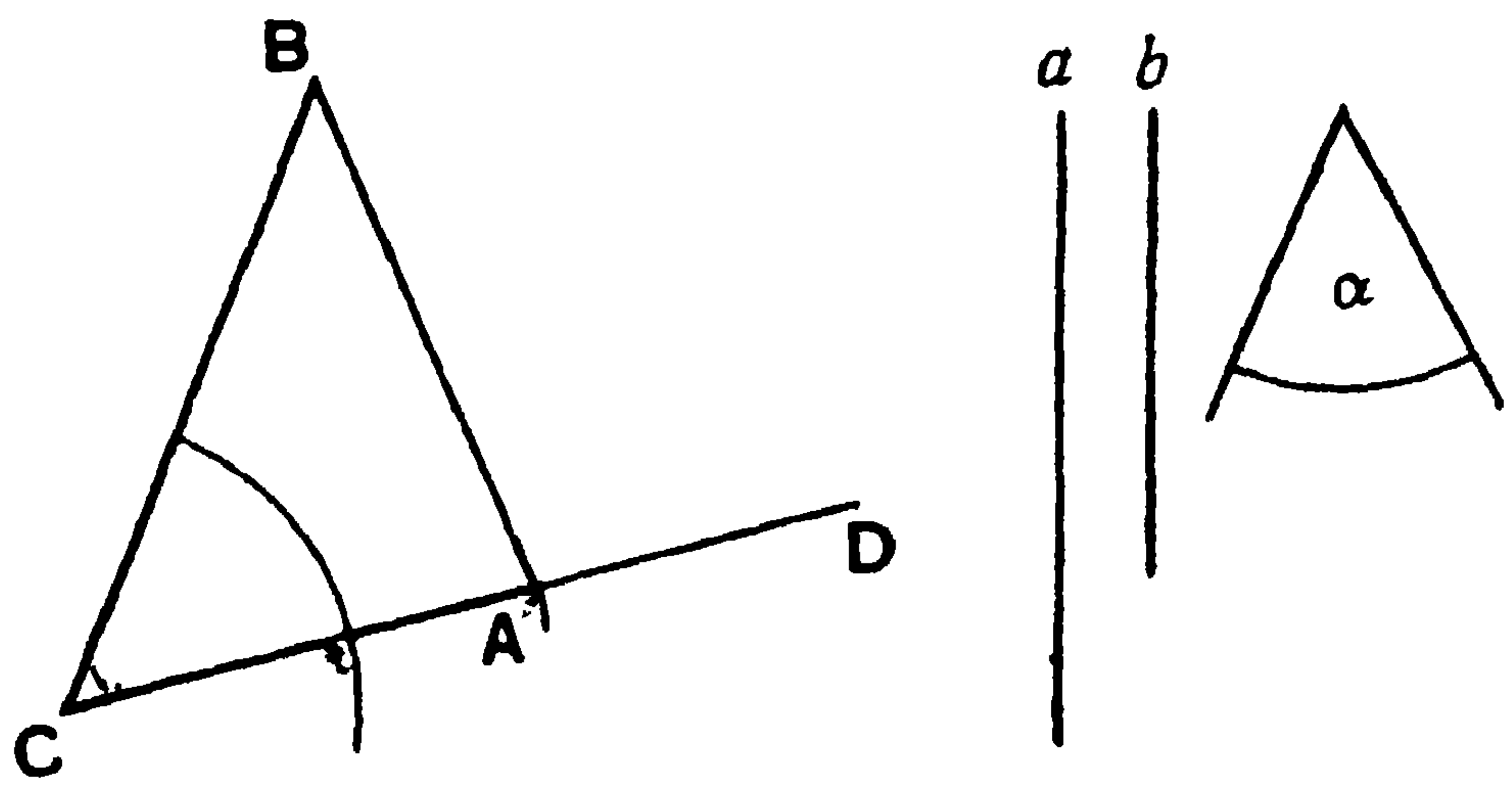
১ম দ্রষ্টব্য। এস্থলে দুইটি কোণ বাহুর সংলগ্ন। সুতরাং দুইটি কোণের সমষ্টি জানা আছে বলিয়া তৃতীয় কোণটির পরিমাণ ও জানা আছে। কারণ, কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণ।

২য় দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের দুইটি (অথবা তিনটি) কোণ দেওয়া থাকিলে কিন্তু কোন বাহুর পরিমাণ দেওয়া না থাকিলে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা যায় না। ঐ পরিমাণের কোণ-বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যাইতে পারে।

১০ম সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর নির্দিষ্ট বাহু দুইটির পরিমাণ যথাক্রমে a ও b এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ $\angle\alpha$. ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।



অঙ্কন—CD একটি রেখা টান। উহার C বিন্দুতে α কোণের সমান করিয়া DCB কোণ আঁক। [৫ম সম্পাদ্য]

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া b এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ CD রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। আবার, C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া a এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ CB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যোগ কর।

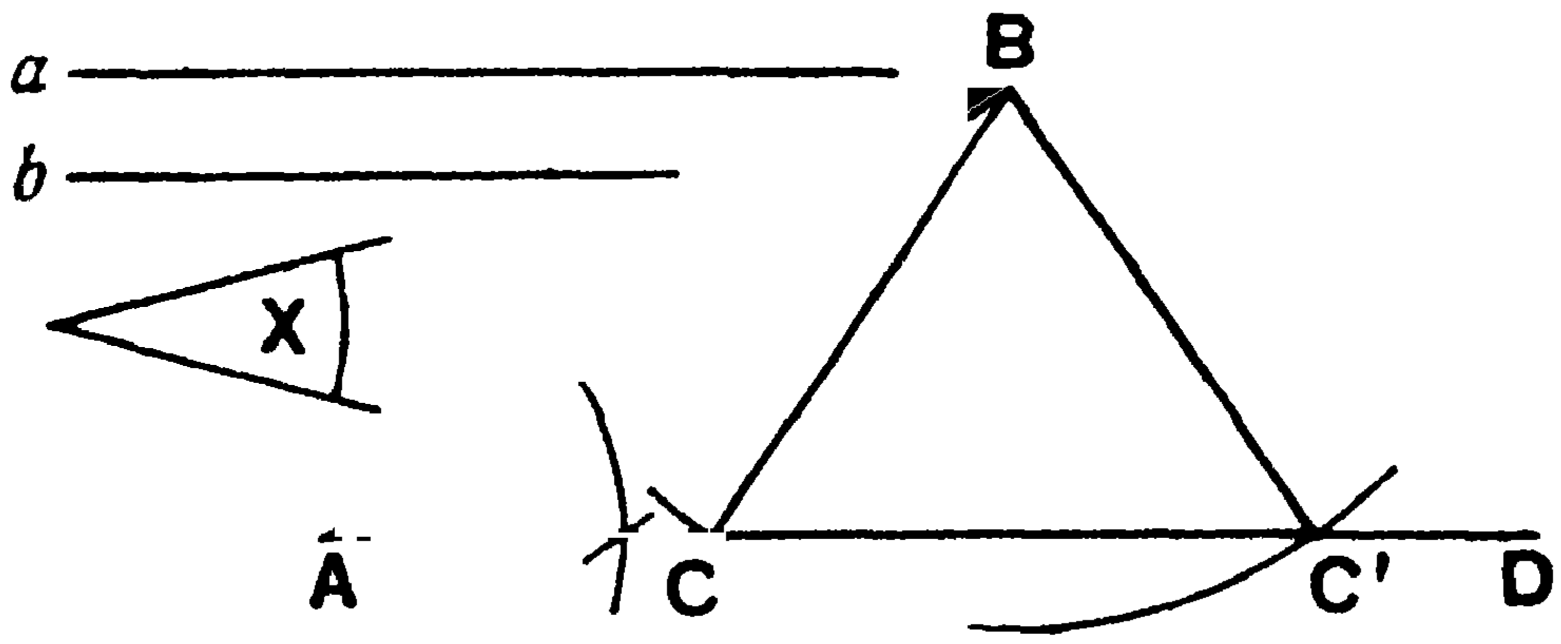
এখন, ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। কারণ, উহার BC বাহু $= a$, CA বাহু $= b$ এবং $\angle ACB = \angle\alpha$.

[**ই. স. বি.**]

১১শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির **সম্মুখীন** কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর a ও b দুইটি বাহুর পরিমাণ এবং b বাহুর সম্মুখীন কোণ $\angle a$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।



অঙ্কন—$\angle a$ এর সমান করিয়া $\angle$BAD অঙ্কিত কর। এবং AB বাহু হইতে a এর সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া নেও।

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া b এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর এই চাপ AC রেখাকে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও BC′ যোগ কর।

এখন ABC অথবা ABC′ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। [**ই. স. বি.**]

দ্রষ্টব্য। এই স্থলে একই অঙ্কন দ্বারা দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইতেছে। BCC′ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, এবং ইহার b এর সমান বাহু দুইটি B হইতে AD এর উপর পাতিত লম্ব অপেক্ষা বড়। সুতরাং b এর দৈর্ঘ্য B হইতে AC এর উপর পাতিত লম্ব অপেক্ষা বড় হইলে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। কিন্তু ছোট হইলে কোন ত্রিভুজ আঁকিতে পারা যাইবে না। কারণ, তখন চাপটি AD রেখাকে মোটেই ছেদ করিবে না। পরন্তু b রেখাটি উক্ত লম্বের সমান হইলে, চাপটি AD রেখাকে মাত্র একটি বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, এবং তখন একটি মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

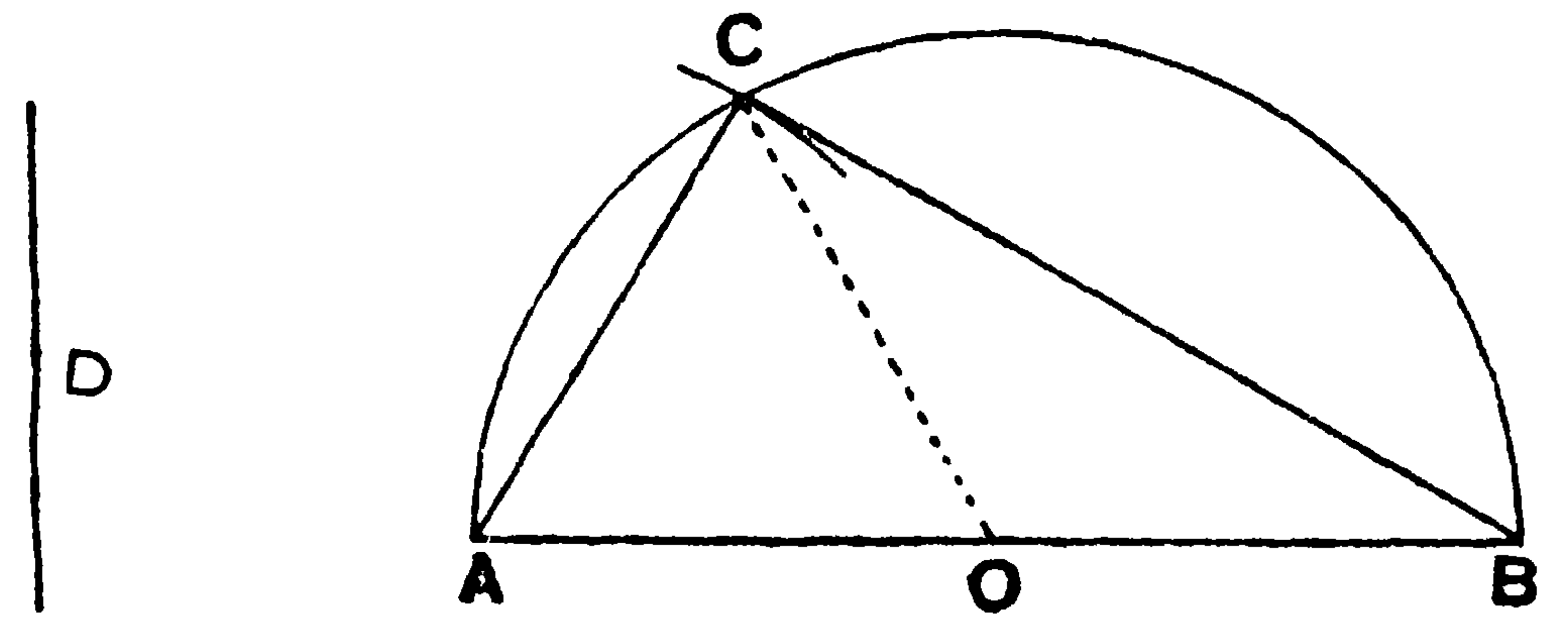
১২শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর কোন ত্রিভুজের অতিভুজ ও অন্য একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে AB এবং D রেখার সমান দেওয়া আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন—AB অতিভুজকে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।

আবার, A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া D এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। মনে কর ইহা অঙ্কিত অর্ধবৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC যোগ কর। এখন ACB ই উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।



প্রমাণ— CO যোগ কর।

OA = OC বলিয়া, ∠OCA = ∠OAC
আবার, OB = OC বলিয়া, ∠OCB = ∠OBC } [১২শ উপঃ]

∴ ∠ACB = ∠OAC + ∠OBC = দুই সমকোণের অর্ধেক
= এক সমকোণ। [৮ম উপঃ]

[**ই. স. বি.**]

দ্রষ্টব্য। এই সম্পাদ্যটি প্রকৃতপক্ষে ১১শ সম্পাদ্যেরই একটি বিশেষ রূপ। এস্থলে একটি বাহুর সম্মুখীন কোণটি সমকোণ।

ত্রিভুজ-অঙ্কন বিষয়ে মন্তব্য—

দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইলে উহাদের একটির তিন অঙ্গ অপরটির অনুরূপ অঙ্গের সমান হইবে। অর্থাৎ ত্রিভুজের আকৃতি ও গঠন নিরূপণ করিতে হইলে উহার তিনটি অঙ্গ জানা থাকা আবশ্যক। কিন্তু মনে রাখিতে হইবে যে, মাত্র তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা যায় না। প্রদত্ত কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যাইতে পারে।

অনুশীলনী

১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও একটি বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও উন্নতি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু তিনটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অন্য দুই বাহুর (১) সমষ্টি, (২) অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৬। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার সমান বাহুদ্বয় ভূমির দ্বিগুণ হয়।

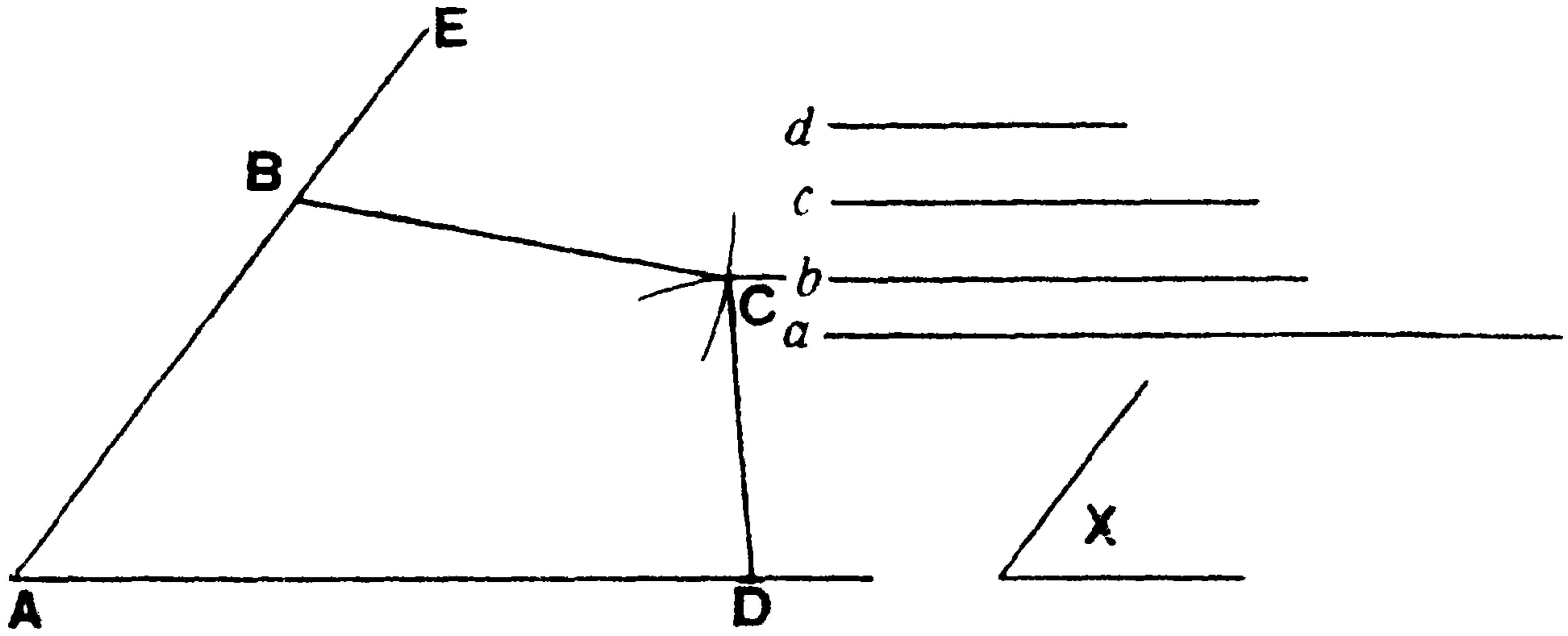
৭। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্ম কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। একটি সরলরেখার উভয় পার্শ্বে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। উহাদের শীর্ষবিন্দু যোগ করিয়া দেখাও যে, এই সংযোজক-রেখাটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৩শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর a, b, c, d চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং X কোণটি a ও d বাহুর অন্তর্ভূত কোণ। চতুর্ভুজটি আঁকিতে হইবে।



অঙ্কন— X কোণের সমান EAD একটি কোণ আঁক। ইহার AE ও AD বাহু হইতে যথাক্রমে b ও a এর সমান করিয়া AB ও AD অংশ ছেদ কর।

B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে c এবং d এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত আঁক। মনে কর এই দুইটি বৃত্ত C বিন্দুতে ছেদ করিল।

BC, DC যোগ কর।

এখন ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ হইল। কারণ, ইহার বাহুগুলি নির্দিষ্ট a, b, c, d রেখাগুলির সমান এবং BAD কোণটি X কোণের সমান।

[**ই. স. বি.**]

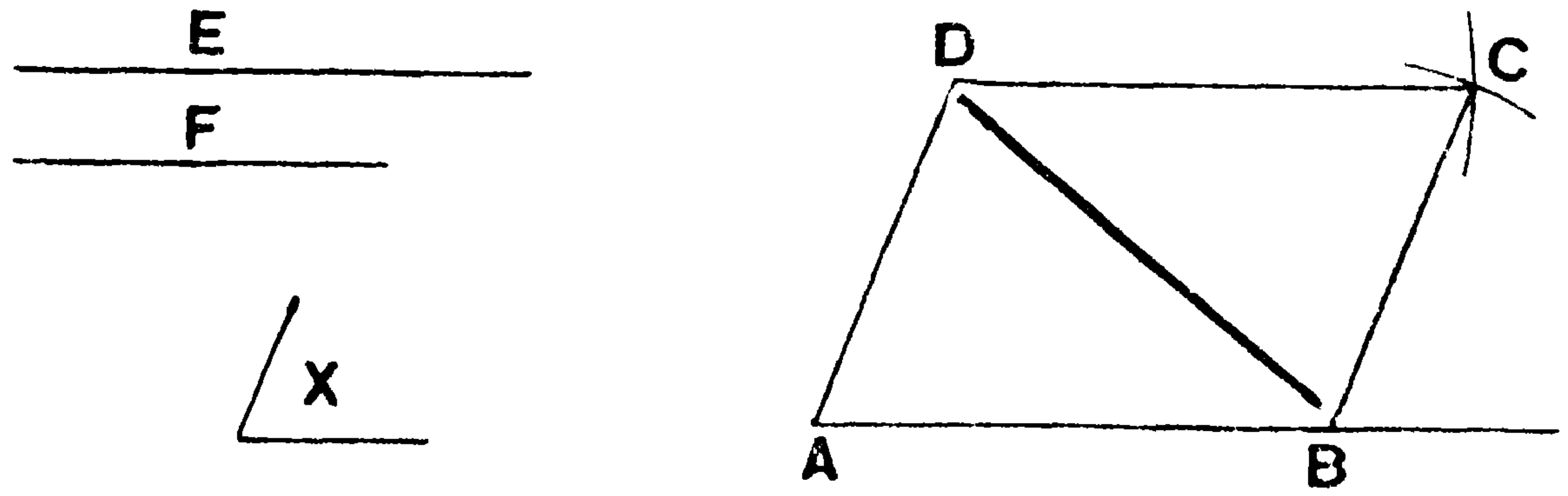
দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের তিনটি অঙ্গ জানা থাকিলে উহা অঙ্কিত করা যায়। কিন্তু চতুর্ভুজের মাত্র চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে উহার সকল অঙ্গ সঠিক নিরূপিত হয় না। সুতরাং এরূপ কোন চতুর্ভুজ আঁকিতে পারা যায় না। কোন চতুর্ভুজের চারটি কোণ এবং চারটি বাহু এই আটটি অঙ্গের মধ্যে অন্তত যে-কোন পাঁচটি অঙ্গ জানা থাকিলে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজটি আঁকা যায়।

১৪শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণটি দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর E ও F দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণটি নির্দিষ্ট X কোণের সমান।

অঙ্কন—X কোণের সমান DAB একটি কোণ আঁক। ইহার AB ও AD বাহুদ্বয় হইতে যথাক্রমে E ও F এর সমান AB ও AD অংশ কাটিয়া লও।



D ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে E এবং F এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত আঁক। মনে কর উহারা পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল।

DC, BC ও BD যোগ কর।

এখন ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ— ADB ও BDC দুইটি ত্রিভুজের—

AB = DC ; AD = BC (অঙ্কনানুসারে)

এবং DB উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

∴ ∠ABD = একান্তর ∠BDC ; [১৪শ উপঃ]

∴ AB এবং DC পরস্পর সমান্তরাল। [৬ষ্ঠ উপঃ]

এইরূপে, প্রমাণ করা যায় যে, AD ও BC বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান্তরাল।

সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

বিকল্প অঙ্কন—B ও D বিন্দু হইতে যথাক্রমে AD ও AB রেখার সমান্তরাল BC ও DC রেখা টানিলে ইহারা পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং তাহা হইলে ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।

[ই. স. বি.]

দ্রষ্টব্য—E ও F রেখা দুইটি সমান হইলে সামান্তরিকটি সমবাহু হইবে। সুতরাং কেবলমাত্র একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকিলেই একটি রম্বস (rhombus) আঁকিতে পারা যায়। নির্দিষ্ট কোণটি সমকোণ হইলে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র (rectangle) হইবে। সুতরাং কেবলমাত্র দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলেই কোন আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়। একটি বাহুর পরিমাণ দেওয়া থাকিলেই একটি বর্গক্ষেত্র আঁকা যায়।

অনুশীলনী

১। প্রমাণ কর যে, কোন সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

২। ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণ E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া DE = BD হইল। এখন ADEF সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে, C, D, ও F বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩। ABCD একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন, AB = ৮·৫″ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় যথাক্রমে ১০″ ও ৮″ হয়। AD বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

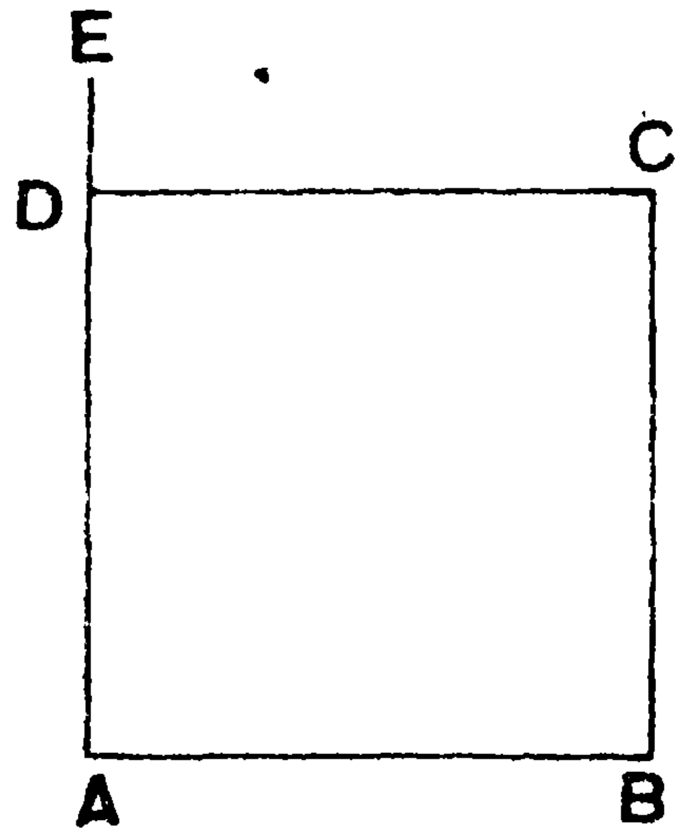
[উঃ—৩৩/৪″।]

৪। চারটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে চতুর্ভুজটি কি প্রকারে আঁকিতে পার? এই সম্পাদ্যটি সর্বদা সম্ভবপর হয়? সম্ভবপর অবস্থায় প্রদত্ত অঙ্গগুলির মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকা আবশ্যক?

১৫শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ— AB একটি নির্দিষ্ট বাহু। ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।



অঙ্কন— A বিন্দুতে AB এর উপর AE লম্ব টান। AE হইতে AB এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। এখন D বিন্দু হইতে AB এর সমান্তরাল DC রেখা এবং B বিন্দু হইতে AD এর সমান্তরাল BC রেখা টান। মনে কর DC ও BC রেখাদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করিল।

সুতরাং ABCD ই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে। কারণ, ইহা একটি সামান্তরিক। ইহার বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ। [**ই. স. বি.**]

অনুশীলনী

১। AB ও CD দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা। প্রমাণ কর যে, AD এবং BC যোগ করিলে তাহারা পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

২। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা বর্ধিত করিয়া, বর্ধিত অংশ হইতে ADএর সমান DE অংশ কাটিয়া লও। BE ও CE যোগ কর। প্রমাণ কর যে, ABEC একটি সামান্তরিক।

৩। ABCD সামান্তরিকের AD ও BC বাহুতে যথাক্রমে E ও F বিন্দু এরূপ লও যেন, AE=CF. AECF কি প্রকার চতুর্ভুজ ?

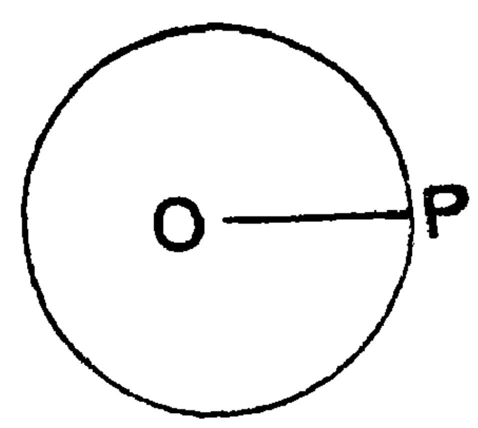
৪। এমন একটি রম্বস (rhombus) অঙ্কিত কর যাহার প্রত্যেকটি বাহু এবং একটি কর্ণ যেন একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়। ইহার কোণগুলি কত নির্ণয় কর। এই সম্পাদ্য সর্বদা সম্ভবপর কিনা ?

[উঃ—৬০° ও ১২০°।]

সঞ্চারপথ (Locus)

সঞ্চারপথ—কোন নির্দিষ্ট নিয়মের বশবর্ত্তী হইয়া কোন চল (variable) বিন্দু যে পথে পরিভ্রমণ করে সেই পথটিকে উহার 'সঞ্চারপথ' বলে।

কোন সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P একটি চল বিন্দু। কিন্তু P বিন্দুটি ভ্রমণকালে সর্বদা O বিন্দুটি হইতে সমান দূরে অবস্থান করে। সুতরাং O বিন্দুটিকে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে দেখা যায় যে, চল বিন্দুটি এই বৃত্তের পরিধি-ক্রমেই ভ্রমণ করে।



কখনও পরিধির বাহিরে অবস্থান করিতে পারে না। সুতরাং বৃত্তের পরিধিই P বিন্দুর সঞ্চারপথ।

কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক রেখার উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু ঐ কোণের বাহুদ্বয় হইতে সর্বদা সমান দূরে অবস্থিত। সুতরাং উক্ত বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির সঞ্চারপথ এই দ্বিখণ্ডক। ইহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুই বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী নহে।

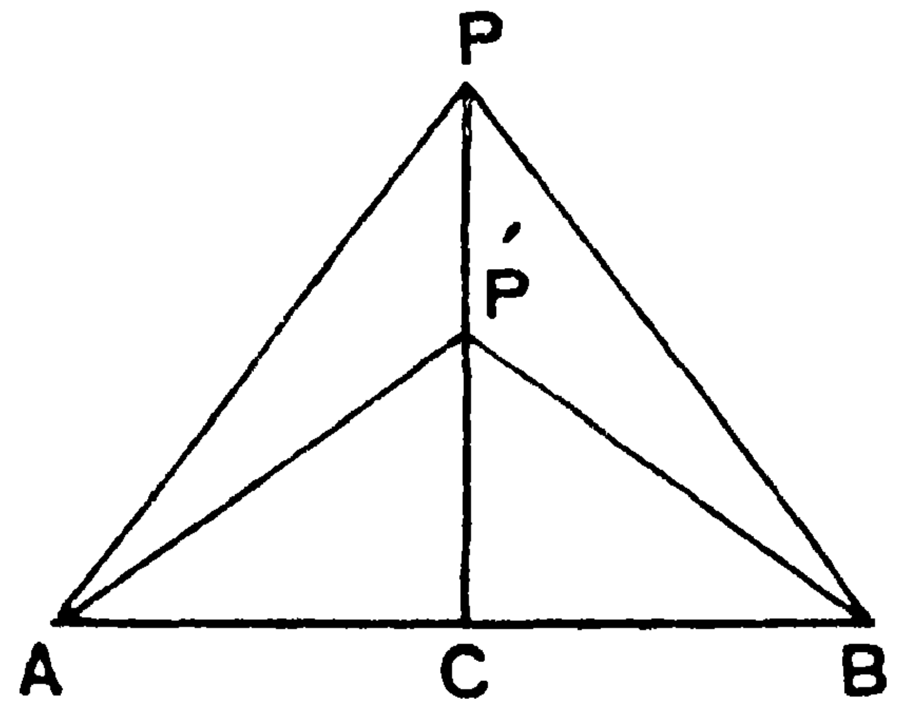
এইরূপে, যে-কোন ভ্রাম্যমাণ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করা যায়। চল বিন্দুটি এই পথেই ভ্রমণ করিবে এবং কখনও উহার বাহিরে যাইতে পারে না। উক্তপথের প্রত্যেকটি বিন্দুই উক্ত নিয়মাধীন এবং উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুই ঐরূপ নিয়মাধীন নহে।

২৪ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—তুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার দ্বিখণ্ডক লম্ব।

বিঃ নিঃ— মনে কর A ও B তুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

AB যোগ কর এবং উহাকে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া, AB এর উপর CP লম্ব অঙ্কিত কর। CP সরলরেখাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।



প্রমাণ— CP সরলরেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু P লও। AP ও BP যোগ কর।

এখন, ACP, BCP তুইটি ত্রিভুজের—

AC = CB ; CP উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

এবং ∠ACP = ∠BCP = এক সমকোণ।

∴ AP = BP. [১০ম উপঃ]

এইরূপে দেখা যাইবে যে, CP রেখার যে-কোন বিন্দু A ও B বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত। সুতরাং CP রেখাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

[**ই. উ. বি.**]

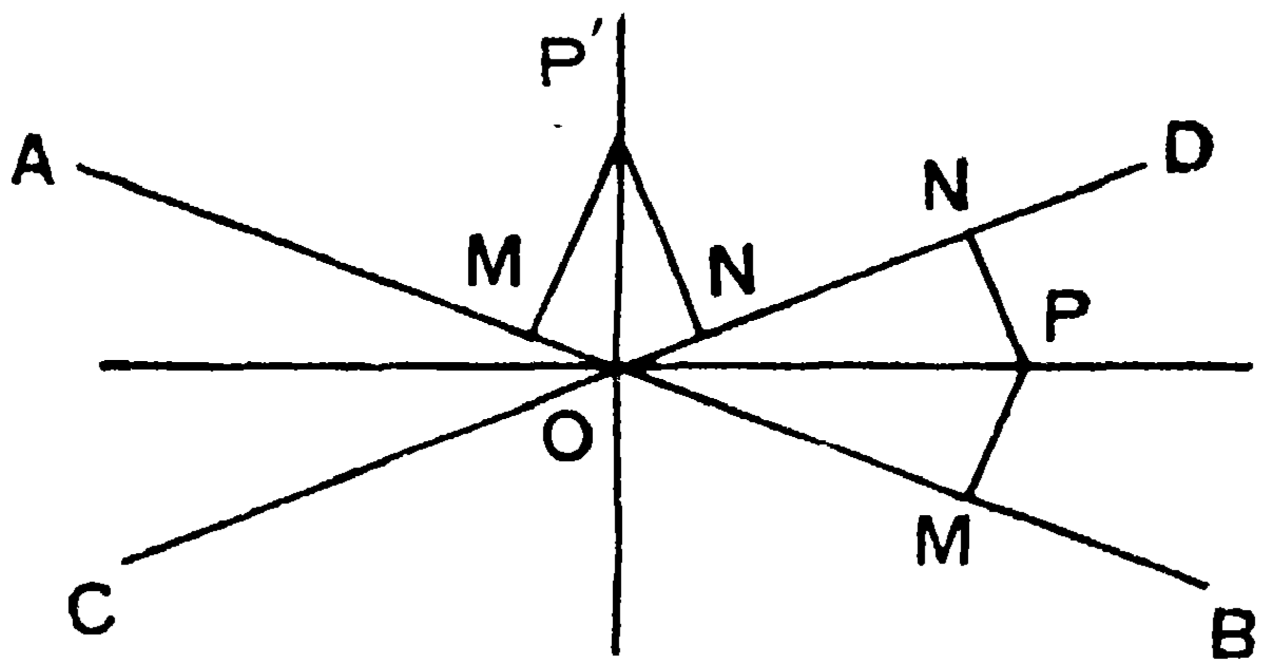
দ্রষ্টব্য। বস্তুত CP রেখা উভয়দিকে বর্ধিত করিলে সম্পূর্ণ সঞ্চারপথটি পাওয়া যাইবে। উহার উপর আর একটি বিন্দু P′ নিয়াও দেখা যায় যে, AP′ = BP′.

২৫শ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—দুইটি পরস্পর-ছেদী নির্দিষ্ট সরলরেখার সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ দুই রেখার অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী P একটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দুটি AB ও CD রেখার অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

P বিন্দু হইতে AB ও CD রেখার উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব আঁক। সুতরাং PM = PN. PO যোগ কর।



প্রমাণ—POM ও PON দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের—

PM = PN এবং OP অতিভুজ একটি সাধারণ বাহু।

$\therefore \quad \triangle POM \equiv \triangle PON$; [১৫শ উপঃ]

অতএব $\angle POM = \angle PON$;

অর্থাৎ OP রেখা AB ও CD রেখার অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক।

আবার, AB ও CD রেখার অন্তর্ভূত BOD কোণ OP রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত করিলে, অন্ত- বা বহির্দ্বিখণ্ডক OP বা OP′ রেখা দুইটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে। অর্থাৎ এই দুইটি রেখার যে-কোন বিন্দু AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত হইবে।

প্রমাণ—OP রেখার যে-কোন বিন্দু P হইতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান।

এখন, POM ও PON দুইটি ত্রিভুজের—

$\angle POM = \angle PON$, $\angle OMP = \angle ONP =$ এক সমকোণ।

OP উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

$\therefore$ PM = PN. [১১শ উপঃ]

$\therefore$ P বিন্দুটি AB ও CD সরলরেখাদ্বয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

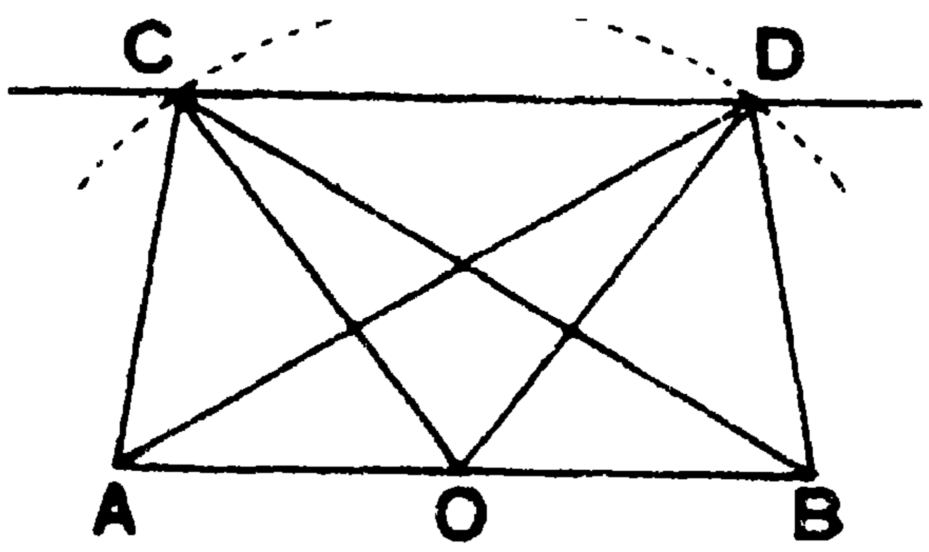
[**ই. উ. বি.**]

দ্রষ্টব্য। BOD কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক উভয় রেখাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

দুই বা তদধিক সঞ্চার পথের ছেদ—কোন চল বিন্দু একাধিক নিয়মাধীনেও পরিভ্রমণ করিতে পারে। একটি নিয়মাধীনে উহার একটি সঞ্চারপথ পাওয়া যাইবে, অন্য নিয়মাধীনে আর একটি সঞ্চারপথ পাওয়া যাইবে। এই দুই সঞ্চারপথের ছেদ-বিন্দুগুলিই উভয় নিয়মাধীনে ভ্রমণ করিতেছে এরূপ মনে করিতে হইবে।

উদাহরণ—AB রেখার উপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার উন্নতি এবং মধ্যমা যথাক্রমে p ও q দুইটি নির্দিষ্ট রেখার সমান হয়।

AB হইতে p এর সমান দূরে অবস্থিত CD রেখা AB এর সমান্তরাল করিয়া টান। তাহা হইলে প্রথম সর্তাধীনে নির্ণেয় ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুটি এই CD রেখার উপরে থাকিবে। আবার, AB রেখার O মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র



করিয়া, q রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। তাহা হইলে দ্বিতীয় সর্তানুসারে নির্ণেয় ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুটি এই বৃত্তের পরিধির উপরই অবস্থিত হইবে। কারণ, AB রেখার মধ্যবিন্দু O হইতে ইহার যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব q এর সমান।

মনে কর এই বৃত্তটি CD রেখাকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

সুতরাং CD রেখা এবং এই বৃত্তটি—এই দুইটি সঞ্চারপথের ছেদ-বিন্দু C এবং D ই নির্ণেয় ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইবে। কারণ, C ও D দুইটি বিন্দুই মাত্র উপরি উক্ত দুইটি সর্তের বা নিয়মের অধীন। অন্য কোন বিন্দু নহে। এস্থলে নির্দিষ্ট পরিমাণ-বিশিষ্ট ABC ও ABD দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া গেল।

দ্রষ্টব্য। যদি CD রেখা বৃত্তটিকে ছেদ না করে তবে উক্ত প্রকারের কোন ত্রিভুজ থাকাই সম্ভবপর হয় না; অর্থাৎ $p > q$ হইলে, এরূপ কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে না। $p = q$ হইলে মাত্র একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী

১। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুর সঞ্চারপথ (locus) ঐ সরলরেখার সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা হইবে।

২। কোন চল বিন্দু দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সর্বদা সমান দূরে অবস্থিত হইলে, উহার সঞ্চারপথ ঐ সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল একটি সরলরেখা হইবে।

৩। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি হইতে নিয়ত সমান দূরে অবস্থিত একটি চল বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। D বিন্দুটি PQ সরলরেখার উপর পরিভ্রমণ করিতেছে। উহা কোন্ অবস্থানে আসিলে A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে?

৫। একটি নির্দিষ্ট অতিভুজের উপর অঙ্কিত সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে একটি নিদিষ্ট সরলরেখার বিন্দু গুলির সহিত সংযুক্ত করিয়া এই রেখাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় সর্বদা দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার উপর অবস্থিত। ঐ চল রেখাটির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

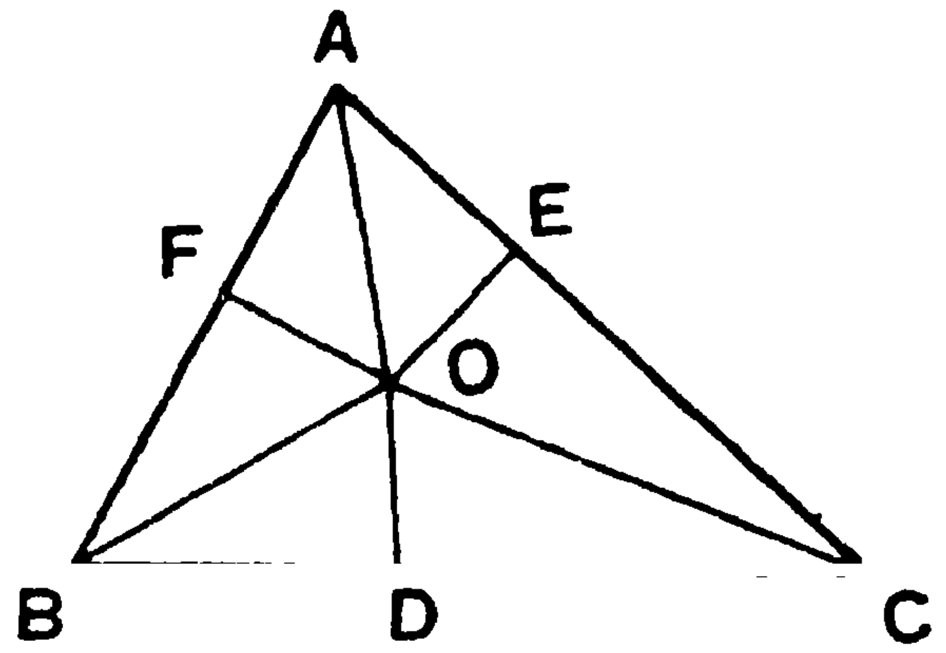
বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

১। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের দ্বিখণ্ডক তিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের B ও C কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হইল। AO যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO রেখাটি A কোণের দ্বিখণ্ডক।

O বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OD, OE এবং OF লম্ব টান।



প্রমাণ— BOD ও BOF দুইটি ত্রিভুজের—

∠DBO = ∠FBO, ∠BDO = ∠BFO = এক সমকোণ।

BO উভয়ের একটি সাধারণ বাহু ;

∴ DO = FO. [১১শ উপঃ]

ঐরূপে, DOC এবং EOC দুইটি ত্রিভুজ হইতে প্রমাণ করা যায় যে,

DO = EO. সুতরাং DO = EO = FO.

আবার, FAO, EAO দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের—

FO = EO এবং অতিভুজ AO উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

∴ ∠FAO = ∠EAO ; [১৫শ উপঃ]

অর্থাৎ AO রেখাই BAC কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিল।

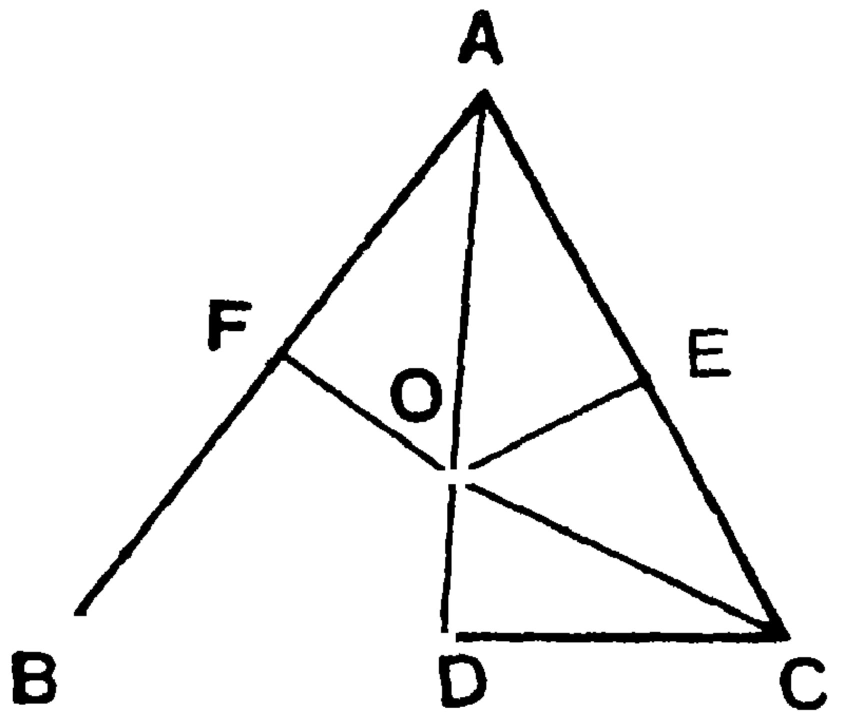
∴ কোণগুলির দ্বিখণ্ডক তিনটি এক (O) বিন্দুতে মিলিত হইল।

দ্রষ্টব্য। O বিন্দুটিকে ABC ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র (in-centre)** বলে।

২। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর লম্ব তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. এই তিনটি বিন্দুতে বাহুগুলির উপর লম্ব টানিলে তাহারা একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

E ও F বিন্দু হইতে যথাক্রমে AC ও AB বাহুর উপর EO ও FO দুইটি লম্ব টানা হইল। মনে কর উহারা O বিন্দুতে মিলিত হইল। OD যোগ কর।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD রেখা BC বাহুর উপর লম্ব।

প্রমাণ— BO, CO এবং AO যোগ কর।

এখন, AOF ও BOF দুইটি ত্রিভুজের—

AF = BF, FO একটি সাধারণ বাহু ;

এবং $\angle$AFO = $\angle$BFO = এক সমকোণ।

$\therefore$ OA = OB. [১০ম উপঃ]

ঐরূপে, AOE ও COE দুইটি ত্রিভুজ হইতে দেখান যায় যে,

OA = OC.

সুতরাং OA = OB = OC.

আবার, BOD ও COD দুইটি ত্রিভুজের—

BD = CD, OD উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

এবং BO = CO ;

সুতরাং ∠BDO = সন্নিহিত ∠CDO = এক সমকোণ। [১৪শ উপঃ]

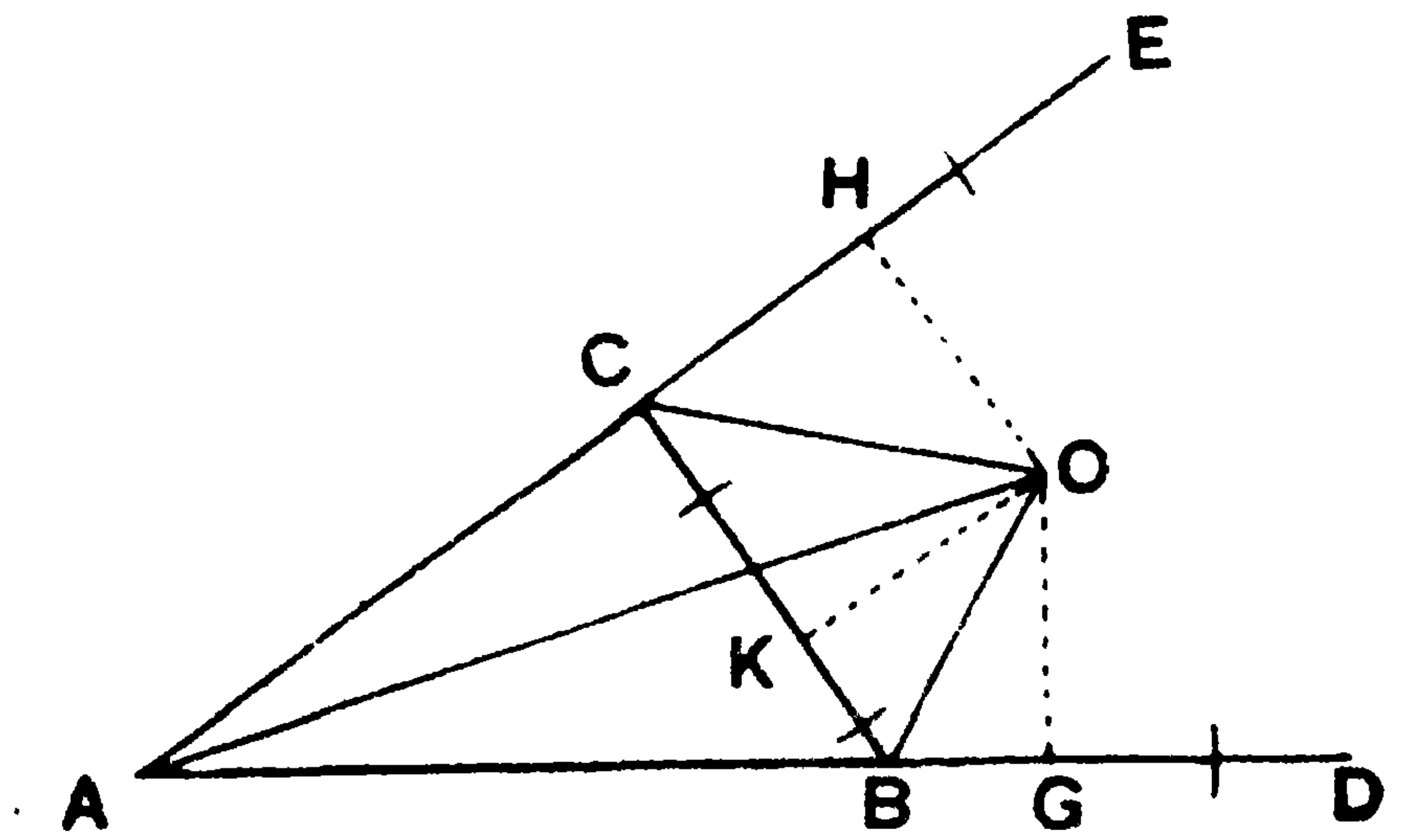
∴ OD রেখা BC এর উপর লম্ব ;

অর্থাৎ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুর লম্ব তিনটি এক (O) বিন্দুগামী।

দ্রষ্টব্য। O বিন্দুটিকে ABC ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (**circum-centre**) বলে।

৩। কোন ত্রিভুজের দুইটি বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং তৃতীয় অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডক একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। এবং DBC ও ECB বহিঃকোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। AO যোগ কর।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO রেখাই BAC অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ— O বিন্দু হইতে BC, বর্ধিত AC এবং বর্ধিত AB বাহুর উপর যথাক্রমে OK, OH ও OG তিনটি লম্ব টান।

এখন BOG এবং BOK দুইটি ত্রিভুজের—

∠GBO = ∠KBO এবং ∠BGO = ∠BKO = এক সমকোণ ;

এবং BO উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

∴ OG = OK. [১১শ উপঃ]

ঐরূপে, COH এবং COK দুইটি ত্রিভুজ হইতে দেখান যায় যে,

OH = OK. ∴ OG = OK = OH.

আবার, AOG এবং AOH দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের —

OG = OH ; OA উভয়ের সাধারণ অতিভুজ।

∴ ∠GAO = ∠HAO. [১৫শ উপঃ]

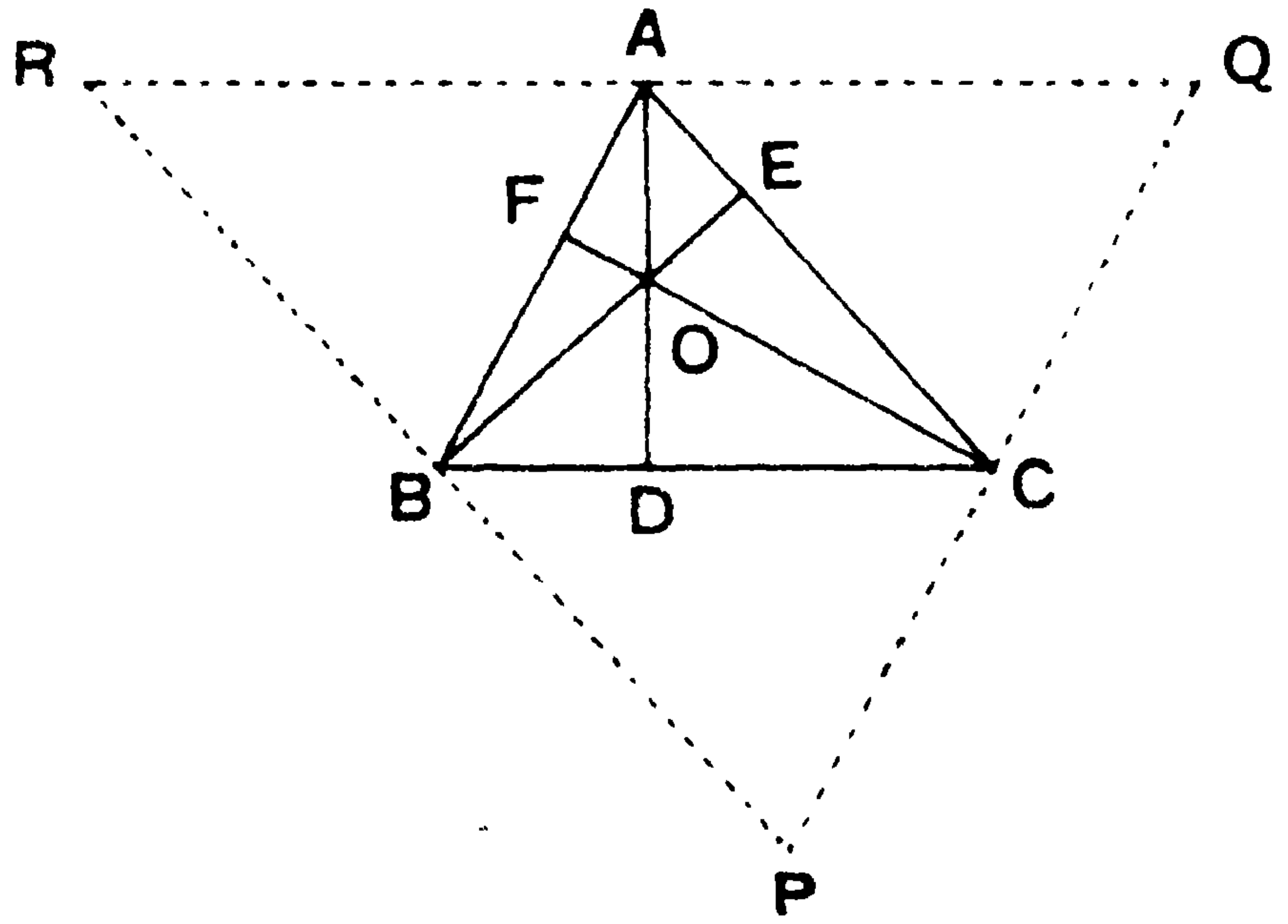
অর্থাৎ AO রেখা BAC কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিল।

দ্রষ্টব্য। এই O বিন্দুটিকে ABC ত্রিভুজের **বহিঃকেন্দ্র** (**ex-centre**) বলে।

৪। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের উপর ক্রমান্বয়ে AD, BE ও CF তিনটি লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই লম্ব তিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হইবে।



A, B ও C তিনটি শীর্ষবিন্দু হইতে উহাদের বিপরীত বাহুত্রয়ের সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে তিনটি সরলরেখা টান। মনে কর ইহারা P, Q এবং R বিন্দুতে মিলিয়া PQR ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ— ABPC একটি সামান্তরিক ; ∴ AC = BP. [২২শ উপঃ]

আবার, CARB একটি সামান্তরিক ; ∴ AC = BR.

∴ BP = BR, অর্থাৎ PR রেখার মধ্যবিন্দু B.

ঐরূপে, PQ এবং QR রেখাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে C ও A.

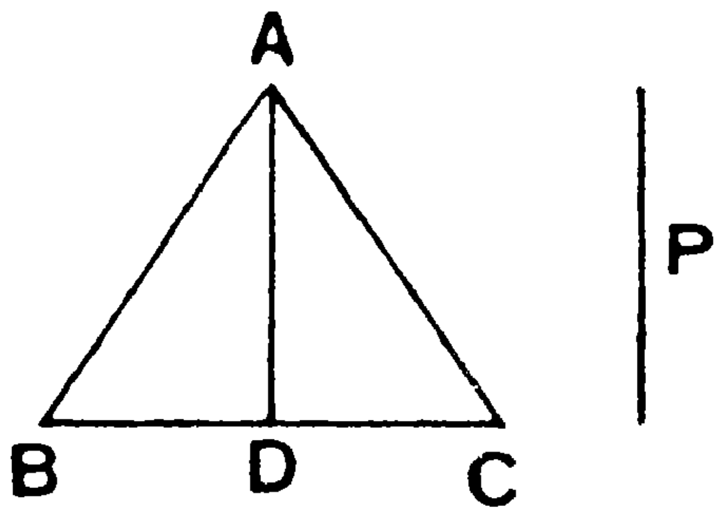
কিন্তু AD, BE ও CF রেখা তিনটি যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর উপর লম্ব বলিয়া, উহাদের সমান্তরাল QR, RP ও PQ এর উপরও উহাদের মধ্যবিন্দুতে লম্ব।

∴ সুতরাং ইহারা এক বিন্দুতে মিলিত হইবে। [২য় অনুশীলনী]

দ্রষ্টব্য। এই লম্ব তিনটি যে O বিন্দুতে মিলিত হইল তাহাকে ABC ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (**ortho-centre**) বলে।

৫। কোন সমবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর পাতিত লম্ব একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, P লম্বের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য। P রেখার সমান AD রেখা টান এবং উহার D বিন্দুতে AD এর লম্ব BC রেখা টান। A বিন্দুতে AD রেখার

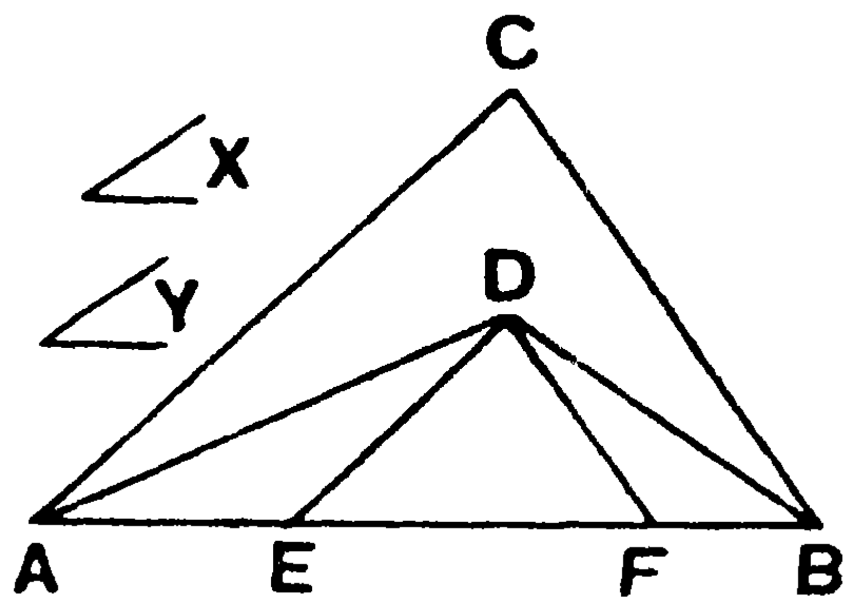


উভয় পার্শ্বে প্রত্যেকটি ৩০° করিয়া DAB ও DAC দুইটি কোণ অঙ্কিত কর। এখন উহাদের AB ও AC বাহুদ্বয় BC রেখাকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিলে, ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, AB রেখার দৈর্ঘ্য প্রদত্ত পরিসীমার সমান এবং X ও Y দুইটি নির্দিষ্ট কোণ। X ও Y এর সমান কোণ-বিশিষ্ট এবং AB রেখার সমান পরিসীমা-বিশিষ্ট ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

AB রেখার A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ∠X ও ∠Y এর সমান ∠BAC ও ∠ABC অঙ্কিত কর। মনে কর AC ও BC রেখাদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করিয়া ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল। এখন ∠BAC ও ∠ABC কোণদ্বয়কে যথাক্রমে AD ও BD রেখাদ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর AD ও BD রেখাদ্বয় D বিন্দুতে মিলিত হইল।



এখন D বিন্দু হইতে যথাক্রমে CA ও CB রেখার সমান্তরাল করিয়া DE ও DF রেখা টান। মনে কর DE ও DF রেখা AB রেখাকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন DEF ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

[প্রমাণ সহজ। নিজে প্রমাণ কর।]

বিবিধ অনুশীলনী

১। সমবাহু ত্রিভুজের ধর্ম ব্যবহার করিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

২। অঙ্কনে B বিন্দুটি ব্যবহার না করিয়া ABC কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত কর।

৩। দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান কোণ করিয়া এমন একটি সরলরেখা টান যেন, ঐ সরলরেখাদ্বয়-দ্বারা উহার সীমাবদ্ধ অংশ কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

৪। ABC কোণের অন্তর্বর্তী P একটি বিন্দু। P বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি রেখা টান যাহার BA ও BC দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশ P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি রেখা টান যেন, অন্য দুইটি রেখা-দ্বারা উহার সীমাবদ্ধ অংশ কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট হয়। কখন অঙ্কন অসম্ভব হইবে ?

৬। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এরূপ একটি বিন্দু স্থির কর যেন, দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে উহার দূরত্ব সমান হয়। কখন এরূপ অঙ্কন অসম্ভব হইবে বল।

৭। তিনটি সরলরেখা এক বিন্দুতে ছেদ করিল। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা টান যেন, ঐ সরলরেখা তিনটি-দ্বারা উহার সীমাবদ্ধ খণ্ড দুইটি সমান হয়।

৮। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টান যেন, উহা দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৯। A বিন্দু দিয়া এমন একটি রেখা টান যাহার দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার-অন্তর্গত-অংশটি কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হয়।

১০। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্দেশ কর।

১১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত সরলরেখা টানা হইল। উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১২। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখা হইতে কোন বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি দেওয়া আছে। ঐ বিন্দুটির সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

১৩। দুইটি পরস্পর-ছেদী নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে কোন বিন্দুর দূরত্বের অন্তর একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান দেওয়া আছে। ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

ক্ষেত্রফল বা কালি (Area)

ছক-কাগজ—(Squared Paper)

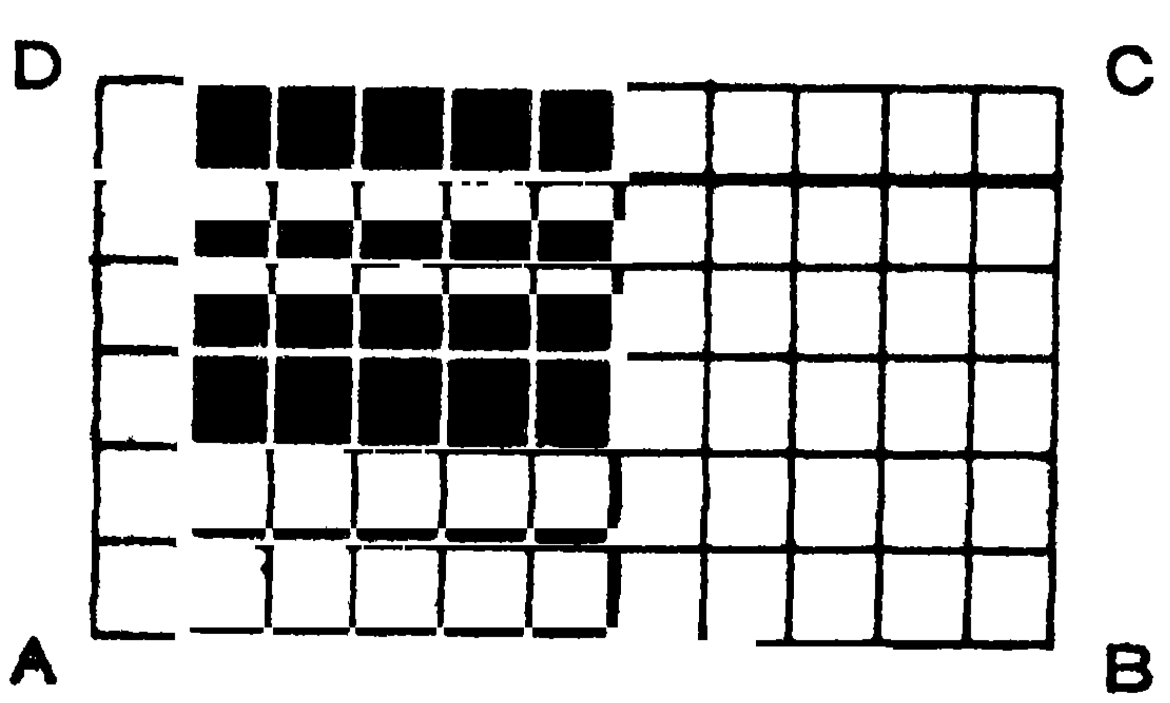
জ্যামিতিক চিত্রাঙ্কনের সুবিধার জন্য, বিশেষত কোন ক্ষেত্রের পরিমাণ নিরূপণ করিবার জন্য, ছক-কাগজ ব্যবহৃত হয়। ঐ কাগজের একটি নমুনা দেওয়া হইল। ইহা কতগুলি অনুভূমিক (horizontal) ও উল্লম্ব (vertical) সমান্তরাল সরলরেখাদ্বারা বহু সংখ্যক বর্গক্ষেত্রে

বিভক্ত। অনুভূমিক রেখাগুলি এক ইঞ্চির দশাংশ-ভাগ দূরে দূরে অবস্থিত। উল্লম্ব রেখাগুলিও ঐরূপ সমান দূরে দূরে অবস্থিত। এইরূপে সম্পূর্ণ কাগজখানা কতগুলি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইয়াছে। ইহার প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য ·১"।

আবার, প্রত্যেক নয়টি রেখার পর এক একটি স্থূল অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখা টানিয়া কাগজখানা কতকগুলি স্থূল সমান্তরাল রেখা-দ্বারা বহু-সংখ্যক বৃহত্তর বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইয়াছে। ইহাদের প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য ১"।

ক্ষেত্রফল বা কালি—কোন সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্র সমতলের যে পরিমাণ স্থান অধিকার করে তাহাকে উক্ত ক্ষেত্রের 'ক্ষেত্রফল' বা 'কালি' (area) বলে। কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ যে-কোন একক (unit) ধরিলে, উহার ক্ষেত্রফল বা কালিকে এক বর্গ-একক (square unit) বলা হয় এবং ইহাকেই ক্ষেত্রফলের একক ধরা হইয়া থাকে। যেমন—১ ইঞ্চি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কালি ১ বর্গ-ইঞ্চি; ১ ফুট বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কালি ১ বর্গফুট, ইত্যাদি।

আয়তের ক্ষেত্রফল— ABCD একটি আয়ত। মনেকর ইহার AB বাহু ১১ ইঞ্চি ও AD বাহু ৬ ইঞ্চি। AB বাহুকে সমান ১১ অংশে এবং AD বাহুকে সমান ৬ অংশে বিভক্ত কর। সুতরাং প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য ১ ইঞ্চি। ছক-কাগজের একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুকে ১ ইঞ্চি (একক) ধরিয়া লও। এখন AB রেখার মধ্যস্থ দশটি ছেদ-বিন্দু হইতে AD এর সমান্তরাল দশটি রেখা এবং ADএর মধ্যস্থ পাঁচটি ছেদ-বিন্দু হইতে AB এর সমান্তরাল



পাঁচটি রেখা টান। এইরূপে সম্পূর্ণ আয়তটি ৬৬টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইল। ইহাদের প্রত্যেকের বাহু ১ ইঞ্চি লম্বা, সুতরাং প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্র

১ বর্গইঞ্চি স্থান অধিকার করিয়া আছে। এবং সম্পূর্ণ আয়তটি ৬৬ বর্গ-ইঞ্চি স্থান অধিকার করিয়া আছে। ইহাই ABCD আয়তের ক্ষেত্রফল বা কালি।

এইরূপে, কোন আয়তের দৈর্ঘ্য a ইঞ্চি ও প্রস্থ b ইঞ্চি হইলে, ইহার ক্ষেত্রফল $a \times b$, অর্থাৎ ab বর্গইঞ্চি হইবে। ছক-কাগজের সাহায্যে অতি সহজেই কোন আয়তের অথবা যে-কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। সংক্ষেপে নিম্নলিখিত সূত্রানুসারে আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণীত হয়—

আয়তের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

$\therefore$ **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহুর দৈর্ঘ্য)^2**

উন্নতি—কোন ত্রিভুজের যে-কোন বাহুকে ভূমি মনে করিলে, উহার বিপরীত শিরঃকোণ হইতে ঐ ভূমির উপর পাতিত লম্বকে ঐ ত্রিভুজের **উন্নতি** (altitude) বলে। এইরূপ কোন সামান্তরিকের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরিয়া উহার বিপরীত বাহুর যে-কোন বিন্দু হইতে উক্ত ভূমির উপর পাতিত লম্বকে এই সামান্তরিকের **উন্নতি** বলে।

দ্রষ্টব্য—সহজেই দেখা যায় যে, একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত যাবতীয় সামান্তরিক বা ত্রিভুজের উন্নতি সমান।

টীকা—উপরে আয়ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে যাহা বলা হইল তাহা হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, উপরি উক্ত সূত্র-দ্বারা কোন আয়তের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও ক্ষেত্রফলের মধ্যে একটি সম্বন্ধ স্থাপিত হইয়াছে। ইহার দুইটি জানা থাকিলে তৃতীয়টি সহজেই নির্ণয় করা যায়। বর্গক্ষেত্রের পক্ষে বাহু এবং ক্ষেত্রফলের মধ্যে একটি সম্বন্ধ স্থাপিত হয়।

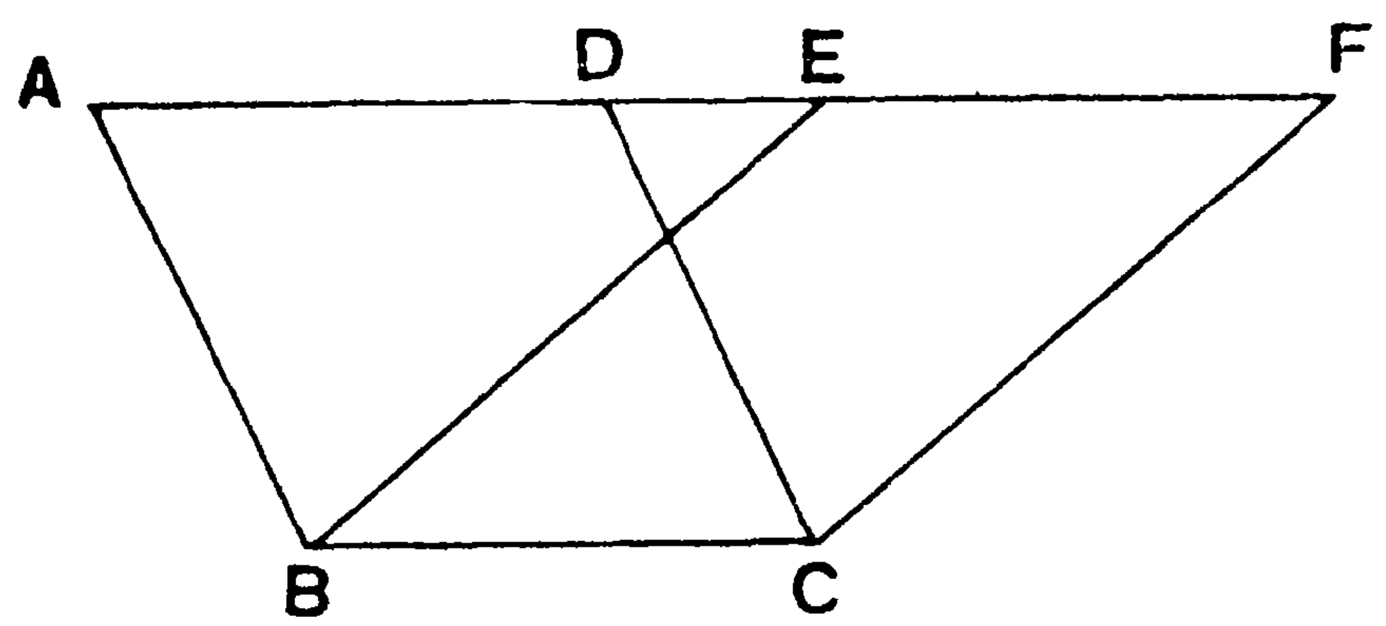
অনু—(১) একই দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

(২) সমান বাহু-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

২৬শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৩৫)

সাঃ নিঃ—একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (অর্থাৎ একই উন্নতির) সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান বা তুল্য (equivalent)।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABCD ও EBCF দুইটি সামান্তরিক একই BC ভূমির উপর এবং BC ও AF একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।



প্রমাণ— ABE ও DCF দুইটি ত্রিভুজের—

AB = DC ; ∠EAB = অনুরূপ ∠FDC ;

এবং ∠AEB = অনুরূপ ∠DFC ; [৬ষ্ঠ উপঃ]

∴ △ABE ≡ △DCF. [১১শ উপঃ]

এখন, ABCF ক্ষেত্রটি হইতে এই দুইটি সমান ত্রিভুজ বাদ দিলে—

অবশিষ্ট EBCF সামান্তরিক = অবশিষ্ট ABCD সামান্তরিক।

[**ই. উ. বি.**]

১ম অনু—উপরের একটি সামান্তরিক আয়তক্ষেত্র হইলে উহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান (equivalent) হইবে এবং উভয়ের উন্নতিও সমান হইবে। সুতরাং একটি আয়ত ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর

ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

কিন্তু আয়তের ক্ষেত্রফল = BC × উন্নতি ;

সুতরাং সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = BC × উন্নতি = ভূমি × উন্নতি।

২য় অনু—সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত একই উন্নতির সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান (ইউ—১।৩৬)।

কারণ, সামান্তরিক দুইটিকে একই ভূমির উপর স্থাপন করিলে উহাদের উন্নতি সমান বলিয়া উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

অনুশীলনী

১। একই বাহুর উপর অঙ্কিত রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের মধ্যে বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর।

২। কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণ।

৩। একটি সামান্তরিকের ভূমি = ৫·৮ সে.মি. এবং উন্নতি = ৫ সে. মি.। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—২৯ বর্গ সে.মি.।]

৪। ABCD সামান্তরিকের AB = ২·৬″, AD = ৩·২″ এবং A কোণ = ৪৫°। D বিন্দু হইতে AB এর উপর লম্ব টানিয়া সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৫·৯ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)।]

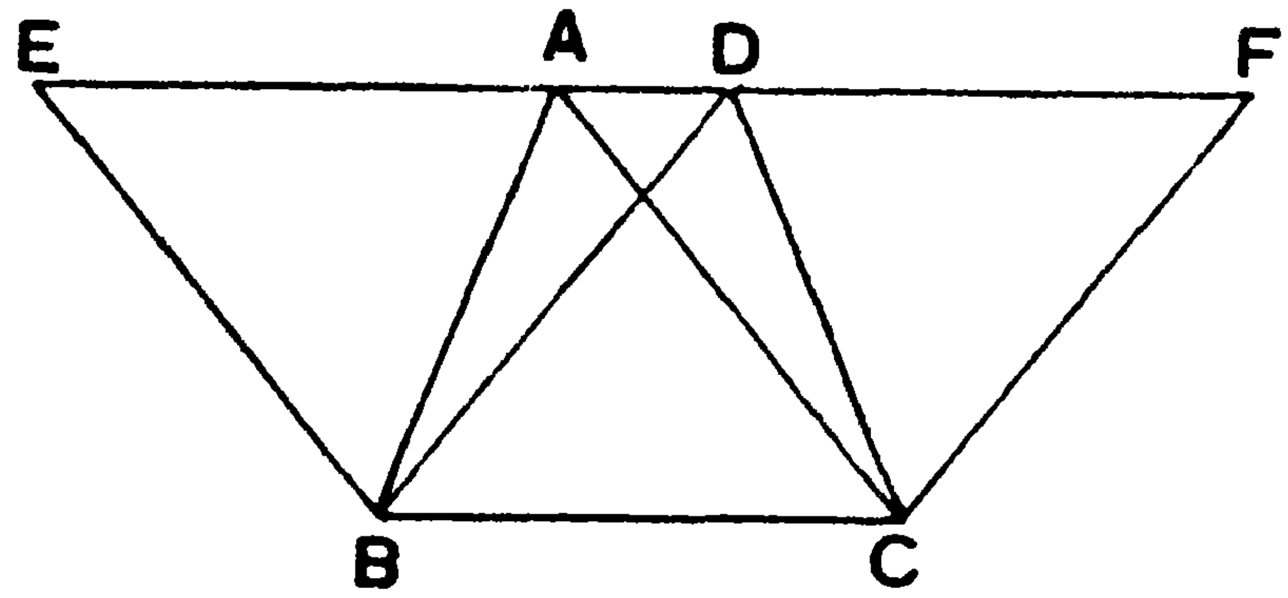
৫। একটি রম্বসের বাহু ৩″, ক্ষেত্রফল ৭·৮ বর্গ ইঞ্চি। উহার উন্নতি কত? [উঃ—২·৬ ইঞ্চি।]

৬। একটি আয়তের ভূমি ২″ কিন্তু ইহার ক্ষেত্রফল ৩″ বাহু-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান। আয়তের অপর বাহুটি কত? [উঃ—৪·৫ ইঞ্চি।]

২৭শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৩৭)

সাঃ নিঃ—একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (অর্থাৎ সমান উন্নতির) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই BC ভূমির উপর এবং একই উন্নতির অর্থাৎ BC ও AD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান (তুল্য)।



অঙ্কন—B ও C বিন্দু হইতে যথাক্রমে AC ও BD রেখার সমান্তরাল করিয়া BE ও CF রেখা দুইটি টান। মনে কর ইহারা AD রেখাকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ—উভয় ত্রিভুজের উন্নতি সমান বলিয়া, EBCA সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = DBCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। [২৬শ উপঃ]

কিন্তু ABC ত্রিভুজটি EBCA সামান্তরিকের অর্ধেক এবং DBC ত্রিভুজটি DBCF সামান্তরিকের অর্ধেক।

∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = DBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—ত্রিভুজ দুইটি সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উন্নতি-বিশিষ্ট হইলে, উহাদিগকে একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে স্থাপিত করা যায়। সুতরাং তাহাদের ক্ষেত্রফলও সমতুল্য (সমান) হইবে। (ইউ—১।৩৮)

২য় অনু—কোন ত্রিভুজের একটি মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে।

অনুশীলনী

১। কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাকে যে চারটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে উহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

২। একটি সমকোণী ত্রিভুজকে দুইটি সমান সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়।

৩। কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উন্নতির গুণফলের অর্ধেকের সমান।

৪। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেকের সমান।

৫। ABCD একটি সামান্তরিক আঁক। C বিন্দু হইতে AB এবং AD এর উপর লম্ব টান। AB, AD এবং লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্য মাপিয়া ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬। ABC একটি ত্রিভুজ আঁক। উহার প্রত্যেক শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টান। তিনটি বাহু এবং তিনটি লম্বের দৈর্ঘ্য মাপ এবং তিন প্রকারে ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭। কোন সামান্তরিকের বিপরীতবাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-যোজক রেখা সামান্তরিকটিকে দুইটি সমতুল্য (equivalent in area) অংশে বিভক্ত করে। অংশদ্বয় সর্বসম কি না বল।

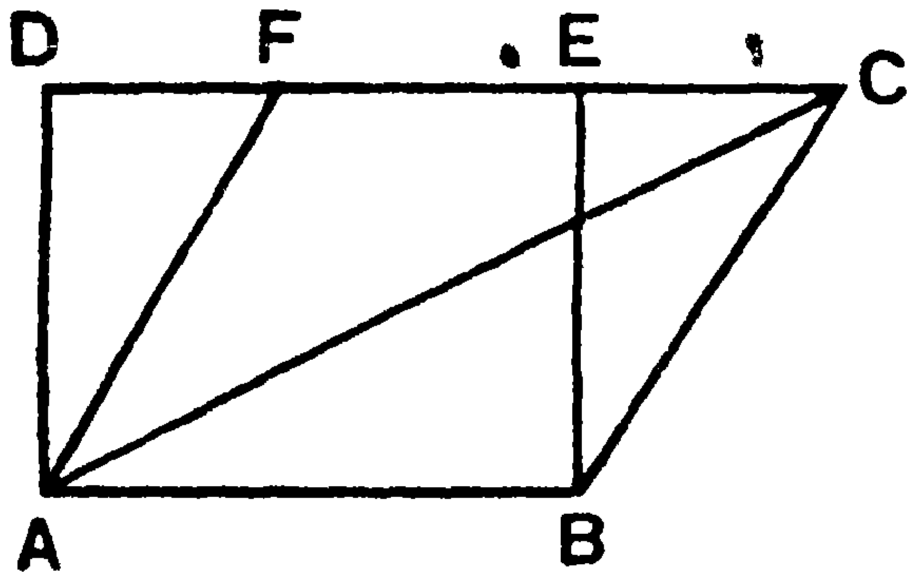
৮। ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, AOB, BOC COA ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল সমান।

৯। একই BC ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ABC ও DBC দুইটি ত্রিভুজ এবং ABCE একটি সামান্তরিক। AC ও BD রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, BOC ও AOD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অন্তর DCE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

২৮শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৪১)

সাঃ নিঃ--একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABED আয়ত এবং ABC ত্রিভুজ একই AB ভূমির উপর এবং একই AB ও DC দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABED আয়তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

A বিন্দু হইতে BC এর সমান্তরাল AF রেখা টান। মনে কর AF রেখা DC রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ— AC রেখা ABCF সামান্তরিকের কর্ণ।

∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ABCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। [২২শ উপঃ]

কিন্তু ABCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ABED আয়তের ক্ষেত্রফল। [২৬শ উপঃ, ১ম অনু]

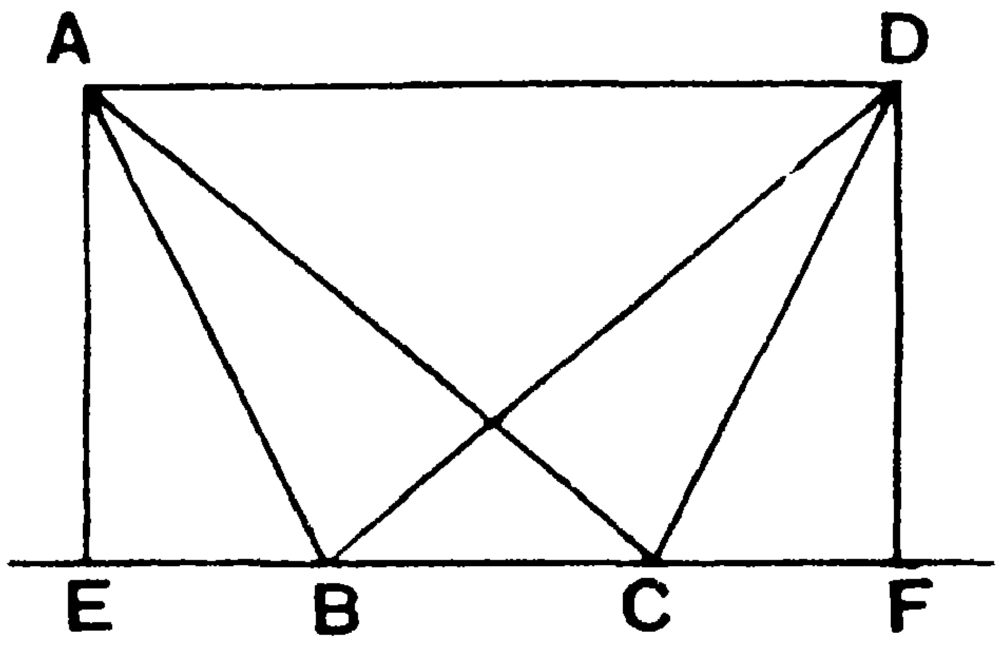
সুতরাং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ABED আয়তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। [**ই. উ. বি.**]

অনু—কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একই ভূমির উপর অবস্থিত ও সমান উন্নতি-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। (ইউ—১।৪১)

২৯শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৩৯)

সাঃ নিঃ—সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে উহাদের উন্নতি পরস্পর সমান হইবে অর্থাৎ উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ও DBC দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজ একই BC ভূমির উপর এবং উহার একই দিকে অবস্থিত আছে।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের উন্নতি পরস্পর সমান, অর্থাৎ AD যোগ করিলে AD রেখা BC এর সমান্তরাল হইবে।

অঙ্কন—A ও D বিন্দু হইতে BC এর উপর যথাক্রমে AE ও DF দুইটি লম্ব টান। মনে কর উহারা BC (অথবা বর্ধিত BC কে) যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ— $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ BC $\times$ AE ;

আবার, $\triangle$BCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ BC $\times$ DF ;

ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান বলিয়া, $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AE $= \frac{1}{2}$ BC $\times$ DF ;

$\therefore$ উন্নতি AE $=$ উন্নতি DF.

এখন, AE ও DF দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং AD রেখা BC এর সমান্তরাল। [**ই. উ. বি.**]

অনু—ত্রিভুজ দুইটি একই রেখাস্থ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত হইলেও উহাদের উন্নতি সমান হইবে। (ইউ—১।৪০)

অনুশীলনী

১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক রেখা বিপরীত বাহু দুইটিকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, DE রেখা ভূমির সমান্তরাল।

২। ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ B ও D বিন্দু হইতে সম-দূরবর্ত্তী।

৩। ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণের উপর X একটি বিন্দু নিয়া XB ও XD যোগ কর। প্রমাণ কর যে, $\triangle BAX = \triangle DAX$.

৪। একই বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। একই ভূমির উপর অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজ-গুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা ক্ষুদ্রতম, প্রমাণ কর।

৬। দুইটি ত্রিভুজের একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান। এই বাহুগুলির অন্তর্ভূ্ত কোণ পরস্পর সম্পূরক হইলে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান হইবে। এইপ্রকার ত্রিভুজ সর্বতোভাবে সমান হইতে পারে কি ?

৭। ABC ত্রিভুজের AB = ৫ সে. মি., AC = ৭ সে. মি.,
এবং BC = ৯ সে. মি.। AD উন্নতি টানিয়া ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উঃ—১৭·৪ বর্গ সে. মি. (স্থূলত।)]

৮। কোন ত্রিকোণাকার সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের দুই বাহু যথাক্রমে ১০০ ও ১২০ সে. মি. এবং ইহাদের অন্তর্ভূ্ত কোণ = ৪৫°। ক্ষেত্রটির স্থূল **(approximate)** ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৩০০০ $\sqrt{২}$ বর্গ সে. মি.।]

৯। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ৩·০৬ বর্গ ইঞ্চি, BC বাহু=৩″। উহার উন্নতি এবং A কোণের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[উঃ—উন্নতি ২″ (স্থূলত)]

১০। ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণ হইতে অঙ্কিত উন্নতি ক্ষুদ্রতর হইবে।

১১। কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুসমূহের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে সংযুক্ত করিলে যে সামান্তরিকটি উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল ঐ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

১২। ABC ত্রিভুজের, AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. BE ও CD পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BFC ত্রিভুজটি AEFD চতুর্ভুজের সমান।

১৩। দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজ একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, উহাদের শিরঃকোণ-যোজকরেখা ভূমি (অথবা বর্ধিত ভূমি) দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

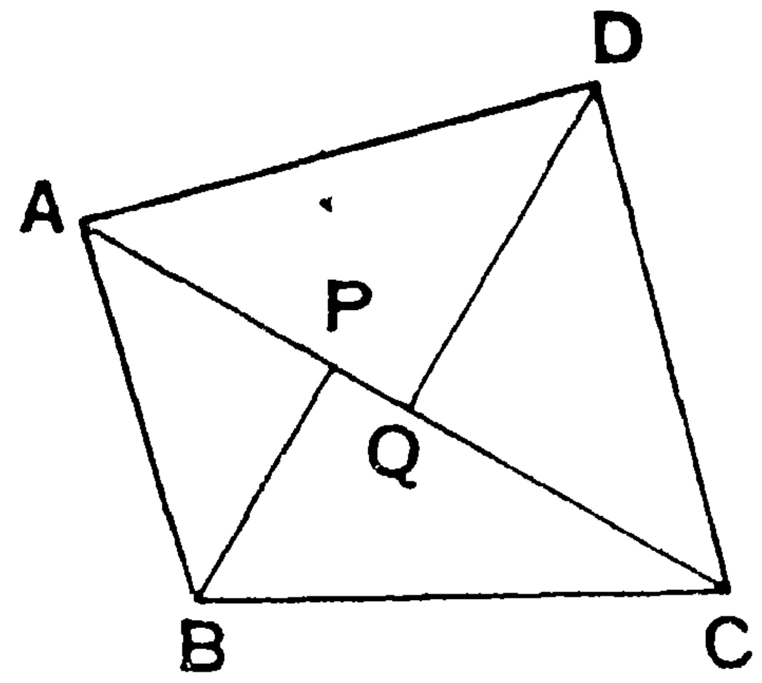
১৪। চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট আছে। প্রমাণ কর যে, এইপ্রকার বিভিন্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

১৫। কোন চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে কর্ণ দুইটির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে যে সামান্তরিকটি উৎপন্ন হয় উহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

১৬। কোন চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণের সমান বাহু-বিশিষ্ট এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান উক্ত দুই বাহুর অন্তর্ভূত কোণ-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকিলে উহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের সমান হইবে।

বিবিধ সমাধান

১। কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে কোন কর্ণের উপর লম্ব টানিয়া চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল বাহির কর।



মনে কর ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত শীর্ষবিন্দু B ও D হইতে AC কর্ণের উপর BP ও DQ লম্ব টানা হইল। ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান

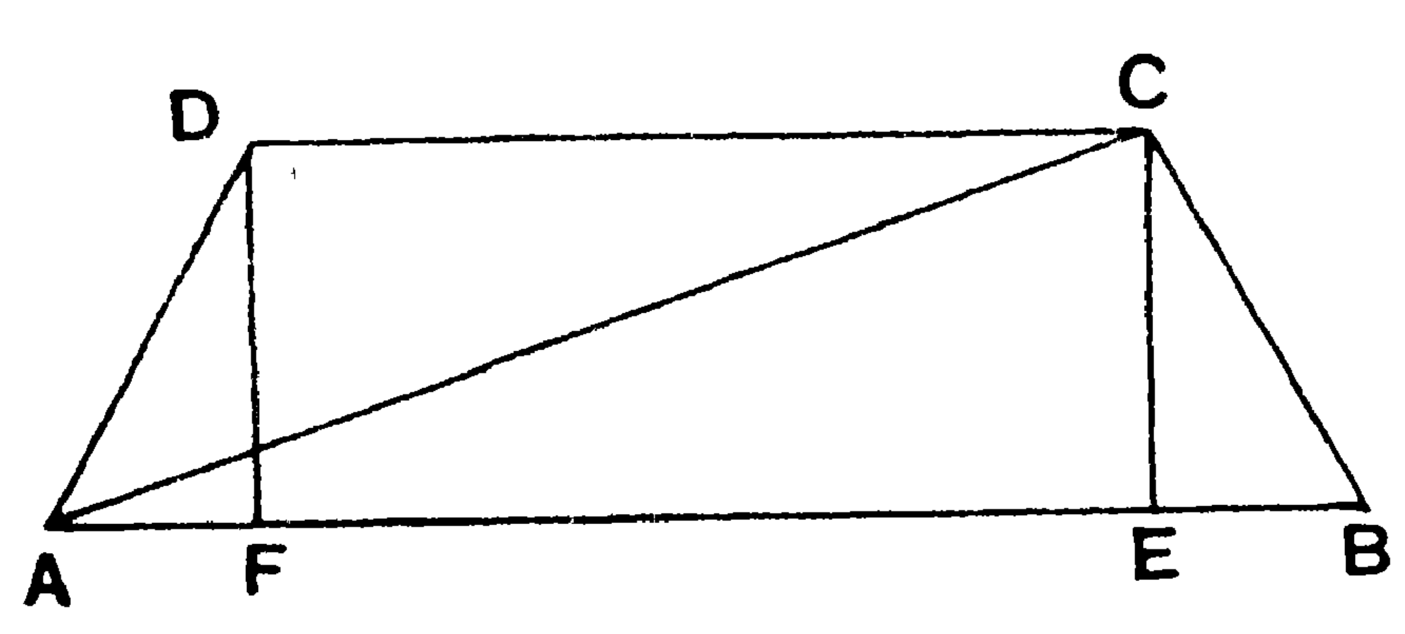
$$=\frac{1}{2}\ BP\ .\ AC+\frac{1}{2}DQ\ .\ AC$$

∴ ABCD এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\ AC(BP+DQ)$

$=\frac{1}{2}$ কর্ণ × (অঙ্কিত লম্ব দুইটির সমষ্টি)।

২। ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল—

মনে কর ABCD ট্রাপিজিয়মের AB বাহু CD বাহুর সমান্তরাল। AC



সংযুক্ত কর। C এবং D বিন্দু হইতে AB এর উপর যথাক্রমে CE ও DF লম্ব টান।

তাহা হইলে, ABCDএর ক্ষেত্রফল

= ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

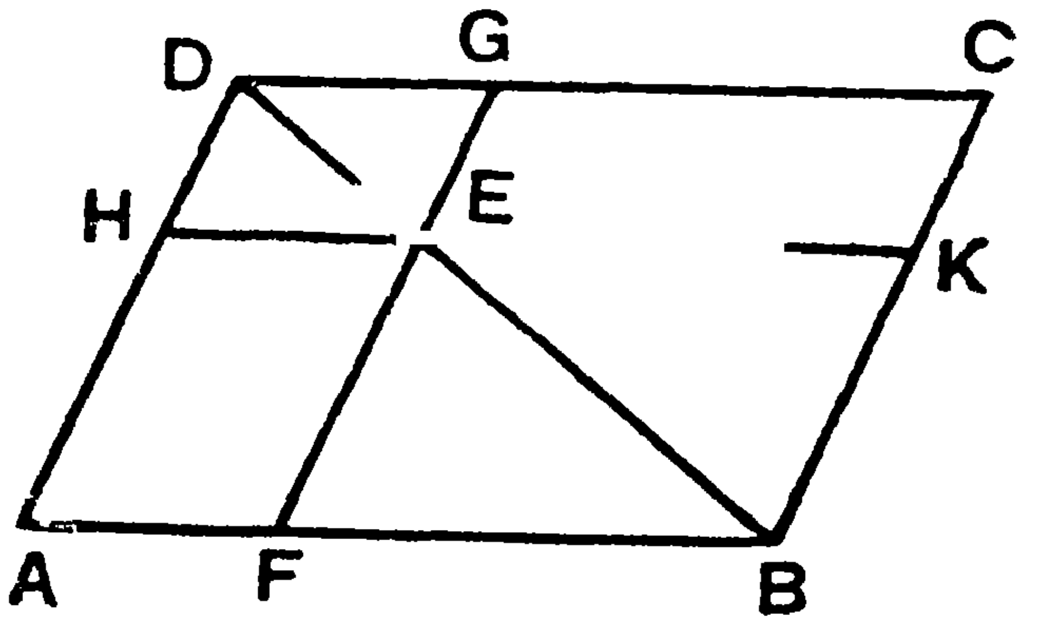
= ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ DFEC আয়তের ক্ষেত্রফল

= $\frac{1}{2}CE \times AB + \frac{1}{2}CE \times DC = \frac{1}{2}CE(AB + DC)$

= $\frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি ।

পূরক সামান্তরিক—ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের যে-কোন বিন্দু E হইতে বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল করিয়া HK ও FG রেখা টান ।

এইরূপে ABCD সামান্তরিকটি চারটি সামান্তরিকে বিভক্ত হইল। উহাদের যে দুইটির কর্ণ BD কর্ণের সহিত মিলিত অর্থাৎ EB ও ED সামন্তরিকদ্বয়কে উক্ত কর্ণের 'পরিতঃস্থ' সামান্তরিক (parallelograms about the diagonal) বলে। অপর দুইটিকে অর্থাৎ EA ও EC



সামান্তরিকদ্বয়কে পরিতঃস্থ সামান্তরিকদ্বয়ের 'পূরক'(complements) বলে। HAFBKCGEH ক্ষেত্রটিকে অর্থাৎ পরিতঃস্থ EB সামান্তরিক ও EA এবং EC দুইটি পূরক সামান্তরিকের একত্রযোগে যে ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হয় তাহাকে **শঙ্কুক্ষেত্র** (Gnomon) বলে ।

৩। কোন সামান্তরিকের কর্ণের পরিতঃস্থ সামান্তরিক-দ্বয়ের পূরক সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

মনে কর উপরের চিত্রে ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের পরিতঃস্থ সামান্তরিকদ্বয় BE ও DE. প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহাদের পূরক AE ও CE সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

— KEFB একটি সামান্তরিক এবং EB উহার কর্ণ ;

∴ Δ FEB = Δ BKE. [২২শ উপঃ]

এইরূপে, ΔDHE = ΔDGE.

∴ ΔFEB + ΔDHE = ΔBKE + ΔDGE ;

কিন্তু ΔABD = ΔBCD.

সুতরাং অবশিষ্ট AE = অবশিষ্ট CE, এবং ইহারা BE ও DE সামান্তরিকদ্বয়ের পূরক সামান্তরিক।

অনুশীলনী

১। একটি ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয় যথাক্রমে ৪·৭ ও ৩ সে. মি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব (উন্নিত) ১·৫ সে. মি.। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৫·৮ বর্গ সে. মি. (স্থূলত)।]

২। ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ = ১৭″। B ও D কোণ হইতে AC কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে ১১″ ও ৯″। চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—১৭০ বর্গ ইঞ্চি।]

৩। একটি নক্সায় ABCD একটি সীমাবদ্ধ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র। AC কর্ণের পরিমাণ ৮·২″। B ও D কোণ হইতে AC কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৩·৪″ ও ২·৬″। যদি নক্সার স্কেল (scale) ১″ = ২ গজ হয়, তবে ABCD ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৯৮·৪ বর্গগজ।]

৪। একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণটি দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে, কর্ণদ্বয় যে-কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলেও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল একই থাকিবে।

৫। কোন সামান্তরিকের কর্ণ রেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু হইতে অঙ্কিত এবং উহার বিপরীত বাহুদ্বয়-দ্বারা কোন সরলরেখার ছিন্ন অংশ উক্ত বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সামান্তরিকটিকে দুইটি সর্বসম অংশে বিভক্ত করে।

৬। ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক বাহুর মধ্যবিন্দু অন্য তির্যক বাহুর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সহিত সংযুক্ত করিলে, উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হয়।

৭। চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে যোগ করিলে যে সামান্তরিক উৎপন্ন হয় উহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের অর্ধেক।

৮। যদি সামান্তরিকের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু উহার শিরঃকোণসমূহের সহিত সংযুক্ত করা হয়, তবে বিপরীত দিকের ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিকের অর্ধেক হইবে।

৯। ৩য় সমাধানের চিত্রে (১৪৩ পৃঃ) প্রমাণ কর যে, AG ও CH সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

১০। ঐ চিত্রে প্রমাণ কর যে, BD কর্ণের মধ্যবিন্দু E হইলে, AE ও EC পূরক সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে। এবং উহাদের প্রত্যেকটি ABCD সামান্তরিকের এক চতুর্থাংশ।

১১। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে মধ্যমা টানিলে উহা ভূমির সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখাকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১২। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করিলে, উহা সমান দুই অংশে বিভক্ত হইবে।

১৩। ত্রিভুজের দুইটি বাহু দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে, বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে।

১৪। ABCD একটি সামান্তরিক। AD এবং BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। PQ অথবা বর্ধিত PQ এর উপর H একটি বিন্দু লইয়া দেখাও যে, AHB ত্রিভুজটি ABCD সামান্তরিকের এক চতুর্থাংশ।

১৫। ABCD সামান্তরিকের অন্তঃস্থ P একটি বিন্দু হইতে উহার বাহুসমূহের সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে, যদি উৎপন্ন AP ও PC সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তবে P বিন্দুটি BD কর্ণের উপর অবস্থিত হইবে।

১৬। ১৫শ অনুশীলনীতে প্রমাণ কর যে, APC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল DP ও BP সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অন্তরের অর্ধেক।

৩০শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৪৭)

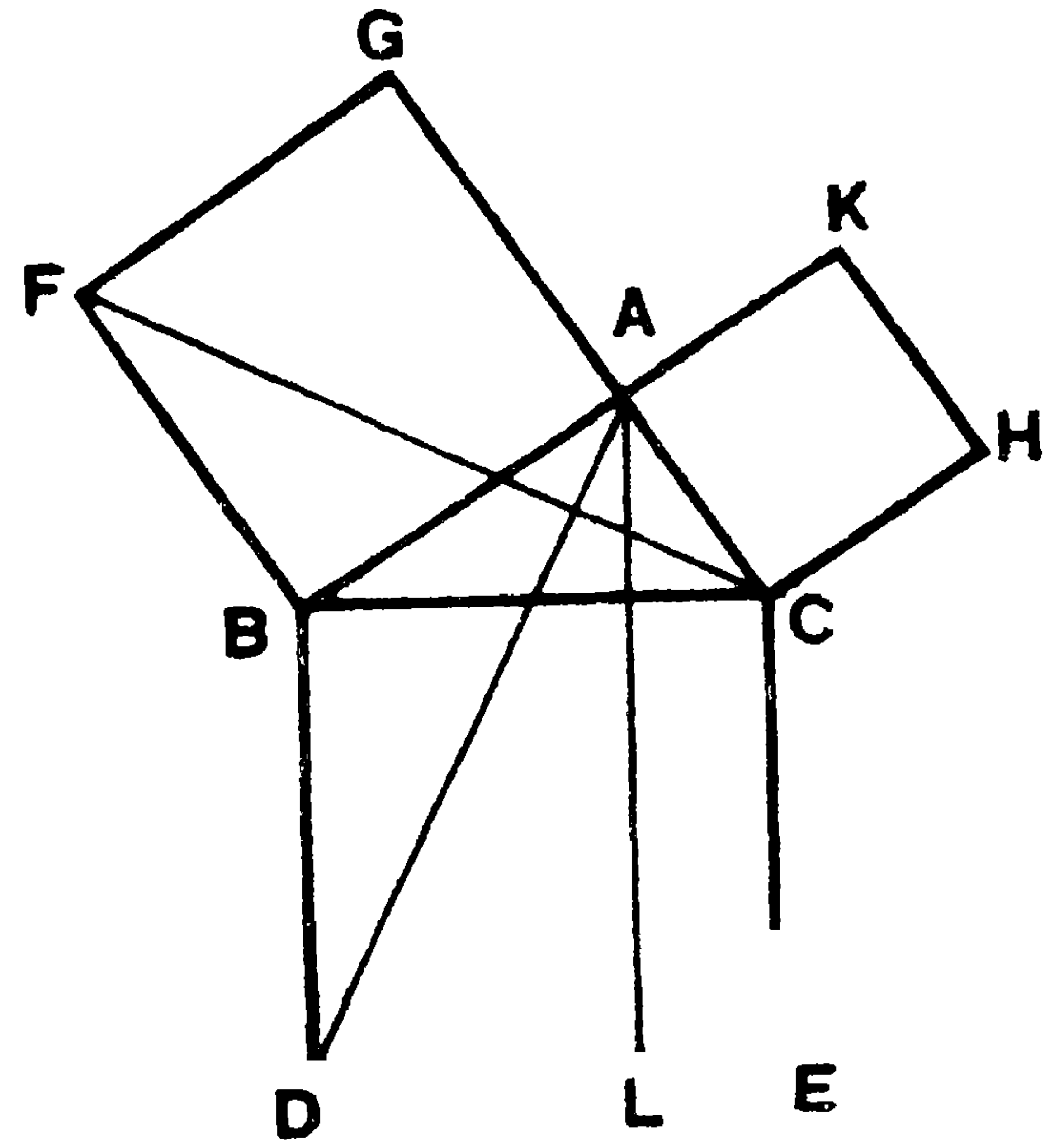
সাঃ নিঃ—সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ত্রিভুজের BAC কোণটি সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AB ও AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

অঙ্কন—BCএর উপর BDEC এবং AB ও AC এর উপর যথাক্রমে ABFG ও ACHK বর্গক্ষেত্র আঁক। A বিন্দু হইতে BDএর সমান্তরাল করিয়া AL রেখা টান। মনে কর, উহা DE কে L বিন্দুতে ছেদ করিল।

AD, FC যোগ কর।



প্রমাণ—BAC ও BAG প্রত্যেকেই একটি সমকোণ বলিয়া, CA ও AG রেখাদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ঐ প্রকারে, BA ও AK রেখাদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। [২য় উপঃ]

আবার, $\angle ABF = \angle CBD =$ এক সমকোণ।

$\therefore \quad \angle ABF + \angle ABC = \angle CBD + \angle ABC$;

অর্থাৎ $\angle FBC = \angle ABD$.

এখন, FBC ও ABD দুইটি ত্রিভুজের—

$FB = BA, \quad BC = BD$;

এবং $\angle FBC = \angle ABD$.

$\therefore \quad \triangle FBC \equiv \triangle ABD$; [১০ম উপঃ]

আবার, একই FB ভূমির উপর এবং FB ও GC দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত বলিয়া, BG বর্গক্ষেত্র = FBC ত্রিভুজের দ্বিগুণ।

পুনরায়, একই BD ভূমির উপর এবং BD ও AL সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া,

BL আয়তক্ষেত্র = ABD ত্রিভুজের দ্বিগুণ ;

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র BG = আয়ত BL.

ঐরূপে, BH ও AE যোগ করিয়া প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

বর্গক্ষেত্র CK = আয়ত CL.

$\therefore$ আয়ত BL + আয়ত CL = বর্গক্ষেত্র BG + বর্গক্ষেত্র CK ;

অর্থাৎ বর্গক্ষেত্র BE = বর্গক্ষেত্র BG + বর্গক্ষেত্র CK.

[**ই. উ. বি.**]

১ম দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্যটি প্রাচীন গ্রীক গণিতজ্ঞ পিথাগোরাস (Phythagoras)এর আবিষ্কৃত বলিয়া তাহার নামানুসারে অভিহিত। কিন্তু ইহার সত্যতা পিথাগোরাসের বহুপূর্বেই ভারতীয় আচার্য্য (জ্যামিতি-কার) দিগের পরিজ্ঞাত ছিল এবং তাহারা সাধারণভাবে ইহা প্রমাণ ও করিয়াছিলেন (খ্রীঃ পূঃ অব্দ ৫৮০—৫০০)। সুতরাং গ্রীক জ্যামিতিকারগণ যে ভারতীয় জ্যামিতি শাস্ত্র হইতে কতক পরিমাণে সাহায্য পাইয়াছেন

তাহা বলা যাইতে পারে। এই উপপাদ্যের মূলসূত্র 'শুল্বসূত্র' নামক গ্রন্থে আলোচিত হইয়াছে।*

২য় দ্রষ্টব্য। বীজগণিতের প্রতীকদ্বারা এই উপপাদ্যটিকে নিম্নলিখিত রূপে লেখা যায়—

$$BC^2 = CA^2 + AB^2,$$

অর্থাৎ **অতিভুজের বর্গ = ভুজের বর্গ + কোটির বর্গ**।

অনু—এই উপপাদ্যটির সাহায্যে নিম্নের অনুসিদ্ধান্তটিও প্রমাণ করা যায়।

ABC ত্রিভুজের A কোণ হইতে সম্মুখীন BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁক।

এখন, $AB^2 = AD^2 + BD^2$, এবং $AC^2 = AD^2 + DC^2$,

$$\therefore \quad AB^2 - AC^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - DC^2$$
$$= BD^2 - DC^2.$$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের দ্বিতীয় প্রমাণ—

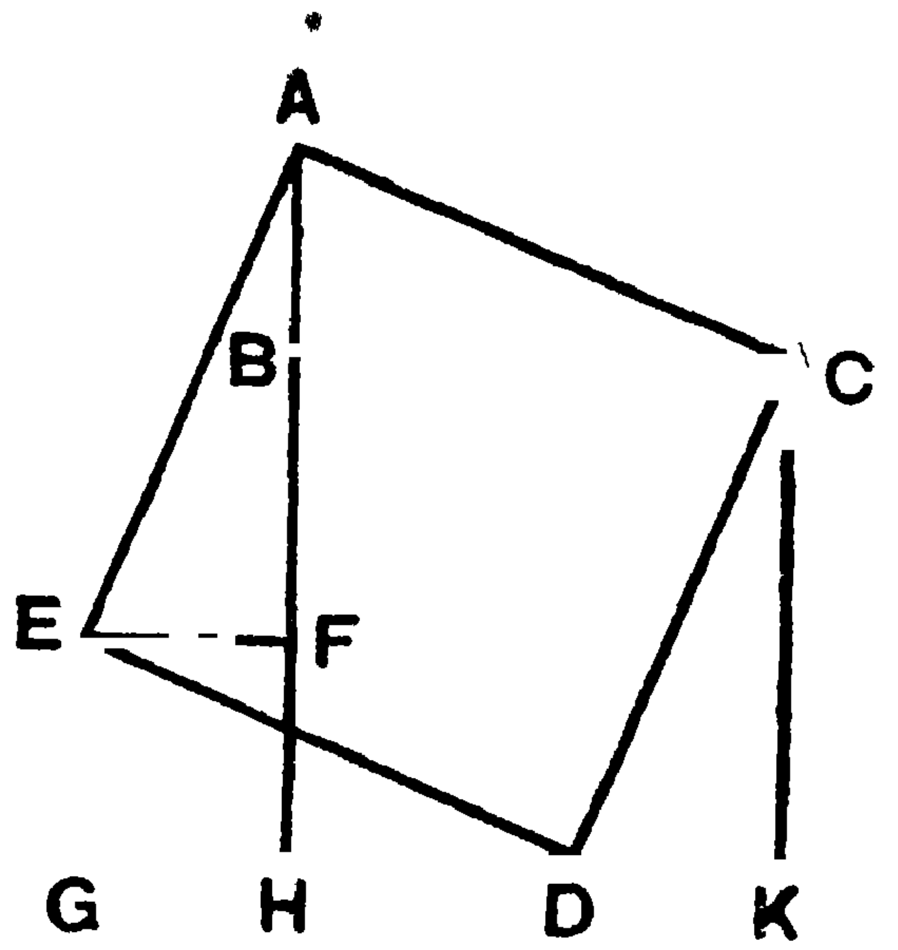
BCKH ও HGEF বর্গক্ষেত্র দুইটি এরূপভাবে অঙ্কিত কর যেন, উহাদের KH ও GH বাহু একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়। HB বাহুকে A বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BA অংশ FH এর সমান করিয়া লও।

আবার, KH হইতে HF এর সমান করিয়া KD অংশ ছেদ কর। এখন AC, AE, CD ও ED সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABC ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ, এবং এই সমকোণ-সংলগ্ন BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে BCKH ও HGEF বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমান।

---

* বৌধায়ন, আপস্তম্ব এবং কাত্যায়ন প্রণীত তিনখানা গ্রন্থই 'শুল্বসূত্র' নামে পরিচিত। এই গ্রন্থসমূহে যজ্ঞবেদিক প্রভৃতির নির্মাণ প্রণালী বর্ণিত হইয়াছে। শুল্ব শব্দের অর্থ রজ্জু (cord). Dr. G. Thebaut—"On the S'ulvasutras"—Journal of the Asiatic Society of Bengal, Vol. XLIV, Part I, (1875) pp. 227—275.

এখন ABC, CDK, EGD এবং AFE সমকোণী ত্রিভুজগুলির সমকোণের সংলগ্ন বাহুগুলি পরস্পর সমান বলিয়া উহারা পরস্পর সর্বতোভাবে সমান, অর্থাৎ সর্বসম।



অতএব, ACDE ক্ষেত্রটির বাহুগুলি পরস্পর সমান।

এখন, $\angle GDE + \angle GED =$ এক সমকোণ,

অথবা, $\angle GDE + \angle CDK =$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle CDE =$ এক সমকোণ।

ঐরূপে, $\angle AED$, $\angle ACD$ এবং $\angle CAE$ প্রত্যেকেই এক সমকোণ।

$\therefore$ ACDE ক্ষেত্রটির বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলি সমকোণ বলিয়া, ACDE ক্ষেত্রটি AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র।

এখন, বর্গক্ষেত্র BK + বর্গক্ষেত্র EH + $\triangle ABC + \triangle AEF$

= বর্গক্ষেত্র AD + $\triangle EDG + \triangle CKD$

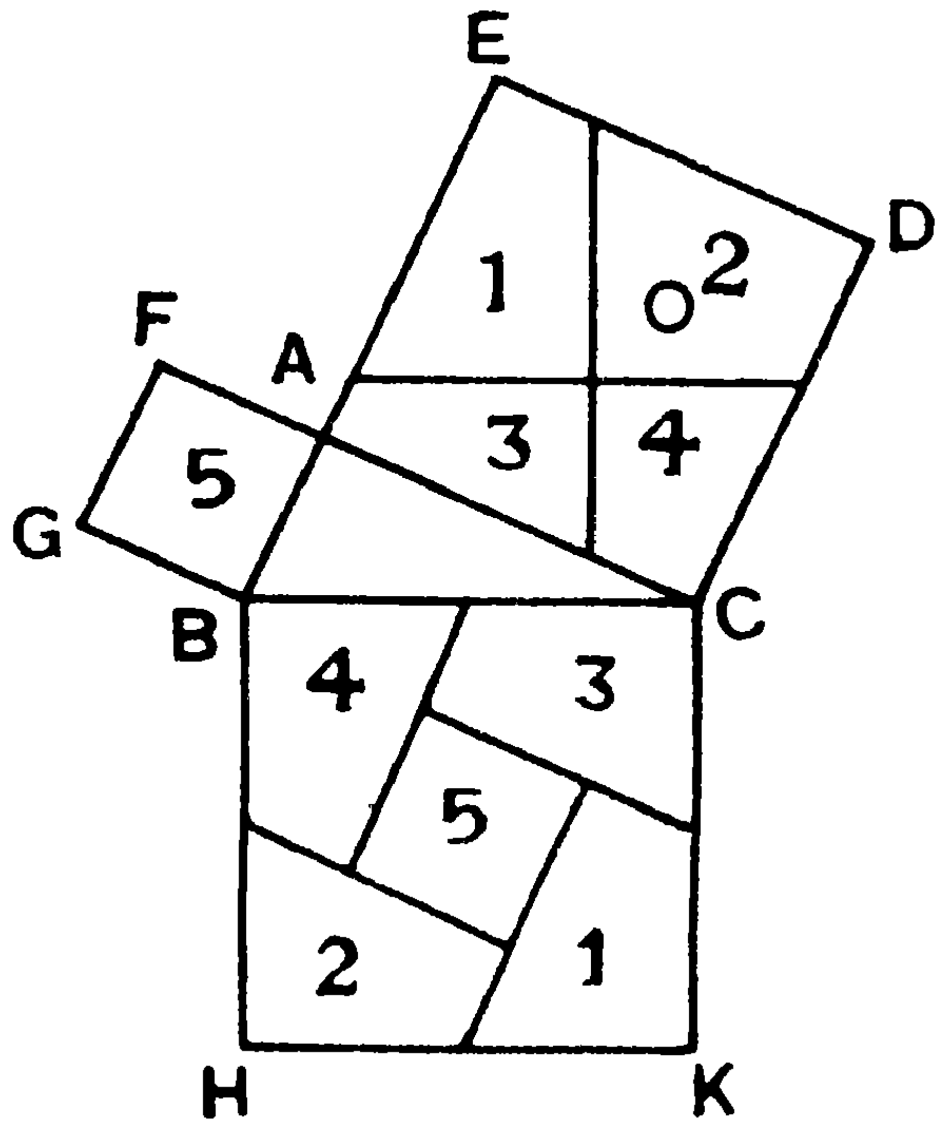
$\therefore$ বর্গক্ষেত্র BK + বর্গক্ষেত্র EH = বর্গক্ষেত্র AD;

অর্থাৎ AC অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AB ও BC বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

দ্রষ্টব্য। ছক-কাগজের উপর চিত্রটি অঙ্কিত করিয়া BK, EH এবং AD বর্গক্ষেত্র সমূহের অন্তর্ভূত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা করিয়া দেখিলেও বুঝিতে পারিবে যে, AD এর অন্তর্ভূত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির

সংখ্যা BK ও EH এর অন্তর্ভূর্ত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যার সমষ্টির সমান। গণনাস্থলে মনে রাখিতে হইবে যে, যেসকল ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সম্পূর্ণরূপে অন্তর্ভূত, অথবা যাহাদের অর্ধেক বা অর্ধাধিক অংশ উহাদের অন্তর্ভূত তাহাদিগকে এক একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র ধরিবে। যেগুলির অর্ধেকের কম অংশ উহাদের অন্তর্ভূর্ত সেগুলিকে ধরিবে না।

পরীক্ষালব্ধ প্রমাণ—মনে কর BAC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহু অপেক্ষা AC বাহু বৃহত্তর।



AB, BC ও CA এর উপর যথাক্রমে ABGF, BCKH ও CAED বর্গক্ষেত্র আঁক। মনে কর AD ও CE কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিল। O বিন্দু হইতে BCএর সমান্তরাল ও লম্ব দুইটি রেখা টানিয়া CAED বর্গক্ষেত্রটিকে সমান চারটি চতুর্ভুজে বিভক্ত কর। চিত্রে উহাদিগকে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত করা হইল।

আবার, BH ও CK এর মধ্যবিন্দু হইতে AC এর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরলরেখা এবং BC ও HK এর মধ্যবিন্দু হইতে AB এর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরলরেখা টান।

এইরূপে BK বর্গক্ষেত্রটি পাঁচ অংশে বিভক্ত করা হইল। উহার 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত অংশগুলি যথাক্রমে AD এর 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত অংশগুলির সহিত সর্বতোভাবে সমান এবং 5 চিহ্নিত অংশটি AG বর্গক্ষেত্রের সমান। ইহাকে পেরিগলের বিশ্লেষণ (Perigal's dissection) বলে।

অনুশীলনী

১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের—

(*i*) বাহু দুইটি ৫″ ও ১২″। উহার অতিভুজ কত ?

(*ii*) বাহু দুইটি ৩ সে. মি. এবং ৪ সে. মি.। উহার অতিভুজ কত ?

(*iii*) অতিভুজ ৭৮″ এবং একবাহু ৩০″ ; অন্য বাহুটি কত ?

[উঃ—(*i*) ১৩″ ; (*ii*) ৫ সে. মি. ; (*iii*) ৭২″]

২। একটি আযতের সন্নিহিত বাহু দুইটি ১৮′ ও ৫′ হইলে, উহার কর্ণের পরিমাণ কত ? [উঃ—১৮·৭ ফুট (স্থূলত)]

৩। কোন আয়তের কর্ণ ২৫ ফুট ও এক বাহু ৭ ফুট। উহার ক্ষেত্রফল কত ? [উঃ—১৬৮ বর্গফুট]

৪। একখানি মই দেওয়ালে সংলগ্ন আছে। মইয়ের অগ্রভাগটি ভূমি হইতে ২৪ ফুট উচ্চে এবং অপর দিক্ দেওয়াল হইতে ৭ ফুট দূরে ভূমিতে অবস্থিত থাকিলে, মইখানা কত ফুট লম্বা ? [উঃ—২৫ ফুট]

৫। ৫০ ফুট লম্বা একখানা সিঁড়ি এরূপভাবে স্থাপিত হইয়াছে যে, উহার অগ্রভাগ রাস্তার একপার্শ্বের ৪৮ ফুট উচ্চ একটি জানালায় পৌঁছে এবং ঘুরাইয়া অপর পার্শ্বের ১৪ ফুট উচ্চ স্থানে পৌঁছে। রাস্তাটির বিস্তার কত নির্ণয় কর। [উঃ—৬২ ফুট]

৬। এক ব্যক্তি প্রথম ২৫ মাইল পশ্চিমে, তৎপর ৬০ মাইল উত্তরে এবং তথা হইতে আবার পূর্বদিকে ৮০ মাইল গেল। এখন আবার ঐ ব্যক্তি ১২ মাইল দক্ষিণদিকে গেলে, তাহার যাত্রাস্থান হইতে এখন সে কতদূরে আছে ? [উঃ—৭৩ মাইল]

৭। ২০ হাত দূরে অবস্থিত দুইটি বৃক্ষের উচ্চতা যথাক্রমে ৬০ ও ৮০ ফুট। উহাদের অগ্রভাগের দূরত্ব কত? [উঃ—৩৬ ফুট (স্থূলত)]

৮। কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রটি ঐ বর্গক্ষেত্রটির দ্বিগুণ হইবে।

৯। সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ উহার উন্নতির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণের সমান।

১০। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

১১। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

পিথাগোরাসের নিয়ম—পিথাগোরাস কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের পরিমাণ তিনটি মূলদ (rational) সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করিবার নিম্নলিখিত সূত্রটি (formula) দিয়াছেন :—

কোণ সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু $a=2n+1$ হইলে, b ও c অপর বাহুদ্বয় যথাক্রমে $b=\dfrac{(2n+1)^2-1}{2}$ এবং $c=\dfrac{(2n+1)^2+1}{2}$ হইবে।

অর্থাৎ একটি অযুগ্ম (odd) সংখ্যা লইয়া উহার বর্গে এক যোগ ও বিয়োগ কর। লব্ধ সংখ্যা দুইটির অর্ধেক এবং প্রদত্ত অযুগ্ম সংখ্যাটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর আপেক্ষিক পরিমাণ প্রকাশ করিবে।

১ম উদা— ৩ একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\dfrac{৩^২+১}{২}=৫$ এবং $\dfrac{৩^২-১}{২}=৪$। ৩, ৪ ও ৫ সংখ্যা তিনটি কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের পরিমাণ প্রকাশ করে।

২য় উদা— ৫ একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\frac{৫^২+১}{২}=১৩$; $\frac{৫^২-১}{২}=১২$ ।
৫, ১২ ও ১৩ সংখ্যাত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাণ প্রকাশ করে।

৩য় উদা— ৭ একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\frac{৭^২+১}{২}=২৫$; $\frac{৭^২-১}{২}=২৪$ ।
৭, ২৪ ও ২৫ একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাণ নির্দেশ করে।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল—ত্রিভুজের বাহু তিনটি দেওয়া থাকিলে এই উপপাদ্যের সাহায্যে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

ABC ত্রিভুজের $AB=17''$, $BC=20''$ এবং $AC=13''$ । A বিন্দু হইতে BC এর উপর AD লম্ব টান। মনে কর $BD=x$ ইঞ্চি ;

$\therefore$ $CD=(20-x)$ ইঞ্চি।

এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজের—

$$AB^2=AD^2+BD^2 \qquad \cdots \quad \cdots \quad (১)$$

আবার, ACD ত্রিভুজে, $AC^2=AD^2+CD^2 \cdots \quad \cdots \quad (২)$

$\therefore$ (১) হইতে (২) বিয়োগ করিয়া—

$$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2,$$

অথবা, $17^2-13^2=x^2-(20-x)^2$

ইহা হইতে সহজেই পাওয়া যায়—

$$40x=520\ ; \qquad \therefore \quad x=BD=13''.$$

$\therefore \quad AD^2=AB^2-BD^2=17^2-13^2=120.$

অর্থাৎ উন্নতি $AD=\sqrt{120}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

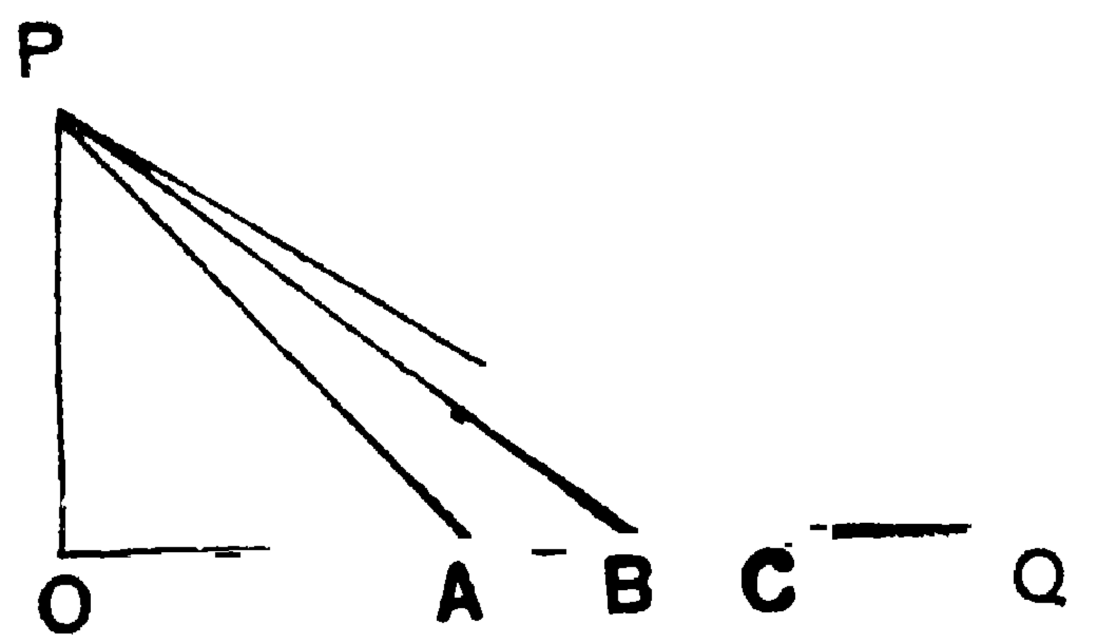
$=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উন্নতি

$=\frac{1}{2}\times 20\times\sqrt{120}$ বর্গ ইঞ্চি।

$=109$ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)।

একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুর্গুণ, ইত্যাদি ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন—

OP ও OQ দুইটি পরস্পর-লম্ব সরল রেখার উপর যথাক্রমে P ও A বিন্দু লও যেন, OP = OA = একক (unit)। PA যোগ কর।



এখন, $\angle POQ$ = এক সমকোণ।

স্থতরাং $PA^2 = OP^2 + OA^2$ [৩০শ উপঃ]

$= 1 + 1 = 2. \quad \therefore \quad PA = \sqrt{2}.$

আবার, OQ হইতে PA এর সমান করিয়া OB অংশ লও।

এখন, $PB^2 = OP^2 + OB^2 = 1 + 2 = 3. \quad \therefore \quad PB = \sqrt{3}.$

OQ হইতে PBএর সমান OC অংশ লও। এইরূপে $PC^2 = 4$ হইবে।

স্থতরাং $PA^2 = 2OA^2$, $PB^2 = 3OA^2$, $PC^2 = 4OA^2$, ইত্যাদি। ইহা হইতে $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ ইত্যাদির স্থূলমান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

৩১শ উপপাদ্য—(ইউ—১।৪৮)

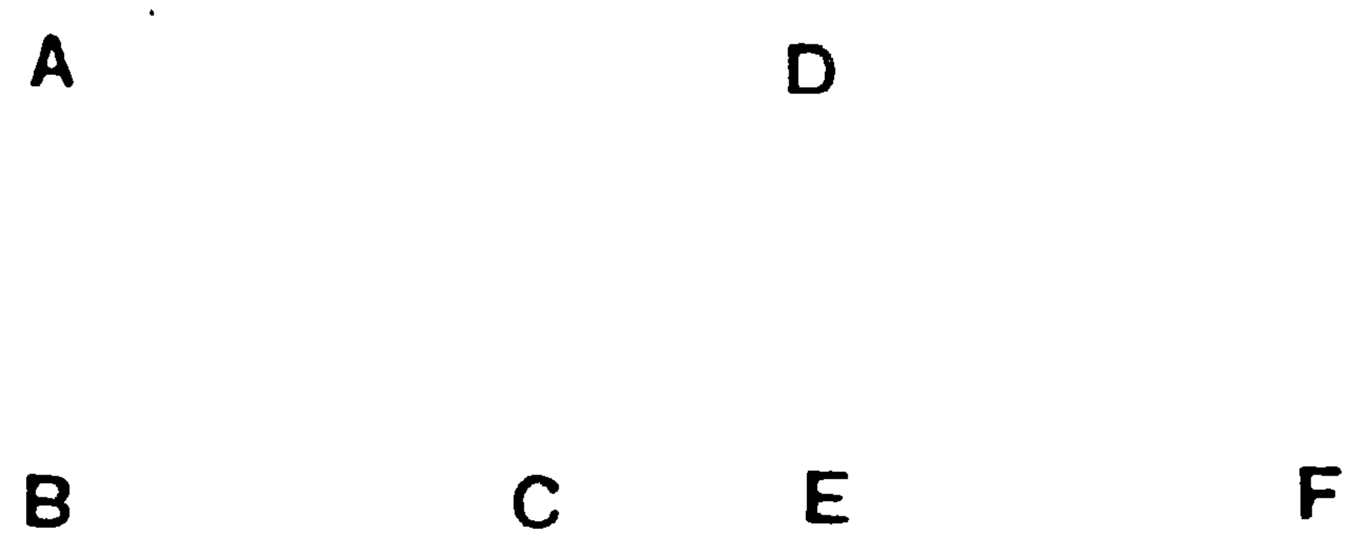
(এই উপপাদ্যটি ৩০শ উপপাদ্যের বিপরীত)

সাঃ নিঃ—যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়, তবে এই দুই বাহুর অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ত্রিভুজের AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র BC ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC কোণ একটি সমকোণ।

BC এর সমান করিয়া EF রেখা টান। E বিন্দু হইতে EF এর উপর ED লম্ব আঁক এবং BA এর সমান করিয়া ED অংশ কাটিয়া লও।



FD যোগ কর।

প্রমাণ— BC = EF ∴ $BC^2 = EF^2$;

এবং AB = ED ∴ $AB^2 = ED^2$.

আবার, DEF একটি সমকোণ বলিয়া,—

DF এর বর্গক্ষেত্র = EF ও DE এর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি [৩০শ উপঃ]

= BC ও AB এর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি

= AC এর বর্গক্ষেত্র। [কল্পনা।]

∴ DF = AC.

এখন, ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের—

BC = EF, BA = ED এবং AC = DF ;

স্নুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। [১৪শ উপঃ]

∴ ∠ABC = ∠DEF = এক সমকোণ।

[ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A কোণটি সমকোণ। প্রমাণ কর যে, $BC^2 = 2AB^2$.

যদি BA = CA = ৩″ হয়, তবে BC এর স্থূল পরিমাণ ইঞ্চিতে নির্ণয় কর। [উঃ— BC = ৪·৩″ (স্থূলত)।]

২। ১০″ পরিমাণ কর্ণ-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিয়া উহার বাহুর পরিমাণ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৭″, ৫০ বর্গইঞ্চি (স্থূলত)।]

৩। ABC ত্রিভুজের $BC = m^2 - n^2$, $CA = 2mn$ এবং $AB = m^2 + n^2$. বীজগণিতীয় নিয়মে দেখাও যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$; স্নুতরাং C কোণটি সমকোণ।

৪। ABC ত্রিভুজের CA বাহু ১৮″, AB বাহু ২৭″, এবং BC বাহু ৪০″। BC বাহুর উপর AD লম্বের পরিমাণ কত নির্ণয় কর। [উঃ—১০·৪″]

৫। একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে ১৭ সে.মি., ২৮ সে.মি. ও ৩৬ সে.মি.। উহার ক্ষেত্রফল কত বাহির কর। [উঃ—৩৭৪ বর্গ সে.মি. স্থূলত]

৬। ABC সমকোণী ত্রিভুজের C কোণটি সমকোণ এবং $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. AB বাহুর উপর লম্ব $CD = p$ হইলে, প্রমাণ কর যে—

$$pc = ab \text{ এবং } \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

৭। ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ O বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OD, OE ও OF লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে,

$$AE^2+CD^2+BF^2=AF^2+BD^2+CE^2.$$

৮। ABC ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ। AB ও AC বাহুদ্বয় PQ রেখাদ্বারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছিন্ন হইয়াছে। BQ, PC সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে,

$$BQ^2+PC^2=BC^2+PQ^2.$$

৯। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির চারগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণের সমান।

১০। ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অন্তর তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

বিবিধ অনুশীলনী

১। নিম্নলিখিত পরিমাণের বাহু-বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর— (*i*) ১০″, ১৩″, ১৪″।

(*ii*) ১৩ সে.মি., ২৫ সে.মি., ২৭ সে.মি.।

[উঃ—(*i*) ৬২·৪ বর্গ ইঞ্চি ; (*ii*) ৫০ বর্গ সে.মি. (স্থূলত)]

২। নিম্নের ত্রিভুজ দুইটির কোন্‌টি সমকোণী নির্ণয় কর—

(*i*) AB = ১৪″. ; BC = ৪৮″, CA = ৫০″।

(*ii*) AB = ৪০″, BC = ১০″, CA = ৪১″।

[উঃ—প্রথমটি সমকোণী।]

৩। দুইটি বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিয়া দেখাও।

৪। $\sqrt{}$১২ ইঞ্চি দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের—

(*i*) ভূমি = ৬″, বাহু = ১০″ হইলে, উহার উন্নতি কত ?

(*ii*) বাহু = ৯″, উন্নতি = ৫″ হইলে, উহার ভূমি কত ?

(*iii*) ভূমি = ১২″, উন্নতি = ৬″ হইলে, উহার বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উঃ—(*i*) ৯·৫″ ; (*ii*) ১৫″ (স্থূলত) ; (*iii*) ৮·৫″ ইঞ্চি, ৩৬ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)।]

৬। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ১২″ হইলে উহার উন্নতি ও ক্ষেত্রফল কত ? [উঃ— ১০·৪ ইঞ্চি ও ৬২·৪ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)।]

৭। বর্গক্ষেত্রের মধ্যবিন্দু হইতে সমকোণ করিয়া দুইটি সরলরেখা বর্গক্ষেত্রের বাহু পর্যন্ত টানিলে চারটি সর্বতোভাবে সমান চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়।

৮। কোন চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ পরস্পর-লম্ব হইলে, উহার বিপরীত দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়।

৯। একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

১০। নিম্নলিখিত উপাও (data) হইতে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর :— AB = ৩·৩″, BC = ৪·১″, CA = ৩·৭″। BC এর উপর AD লম্ব আঁকিয়া, BD এর পরিমাণ নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে AD এর দৈর্ঘ্য ও ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উঃ—BD = ২″, AD = ৩″, ক্ষেত্রফল ৬·৪ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

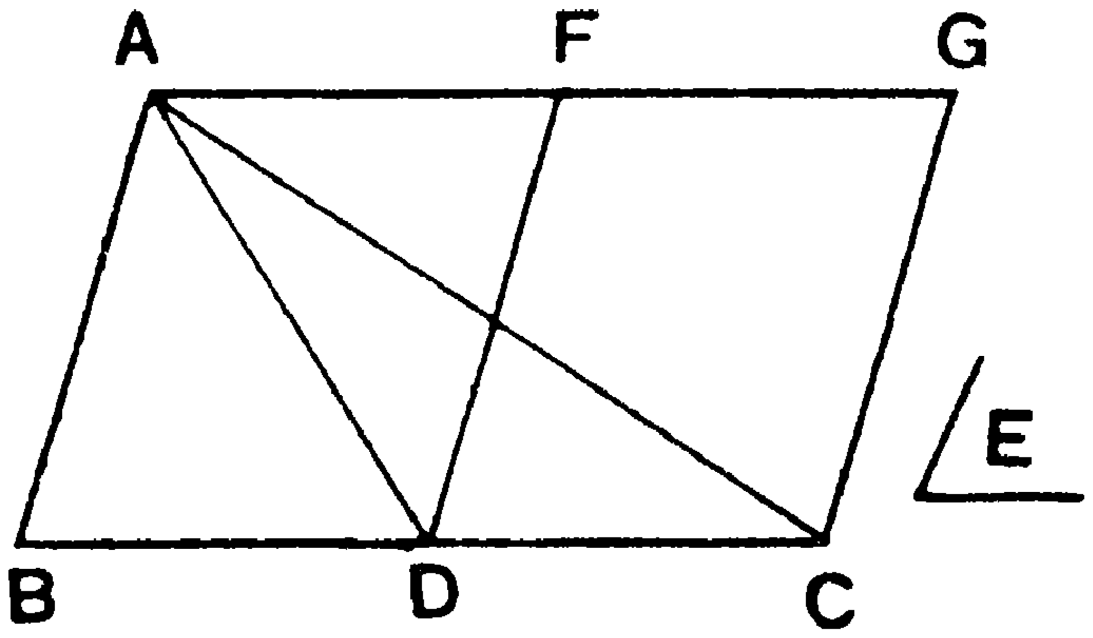
ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

(Problems relating to Areas)

১৬শ সম্পাদ্য—(ইউ – ১।৪২)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং E একটি নির্দিষ্ট কোণ। ABC ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এবং ∠E এর সমান একটি কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে।



অঙ্কন—BC বাহুকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর এবং D বিন্দুতে ∠E এর সমান করিয়া ∠CDF আঁক। C বিন্দু হইতে DFএর সমান্তরাল CG রেখা টান। A বিন্দু হইতে BCএর সমান্তরাল AFG রেখা টান। মনে কর AG রেখা DF ও CG রেখাকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন DFGC ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ— AD যোগ কর।

BD = DC ; ∴ △ABD = △ADC. [২৭শ উপঃ, ১ম অনুঃ]

সুতরাং △ABC = 2△ADC.

কিন্তু DFGC সামান্তরিক = 2△ADC [২৮ উপঃ, অনুঃ]

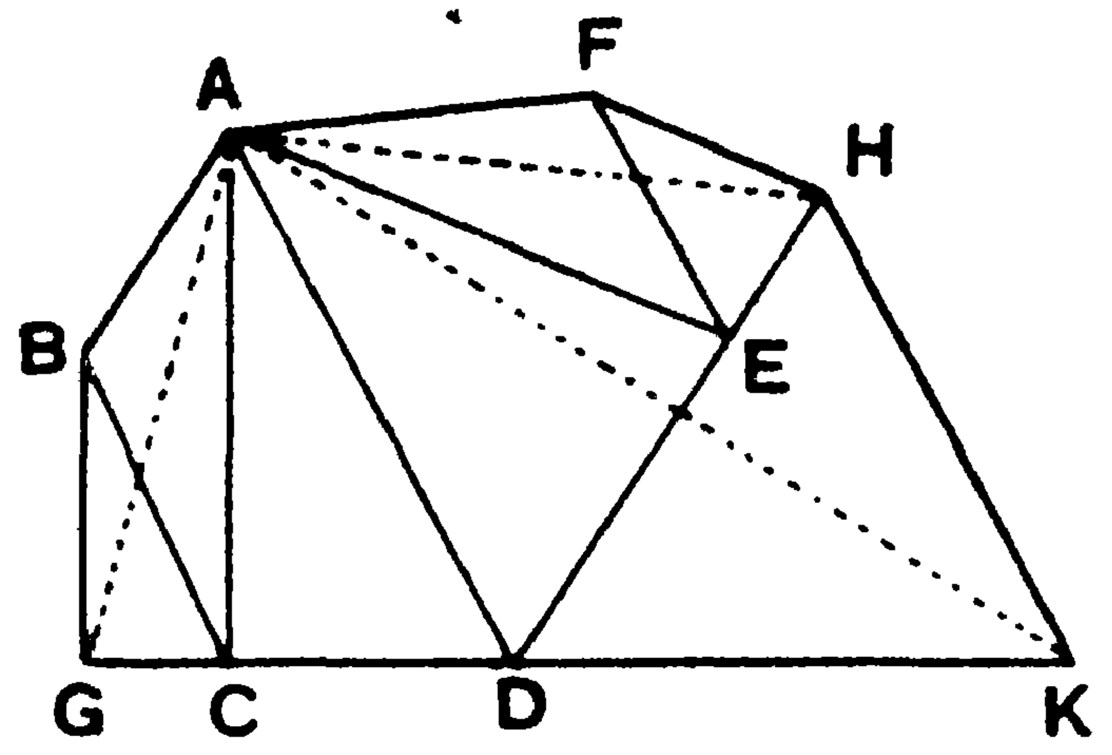
∴ DFGC সামান্তরিক = △ABC,

এবং ইহার ∠CDF = ∠E. [**ই. উ. বি.**]

১৭শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—কোন বহুভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABCDEF একটি বহুভুজ। ইহার সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।



অঙ্কন— AC, AD, AE যোগ কর।

B বিন্দু হইতে ACএর সমান্তরাল BG রেখা টান। মনে কর ইহা বর্ধিত DC বাহুকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

F বিন্দু হইতে AEএর সমান্তরাল FH রেখা টান যেন, উহা বর্ধিত DE বাহুকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। H বিন্দু হইতে AD এর সমান্তরাল HK রেখা টান যেন, উহা বর্ধিত CD বাহুকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। AG ও AK যোগ কর।

এখন AGK ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ— AH যোগ কর।

AC, BG এর সমান্তরাল ; $\therefore$ $\triangle AGC = \triangle ABC$.

আবার, AE, FH এর সমান্তরাল ; $\therefore$ $\triangle AHE = \triangle AFE$.

এবং AD, HK এর সমান্তরাল, $\therefore$ $\triangle ADK = \triangle AHD$.

$\therefore \quad \triangle AGK = \triangle AGC + \triangle ACD + \triangle ADK$

$= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle AHD$

$= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AFE$

$=$ ABCDEF বহুভুজ।

[ই. উ. বি.]

অনু—কোন নির্দিষ্ট বহুভুজ ক্ষেত্রের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে।

১৭শ সম্পাদ্য অনুসারে বহুভুজটির সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া ১৬শ সম্পাদ্য অনুসারে এই ত্রিভুজটির সমান এবং নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর। এই সামান্তরিকই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।

অনুশীলনী

১। একটি ট্রাপিজিয়মের সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। একটি শীর্ষবিন্দু হইতে কয়েকটি রেখা টানিয়া কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজকে কয়েকটি সমান অংশে বিভক্ত কর।

৩। দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৪। দুইটি বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৫। ABCD চতুর্ভুজের AB = ১·২″ BC = ১·১″, CD = ১·৭″, DA = ·৮″, BD = ১·৭″। উহার সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার ভূমি ও উন্নতি হইতে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ——১·৩ বর্গ ইঞ্চি]

৬। ABCD একটি চতুর্ভুজের AB = BC = ৫·৫″; CD = DA = ৪·৫″; A কোণ = ৭৫°। উহার সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার ভূমি ও উন্নতি হইতে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল বাহির কর। [উঃ—২৩·৯ ব. ই.]

৭। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি ত্রিভুজের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক।

৮। কোন আয়তের একটি বাহুর উপর উহার সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

৯। একটি আয়তের সমান একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

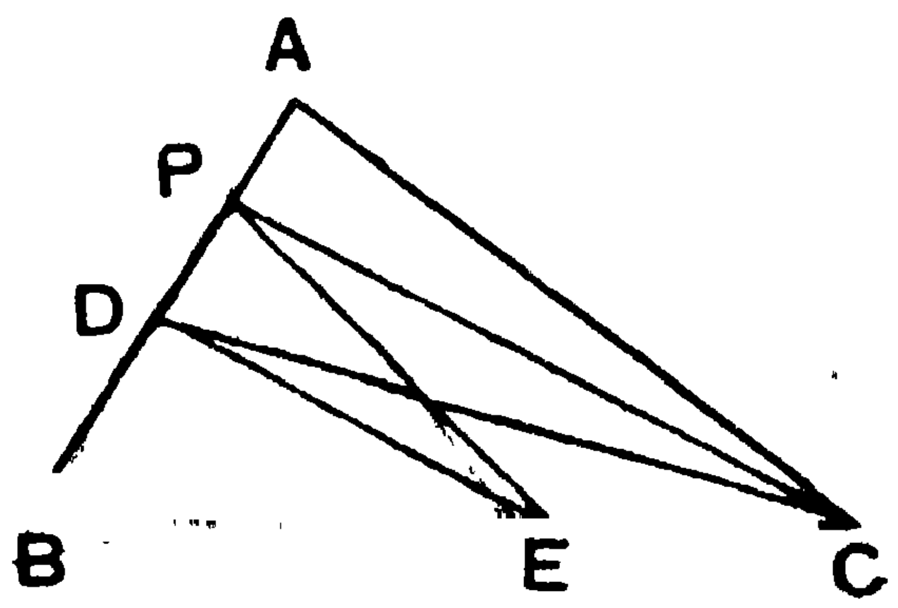
১০। নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং উহার একটি কোণের সমান একটি ভূমি-সংলগ্ন কোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজ আঁক।

১১। একটি ত্রিভুজের সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন, উহার পরিসীমা ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান হয়।

বিবিধ সমাধান

১। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

মনে কর ABC ত্রিভুজের AB বাহুর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ABC ত্রিভুজটিকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।



অঙ্কন—AB বাহুকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। PC ও DC যোগ কর। D বিন্দু হইতে PCএর সমান্তরাল DE রেখা BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। PE যোগ করিলে PE রেখাদ্বারাই ABC ত্রিভুজটি দ্বিখণ্ডিত হইবে।

কারণ, $\triangle DPE = \triangle DEC$;

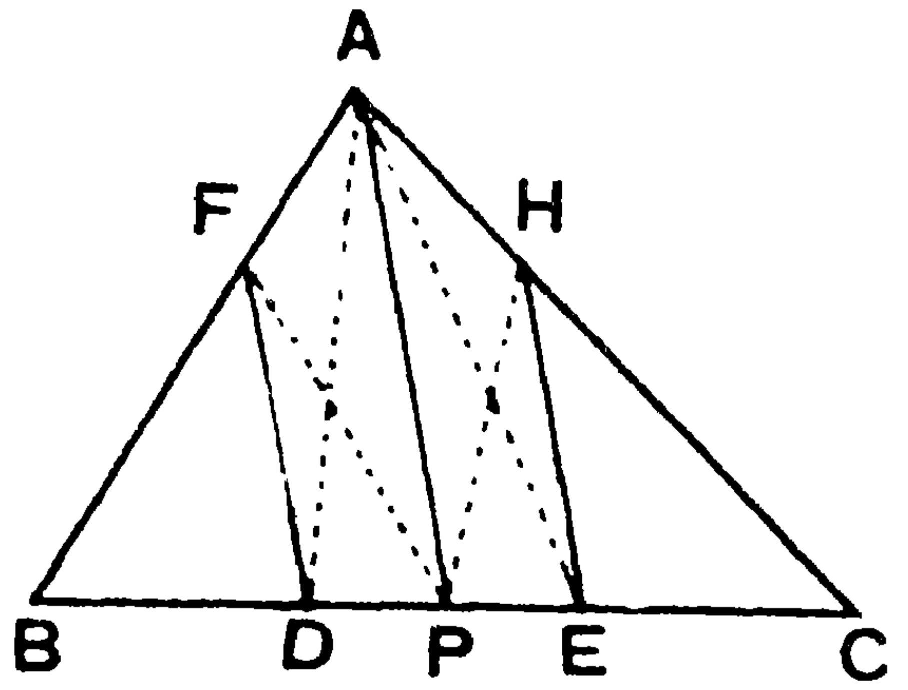
সুতরাং $\triangle BPE = \triangle BDE + \triangle DPE$

$= \triangle BDE + \triangle DEC = \triangle BDC = \frac{1}{2} \triangle ABC.$

২। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন—BC বাহুকে D ও E বিন্দুতে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর। AP যোগ কর। D ও E বিন্দু হইতে APএর সমান্তরাল যথাক্রমে DF ও EH রেখা টান। এখন, PF ও PH যোগ করিলে ত্রিভুজটি সমান তিন অংশে বিভক্ত হইল।



কারণ, $\triangle ABD = \frac{1}{3}\triangle ABC$; কিন্তু $\triangle DFP = \triangle DFA$.

$\therefore \quad \triangle BPF = \triangle BDF + \triangle DFP = \triangle BDF + \triangle DFA$

$= \triangle ABD = \frac{1}{3}\triangle ABC$. [২৭শ উপঃ, ১ম অনু.]

৩। একটি চতুর্ভুজের যে কোন কৌণিক-বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

ABCD একটি চতুর্ভুজের A কৌণিক-বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিয়া চতুর্ভুজটিকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

AC যোগ কর। D বিন্দু হইতে ACএর সমান্তরাল DE রেখা যেন বর্ধিত BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যোগ কর এবং BE রেখাকে G বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর।

AG যোগ করিলে, AG রেখা দ্বারাই চতুর্ভুজটি দ্বিখণ্ডিত হইবে।

কারণ, $\triangle ACD = \triangle ACE$;

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজ $= \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \triangle ABC + \triangle ACE = \triangle ABE$.

$\therefore \quad \triangle AGB = \frac{1}{2}\triangle ABE =$ চতুর্ভুজের অর্ধেক।

(ছাত্রগণ চিত্রটি আঁকিয়া লইবে।)

বিবিধ অনুশীলনী

১। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট উন্নতি-বিশিষ্ট অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

২। ABCD চতুর্ভুজের সমান এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন, উহার ভূমি AD রেখার সহিত একই রেখায় অবস্থিত হয় এবং শিরঃকোণ CD বাহুর কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে পড়ে।

৩। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, এক অংশের উপর বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

৪। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া কি প্রকারে একটি সামান্তরিককে দ্বিখণ্ডিত করা যায় দেখাও।

৫। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান একটি বাহু-বিশিষ্ট এবং কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

৬। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটির n-তম অংশ ছেদ কর।

৭। একটি চতুর্ভুজের কোন নির্দিষ্ট কৌণিক-বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া উহার চতুর্থাংশ, পঞ্চমাংশ বা যে-কোন উদ্দিষ্ট অংশ ছেদ কর।

৮। কোন চতুর্ভুজের এক বাহুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরল-রেখা টানিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত কর।

৯। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর ত্রিভুজটির সমান একটি সম-দ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

১০। একটি চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া উহার দ্বিগুণ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

১১। একটি ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অন্য বাহুদ্বয়ের (১) সমষ্টি; (২) অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

তৃতীয় অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

বৃত্তের ধর্ম (Properties of Circles)

বৃত্ত—কোন স্থির বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরে অবস্থিত কোন ভ্রাম্যমাণ বিন্দুর সঞ্চারপথকে (locus) বৃত্ত বলে। স্থির বিন্দুটি উহার কেন্দ্র (centre), এবং সঞ্চারপথের সূচক রেখাটিকে উহার পরিধি (circumference) বলে।

ব্যাস ও ব্যাসার্ধ—কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ (radius) এবং কেন্দ্র ভেদ করিয়া উভয়দিকে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে উহার ব্যাস (diameter) বলে। ব্যাস ও ব্যাসার্ধগুলি পরস্পর সমান।

অর্ধবৃত্ত—কোন একটি ব্যাস ও তদ্দ্বারা-ছিন্ন পরিধির অংশ-দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে অর্ধবৃত্ত (semi-circle) বলে।

চাপ ও জ্যা—পরিধির কোন দুইটি বিন্দু-যোজক সরলরেখাকে জ্যা (chord) বলে, এবং পরিধির যে-কোন অংশকে চাপ (arc) বলে।

অধিচাপ ও উপচাপ—কোন জ্যা কেন্দ্র ভেদ না করিলে উহা-দ্বারা পরিধিটি দুই অসমান অংশে বিভক্ত হয়। বৃহত্তর অংশটিকে অধিচাপ (major arc) এবং ক্ষুদ্রতরটিকে উপচাপ (minor arc) বলে। একটিকে অপরটির প্রতিযোগী (conjugate) চাপ বলা হয়।

বৃত্তাংশ ও বৃত্তকলা—একটি জ্যা এবং উহা-দ্বারা-ছিন্ন চাপ-দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্তাংশ (segment of a circle) বলে। বৃহত্তর

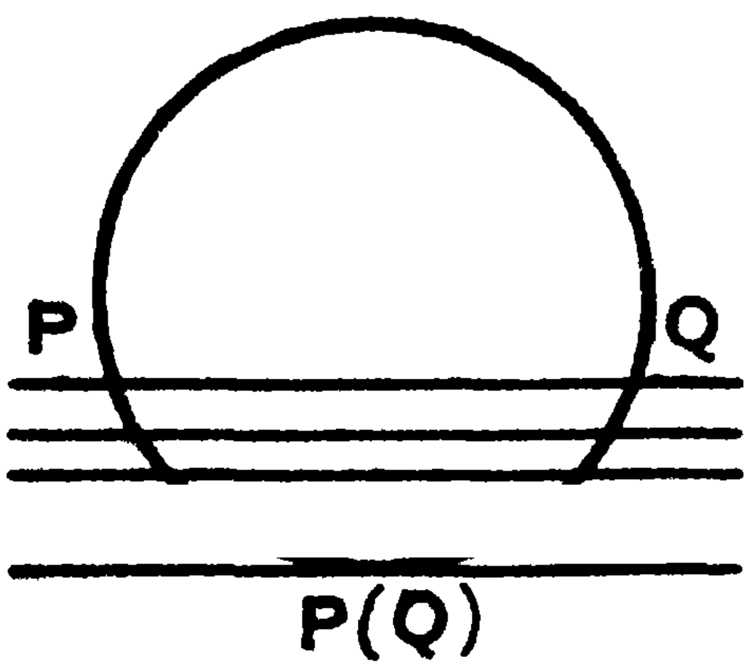
অংশটিকে অধিবৃত্তাংশ এবং ক্ষুদ্রতর অংশটিকে উপবৃত্তাংশ বলা যায়। দুইটি ব্যাসার্ধ এবং তদ্দ্বারা-ছিন্ন চাপ-দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাংশকে বৃত্তকলা (sector) বলে।

এককেন্দ্রীয় বৃত্ত—যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দুতে অবস্থিত তাহাদিগকে এককেন্দ্রীয় (concentric) বৃত্ত বলে।

ছেদক ও স্পর্শক—কোন অসীম সরলরেখা পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে তাহাকে **ছেদক** (secant) বলে।

যদি কোন সরলরেখা কোন বৃত্তকে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে কিন্তু অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে বৃত্তের **স্পর্শক** (tangent) বলে এবং উক্ত বিন্দুকে উহার **স্পর্শ-বিন্দু** (point of contact) বলে।

কোন PQ ছেদককে সর্বদা সমান্তরাল রাখিয়া চালনা করিলে দেখা যায় যে, যে দুইটি P ও Q বিন্দুতে উহা পরিধিকে ছেদ করে তাহারা ক্রমশ পরিধিক্রমে পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইয়া অবশেষে একত্রে মিলিত হয়। এই অবস্থায় ঐ ছেদকটি পরিধির সহিত মাত্র ঐ একটি P(Q) বিন্দুতেই মিলিত হয়, অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। ছেদকের এই অবস্থানেই উহাকে স্পর্শক বলে এবং যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহাকে স্পর্শবিন্দু বলে।



* **টীকা**। মনে রাখিবে যে, স্পর্শকটিও বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতেই ছেদ করে, কিন্তু উহার ছেদ-বিন্দুদ্বয় স্পর্শ-বিন্দুতে একত্র মিলিত হইয়া অবস্থান করে; সেইজন্য ইহা বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে এরূপ বলা হয়।

বৃত্তের সাধারণ ধর্ম—উপরি উক্ত সংজ্ঞাগুলি হইতে বৃত্তের সাধারণ ধর্ম সম্বন্ধে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায় ঃ—

১। কেন্দ্র হইতে পরিধির বহিঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ হইতে বৃহত্তর ; কিন্তু উহার অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ হইতে ক্ষুদ্রতর। পক্ষান্তরে, কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ হইতে বৃহত্তর হইলে, উহা পরিধির বহিঃস্থ এবং ক্ষুদ্রতর হইলে উহা পরিধির অন্তঃস্থ হইবে। বাস্তবিক পক্ষে, মনে করা যাইতে পারে যে, কোন বৃত্তের পরিধি-দ্বারা সমতলের বিন্দুগুলি তিন শ্রেণীতে বিভক্ত হয়। কতগুলি বৃত্তের **অন্তঃস্থ**, কতগুলি **সীমাস্থ** এবং কতগুলি **বহিঃস্থ**। সুতরাং কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান বা তদপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইলে, বিন্দুটি সীমাস্থ, বহিঃস্থ, বা অন্তঃস্থ হইবে। বিপরীতক্রমেও এইরূপ হয়।

২। কোন সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে এক বিন্দুতে ছেদ করিলে, উহা বর্ধিত হইয়া পরিধিকে আরও একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৩। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমান হইলে উহারা সর্বতোভাবে সমান হইবে। কারণ, একটির কেন্দ্র আর একটির কেন্দ্রের উপর স্থাপন করিলে উহাদের পরিধিও পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

৪। দুইটি বৃত্তের পরিধি এক বিন্দুতে ছেদ করিলে, উহারা আর একটি বিন্দুতেও ছেদ করিবে। এরূপ দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয় হইতে পারে না। এককেন্দ্রীয় হইলে বৃত্ত দুইটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

৫। এককেন্দ্রীয় বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ সমান হইলে উহারা পরস্পর মিলিয়া যাইবে, কিন্তু অসমান হইলে, তাহারা মিলিতেও পারে না কিম্বা পরস্পর ছেদও করে না। কারণ, কেন্দ্র হইতে ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির পরিধিস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব বৃহত্তরটির ব্যাসার্ধ হইতে ক্ষুদ্রতর।

প্রতিসাম্য (symmetry)—যদি কোন জ্যামিতিক ক্ষেত্রকে কোন সরলরেখাক্রমে ভাঁজ করিলে এক পার্শ্বের সম্পূর্ণ অংশ অপর পার্শ্বের সম্পূর্ণ অংশের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে উক্ত "ক্ষেত্র ঐ রেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম" এরূপ বলা হয়; এবং রেখাটিকে ক্ষেত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ, অক্ষরেখা (axis of symmetry) বা মেরুদণ্ড বলা যাইতে পারে।

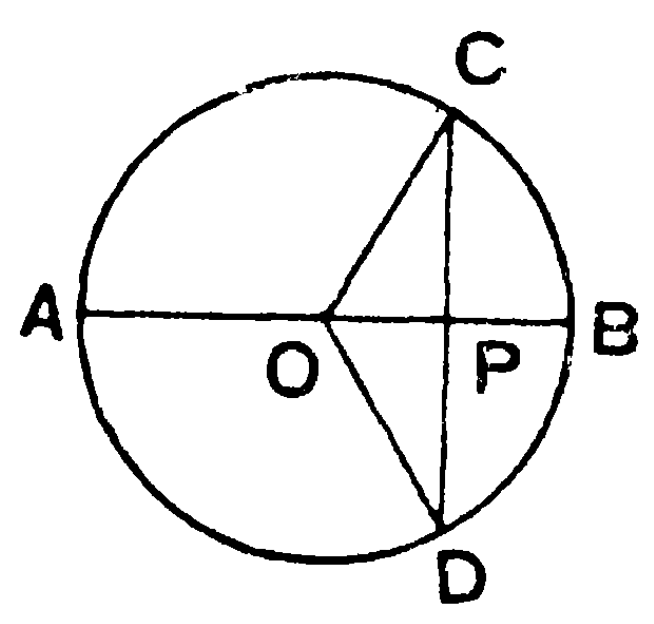
এই সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, প্রতিসম ক্ষেত্রদ্বয়ের অংশগুলি আকারে প্রকারে সমান এবং অক্ষের তুলনায় তুল্যরূপে অবস্থিত হওয়া আবশ্যক এবং একটি আর একটির প্রতিরূপ আকৃতি-বিশিষ্ট হইবে।

দুইটি প্রতিসম ক্ষেত্রের P ও Q দুইটি অনুরূপ বিন্দু হইলে, PQ রেখা প্রতিসাম্য-অক্ষ-দ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হইবে। সুতরাং অক্ষরেখার যে-কোন বিন্দু হইতে P ও তাহার প্রতিরূপ Q বিন্দুটি সমদূরবর্তী।

উদাহরণ—একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক রেখা-দ্বারা ত্রিভুজটি দুইটি প্রতিসম ত্রিভুজে বিভক্ত হয়। দ্বিখণ্ডকটি উহাদের প্রতিসাম্য-অক্ষ।

বৃত্তের প্রতিসাম্য-ধর্ম—

১। একটি বৃত্ত উহার কোন ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। মনে কর কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাস AB. পরিধির উপর C একটি বিন্দু লইয়া OC যোগ কর। বৃত্তটিকে AB রেখাক্রমে ভাঁজ করিলে, মনে কর C বিন্দুটি D বিন্দুর উপর পড়িল, অর্থাৎ C বিন্দুর নূতন অবস্থান D. OD যোগ কর। OC ও OD মিলিয়াছে বলিয়া, OC = OD = ব্যাসার্ধ। সুতরাং D বিন্দুটি পরিধির উপর অবস্থিত। এইরূপে দেখা যাইবে যে, ACB চাপের যে-কোন বিন্দু ADB চাপের প্রতিরূপ বিন্দুর উপর পড়িবে;

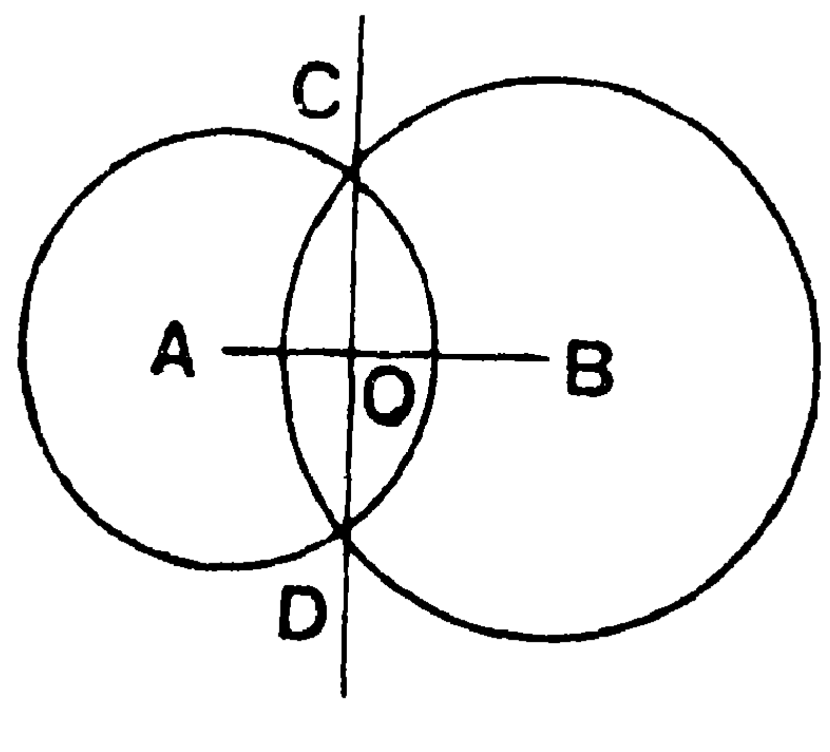


অর্থাৎ পরিধির ACB অংশ ADB অংশের সহিত মিলিয়া যাইবে। সুতরাং বৃত্তটি AB ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম (symmetrical)।

২। দুইটি সমান ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়-যোজক-রেখার মধ্যবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে, বৃত্ত দুইটি এই লম্বের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম-অবস্থায় অবস্থিত এরূপ বলা হয়।

*৩। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর এক বিন্দুতে ছেদ করে, তবে উহারা আর একটি বিন্দুতেও ছেদ করিবে, এবং উহাদের সাধারণ জ্যাটি কেন্দ্র-সংযোজক রেখাদ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

মনে কর A ও B বিন্দু বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র। উহারা C বিন্দুতে ছেদ করিল। C বিন্দু হইতে AB এর উপর CO লম্ব টান এবং COকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, CO = OD. C ও D বিন্দু AB রেখার উভয় পার্শ্বে



প্রতিসম-রূপে অবস্থিত। সুতরাং দুই পরিধির সাধারণ বিন্দু C এর প্রতিরূপ D বিন্দুও উভয় পরিধির সাধারণ বিন্দু হইবে। অতএব CD একটি সাধারণ (common) জ্যা হইবে এবং ইহা AB রেখা-দ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

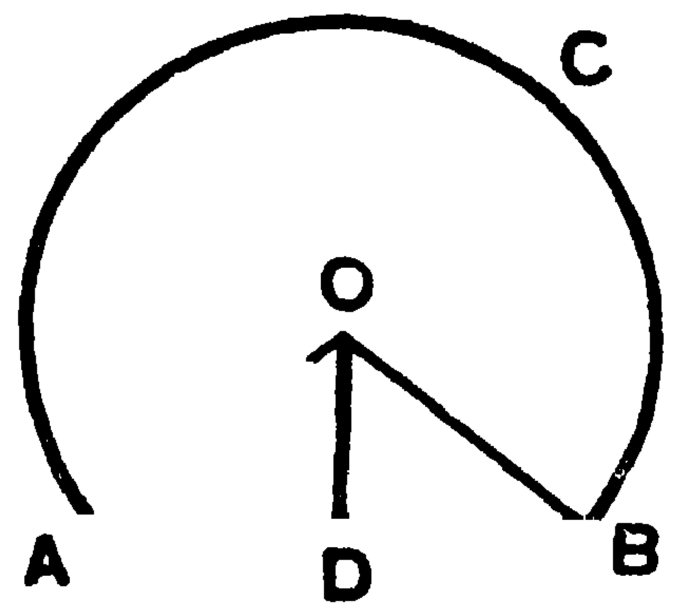
দ্রষ্টব্য। একটি জ্যামিতিক ক্ষেত্র কোন রেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম হইলে উহার এক অর্ধেককে অপর অর্ধেকের বিম্ব (image) বলে।

৩২শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৩)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা কেন্দ্রের বহির্গত কোন জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, উহা এই জ্যাটিকে সমকোণে ছেদ করে। বিপরীতক্রমে, ঐ রেখা উক্ত জ্যাকে সমকোণে ছেদ করিলে উহাকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে অঙ্কিত OD রেখা AB জ্যাটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB জ্যা D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইলে, OD রেখা AB এর উপর লম্ব হইবে। বিপরীতক্রমে, OD রেখা AB এর উপর লম্ব হইলে, AB জ্যাটি D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।



প্রমাণ— OA, OB যোগ কর।

(১) এখন, AOD, BOD দুইটি ত্রিভুজের—

AO = BO = ব্যাসার্ধ,

OD একটি সাধারণ বাহু, এবং AD = DB.

∴ ∠ADO = সন্নিহিত ∠BDO = এক সমকোণ। [১৪শ উপঃ]

∴ OD রেখা AB জ্যা এর উপর লম্ব।

(২) মনে কর, OD রেখা AB জ্যা এর উপর লম্ব।

এখন, AOD ও BOD দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের—

OA অতিভুজ = OB অতিভুজ ; এবং OD একটি সাধারণ বাহু।

∴ AD = BD ; [১৫শ উপঃ]

অর্থাৎ OD রেখা AB জ্যাটিকে দ্বিখণ্ডিত করিল।

[**ই. উ. বি.**]

১ম অনু—যে সরলরেখা কোন জ্যাকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে, তাহা কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

২য় অনু—একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে দুইয়ের অধিক-সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ ৫″। কেন্দ্র হইতে ৩″ দূরে অবস্থিত একটি জ্যা এর দৈর্ঘ্য কত ? [উঃ—৮″।]

২। একটি বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ ১˙৩ সে.মি.। AB জ্যাটির দৈর্ঘ্য ২˙৪ সে.মি.। OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—˙৬ বর্গ সে.মি.।]

৩। P ও Q বিন্দুর দূরত্ব ৬ সে.মি. ; ৫ সে.মি. ব্যাসার্ধ লইয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন, উহা P ও Q বিন্দু দিয়া যায়। কেন্দ্র হইতে PQ জ্যা এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ—৪ সে.মি.।]

৪। দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দু-যোজক রেখা কেন্দ্রগত হইবে।

৫। যে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করে তাহা উহাদের উভয়ের উপর লম্ব হইবে এবং কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

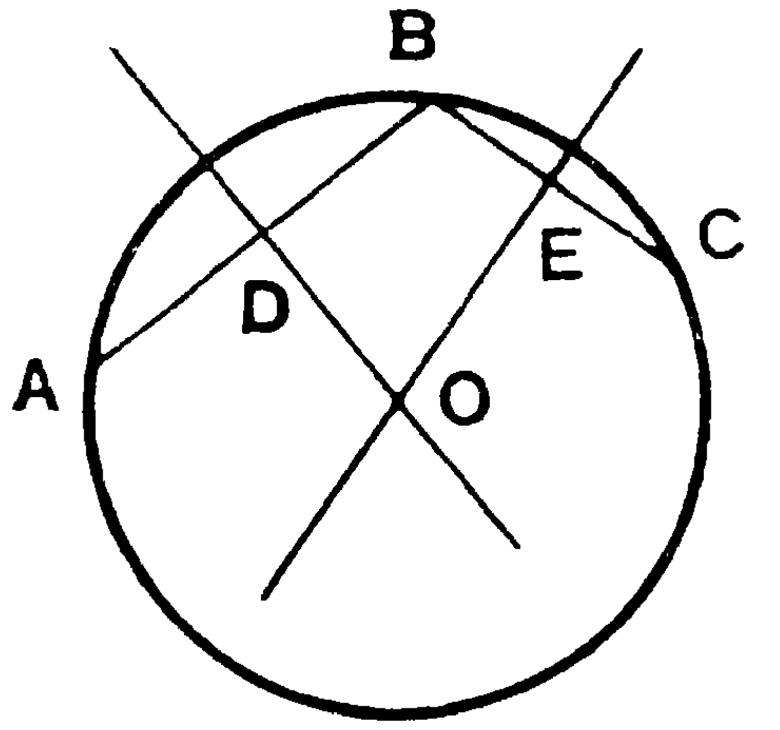
৬। যদি দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দু-যোজক রেখা উহাদের একটির উপর লম্ব হয়, তবে উহা অন্যটির উপরও লম্ব হইবে।

৭। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে, তবে উহাদের সাধারণ জ্যা কেন্দ্র-যোজক রেখাদ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৩৩শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।১০)

সাঃ নিঃ—যদি তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত না হয়, তবে ঐ তিনটি বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, A, B ও C তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B ও C বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্তই আঁকা যাইতে পারে।



প্রমাণ— AB ও BC যোগ কর। মনে কর DO ও EO রেখা দুইটি যথাক্রমে AB ও BC রেখাদ্বয়কে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। AB ও BC একই রেখায় অবস্থিত নয় বলিয়া, DO ও EO রেখাদ্বয় সমান্তরাল নয়। সুতরাং উহারা একই O বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এখন, DO রেখা AB কে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। সুতরাং DO রেখার সকল বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী। এইরূপ, EO রেখার সকল বিন্দুই B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং DO ও EO রেখার সাধারণ O বিন্দুটি A, B ও C বিন্দুত্রয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

এখন, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া কোন বৃত্ত আঁকিলে উহা A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। এবং এই একমাত্র বৃত্তই A, B ও C তিনটি বিন্দু দিয়া অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। (যদি করে তবে তাহারা সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে)

২য় অনু—বৃত্তের তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট হইলে বৃত্তটিও নির্দিষ্ট হইবে।

৩য় অনু—দুইটি বিভিন্ন বৃত্তের কোন সাধারণ চাপ থাকিতে পারে না। সাধারণ চাপ থাকিলে বৃত্ত দুইটি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

অনুশীলনী

১। A ও B দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহারা C ও D বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিযাছে। উভয়ের সাধারণ জ্যা এর মধ্যবিন্দু E। প্রমাণ কর যে, AE ও BE একই সরলরেখায় অবস্থিত।

২। কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

৩। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যে সকল বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। একটি সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় (concentric) বৃত্তকে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, বৃত্ত দুইটি-দ্বারা উক্ত রেখার ছিন্ন অংশদ্বয় পরস্পর সমান।

৫। একটি বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা। প্রমান কর যে, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৬। বৃত্তের ব্যাস ব্যতীত অন্য কোন দুইটি জ্যা পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না।

৭। ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, ABO, BCO, CDO এবং DAO ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র চতুষ্টয় কোন সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

৩৪শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৯)

সাঃ নিঃ—যদি বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত দুইয়ের অধিক সমান সরলরেখা টানিতে পারা যায়, তবে উক্ত বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

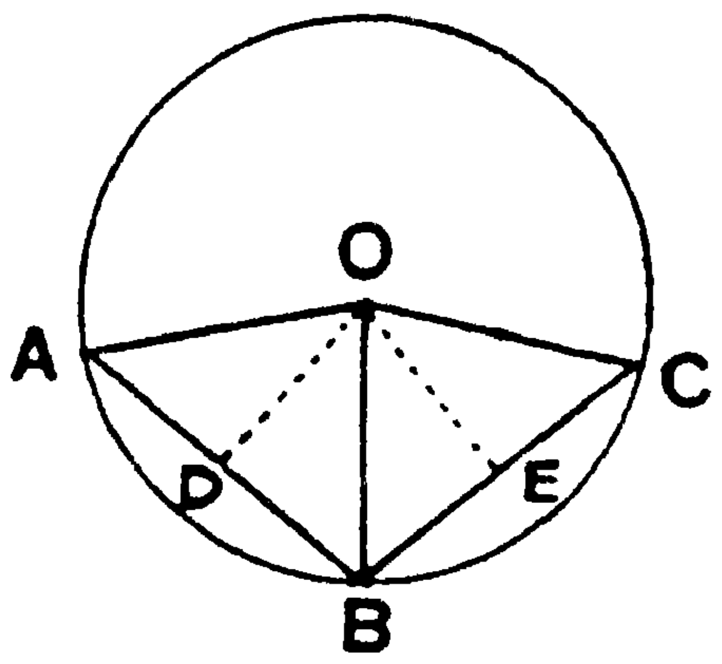
বিঃ নিঃ—মনে কর ABC বৃত্তের অন্তঃস্থ O বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত OA, OB ও OC সরলরেখা তিনটি পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

AB, BC যোগ কর।

মনে কর, AB ও BC জ্যা এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

OD, OE যোগ কর।



প্রমাণ— AOD ও BOD দুইটি ত্রিভুজের—

OA = OB, AD = DB,

DO উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

∴ ∠ADO = সন্নিহিত ∠BDO = এক সমকোণ। [১৪শ উপঃ]

সুতরাং DO রেখা AB জ্যাটিকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিল এবং উহা বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে। [৩২শ উপঃ, ১ম অনু.]

এই প্রকারে, EO রেখাও বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে। সুতরাং DO ও EO রেখার সাধারণ O বিন্দুই বৃত্তটির কেন্দ্র হইবে।

[**ই. উ. বি.**]

অনু—একটি বৃত্তের কেবল মাত্র একটি কেন্দ্র আছে।

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তের ব্যাস ১৩" এবং ইহার দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৫" ও ১২"। প্রমাণ কর যে, উহাদের মধ্যস্থ দূরত্ব ৮.৫" অথবা ৩.৫"।

২। প্রমাণ কর যে, যাবতীয় সামান্তরিকের মধ্যে কেবলমাত্র আয়তক্ষেত্রই কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইতে পারে।

৩। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর বৃত্তের কেন্দ্র-বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দু দিয়া কেন্দ্র-যোজক রেখার সমান্তরাল সরলরেখার পরিধিদ্বারা-সীমাবদ্ধ অংশ কেন্দ্র-যোজক রেখার দ্বিগুণ হইবে।

৫। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে, তবে উহাদের ছেদ-বিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের পরিধি-দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশদ্বয় পরস্পর সমান।

৬। কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে তিন বা তদধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

৭। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা বৃত্তটিকে যথাক্রমে B ও D এবং C ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AB = AC হয়, প্রমাণ কর যে, AD = AE.

৮। কোন বৃত্তের একটি জ্যা PQ ও একটি নির্দিষ্ট ব্যাস RS পরস্পর ছেদ করিল। R ও S বিন্দু হইতে PQ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদা একই হইবে, প্রমাণ কর।

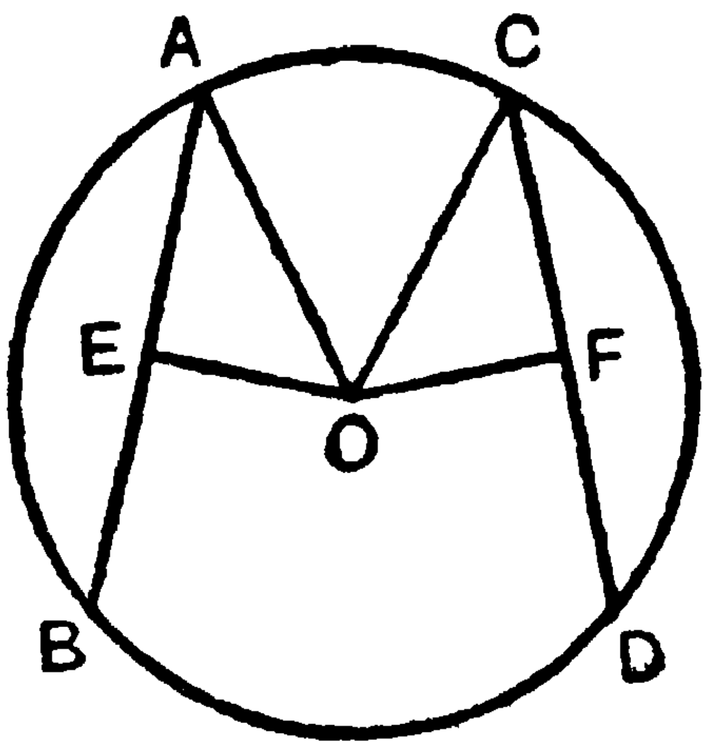
৩৫শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।১৪)

সাঃ নিঃ—বৃত্তেব সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূববর্তী হইবে। বিপবীতক্রমে, যে সকল জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূববর্তী, তাহাবা পবস্পব সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কব, AB ও CD কোন বৃত্তেব দুইটি জ্যা এবং O বিন্দু ঐ বৃত্তেব কেন্দ্র। O বিন্দু হইতে AB ও CD জ্যাএব উপব যথাক্রমে OE ও OF লম্ব অঙ্কিত কব।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে, AB = CD হইলে, AB ও CD জ্যা দুইটি O কেন্দ্র হইতে সমদূববর্তী হইবে, অর্থাৎ OE = OF হইবে।

বিপবীতক্রমে, OE = OF হইলে, প্রমাণ কবিতে হইবে যে, AB = CD.



প্রমাণ— (১) OA, OC যোগ কব।

যেহেতু OE, AB জ্যা এব উপর লম্ব,

∴ OE লম্ব AB জ্যাটিকে দ্বিখণ্ডিত কবিযাছে, অর্থাৎ AE = $\frac{1}{2}$AB.

[৩২শ উপঃ]

এইরূপে, CF = $\frac{1}{2}$CD. ∴ AE = CF.

এখন, AOE, COF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজেব—

AE = CF, AO অতিভুজ = CO অতিভুজ,

∴ OE = OF. [১৫শ উপঃ]

অর্থাৎ AB ও CD বেখা O বিন্দু হইতে সমদূববর্তী।

বিপরীতক্রমে, AOE, COF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের

AO অতিভুজ = CO অতিভুজ এবং OE = OF.

∴ AE = CF. [১৫শ উপঃ]

∴ AB = 2AE = 2CF = CD. [**ই. উ. বি.**]

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তের সমান জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। বৃত্তের কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি জ্যা ঐ বিন্দুগত ব্যাসার্ধের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, উহারা পরস্পর সমান।

৩। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের ব্যাস ব্যতীত তিনটি সমান জ্যা একটি অন্তঃস্থ বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না।

৪। যদি কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয় যথাক্রমে অন্যটির অংশদ্বয়ের সমান হইবে।

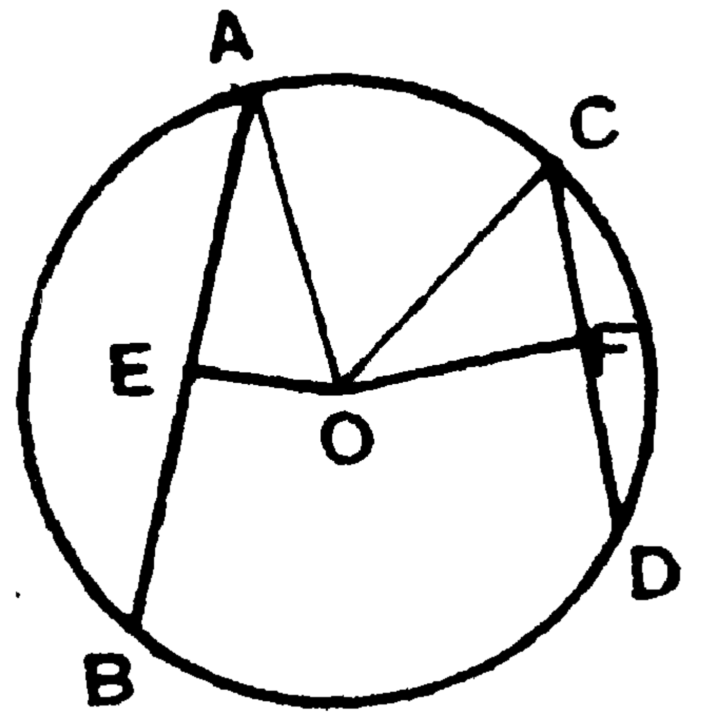
৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC. A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত BC (অথবা বর্ধিত BC) কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BD = CE.

৬। কোন বৃত্তের পরিধিস্থ দুই বিন্দুর যোজক-রেখা সম্পূর্ণরূপে বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত।

৩৬শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।১৫)

সাঃ নিঃ—কোন বৃত্তের দুইটি জ্যাএর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটবর্তী জ্যাটি অধিকতর দূরবর্তী জ্যাটি অপেক্ষা বৃহত্তর। বিপরীতক্রমে, বৃহত্তর জ্যা ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী।

বিঃ নিঃ—মনে কর, কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা এবং O ইহার কেন্দ্র। AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF দুইটি লম্ব টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে, OF অপেক্ষা OE ক্ষুদ্রতর হইলে, AB $>$ CD হইবে ; এবং বিপরীতক্রমে, CD অপেক্ষা AB বৃহত্তর হইলে, OE $<$ OF হইবে।



প্রমাণ—OA এবং OC যোগ কর। OE রেখা AB এর উপর লম্ব বলিয়া, OE রেখা AB কে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\therefore$ $AE = \frac{1}{2} AB$, এবং ঐরূপে $CF = \frac{1}{2} CD$.

এখন $\angle OEA$ এবং $\angle OFC$ সমকোণ বলিয়া,

$$OE^2 + EA^2 = OA^2 = OC^2 = OF^2 + CF^2.$$

(১) কিন্তু $OE < OF$ হইলে, $OE^2 < OF^2$.

$\therefore$ $EA^2 > CF^2$; $\therefore$ $EA > CF$.

সুতরাং $AB > CD$.

(২) আবার, $AB > CD$, অর্থাৎ $AE > CF$ হইলে,

$$AE^2 > CF^2.$$

কিন্তু $OE^2 + EA^2 = OF^2 + CF^2$;

$\therefore$ $OE^2 < OF^2$. সুতরাং $OE < OF$.

অর্থাৎ CD জ্যা অপেক্ষা AB জ্যা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী।

[ই. উ. বি.]

অনু.—বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

অনুশীলনী

১। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি ক্ষুদ্রতম জ্যা অঙ্কিত কর।

২। কোন বৃত্তের AB একটি স্থির জ্যা। CD জ্যাএর E মধ্যবিন্দু AB এর উপর অবস্থিত। ইহাদের মধ্যে কোন্ জ্যাটি বৃহত্তর? প্রমাণ কর যে, E বিন্দু যতই AB এর মধ্যবিন্দুর দিকে অগ্রসর হইবে CD ততই বৃহত্তর হইবে।

৩। পরিধির কোন বিন্দু হইতে কতগুলি জ্যা টানা হইল। উহাদের মধ্যে কেন্দ্রগত জ্যাই বৃহত্তম; এবং অপর যে-কোন দুইটির মধ্যে যেটির সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ বৃহত্তর, সেইটি বৃহত্তর হইবে।

৪। যদি দুইটি সমান বৃত্তের একটি অন্যটির কেন্দ্রগত হয়, তবে উহাদের সাধারণ জ্যা এর উপর বর্গক্ষেত্র ব্যাসার্ধের উপর বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ হইবে।

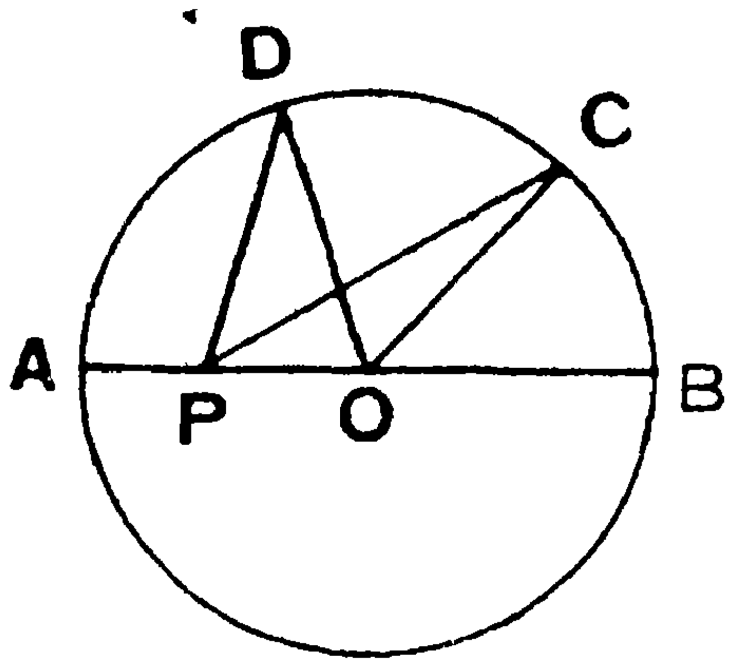
৫। কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলিকে ব্যাস ধরিয়া চারটি বৃত্ত আঁকা হইল। প্রমাণ কর যে, যে-কোন দুইটি সন্নিহিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা অন্য দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমান্তরাল।

৬। কোন বৃত্তের কেন্দ্র O; উহার পরিধির উপর P একটি বিন্দু। PN একটি নির্দিষ্ট AB ব্যাসের উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, OPN কোণের দ্বিখণ্ডক A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর যে-কোন একটি দিয়া যাইবে।

৭। প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের কোন জ্যা এর একটি বিন্দু অপর একটি নির্দিষ্ট জ্যা এর মধ্যবিন্দু হইলে, নির্দিষ্ট জ্যা অপেক্ষা ঐ জ্যাটি বৃহত্তর হইবে।

৩৭শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৭)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের অন্তঃস্থ (কেন্দ্র ভিন্ন) কোন বিন্দু দিয়া যতগুলি সরলরেখা পরিধি পর্যন্ত টানা যায়, তন্মধ্যে কেন্দ্রগতটি বৃহত্তম ; এবং যেটি বর্ধিত হইলে কেন্দ্র দিয়া যায়, সেইটি ক্ষুদ্রতম। অপর যে-কোন দুইটি রেখার মধ্যে যাহার সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ বৃহত্তর সেইটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর।



বিঃ নিঃ—মনে কর ABC বৃত্তের অন্তর্গত P একটি বিন্দু এবং O উহার কেন্দ্র। P বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত PA, PB, PC ও PD রেখা টান। মনে কর PB কেন্দ্রগত এবং AP বর্ধিত হইলে কেন্দ্রগত হয়। আরও মনে কর PC এর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ POC কোণ PD এর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ POD কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) PB বৃহত্তম ;

(২) PA ক্ষুদ্রতম ;

(৩) $PC > PD$.

প্রমাণ— OC ও OD যোগ কর।

(১) POC ত্রিভুজের, $PO + OC > PC$. [১৮শ উপঃ]

$\therefore$ $PO + OB > PC$, অর্থাৎ $PB > PC$; কারণ $OC = OB$.

এইরূপে দেখা যায় যে, PB রেখা P হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন রেখা হইতে বৃহত্তর।

(২) POD ত্রিভুজের, $OP+PD > OD$; [১৮শ উপঃ]

$\therefore$ $OP+PD > OA > OP+PA$; কারণ $OD=OA$

উভয় পার্শ্ব হইতে OP অংশ বাদ দিলে, $PD > PA$.

এইরূপে দেখা যায় যে, P হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন রেখা হইতে PA ক্ষুদ্রতর।

(৩) POC ও POD দুইটি ত্রিভুজের—

$OC=OD$; OP উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

কিন্তু $\angle POD$ অপেক্ষা $\angle POC$ বৃহত্তর।

$\therefore$ $PC > PD$. [২০শ উপঃ] [**ই. উ. বি.**]

দ্রষ্টব্য। PA ও PB রেখা AB ব্যাসের অংশ। সুতরাং কেন্দ্রগত বৃহত্তম রেখাটির অবশিষ্ট অংশই ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী

১। পরস্পর-ছেদী দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যার সমান্তরাল কোন সরল-রেখা ঐ বৃত্ত দুইটিকে ছেদ করিলে, পরিধিদ্বয়-দ্বারা সীমাবদ্ধ ঐ রেখার অংশ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

২। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, সম্পাত-বিন্দুদ্বয় দিয়া পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান্তর সরলরেখা টানিলে উহারা পরস্পর সমান হইবে।

৩। তিনটি পরস্পর সমান জ্যা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে উহাদের সম্পাত বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

৪। A এবং B কেন্দ্র-বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ECF সরলরেখা পরিধিদ্বয়-দ্বারা সীমাবদ্ধ হইল। যদি EA ও FB রেখা G বিন্দুতে মিলিত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\angle EGF = \angle ACB$.

৫। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ না করে, তবে উহাদের মধ্যস্থ ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম সরলরেখা কি প্রকারে নির্ণয় করিবে ?

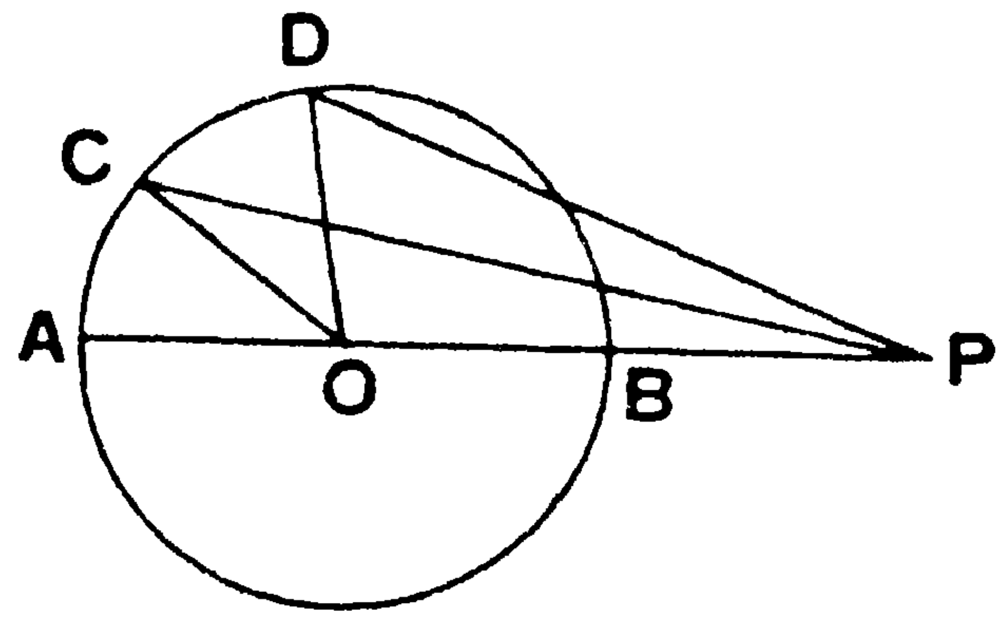
৬। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোন কেন্দ্র নিয়া এবং কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কতগুলি বৃত্ত আঁকা হইল। প্রমাণ কর যে, বৃত্তগুলি আর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩৮শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৮)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত যতটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে তন্মধ্যে কেন্দ্রগত রেখাটি বৃহত্তম এবং যে রেখাটি বর্ধিত হইলে কেন্দ্র দিয়া যায় উহা ক্ষুদ্রতম হইবে।

এবং অপর যে-কোন দুইটি রেখার মধ্যে যেটির সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ বৃহত্তর সেইটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABDC বৃত্তের O বিন্দু কেন্দ্র এবং P উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে PBA, PC, PD রেখা পরিধি পর্যন্ত টান যেন, PBA রেখা কেন্দ্রগত হয় এবং PCএর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ POC কোণ PDএর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ POD কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।



প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) PA বৃহত্তম ; (২) PB ক্ষুদ্রতম ;

(৩) $PC > PD$.

OC, OD যোগ কর।

প্রমাণ—(১) POC ত্রিভুজের $PO + OC > PC$. [১৮শ উপঃ]

কিন্তু $OC = OA$

$\therefore \quad PO + OA > PC$, অর্থাৎ $PA > PC$.

এই প্রকারে দেখান যাইবে যে, P বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন ছেদক অপেক্ষা PA বৃহত্তর।

(২) POD ত্রিভুজের $PD + DO > PO$; [১৮শ উপঃ]

$\therefore$ $PD + OB > PO$, অর্থাৎ $> PB + OB$; কারণ, $OD = OB$.

এখন, উভয়পার্শ্ব হইতে OB সাধারণ অংশ বাদ দিলে,

$\therefore$ $PD > PB$, অর্থাৎ $PB < PD$.

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, P বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা অপেক্ষা PB ক্ষুদ্রতর।

(৩) আবার, POC ও POD দুইটি ত্রিভুজের—

$OC = OD$, PO উভয়ের একটি সাধারণ বাহু ;

কিন্তু $\angle POD$ অপেক্ষা $\angle POC$ বৃহত্তর।

$\therefore$ $PC > PD$. [২০শ উপঃ]

[**ই. উ. বি.**]

অনুশীলনী

১। বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তেরই পরিধি পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে কেন্দ্রগত রেখাটি বৃহত্তম এবং অপর কোন-দুইটি সরলরেখার মধ্যে যেটির সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ বৃহত্তর সেইটিই অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

২। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে একটি সম্পাতবিন্দু দিয়া উভয়ের পরিধি-দ্বারা-সীমাবদ্ধ যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে কেন্দ্র-যোজক রেখার সমান্তরাল রেখাটিই বৃহত্তম।

৩। প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

৪। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A শিরঃকোণের পরিমাণ ৮০°। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং BCএর যে পার্শ্বে কেন্দ্রটি অবস্থিত সেই পার্শ্বের পরিধিতে P, Q, R,...... বিন্দু লইয়া এই সকল বিন্দুতে BC জ্যাএর সম্মুখীন কোণগুলির পরিমাণ মাপিয়া নির্ণয় কর।

বিবিধ অনুশীলনী

১। O বিন্দু দিয়া অঙ্কিত OPQ এবং ORS দুইটি সরলরেখা PQRS বৃত্তকে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PS ও QRএর সম্পাত-বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে পারে না।

২। দুইটি বৃত্তের একটি ছেদবিন্দু হইতে PQ, RS দুইটি সরলরেখা সাধারণ জ্যাএর সহিত সমান কোণ করিয়া অঙ্কিত হইল। যদি ইহারা পরিধির সহিত P, Q, R, S বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, PQ = RS.

৩। কোন বৃত্তের পরিধির উপর P, Q, R, S, T পাঁচটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, PQ, QR, RS, ST, TPএর সমকোণে দ্বিখণ্ডকগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

৪। PQRS চতুর্ভুজের কর্ণদুইটি T বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PQT, QRT, RST, SPT ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (circum-centre) গুলি একটি সামান্তরিকের কৌণিক-বিন্দু।

৫। একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত (inscribed) হইতে পারে।

৬। কোন বৃত্তের PQ জ্যা ও RS ব্যাস এক বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, RSএর যে কোন অবস্থাতেই R এবং S হইতে PQএর উপর অঙ্কিত লম্বের সমষ্টি বা অন্তর সর্বদা একই হইবে।

৭। দুইটি বৃত্তের ছেদ-বিন্দুদ্বয় হইতে সাধারণ জ্যাএর লম্ব দুইটি সরল রেখা টানা হইল। উহারা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অন্যটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AB, CDএর সমান্তরাল।

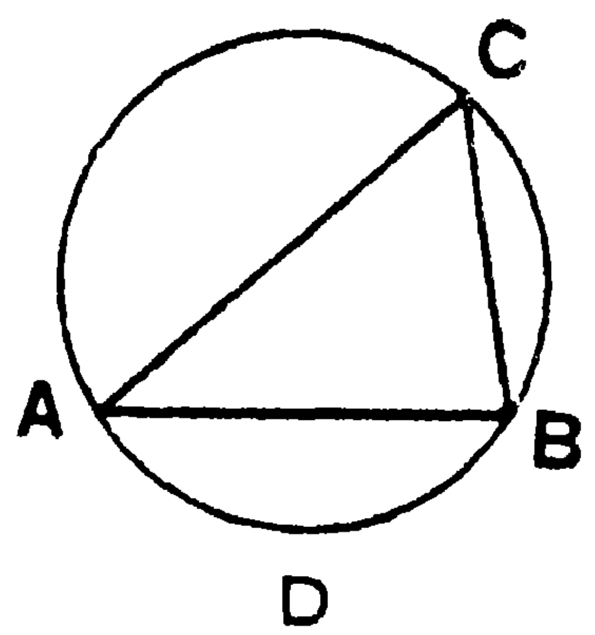
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

বৃত্তাংশস্থ কোণ—(Angles in a Segment)

বৃত্তাংশ—কোন বৃত্তের জ্যা ও তদ্দ্বারা ছিন্ন চাপ-দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্তাংশ (segment of a circle) বলে।

বৃত্তাংশস্থ কোণ—কোন বৃত্তাংশের চাপের কোন বিন্দুর সহিত জ্যাএর প্রান্তবিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে উক্ত বৃত্তাংশস্থ কোণ (angle in the segment) বলে।

এই কোণটি প্রতিযোগী (conjugate) বৃত্তাংশের চাপের উপর অবস্থিত এরূপ বলা হয়।



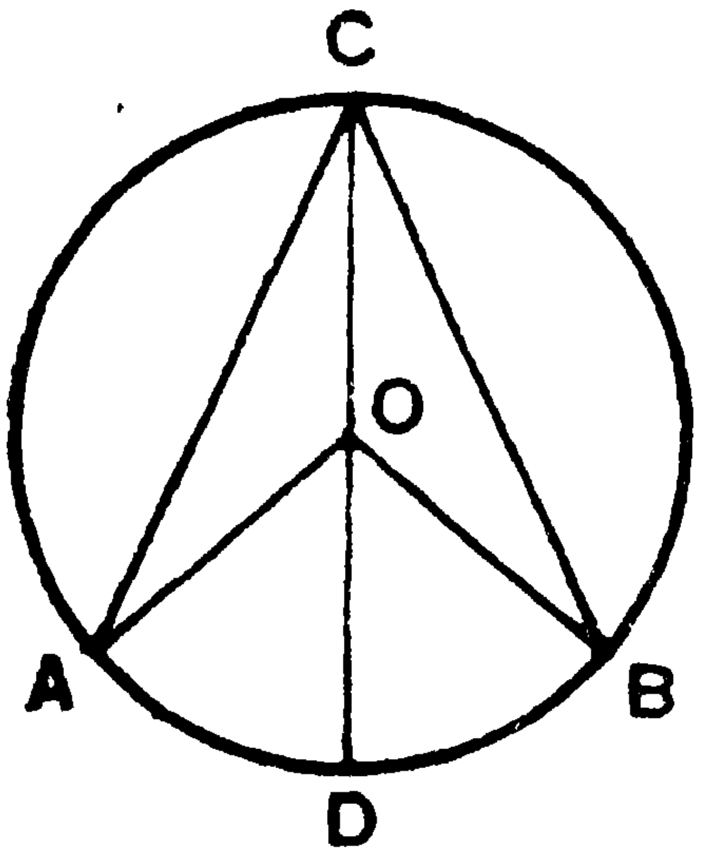
ACB চাপের উপর C একটি বিন্দু এবং AB একটি জ্যা। AC ও BC যোগ করিলে, ACB কোণটিকে ACB বৃত্তাংশের কোণ বলে এবং এই কোণটিকে প্রতিযোগী ADB বৃত্তাংশের চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ-কোণ বলা হয়।

সদৃশ বৃত্তাংশ—দুইটি বৃত্তাংশের কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে উহাদিগকে সদৃশ বৃত্তাংশ (similar segment) বলে।

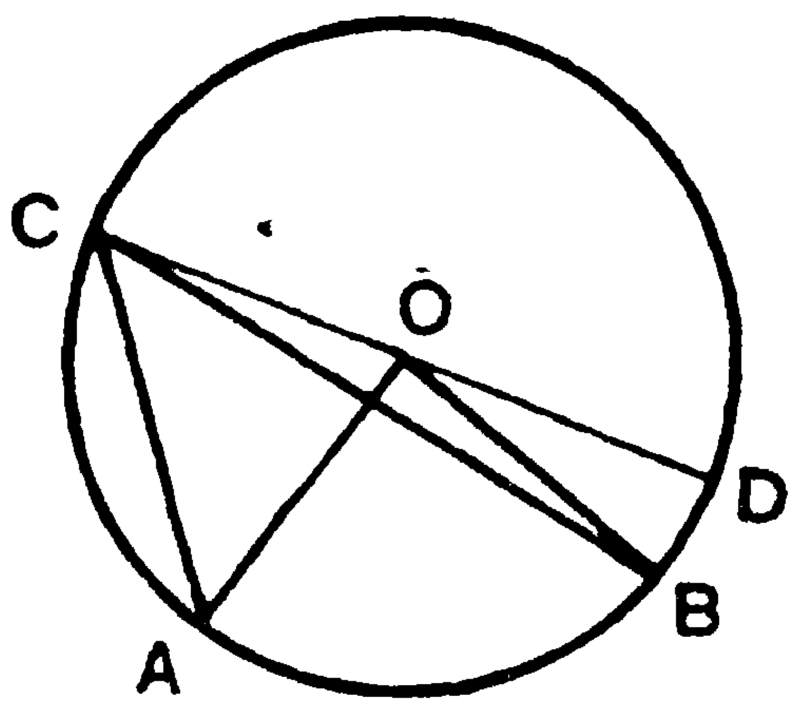
৩৯শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।২০)

সাঃ নিঃ—কোন বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

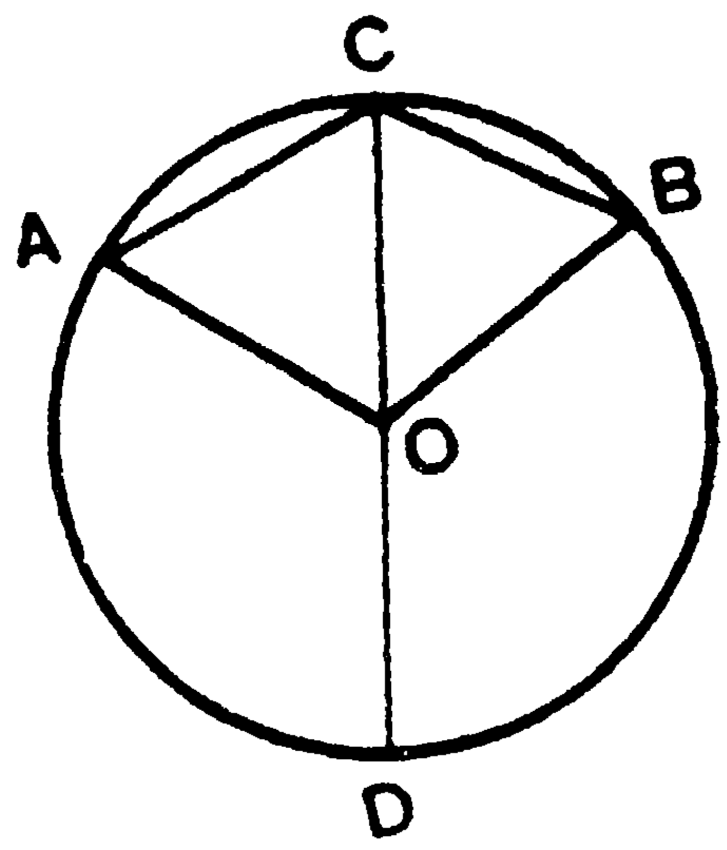
বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ADB একটি চাপ।



(১ম চিত্র)



(২য় চিত্র)



(৩য় চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ADB চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ AOB কোণ পরিধিস্থ ACB কোণের দ্বিগুণ।

CO সংযুক্ত করিয়া পরিধির D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ— AOC ত্রিভুজের, $AO = CO$;

$\therefore \quad \angle OCA = \angle OAC.$

কিন্তু $\quad \angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$

$\therefore \quad \angle AOD = 2\angle OCA.$ [৮ম উপঃ, ৩য় অনুঃ]

ঐরূপে, $\quad \angle BOD = 2\angle OCB.$

$\therefore \quad \angle AOD + \angle BOD = 2\angle OCA + 2\angle OCB,$

অর্থাৎ $\quad \angle AOB = 2\angle ACB.$ (১ম ও ৩য় চিত্র)

এবং $\quad \angle AOD - \angle BOD = 2\angle OCA - 2\angle OCB,$

অর্থাৎ $\quad \angle AOB = 2\angle ACB.$ (২য় চিত্র)

[ই. উ. বি.]

দ্রষ্টব্য—এই উপপাদ্যে (১ম ও ২য় চিত্রে) ADB একটি উপচাপ (minor arc) লওয়া হইয়াছে। যদি উহা পরিধির অর্ধেক হয়, তবে AOB কোণটি সরলকোণ হইবে ; এবং যদি অধিচাপ (major arc) হয়, তবে AOB একটি প্রবৃদ্ধ (reflex) কোণ হইবে (৩য় চিত্র)। এই উভয় ক্ষেত্রেই উপরি উক্ত প্রমাণ প্রযোজ্য।

বৃত্তস্থ বিন্দু—চার বা তদধিক বিন্দু একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইলে উহাদিগকে বৃত্তস্থ (cyclic) বিন্দু বলে।

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ—যে চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহাকে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (cyclic quadrilateral) বলে।

অনুশীলনী

১। সমান সমান অথবা একই বৃত্তে দুইটি চাপ পরিধির কোন বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করিলে উহারা পরস্পর সমান হইবে। প্রমাণ কর যে, ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও সত্য।

২। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকটি পরিধিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুটি ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

৩। ABCD বৃত্তের AB ও CD জ্যাএর ছেদ বিন্দু E এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$.

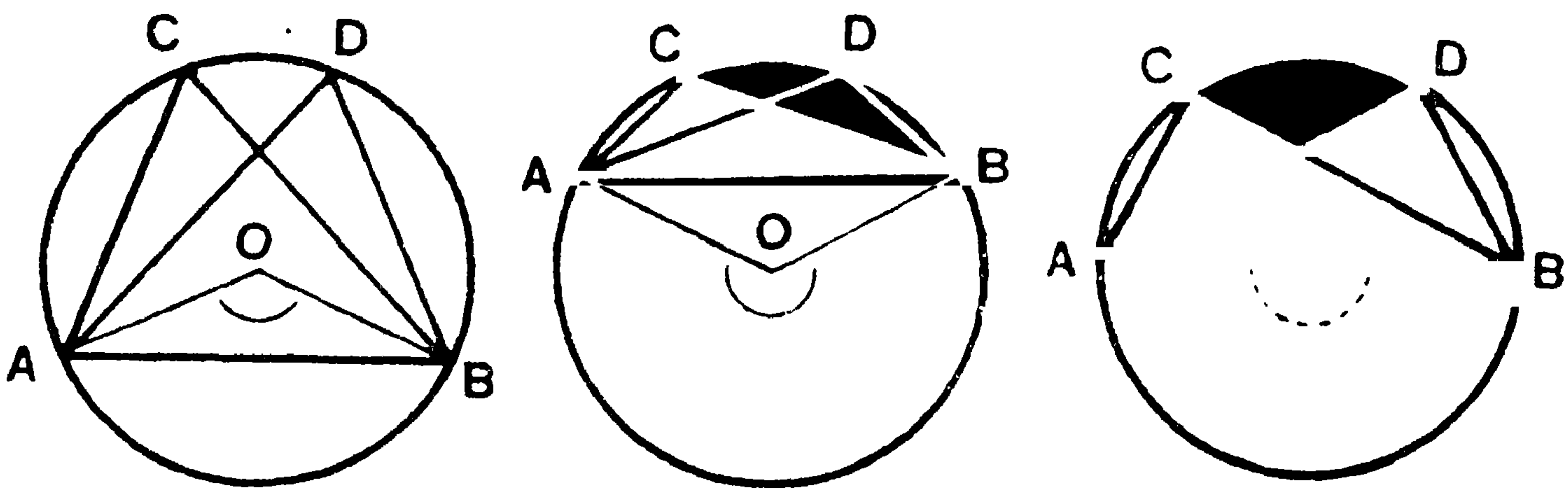
৪। একটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত উহাকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90^\circ - \frac{1}{2}A$, $90^\circ - \frac{1}{2}B$ এবং $90^\circ - \frac{1}{2}C$ হইবে।

৪০শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।২১)

সাঃ নিঃ—একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান। এবং বিপরীতক্রমে, একই ভূমির একই দিকে অবস্থিত সমান সমান শীর্ষকোণগুলি ভূমির প্রান্তবিন্দুগামী একই চাপের উপর অবস্থিত।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB জ্যাএর উপর ACB ও ADB কোণদ্বয় একই বৃত্তের পরিধিস্থ কোণ। এবং ঐ বৃত্তটির কেন্দ্র O. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\angle ACB = \angle ADB.$$



(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

প্রমাণ—একই BC চাপের উপর অবস্থিত বলিয়া—

$$\angle AOB = 2\angle ACB.$$

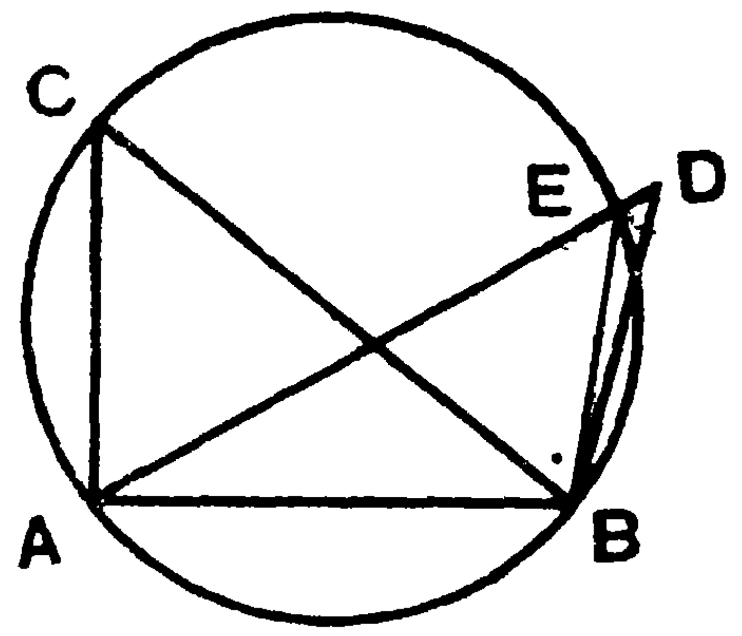
ঐরূপে, $\angle AOB = 2\angle ADB$; [৩৯শ উপঃ]

$\therefore$ $\angle ACB = \angle ADB.$

[ই. উ. বি.]

দ্রষ্টব্য—১ম চিত্রে বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর, ২য় চিত্রে ক্ষুদ্রতর এবং ৩য় চিত্রে বৃত্তাংশটি একটি অর্ধবৃত্ত।

(২) **বিপরীতক্রমে,** মনে কর AB রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত ∠ACB = ∠ADB. প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D বিন্দু চারটি এক বৃত্তস্থ।



প্রমাণ—A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তটি D বিন্দু দিয়া গেলে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল। যদি তাহা না যায়, মনে কর এই বৃত্তটি AD (অথবা বর্ধিত AD) রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EB যোগ কর।

∠ACB = একই বৃত্তাংশস্থ ∠AEB,

কিন্তু ∠ACB = ∠ADB.

∴ ∠AEB = ∠ADB.

অর্থাৎ BDE ত্রিভুজের বহিঃকোণ ∠AEB = অন্তর্বিপরীত ∠BDE ;

কিন্তু ইহা হইতে পারে না। [৮ম উপঃ, ৩য় অনু.)

সুতরাং E বিন্দুটি D বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে ;

অর্থাৎ B, A, C, D একই বৃত্তস্থ বিন্দু। [**ই. উ. বি.**]

১ম অনু—কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একই পার্শ্বে অঙ্কিত ত্রিভুজগুলির শিরঃকোণসমূহ পরস্পর সমান হইলে, উহাদের শীর্ষবিন্দুগুলির সঞ্চার পথ একটি বৃত্তের চাপ হইবে।

২য় অনু—সমান সমান জ্যা-দ্বারা সীমাবদ্ধ একই বৃত্তের বৃত্তাংশগুলি পরস্পর সমান।

৩য় অনু—একই বৃত্তের সমান সমান চাপ-ছিন্নকারী জ্যাগুলি পরস্পর সমান

অনুশীলনী

১। কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AEC ও DEB ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণ (equiangular).

২। AB ও CD দুইটি জ্যা কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করিলে, AC ও BD এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি AEC কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৩। উক্ত জ্যা দুইটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন E বিন্দুতে ছেদ করিলে, AC ও BD এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয়ের অন্তর AEC কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৪। কোন বৃত্তের PQ একটি জ্যা এবং R পরিধিস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, R এর যে-কোন অবস্থানেই RPQ ও RQP কোণদ্বয়ের সমষ্টি একই থাকিবে।

৫। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের ছেদ বিন্দু P ও. Q। প্রমাণ কর যে, P বিন্দুগত ও পরিধি-দ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখার উপর অবস্থিত Q কোণটি সর্বদা একই থাকিবে।

৬। যদি PQR ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (in-centre) I হয় এবং PI বর্ধিত হইয়া পরিধিকে S বিন্দুতে ছেদ করে তবে, প্রমাণ কর যে, SQ = SR = SI.

৭ কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর লম্ব। প্রমাণ কর যে, AB ও CD কেন্দ্রতে পরস্পর সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে।

৪১শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।২২)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের অন্তর্লিখিত কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে। এবং বিপরীতক্রমে, যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে উহার কৌণিক-বিন্দু চতুষ্টয় বৃত্তস্থ (cyclic) হইবে।

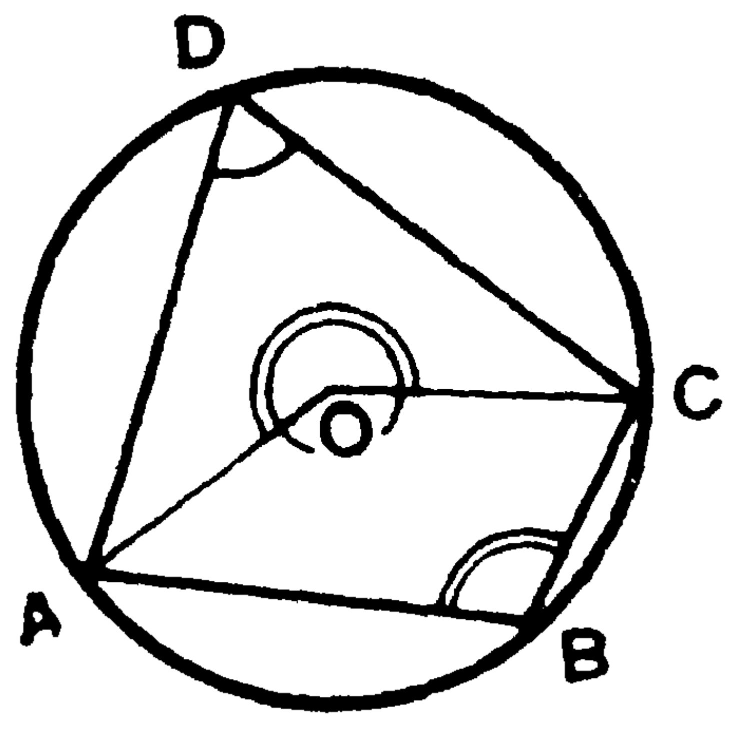
বিঃ নিঃ—কোন বৃত্তের অন্তলিখিত ABCD একটি চতুর্ভুজ। O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র।

(১) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle ADC + \angle ABC =$ দুই সমকোণ,

$\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

AO ও CO যোগ কর।



প্রমাণ—পরিধিস্থ $\angle ADC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$

আবার, পরিধিস্থ $\angle ABC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$.

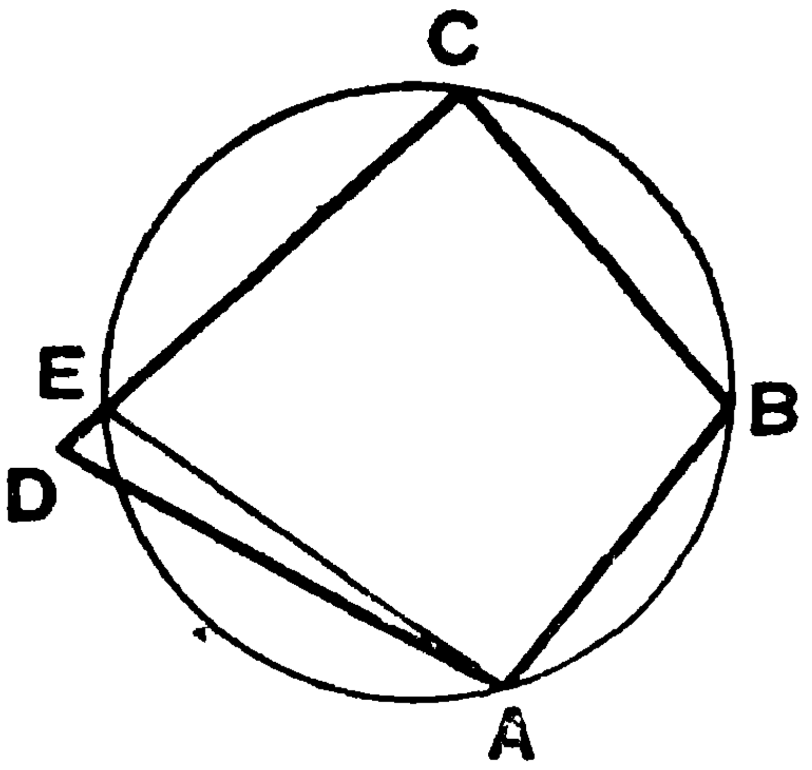
$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$

$= \frac{1}{2} \times$ চার সমকোণ $=$ দুই সমকোণ।

ঐরূপে, $\angle BCD + \angle BAD =$ দুই সমকোণ।

(২) **বিপরীতক্রমে,**—মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের B ও D কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ ∠B+∠D=দুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D বিন্দুচতুষ্টয় বৃত্তস্থ।



প্রমাণ—A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তটি D বিন্দু দিয়া না গেলে, মনে কর উহা CD (অথবা বর্ধিত CD) কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যোগ কর।

এখন, ABCE চতুর্ভুজ একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত বলিয়া,

∠AEC+∠ABC=দুই সমকোণ।

কিন্তু ∠ADC+∠ABC=দুই সমকোণ।

∴ ∠AEC=∠ADC ;

অর্থাৎ ADE ত্রিভুজের বহিঃকোণ ∠AEC=অন্তর্বিপরীত ∠ADE ;

কিন্তু ইহা হইতে পারে না। [৮ম উপঃ, ৩য় অনু.]

সুতরাং E বিন্দু Dএর সহিত মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ A, B, C, D বৃত্তস্থ হইবে। [**ই. উ. বি.**]

১ম অনু—কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে, উৎপন্ন বহিঃকোণটি চতুর্ভুজের অন্তর্বিপরীত কোণের সমান হইবে।

২য় অনু—কোন সামান্তরিকের চারটি শীর্ষবিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারিলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ—কোন চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারিলে, উহাকে বৃত্তস্থ (cyclic) চতুর্ভুজ বলে।

অনুশীলন।

১। সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হইলে, উহাদের পরিবৃত্ত দুইটি সমান হইবে।

২। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। BCএর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC সমান বাহুদ্বয়কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, B, C, D, E বৃত্তস্থ হইবে।

৩। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করিলে, উহার বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

৪। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি কোণের দ্বিখণ্ডক এবং উহার বিপরীত বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডক পরিধির উপর এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

৫। প্রমান কর যে, একটি চতুর্ভুজের অন্তঃকোণ অথবা বহিঃকোণ-গুলির দ্বিখণ্ডক চারটি রেখাদ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের একটি পরিবৃত্ত (circum-circle) অঙ্কিত করা যায়।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে। উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ বাহির কর।

৭। ABCD চতুর্ভুজের A, B ; B, C ; C, D ; D, A কোণগুলির দ্বিখণ্ডক সমূহ যথাক্রমে P, Q, R এবং S বিন্দুতে মিলিত হইলে, PQRS ক্ষেত্রটি বৃত্তস্থ হইবে।

৮। ABC ত্রিভুজের B ও C অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় D বিন্দুতে এবং B ও C বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইলে, B, D, C, E বিন্দুচতুষ্টয় বৃত্তস্থ হইবে।

৪২শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৩১)

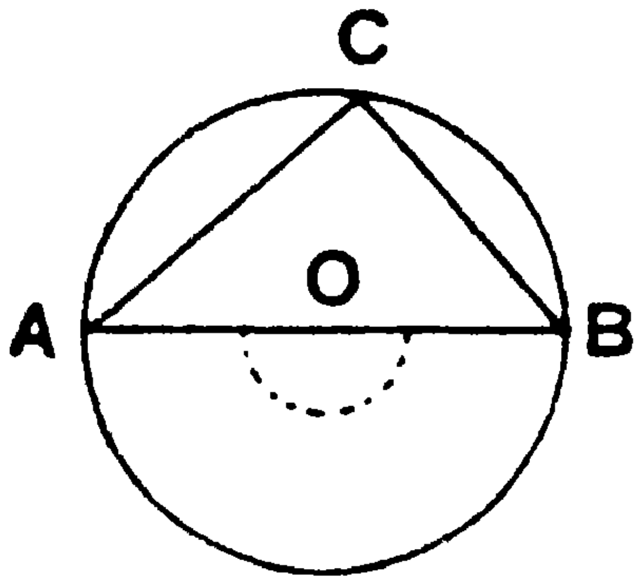
(১) অর্ধবৃত্তস্থ কোণটি এক সমকোণ,

(২) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণটি সূক্ষ্মকোণ, এবং (৩) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণটি একটি স্থূলকোণ।

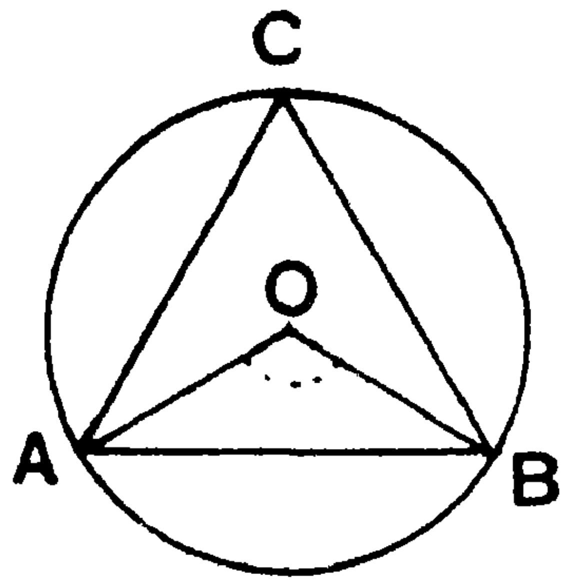
(১) মনে কর, ACB অর্ধবৃত্তের AB একটি ব্যাস, এবং O উহার কেন্দ্র (১ম চিত্র)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ACB কোণটি এক সমকোণ।

প্রমাণ—পরিধিস্থ ∠ACB = কেন্দ্রস্থ AOB সরলকোণের অর্ধেক ;
[৩৯শ উপঃ]
= এক সমকোণ।

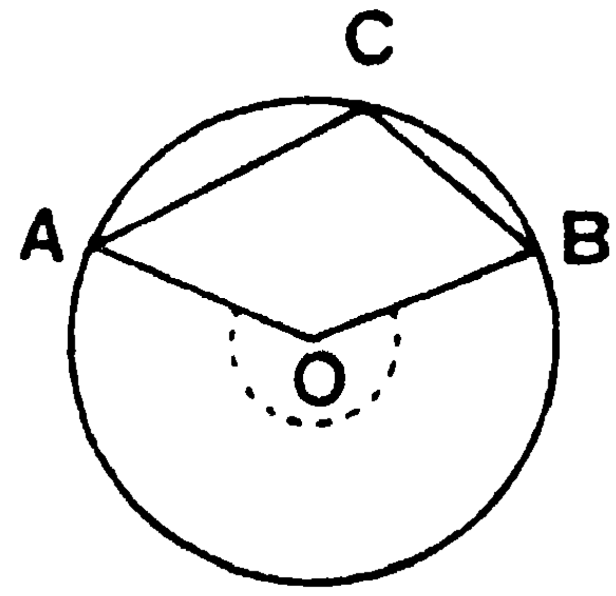
(২) মনে কর, ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর (২য় চিত্র)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB একটি সূক্ষ্মকোণ।



(১ চিত্র)



(২য় চিত্র)



(৩য় চিত্র)

প্রমাণ— যেহেতু ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর,

∴ ACB চাপের প্রতিযোগী AB চাপটি অর্ধ-পরিধি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ ইহা একটি উপচাপ (minor arc) এবং উহার উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ∠AOB দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

কিন্তু পরিধিস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB ;

∴ ∠ACB এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ একটি সূক্ষ্মকোণ।

(৩) মনে কর, ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (৩য় চিত্র)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB একটি স্থূলকোণ।

প্রমাণ—ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া, প্রতিযোগী AB চাপ অর্ধ-পরিধি অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ইহা একটি অধিচাপ (major arc) এবং উহার উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

কিন্তু পরিধিস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$; [৩৯ উপঃ]

$\therefore$ $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

অর্থাৎ $\angle ACB$ একটি স্থূলকোণ। [**ই. উ. বি.**]

অনু—বৃত্তের কোন জ্যা পরিধির কোন বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করিলে উহা একটি ব্যাস।

অনুশীলনী

১। ABC সমকোণী ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ। প্রমাণ কর যে, AC ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্ত B বিন্দুগত হইবে।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা ভূমির মধ্য-বিন্দুতে মিলিত হইবে।

৩। একটি রম্বসের বাহু চতুষ্টয়কে ব্যাস লইয়া চারটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা কর্ণদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুতে মিলিত হয়।

৪। ABCD একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। বর্ধিত AB, DC এর সহিত E বিন্দুতে এবং বর্ধিত AD, BC এর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল। যদি AC একটি বৃত্তের ব্যাস হয় তবে প্রমাণ কর যে, B, D, E, F বৃত্তস্থ হইবে।

৫। একটি সমকোণের বাহুদ্বয়-দ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে। উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪৩শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।২৬, ২৭)

সাঃ নিঃ—সমান সমান বা একই বৃত্তে—

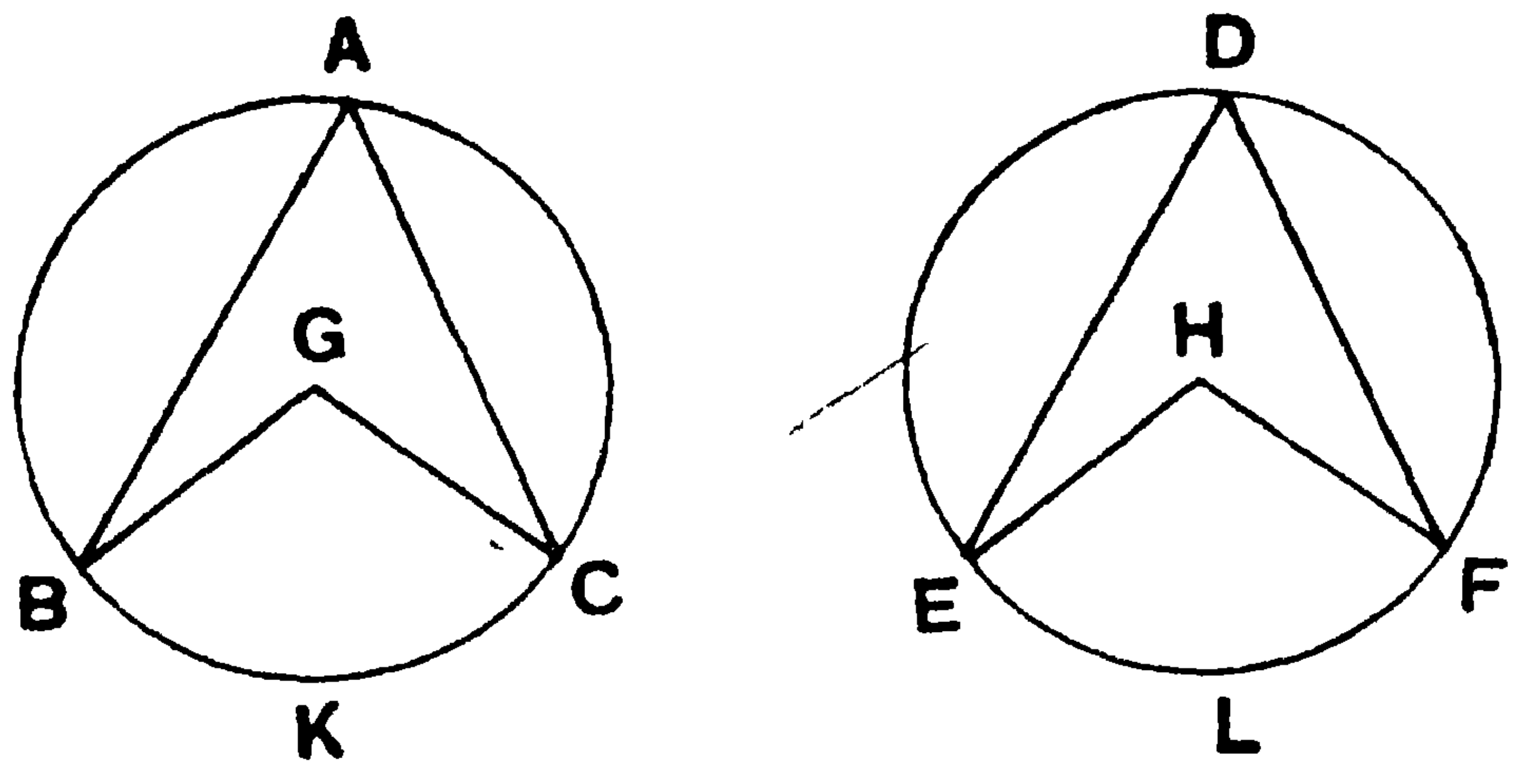
(১) কেন্দ্রস্থ (বা পরিধিস্থ) সমান সমান কোণ যে চাপের উপর অবস্থিত হয় তাহারা পরস্পর সমান।

বিপরীত ক্রমে, (২) কেন্দ্রস্থ (বা পরিধিস্থ) কোণ সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত হইলে তাহারা পরস্পর সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর, BAC ও EDF দুইটি সমান বৃত্ত এবং উহাদের কেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে G ও H বিন্দু।

(১) মনে কর, কেন্দ্রস্থ ∠BGC = কেন্দ্রস্থ ∠EHF ; সুতরাং পরিধিস্থ ∠BAC = পরিধিস্থ ∠EDF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BKC চাপ = ELF চাপ।



প্রমাণ—ABC বৃত্তকে DEF বৃত্তের উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন, G বিন্দু H বিন্দুর উপর এবং GB রেখা HE রেখার উপর পড়ে।

এখন, ∠BGC = ∠EHF ; সুতরাং GC রেখা HF রেখার উপর পড়িবে।

আবার, বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ সমান বলিয়া, B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে এবং দুইটি পরিধি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

∴ BKC চাপ ELF চাপের সহিত মিলিয়া যাইবে ;

অর্থাৎ BKC চাপ = ELF চাপ।

(২) মনে কর, BKC চাপ = ELF চাপ। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

কেন্দ্রস্থ $\angle$BGC = কেন্দ্রস্থ $\angle$EHF

এবং পরিধিস্থ $\angle$BAC = পরিধিস্থ $\angle$EDF.

প্রমাণ—ABC বৃত্তকে DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন, G বিন্দু H বিন্দুর উপর, এবং GB রেখা HE রেখার উপর এবং BKC চাপ ELF চাপের উপর পড়ে। বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসাধ সমান বলিয়া B বিন্দু ও E বিন্দুর উপর পড়িবে। এবং দুইটি পরিধি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

কিন্তু BKC চাপ = ELF চাপ ;

∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর এবং GC রেখা HF রেখার উপর পড়িবে।

∴ BGC কোণটি EHF কোণের সহিত মিলিয়া যাইবে ;

অর্থাৎ $\angle$BGC = $\angle$EHF.

আবার, যেহেতু পরিধিস্থ $\angle$BAC = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle$BGC

এবং পরিধিস্থ $\angle$EDF = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle$EHF.

∴ $\angle$BAC = $\angle$EDF.

[**ই. উ. বি.**]

দ্রষ্টব্য। একই বৃত্তকে দুইটি সমান সমান পৃথক বৃত্ত মনে করিলে একই বৃত্ত সম্বন্ধে উপপাদ্যের সত্যতা অনুমিত হইবে।

অনু—একই অথবা সমান সমান বৃত্তের দুইটি বৃত্তকলার কোণদ্বয় সমান হইলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

১। একই অথবা সমান সমান বৃত্তে দুইটি অসমান কেন্দ্রস্থ কোণের বৃহত্তরটি বৃহত্তর চাপের উপর অবস্থিত হইবে।

২। যদি PQ এবং PR কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, QPR চাপের মধ্যবিন্দু P।

৩। ACB চাপের মধ্যবিন্দু C। প্রমাণ কর যে, C বিন্দুটি A ও B বিন্দু হইতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ হইতে সমদূরবর্তী।

৪। কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি ব্যাস। এবং AB এর সমান্তরাল CE একটি জ্যা। প্রমাণ কর যে, DBE চাপের মধ্যবিন্দু B.

৫। DF একটি ব্যাস এবং DEGF অর্ধবৃত্তের EG একটি জ্যা। DF ও EG বর্ধিত হইয়া H বিন্দুতে মিলিত হইল। যদি GH, DF এর অর্ধেক হয়, তবে FG চাপ DE চাপের এক তৃতীয়াংশ হইবে।

৬। কোন বৃত্তের দুইটি সমান সমান চাপের একই দিকের প্রান্ত-বিন্দু-যোজক সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

৭। একটি সমবাহু ত্রিভুজ কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইলে প্রমাণ কর যে,

(১) উহার শীর্ষ-বিন্দুত্রয় বৃত্তের পরিধিকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে।

(২) প্রত্যেক বাহুর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ সমবাহু ত্রিভুজের একটি কোণের দ্বিগুণ।

৪৪শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।২৮, ২৯)

সাঃ নিঃ—সমান অথবা একই বৃত্তে—

(১) দুইটি সমান জ্যা সমান চাপ ছেদ করে এবং উহাদের একের অধিচাপ অন্যটির অধিচাপের সমান ও একের উপচাপ অন্যটির উপচাপের সমান।

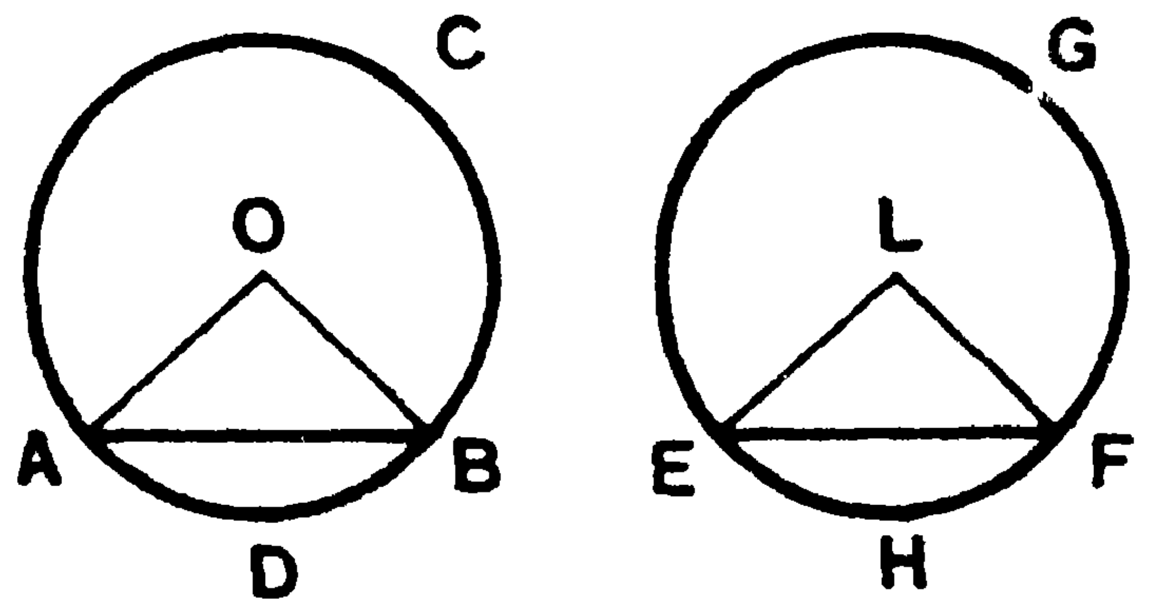
বিপরীতক্রমে, (২) দুইটি সমান চাপের সম্মুখীন জ্যা দুইটি পরস্পর সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ADBC ও EHFG দুইটি সমান বৃত্ত। উহাদের কেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে O ও L বিন্দু।

(১) মনে কর AB জ্যা = EF জ্যা। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ACB অধিচাপ = EGF অধিচাপ। ADB উপচাপ = EHF উপচাপ।

AO, BO, EL, LF যোগ কর।



প্রমাণ—OAB, ELF দুইটি ত্রিভুজের

OA = LE ; OB = LF এবং AB = EF.

∴ $\angle AOB = \angle ELF$ [১৪শ উপঃ]

∴ ADB চাপ = EHF চাপ ; [৪৩শ উপঃ]

এবং ইহারা উভয় বৃত্তের উপচাপ ; কিন্তু বৃত্ত দুইটি সমান বলিয়া উহাদের পরিধিও পরস্পর সমান।

∴ অবশিষ্ট অধিচাপ ACB = অবশিষ্ট অধিচাপ EGF.

(২) **বিপরীতক্রমে,** মনে কর ADB চাপ = EHF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB জ্যা = EF জ্যা।

AO, BO, EL, LF যোগ কর

প্রমাণ— ADB চাপ = EHF চাপ বলিয়া,

∴ $\angle AOB = \angle ELF$. [৪৩ উপঃ]

এখন, AOB, ELF দুইটি ত্রিভুজের—

$OA = EL$, $OB = FL$,

এবং $\angle AOB = \angle ELF$;

∴ AB জ্যা = EF জ্যা। [৮ম উপঃ]

[ই. উ. বি.]

দ্রষ্টব্য। একই বৃত্তকে দুইটি সমান বৃত্ত মনে করিয়া একই বৃত্ত সম্বন্ধেও উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইবে।

অনুশীলনী

১। যদি দুইটি বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা উহাদের কেন্দ্র বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।

২। একটি সমবাহু চতুর্ভুজ কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইলে, উহার কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

৩। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু-দ্বারা ছিন্ন উপচাপের মধ্যবিন্দুদ্বয় D ও E. প্রমাণ কর যে, DE জ্যাটি AB ও AC বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৪। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু বহুভুজের একান্তর বিন্দু-যোজক সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান।

৫। যদি কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

বিবিধ অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (orthocentre) O. P, Q এবং R তিনটি বিন্দু এরূপভাবে লওয়া হইল যেন, OP, OQ এবং OR সরলরেখাত্রয় যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুদ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়। প্রমাণ কর যে, A, B, C, P, Q, R বিন্দুগুলি বৃত্তস্থ।

২। কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পর সমকোণে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, বিপরীত চাপখণ্ডদ্বয়ের সমষ্টি পরিধির অর্ধেক।

৩। AB ও AC দুইটি সরলরেখার B ও C দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। AC এর উপর BD, AB এর উপর DE ও CF এবং AC এর উপর FG লম্ব টানা হইল। দেখাও যে, EG, BC এর সমান্তরাল।

৪। একই ভূমির একই দিকে সমান শিরঃকোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকসমূহ এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

৫। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধির সহিত X, Y, Z বিন্দুতে মিলিত হইল। XYZ ত্রিভুজের কোণগুলি ABC ত্রিভুজের কোণসমূহের দ্বারা প্রকাশ কর।

৬। ABC একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। A বিন্দুর দূরবর্তী এবং BC এর সম্মুখীন চাপের মধ্যবিন্দু D দিয়া DE একটি ব্যাস টানা হইল। প্রমাণ কর যে, EDA কোণটি B ও C কোণের অন্তরের অর্ধেক।

৭। ABCD একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং AB ও CD সম্মুখীন বাহুদ্বয় বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে এবং CB ও DA বাহুদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি EBC ও FAB ত্রিভুজের পরিবৃত্তদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, E, G, F বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

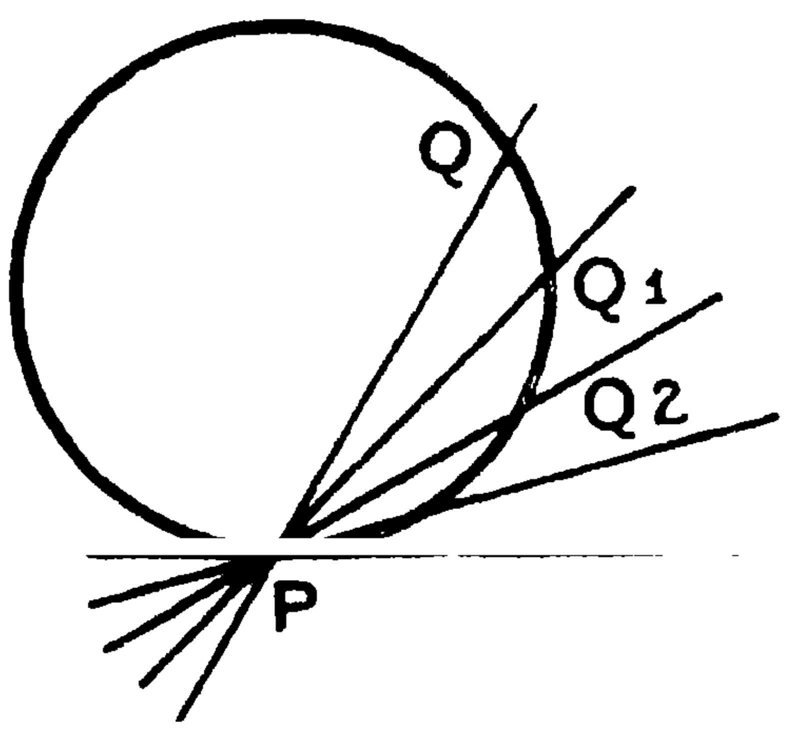
৮। ABC ত্রিভুজের B ও C হইতে AC ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু D ও E হইলে, প্রমাণ কর যে, B, C, D ও E বৃত্তস্থ হইবে।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

স্পর্শক (Tangent)

স্পর্শক—নিম্নলিখিত দুই প্রকারেই স্পর্শকের ধারণা করা যাইতে পারে :—

প্রথম প্রকার—মনে কর PQ একটি ছেদক কোন বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ সরলরেখাকে P বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরাইলে, Q বিন্দুটি পরিধিক্রমে ক্রমান্বয়ে P বিন্দুর অভিমুখে অগ্রসর হইতে থাকিবে এবং সর্বশেষে P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। PQ ছেদক এই অবস্থানে



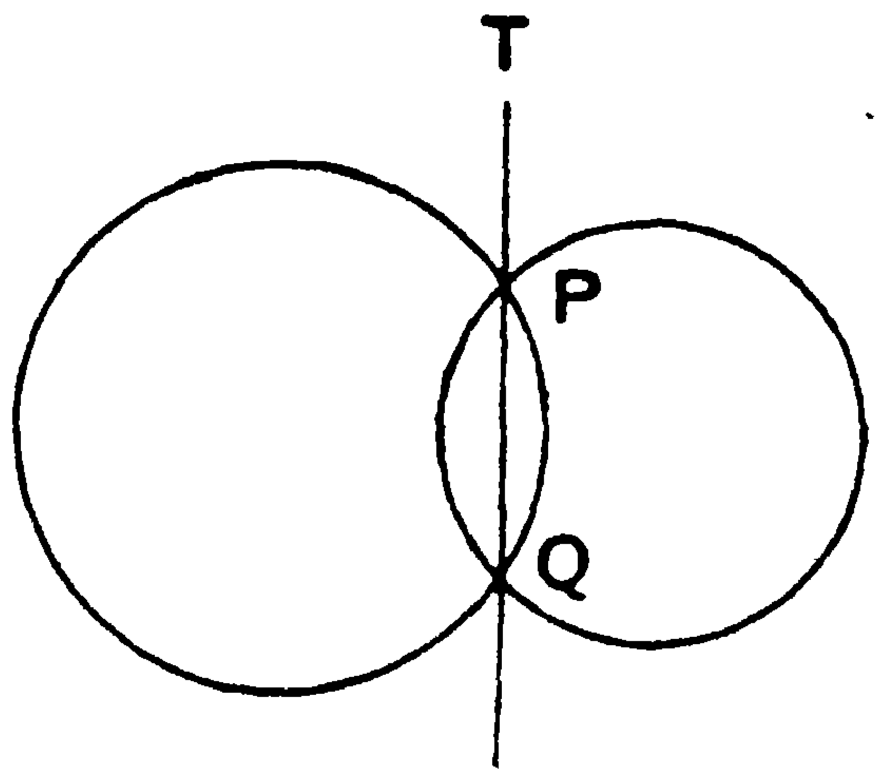
বৃত্তটিকে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অপর কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না। PQ রেখার এই অবস্থায় ইহাকে এই বৃত্তের স্পর্শক (Tangent) বলা হয়। এবং P বিন্দুকে উহার স্পর্শবিন্দু (point of contact) বলে।

দ্বিতীয় প্রকার—যদি PQ ছেদক সর্বদা সমান্তরাল থাকিয়া স্থান পরিবর্তন করে, তবে P ও Q বিন্দু পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইতে থাকিবে। এবং সর্বশেষে মিলিয়া যাইবে। এই পরিণাম (limiting) অবস্থায় PQ ছেদকই বৃত্তের স্পর্শক হইবে। (৩য় অধ্যায়, ১ম পরিচ্ছেদ ১৬৬ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।)

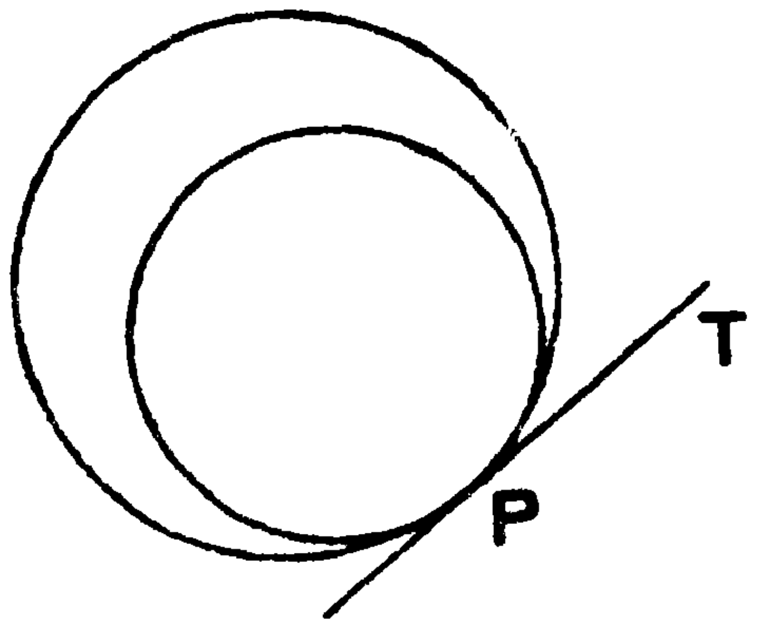
সুতরাং যে ছেদকের পরিণাম (limiting) অবস্থায় দুইটি ছেদ-বিন্দু মিলিয়া যায় তাহাকে **স্পর্শক** বলে। এবং যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাকে **স্পর্শবিন্দু** বলে।

বৃত্তের অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ—

মনে কর, দুইটি বৃত্ত পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন যদি P বিন্দু স্থির রাখিয়া একটি বৃত্তকে ঘুরান যায়, তবে Q বিন্দুটি ক্রমে P বিন্দুর অভিমুখে অগ্রসর হইবে এবং অবশেষে P বিন্দুটির সহিত মিলিয়া

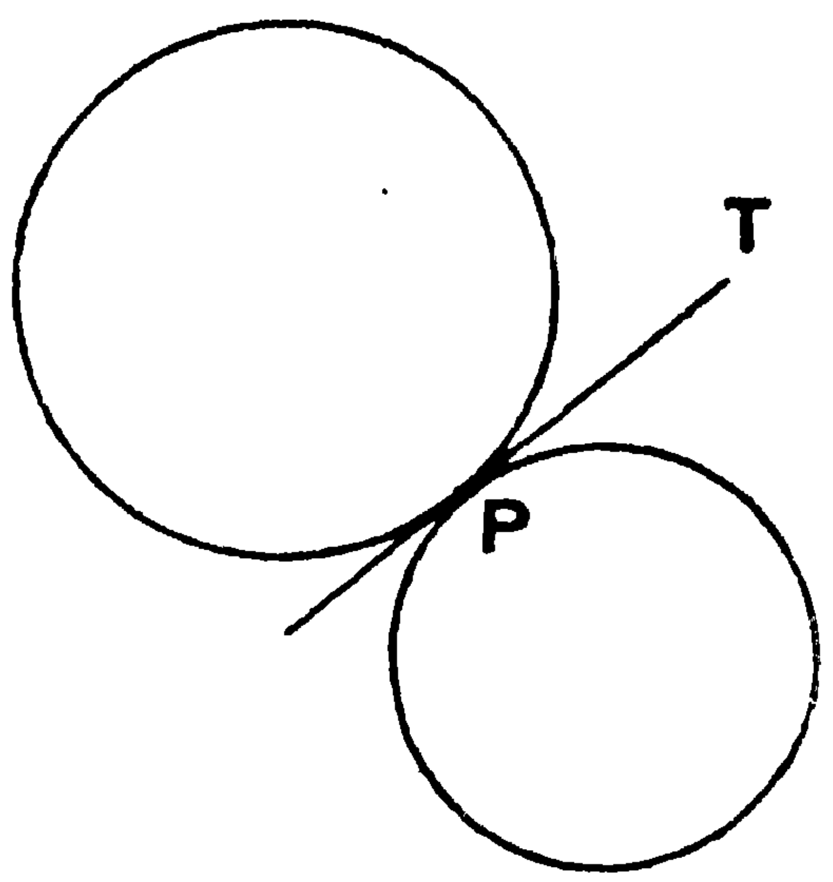


(১ম চিত্র)



(২য় চিত্র)

যাইবে। PQ রেখার এই পরিণাম-অবস্থায় এই দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে এরূপ বলা হয়। P উহাদের স্পর্শবিন্দু এবং PQ একটি সাধারণ স্পর্শক।



(৩য় চিত্র)

দ্রষ্টব্য। বৃত্ত দুইটির একটি আর একটির মধ্যে অবস্থিত থাকিয়া স্পর্শ করিতে পারে (২য় চিত্র) অথবা উহারা পরস্পরের বাহিরে থাকিয়াও স্পর্শ করিতে পারে (৩য় চিত্র)। প্রথমাবস্থায় অন্তঃস্পর্শ (internal

contact) ও শেষের অবস্থায় বহিঃস্পর্শ (external contact) ঘটিয়াছে এরূপ বলা হয়।

দুইটি পরস্পর-ছেদী বৃত্তের একটি মাত্র সাধারণ জ্যা; কারণ উহারা পরস্পর দুই এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। অতএব, যখন পরস্পর-ছেদী বিন্দু দুইটি মিলিয়া যায়, তখনই বৃত্ত দুইটি পরস্পর স্পর্শ করে এবং সাধারণ জ্যাটি ঐ বিন্দুতে উহাদের সাধারণ স্পর্শক হয়।

সুতরাং দুইটি বৃত্ত পরস্পরের সহিত একই বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে এবং উহাদের আর কোন সাধারণ বিন্দু না থাকিলে তাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়। এবং এই স্পর্শ বিন্দুতে তাহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকে।

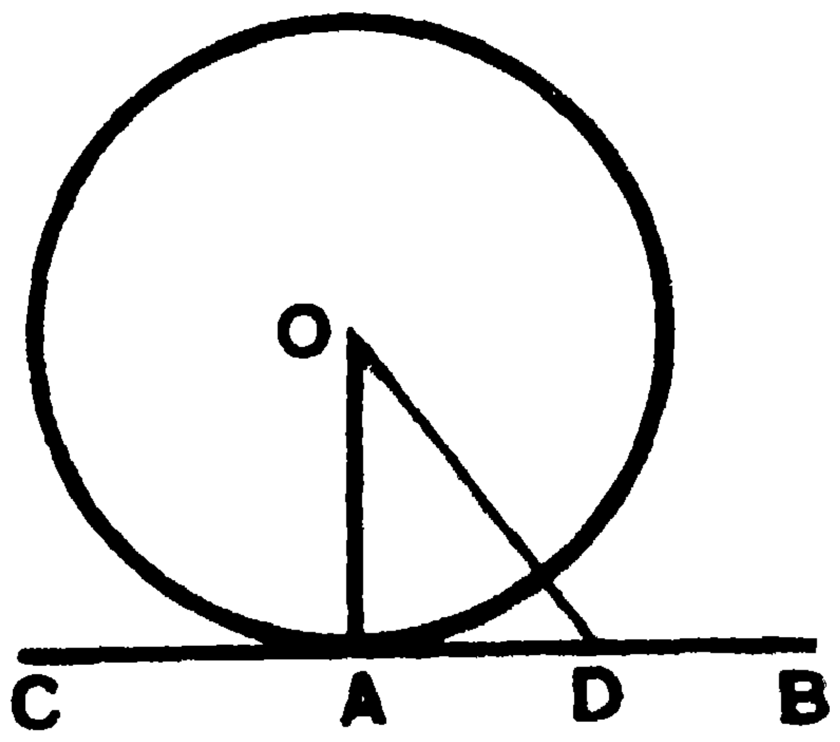
১ম দ্রষ্টব্য। উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে সহজেই বুঝা যাইবে যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর মিলিত হইলে এবং পরস্পর ছেদ না করিলে, মিলন বিন্দুতে উহাদের স্পর্শ ঘটিয়াছে এরূপ বলা হয়।

২য় দ্রষ্টব্য। একটি বৃত্তের পরিধি আর একটির পরিধির দুইটি সমাপতন-বিন্দু (coincident points) দিয়া গেলেই উহারা স্পর্শ করে।

৪৫শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।১৮)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের কোন স্পর্শক উহার স্পর্শবিন্দুগত ব্যাসার্ধের লম্ব হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং A বিন্দুতে BC একটি স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC অথবা AB রেখা OA ব্যাসার্ধের লম্ব।



প্রমাণ—AB এর উপর D একটি বিন্দু লও এবং OD যোগ কর।

D বিন্দু বৃত্তটির বাহিরে অবস্থিত বলিয়া,

ব্যাসার্ধ OA $<$ OD.

এই প্রকারে, O বিন্দু হইতে BC পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা অপেক্ষা OA ক্ষুদ্রতর।

সুতরাং O বিন্দু হইতে BC পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে OA ক্ষুদ্রতম। অতএব OA ব্যাসার্ধ BC রেখার উপর লম্ব।

[১৯শ উপঃ]

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—OA ব্যাসার্ধের A বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি লম্ব টানা যায় বলিয়া, ইহা সহজেই বুঝা যাইবে যে, বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

২য় অনু—যদি AO ব্যাসার্ধের A বিন্দুতে উহার উপর BC লম্ব হয়, তবে BC রেখা A বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হইবে।

৩য় অনু—কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

[কারণ, দুইটি স্পর্শক প্রত্যেকে ব্যাসের উপর লম্ব। সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল। (৬ষ্ঠ উপঃ)]

৪র্থ অনু—বৃত্তের কোন স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে তাহা কেন্দ্রগত হইবে।

[উপরের চিত্রে, যদি BC স্পর্শকের AO লম্ব কেন্দ্র দিয়া না যায়, তবে উহার স্পর্শবিন্দুতে দুইটি লম্ব হইবে, কিন্তু ইহা অসম্ভব।]

৫ম অনু—বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন স্পর্শকের উপর লম্ব টানিলে তাহা স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।

[কারণ, তাহা না হইলে O কেন্দ্র হইতে OA ব্যতীত আরও একটি লম্ব টানা সম্ভব হইবে। কিন্তু ইহা সত্য নহে।]

৬ষ্ঠ অনু—শুধু স্পর্শবিন্দু ব্যতীত স্পর্শকের উপরিস্থিত সকল বিন্দুই বৃত্তের বহিঃস্থ।

অনুশীলনী

১। ৫″ এবং ৩″ ব্যাসার্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁক। বৃহত্তর বৃত্তের কতগুলি জ্যা এরূপভাবে আঁক যেন উহা ক্ষুদ্রতরটির স্পর্শক হয়। মাপিয়া দেখাও যে, ঐ জ্যা সমূহ পরস্পর সমান।

২। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইল। প্রমাণ কর যে, উহার কেন্দ্র উহাদের অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

৩। যদি কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের স্পর্শবিন্দুর যোজক-রেখা কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৪। একটি O কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে, AO রেখা BC কে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

৫। কোন বৃত্তের ব্যাস উহার যে-কোন প্রান্তবিন্দুর স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

৬। দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করে তাহারা পরস্পর সমান এবং স্পর্শবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৭। যে সকল বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বাহির কর।

৮। যে সকল বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বাহির কর।

৯। কোন বৃত্তের দুইটি পরস্পর-ছেদী স্পর্শক স্পর্শবিন্দু-যোজক জ্যার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

১০। কোন বৃত্তে একটি চতুর্ভুজ পরিলিখিত হইল। প্রমাণ কর যে, বিপরীত বাহুদ্বয়-দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

১১। কোন বৃত্তের ব্যাস AB। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। এই বৃত্ত দুইটি C ও D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, BC ও BD রেখাদ্বয় দ্বিতীয় বৃত্তটির স্পর্শক হইবে।

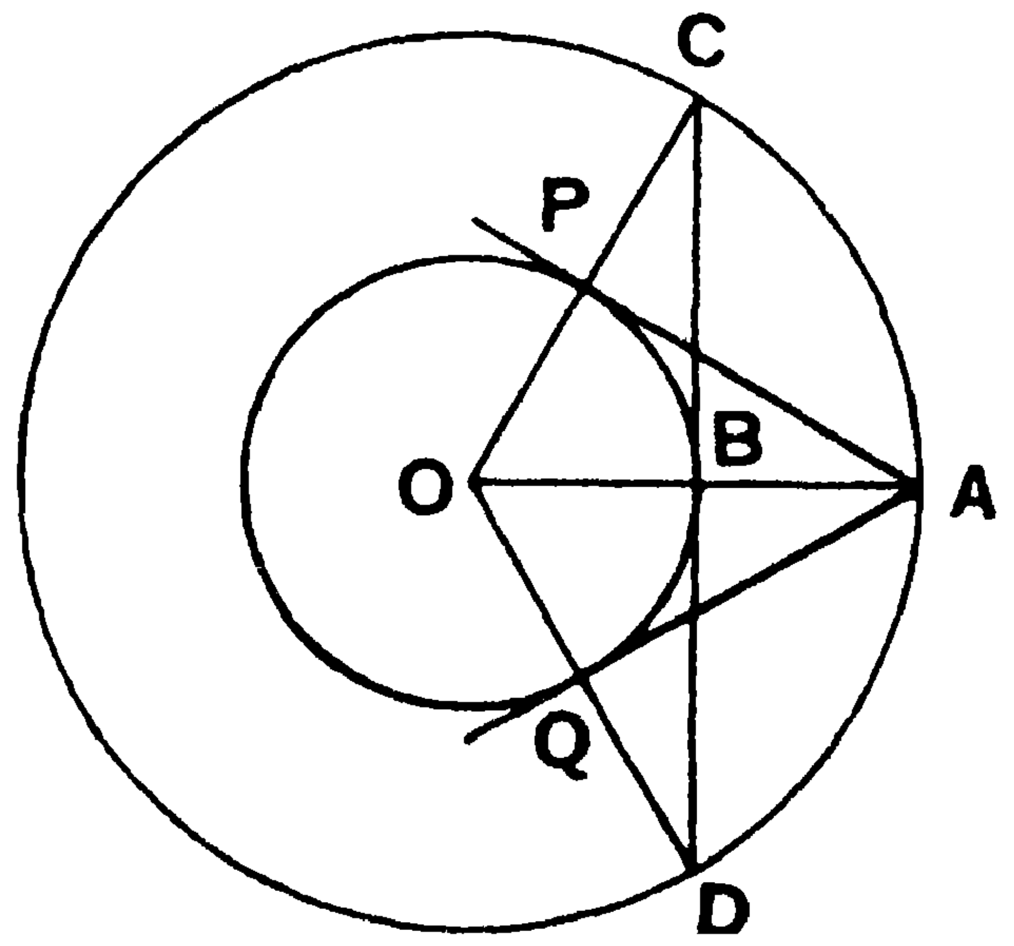
১২। AB ও AC রেখাদ্বয় যথাক্রমে কোন বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস। CAB কোণের দ্বিখক AD, বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AB জ্যাটি D বিন্দুর স্পর্শকের লম্ব।

১৩। একটি বৃত্তের স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল স্পর্শককে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PQ রেখা কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করে।

৪৬শ উপপাদ্য

সাঃ নিঃ—বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় এবং তাহারা পরস্পর সমান। উহারা কেন্দ্রস্থ সমান সমান কোণের সম্মুখীন।

বিঃ নিঃ—মনে কর PBQ একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র এবং A বহিঃস্থ একটি বিন্দু।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, A বিন্দু হইতে PBQ বৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে এবং ঐ স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান। উহাদের সম্মুখীন O কেন্দ্রস্থ কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

প্রমাণ—OA যোগ কর। মনে কর OA রেখা বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া CAD বৃত্তটি আঁক। B বিন্দুতে OAএর উপর CBD লম্ব টান। CBD রেখা CAD বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। OC ও OD যোগ কর।

মনে কর, OC ও OD রেখাদ্বয় PBQ বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AP ও AQ যোগ কর।

প্রমাণ—OPA, OBC দুইটি ত্রিভুজের—

OA = OC, OP = OB.

এবং AOC উভয়ের একটি সাধারণ কোণ।

∴ PA = BC এবং ∠OPA = ∠OBC = এক সমকোণ। [১০ ম উপঃ]

সুতরাং PA রেখা OP এর উপর লম্ব এবং PA রেখা PBQ বৃত্তের একটি স্পর্শক। [৪৫ উপঃ]

ঐরূপে, OAQ, OBD দুইটি ত্রিভুজের—

QA = BD এবং ∠OQA = ∠OBD = এক সমকোণ।

সুতরাং AQ রেখাও PBQ বৃত্তের স্পর্শক।

অতএব বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে AP ও AQ দুইটি স্পর্শক টানা হইল।

আবার, BC = BD. ∴ PA = QA.

এখন, OAP, OAQ দুইটি ত্রিভুজের—

OP = OQ, AP = AQ,

OA উভয়ের একটি সাধারণ বাহু

∴ ∠AOP = ∠AOQ.

[**ই. উ. বি.**]

বিকল্প প্রমাণ—(২০শ সম্পাদ্য, ২২১পৃঃ) OA ব্যাসের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত PBQ বৃত্তটিকে P ও Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। ৪২ উপপাদ্য অনুসারে, OPA ও OQA কোণদ্বয় প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, AP ও AQ রেখাদ্বয় যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হইবে। শেষের অঙ্কিত বৃত্তটি নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে মাত্র দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে বলিয়া, মাত্র দুইটি স্পর্শকই টানা যাইতে পারে।

১ম অনু—বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার কোন স্পর্শক টানা যায় না। কারণ, (উপরের চিত্রে) তখন CAD বৃত্তটি PBQ বৃত্তের

অন্তর্বর্তী হইবে এবং CD স্পর্শকটি উহাকে ছেদ করিতে পারে না। অথবা, OA ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি PBQ বৃত্তটিকে ছেদ করিবে না।

সংজ্ঞা—বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিলে উক্ত বিন্দু এবং স্পর্শবিন্দু-দ্বারা স্পর্শকের সীমাবদ্ধ অংশকে 'ঐ বিন্দু হইতে বৃত্তটির স্পর্শক' বলা যায়।

২য় অনু—বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় উক্ত বিন্দুগত ব্যাসের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

অনুশীলনী

১। যদি কোন চতুর্ভুজ একটি বৃত্তে পরিলিখিত হয়, তবে উহার একদিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অন্যদিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

২। প্রমাণ কর যে, যদি কোন সামান্তরিক একটি বৃত্তে পরিলিখিত হয়, তবে উহা একটি রম্বস্ হইবে।

৩। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক আর একটি স্পর্শককে ছেদ করিলে, এই তৃতীয় স্পর্শকের ছিন্ন অংশের সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ এক সমকোণ হইবে।

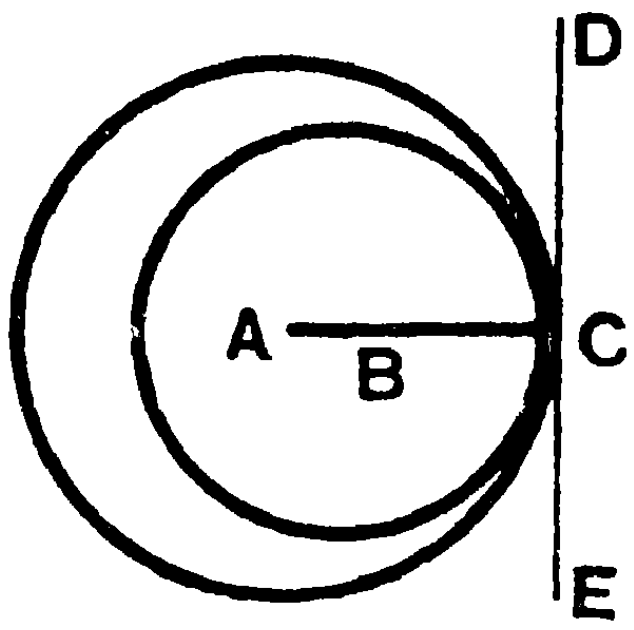
৪। যদি কোন বৃত্তের একটি বিন্দুর স্পর্শক দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শককে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PQএর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

৫। কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য সর্বদা একই হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪৭শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।১১, ১২)

সাঃ নিঃ—দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে তাহাদের স্পর্শবিন্দু ও কেন্দ্রদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

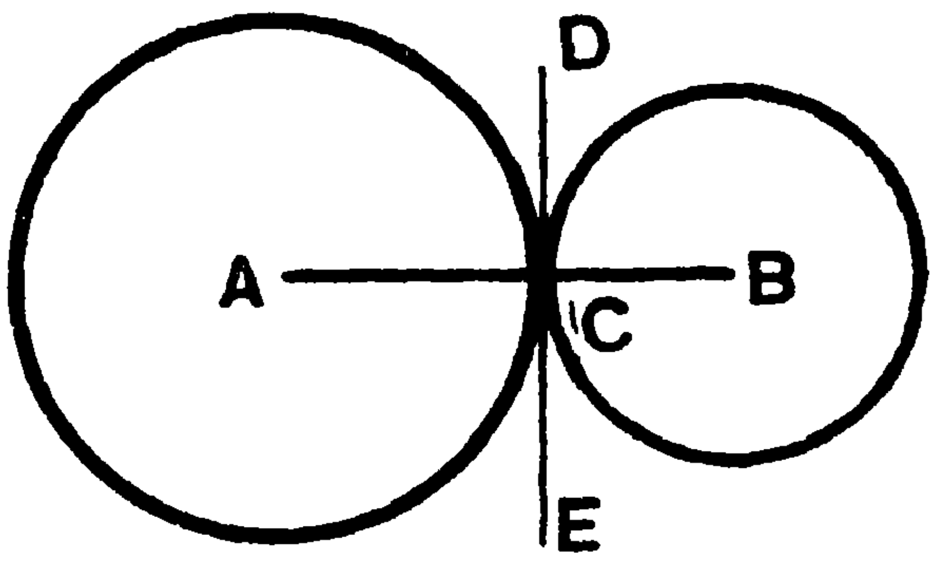
বিঃ নিঃ—মনে কর A ও B দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র; উহারা পরস্পর C বিন্দুতে স্পর্শ করিল।



(১ম চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, C ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত

AC ও BC সংযুক্ত কর।



(২য় চিত্র)

প্রমাণ—মনে কর C বিন্দুতে DCE উভয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক।

এখন, স্পর্শবিন্দুতে AC ও BC ব্যাসার্ধ টানা হইয়াছে বলিয়া, AC ও BC উভয়েই DCEএর উপর লম্ব।

সুতরাং ∠ACD ও ∠BCD প্রত্যেকে একটি সমকোণ এবং উহারা সন্নিহিত কোণ।

অতএব A, C ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। [২য় উপঃ]

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—যদি দুইটি বৃত্তের পরস্পর অন্তঃস্পর্শ হয় (১ম চিত্র) তবে তাহাদের কেন্দ্র-যোজক রেখা উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান হইবে, এবং বহিঃস্পর্শ হইলে (২য় চিত্র) কেন্দ্র-যোজক রেখাটি উহাদের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হইবে।

২য় অনু—যে সকল বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, উহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র-যোজক সরলরেখা।

৩য় অনু—দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্পর্শ হইলে, স্পর্শবিন্দু ব্যতীত ক্ষুদ্রবৃত্তের সকল বিন্দুই বৃহত্তর বৃত্তটির অন্তঃস্থ হইবে।

৪র্থ অনু—দুইটি বৃত্তের বহিঃস্পর্শ হইলে, স্পর্শবিন্দু ব্যতীত এক বৃত্তের বিন্দুসমূহ অপরের বহিঃস্থ হইবে।

দ্রষ্টব্য। দুইটি পরস্পর-ছেদী বৃত্তের ধর্ম হইতে বর্ত্তমান উপপাদ্যটির সত্য অনুমান করা যাইতে পারে। মনে কর উহাদের ছেদ-বিন্দু দুইটি ক্রমে পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইল। অবশেষে যখন তাহারা মিলিয়া যায়, তখনই বৃত্ত দুইটি পরস্পর স্পর্শ করে এবং উহাদের কেন্দ্র-যোজক রেখাটি সাধারণ স্পর্শকটিকে সমকোণে ছেদ করে। ছেদী বৃত্তদ্বয়ের এইরূপ বিশেষঅবস্থা কল্পনা করিলে আরও কয়েকটি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়—

(১) কোন দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র-যোজক রেখার উপর উহাদের একটি সাধারণ বিন্দু থাকিলে উহারা পরস্পর স্পর্শ করিবে।

(২) দুইটি বৃত্তের একটি সাধারণ বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক থাকিলে উহারা পরস্পর স্পর্শ করে।

অনুশীলনী

১। যদি A ও B বিন্দু কেন্দ্র-বিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AP এবং BQ সমান্তরাল।

২। A বিন্দুতে দুইটি বৃত্তের বহিঃস্পর্শ হইল। এবং BC সরলরেখা উভয়কেই B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে, BAC একটি সমকোণ।

৩। A বিন্দুতে দুইটি বৃত্তের বহিঃস্পর্শ হইল। A বিন্দুগত একটি সরলরেখা উহাদের সহিত B ও C বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

৪। যদি কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে A বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসের সমান হয় এবং AP ও AQ দুইটি স্পর্শক উহাকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর যে, APQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৫। একটি b ব্যাসার্ধের বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত আঁক। কত প্রকারে আঁকিতে পার বল ?

৬। A, B ও C বিন্দুতে তিনটি বৃত্তের পরস্পর বহিঃস্পর্শ হইল। AB ও AC বর্ধিত হইয়া BC বৃত্তের সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, DE রেখাটি BC বৃত্তের ব্যাস এবং অন্য দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র-যোজক রেখার সমান্তরাল।

৭। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিল। একটি ছেদ-বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা পরিধি-দ্বারা সীমাবদ্ধ হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ ছেদ-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভূত কোণের সমান।

৮। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে, এই ত্রিভুজ তিনটির পরিবৃত্তগুলি এক বিন্দুগত হইবে।

৯। একই ভূমি ও ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজের মধ্যে সমবাহু ত্রিভুজটির শিরঃকোণ বৃহত্তম।

১০। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের মধ্যে সমবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা বৃহত্তম।

৪৮শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৩২)

সাঃ নিঃ—বৃত্তের কোন বিন্দু দিয়া একটি জ্যা এবং স্পর্শক টানিলে উক্ত জ্যা স্পর্শকটির সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা বৃত্তাংশস্থ একান্তর কোণের সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, CD জ্যা CFDE বৃত্তকে দুই বৃত্তাংশে বিভক্ত করিয়াছে এবং ∠CED ও ∠CFD এই দুই বৃত্তাংশের কোণদ্বয়। C বিন্দুতে ACB স্পর্শক টান।

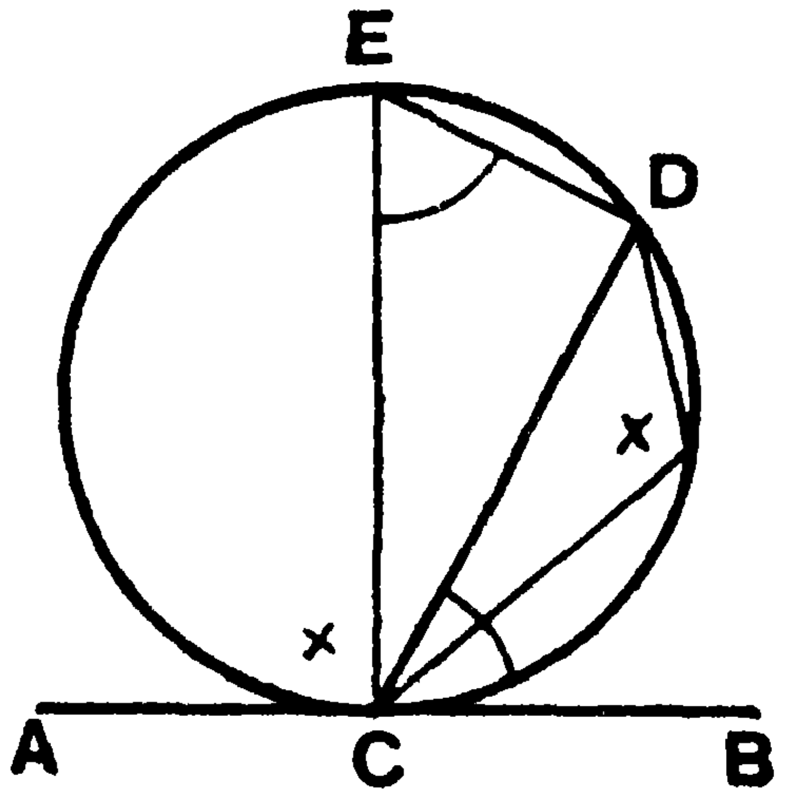
প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) ∠BCD = একান্তর ∠CED

(২) ∠ACD = একান্তর ∠CFD.

মনে কর, C বিন্দু হইতে CE একটি ব্যাস টানা হইল। এবং CFD চাপের একটি বিন্দু F.

ED, DF, FC সংযুক্ত কর।



প্রমাণ— ∠EDC = এক সমকোণ; [৪২শ উপঃ]

∴ ∠CED + ∠ECD = এক সমকোণ,

= ∠ECB, [৪৫শ উপঃ]

= ∠ECD + ∠DCB ; [৮ম উপঃ]

ইহা হইতে সাধারণ ∠ECD বাদ দিলে,

∠CED = ∠DCB.

আবার, E, D, F, C বৃত্তস্থ (cyclic) বলিয়া,

$\angle CFD = \angle CED$ এর সম্পূরক ; [৪১শ উপঃ]

অর্থাৎ $\angle CFD = \angle DCB$ এর সম্পূরক ।

$= \angle DCA$. [ই. উ. বি.]

দ্রষ্টব্য। বিপরীতক্রমে, একই অঙ্কন দ্বারা দেখান যায় যে, যদি $\angle BCD = \angle CED$, তবে BC রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে ।

কারণ, $\angle BCE = \angle BCD + \angle ECD$

$= \angle CED + \angle ECD$

= এক সমকোণ ।

অর্থাৎ BC রেখাটি বৃত্তের C বিন্দুতে স্পর্শক ।

বিবিধ অনুশীলনী

১ । কোন বৃত্তের APB চাপের মধ্যবিন্দু P. প্রমাণ কর যে, P বিন্দুর স্পর্শকটি AB জ্যা এর সমান্তরাল ।

২ । একটি সমবাহু ত্রিভুজ কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার শীর্ষবিন্দুর স্পর্শক তিনটি আর একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে ।

৩ । AB একটি বৃত্তের জ্যা । A বিন্দু হইতে B বিন্দুর স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বটি AB এর B বিন্দুগত লম্বের সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে । প্রমাণ কর যে, AC রেখা বৃত্তটির ব্যাসের সমান ।

৪ । ABC ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ । B বিন্দু হইতে AC অতিভুজের উপর BD লম্ব । প্রমাণ কর যে, BC বাহু BD ও B বিন্দুর স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণটির দ্বিখণ্ডক ।

৫। যদি দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্পর্শ হয়, তবে বৃহত্তরটির কোন জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করিলে উহা স্পর্শ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে এবং উহার অংশদ্বয় বৃত্ত দুইটির স্পর্শবিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

৬। যদি দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্পর্শ হয় এবং একটি সরলরেখা উভয়কেই ছেদ করে, তবে বৃত্ত দুইটি-দ্বারা উহার ছিন্ন অংশদ্বয় স্পর্শবিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৭। C একটি বৃত্তের কেন্দ্র। CA ও CB ব্যাসার্ধ দুইটি পরস্পর লম্ব। B বিন্দু হইতে অঙ্কিত BP জ্যা CA কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BA রেখা ANP ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

৮। দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB এবং উহাদের একটি অপরটির কেন্দ্র D বিন্দু দিয়া গিয়াছে। প্রমাণ কর যে, উভয়ের সাধারণ জ্যা ও প্রথম বৃত্তের A বিন্দুর স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণ AD রেখাদ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়।

৯। কতগুলি সমান বৃত্ত এক বিন্দুগামী হইলে, উহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত।

১০। দুইটি বৃত্তের একটি ছেদ-বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত হইয়া উহাদের পরিধি-দ্বারা সীমাবদ্ধ হইল। প্রমাণ কর যে, উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণ ছেদ-বিন্দুটির স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমান।

১১। যদি কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দু দিয়া উহার একটি জ্যা টানা হয়, তবে ঐ জ্যা-দ্বারা ছিন্ন চাপের মধ্যবিন্দু হইতে ঐ স্পর্শক ও জ্যা এর উপর পাতিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

১২। দুইটি বৃত্তের একটি ছেদ-বিন্দু A। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত BAC ও DAE দুইটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়-দ্বারা যথাক্রমে B, C এবং D, E বিন্দুতে সীমাবদ্ধ হইল। প্রমাণ কর যে, A বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণটি BD ও CE এর অন্তর্ভূত কোণের সমান হইবে।

১৩। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। একটির পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে অঙ্কিত PAC ও PBD দুইটি সরলরেখা অপর বৃত্তটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, CD রেখা P বিন্দুর স্পর্শকের সমান্তরাল হইবে।

১৪। একটি বৃত্তের BA ব্যাসকে P পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল যেন, AP ব্যাসার্ধের সমান হয়। A বিন্দুতে AED একটি স্পর্শক টানা হইল। P বিন্দু হইতে PEC স্পর্শক বৃত্তটিকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া, AED এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। BC যোগ করিয়া D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইলে প্রমাণ কর যে, DEC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

১৫। দুইটি বৃত্তের বহিঃস্পর্শ হইল। কোন সরলরেখা উহাদের একটিকে A ও D বিন্দুতে এবং অন্যটিকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AB ও CD দ্বারা স্পর্শবিন্দুতে উৎপন্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

১৬। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ স্পর্শকদ্বয় যে-কোন ছেদ-বিন্দুতে যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

১৭। APB চাপের P একটি বিন্দু এবং AP চাপ $= 2$ PB চাপ। P বিন্দুর স্পর্শক বর্ধিত AB কে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AQ রেখা AB এর উপর A বিন্দুতে লম্ব এবং RP এর সহিত Q বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে $QP = PR$।

[সংকেত—O কেন্দ্রের সহিত A, P ও B যোগ কর এবং AP, BP সংযুক্ত করিয়া $\angle PAR = \angle PRA$.]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

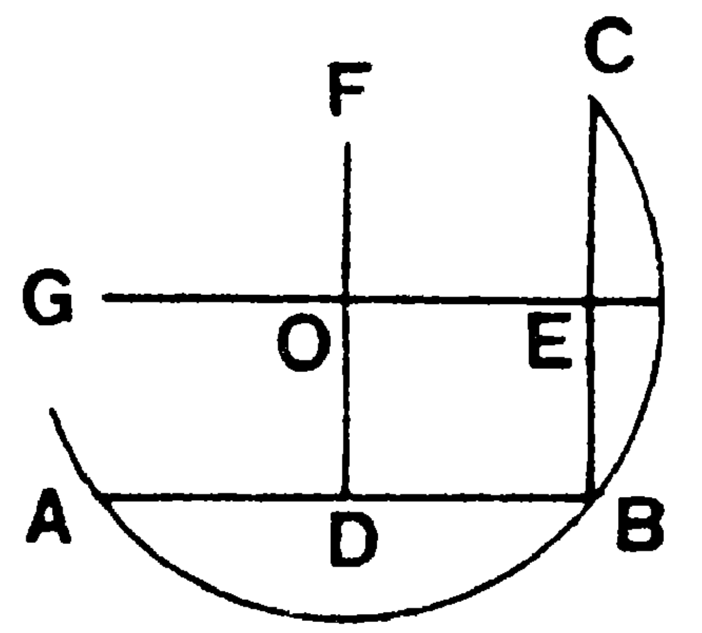
বৃত্তসম্বন্ধীয় সম্পাদ্য (Problems on Circles)

১৮শ সম্পাদ্য—(ইউ—৩।১)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের বা চাপের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত বা চাপ। উহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন—AB ও BC দুইটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু D ও E হইতে উহাদের উপর যথাক্রমে DF ও EG লম্ব টান। মনে কর DF ও EG পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। O বিন্দুই উদ্দিষ্ট কেন্দ্র হইবে।



প্রমাণ—DF রেখার প্রত্যেকটি বিন্দু A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং EG রেখার প্রত্যেকটি বিন্দুই B ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

∴ DF ও EG রেখার সাধারণ O বিন্দুটি A, B ও C বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

অর্থাৎ $OA = OB = OC$.

সুতরাং O বিন্দুই ABC বৃত্তের বা চাপের কেন্দ্র।

[ই. স. বি.]

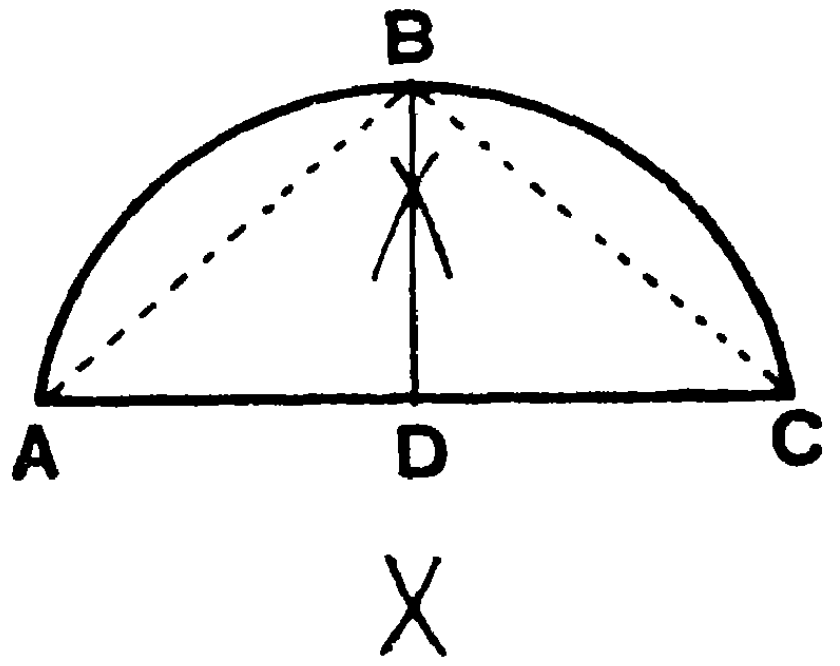
১৯শ সম্পাদ্য—(ইউ—৩।৩০)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট চাপকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC চাপটিকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—AC যোগ করিয়া উহাকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। D বিন্দু হইতে AC এর উপর DB লম্ব টান। মনে কর DB লম্ব ABC চাপের সহিত B বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে ABC চাপ B বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।



প্রমাণ—AB, CB যোগ কর।

DB লম্বের উপর যে-কোন বিন্দু A ও C বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী ;

$\therefore \quad AB = CB.$

সুতরাং এই দুই সমান জ্যা-দ্বারা ছিন্ন হইয়াছে বলিয়া,

AB চাপ = BC চাপ। [৪৪শ উপঃ]

অর্থাৎ ABC চাপটি B বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। [**ই. স. বি.**]

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তের চাপ দেওয়া আছে। বৃত্তটি অঙ্কিত কর।

২। বৃত্তের দুইটি চাপের দৈর্ঘ্য ও অবস্থান নির্দিষ্ট আছে, বৃত্তটি অঙ্কিত কর।

৩। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত হয়। কখন্ এরূপ অঙ্কন অসম্ভব হইবে, বল।

৪। বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ক্ষুদ্রতম জ্যাটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন বৃত্তের একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন, উহার দৈর্ঘ্য বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ হয়।

৬। দুইটি বৃত্তের একটি ছেদ-বিন্দু A হইতে এমন একটি সরলরেখা টান যেন, উহা পরিধিদ্বয়ের সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইয়া DA, AE এর সমান হয়।

৭। ABC ত্রিভুজের A শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক উহার পরিবৃত্তের BC চাপকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৮। ABC ত্রিভুজের A ও B শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব পরিবৃত্তকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, CX চাপ = CY চাপ।

৯। দুইটি সমান বৃত্তের AB একটি সাধারণ জ্যা। যদি B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন সরলরেখা পরিধিদ্বয়কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, XAY ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

১০। ২″ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত কর।

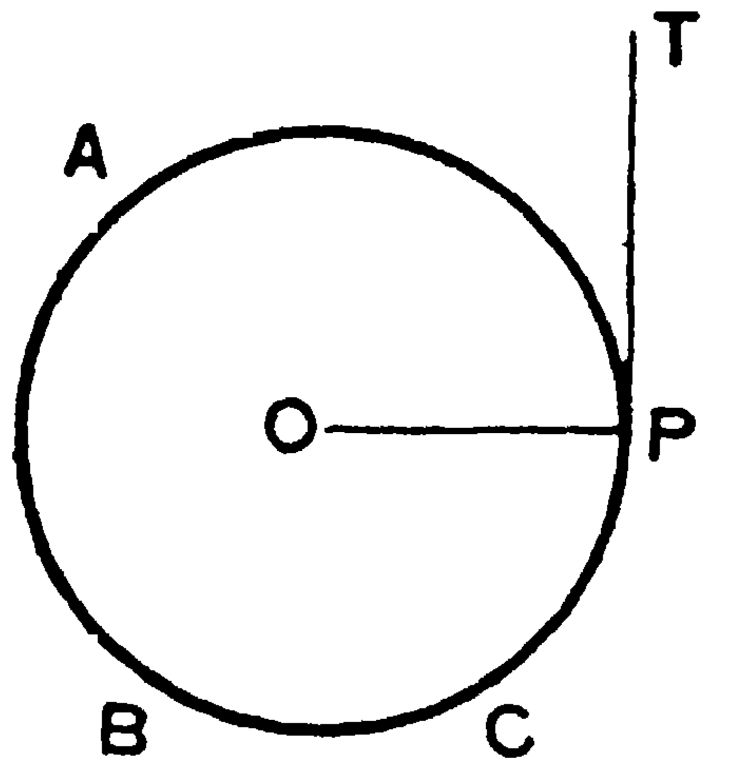
২০শ সম্পাদ্য—(ইউ—৩।১৭)

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক টানিতে হইবে।

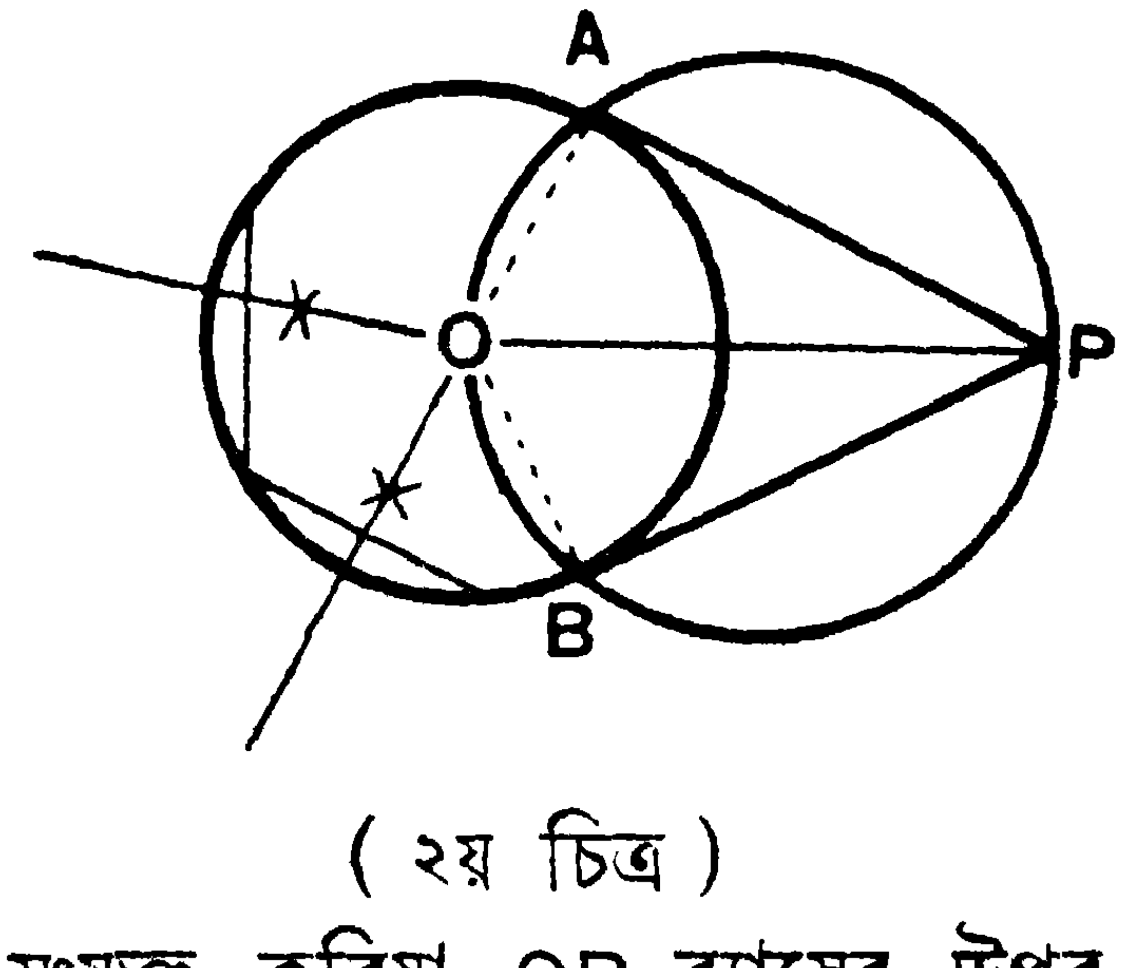
(১) মনে কর P বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত। (১ম চিত্র)



(১ম চিত্র)

অঙ্কন—OP যোগ করিয়া P বিন্দুতে OP এর উপর PT লম্ব টান। তাহা হইলে PT রেখাই বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক হইবে।

(২) মনে কর P বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। (২য় চিত্র)



(২য় চিত্র)

অঙ্কন—OP সংযুক্ত করিয়া OP ব্যাসের উপর একটি বৃত্ত আঁক যেন, উহা ABC বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

PA, PB যোগ কর।

তাহা হইলে PA ও PB রেখাই উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ—OA, OB যোগ কর।

এখন, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া, OAP একটি সমকোণ; অর্থাৎ A বিন্দুতে OA ব্যাসার্ধের উপর AP একটি লম্ব।

সুতরাং AP রেখা ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক। এইরূপে, BP রেখাও ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[**ই. স. বি.**]

অনু—PA, PB পরস্পর সমান এবং উহাদের সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ দুইটিও পরস্পর সমান। [৪৬শ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য।]

দ্রষ্টব্য। P বিন্দু বৃত্তের অন্তঃস্থ হইলে, OP ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে ছেদ করিবে না। এস্থলে কোন স্পর্শকও টানা যায় না।

অনুশীলনী

১। একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র লইয়া একটি বৃত্ত আঁক যেন, উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

২। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র লইয়া এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত আঁক। কত প্রকারে বৃত্তটি আঁকা যায় বল।

৩। একটি সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি বৃত্তের স্পর্শক টান।

৪। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমকোণ করিয়া একটি বৃত্তের স্পর্শক টান।

৫। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

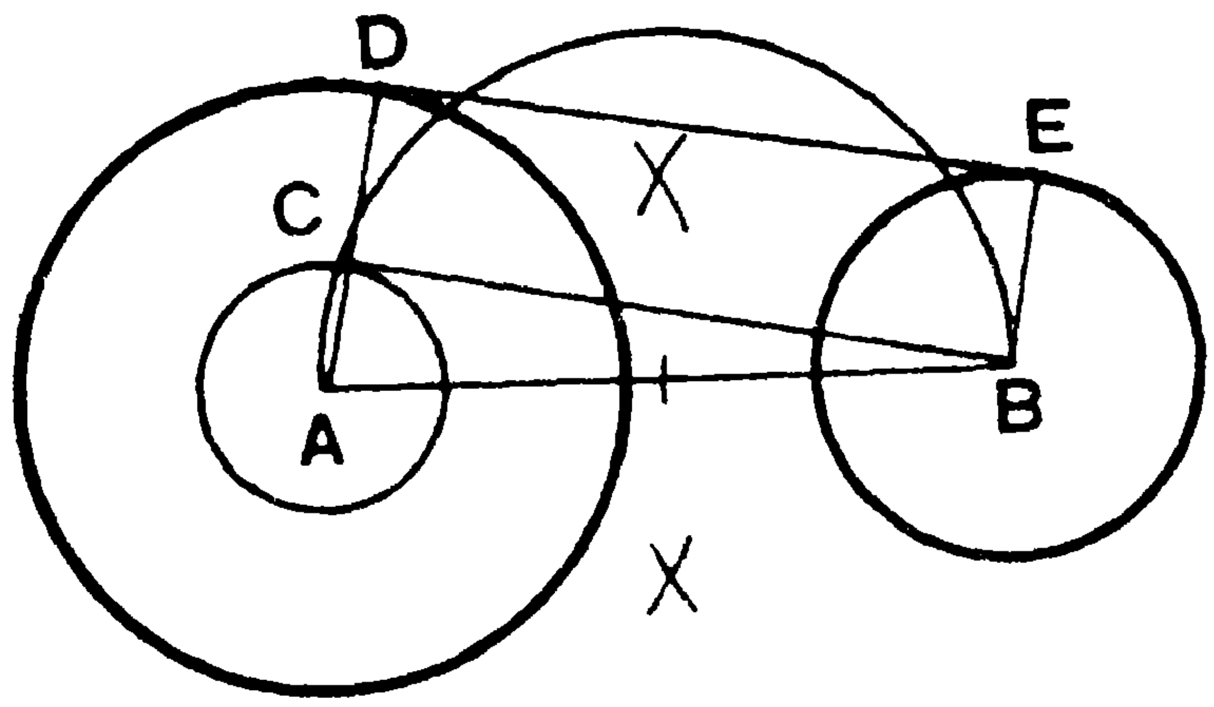
৬। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যাএর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া জ্যাটি অঙ্কিত কর।

২১শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—দুইটি বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর A ও B যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র।

অঙ্কন—(১) A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং B কেন্দ্র হইতে এই অঙ্কিত বৃত্তের উপর BC একটি স্পর্শক টান। মনে কর উহার স্পর্শবিন্দু C.



[১ম চিত্র]

AC যোগ করিয়া বৃহত্তর বৃত্তের পরিধির D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। B বিন্দু হইতে CDএর সমান্তরাল BE রেখা টান। মনে কর BE ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, DE যোগ করিলে, DE রেখাই উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক হইবে।

এই প্রকারে AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে আর একটি সাধারণ স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

প্রমাণ—CD রেখা BEএর সমান ও সমান্তরাল।

∴ ED রেখা BC এর সমান ও সমান্তরাল।

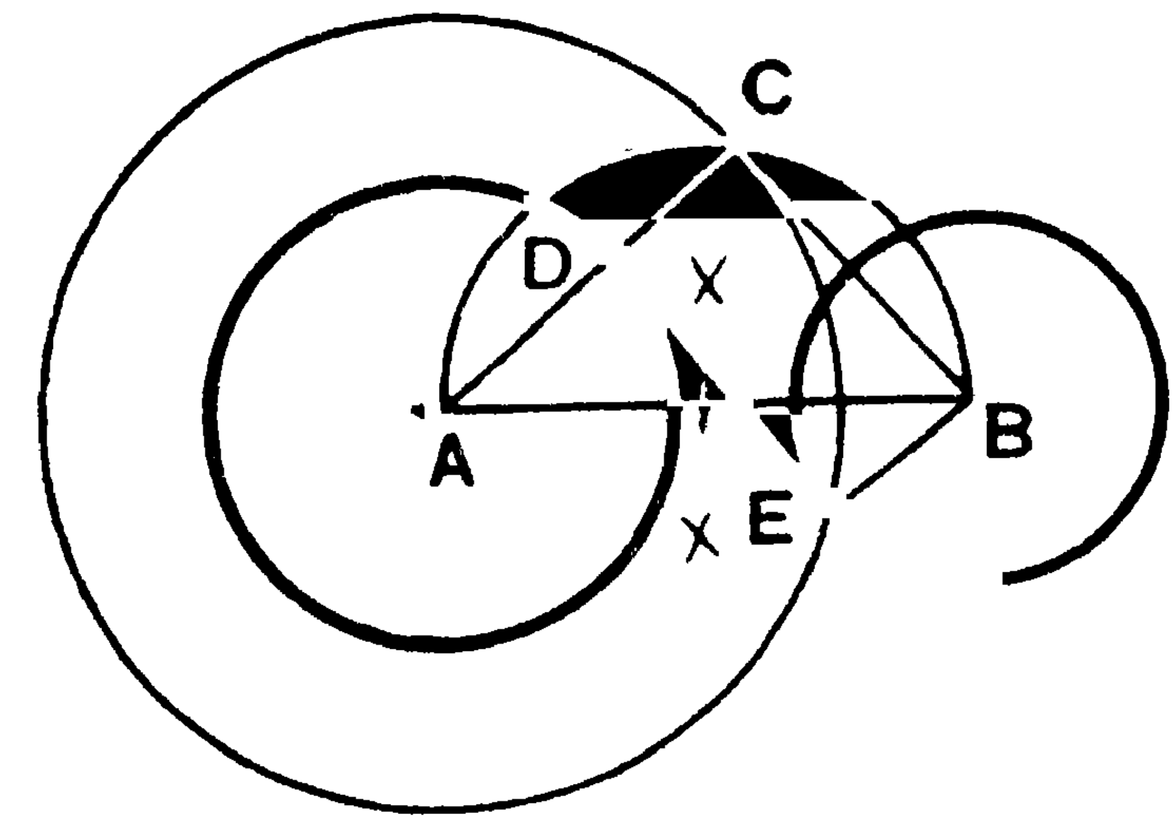
কিন্তু CB রেখা ACএর উপর লম্ব।

∴ DE রেখাও ADএর উপর লম্ব, অর্থাৎ BEএর উপর লম্ব।

সুতরাং DE রেখা উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক।

(২) অন্য প্রকারেও বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। (২য় চিত্র)

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান ব্যাসাধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। এই বৃত্তের BC একটি স্পর্শক টান। মনে কর C উহার স্পর্শ বিন্দু এবং AC রেখা বৃহত্তর বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।



B বিন্দু হইতে BC এর একই পার্শ্বে AD এর সমান্তরাল করিয়া BE রেখা টান। উহা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। D ও E যোগ করিলে, DE রেখাই উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক হইবে। এইরূপে আর একটি সাধারণ স্পর্শকও টানা যাইতে পারে। (পূর্বের ন্যায় প্রমাণ করিয়া দেখাও।)

দ্রষ্টব্য। প্রথম প্রকারের সাধারণ স্পর্শককে সরল (direct) সাধারণ স্পর্শক এবং দ্বিতীয় প্রকারের সাধারণ স্পর্শককে তির্যক্ (transverse) সাধারণ স্পর্শক বলে। প্রত্যেক প্রকারের স্পর্শকই দুইটি করিয়া টানা যায়।

অনুশীলনী

১। দুইটি সমান বৃত্তের একটি সাধারণ সরল ও তির্যক স্পর্শক আঁক।

২। দুইটি পরস্পর-ছেদী বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক আঁক। এস্থলে কোন তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানা যায় কি?

৩। বহিঃ অথবা অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর। কোন্ অবস্থায় কয়টি সাধারণ স্পর্শক টানা যায়?

৪। দুইটি বৃত্তকে ছেদ করিয়া এরূপ একটি সরলরেখা টান যে, উহাদের দ্বারা-ছিন্ন জ্যা দুইটির দৈর্ঘ্য দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

৫। কোন বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর যেন অপর একটি বৃত্তদ্বারা ইহার ছিন্ন অংশ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

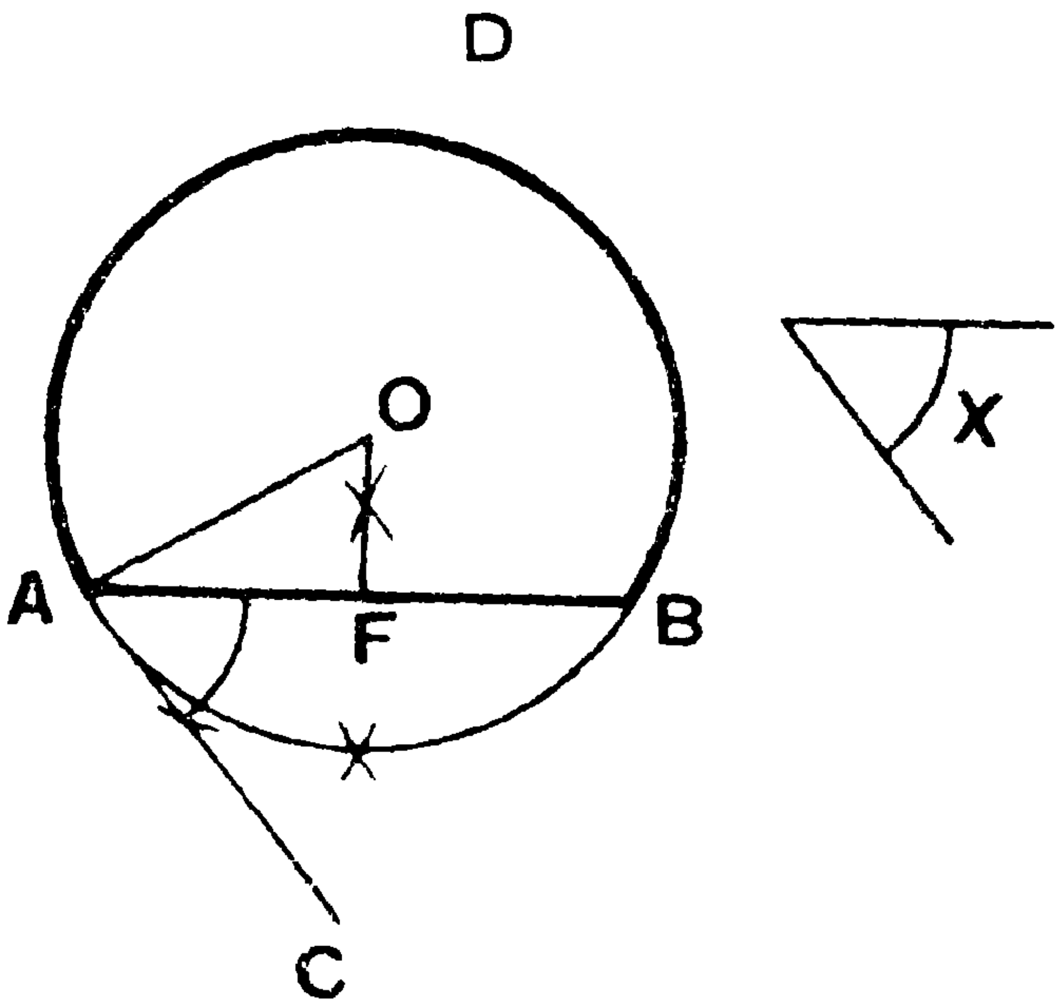
২২শ সম্পাদ্য—(ইউ—৩।৩৩)

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি নির্দিষ্ট কোণ-বিশিষ্ট বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং X একটি নির্দিষ্ট কোণ।

AB এর উপর X কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—AB এর A বিন্দুতে X কোণের সমান ∠BAC অঙ্কিত কর। এবং A বিন্দুতে ACএর উপর AO লম্ব টান।



AB রেখাকে F বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া AB এর উপর FO লম্ব টান যেন, ইহা AO এর সহিত O বিন্দুতে মিলিত হয়।

এখন, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

এই ADB ই উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ হইবে।

প্রমাণ—FO রেখার যে-কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

∴ AO = BO.

সুতরাং উক্ত বৃত্তটি B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AC রেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। কারণ, AC রেখা OA ব্যাসার্ধের লম্ব।

এই ADB বৃত্তাংশের কোণ BAC কোণের একান্তর বলিয়া,

$$\angle ADB = \angle BAC = \angle X.$$

[**ই. স. বি.**]

অনু—একটি বৃত্তকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন, উহার একদিকের বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, এক অংশের পরিধিস্থ কোণ অন্য অংশের পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।

২। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে এবং শীর্ষবিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। নিম্নলিখিত প্রদত্ত অঙ্গ-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—

ভূমি, শিরঃকোণ এবং—

(১) অন্য একটি বাহু।

(২) উন্নতি।

(৩) শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের পাদবিন্দু।

(৪) ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমার অথবা অপর কোন মধ্যমার দৈর্ঘ্য।

(৫) শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ও ভূমির ছেদ-বিন্দু।

[AB ভূমি ও C নির্দিষ্ট বিন্দু এবং X নির্দিষ্ট কোণ। AB ভূমির উপর X কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিয়া সম্পূর্ণ পরিধি আঁক। APB চাপকে P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। PC বর্ধিত করিয়া D বিন্দুতে পরিধির সহিত সংলগ্ন কর। ABD ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।]

(৬) ভূমি-সংলগ্ন কোণ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

(৭) অপর দুই বাহুর সমষ্টি।

[AB ভূমি, X নির্দিষ্ট কোণ, K রেখা অপর দুই বাহুর সমষ্টি। AB এর উপর X কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ আঁক এবং উহার উপর X কোণের অর্ধেকের সমান কোণ-বিশিষ্ট আর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া K এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন, উহা শেষোক্ত বৃত্তটিকে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিল। AD অথবা AE যোগ করিয়া উহা প্রথমোক্ত বৃত্তাংশের সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইল। ABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।]

(৮) অপর দুই বাহুর অন্তর।

[AB ভূমি, X নির্দিষ্ট কোণ এবং K রেখা অপর দুই বাহুর অন্তরের সমান। AB এর উপর X কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ আঁক এবং উহার উপর $৯০^\circ + \frac{1}{2}X$ কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট আর একটি বৃত্তাংশ আঁক। A কেন্দ্র হইতে K রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্ত শেষোক্ত বৃত্তাংশটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। AD যোগ করায় উহা প্রথমোক্ত বৃত্তাংশটির সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইল। ABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।]

(৯) যে কোন মধ্যমার দৈর্ঘ্য।

৪। একটি বৃত্তের AB জ্যা এবং উহার একটি বিন্দু C দেওয়া আছে। পরিধির উপর একটি D বিন্দু নির্ণয় কর যেন, DC রেখা ADB কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৫। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখা ও O একটি বিন্দু দেওয়া আছে। O বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন, উহা সরলরেখা দুইটির সহিত P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইলে, OPOQ আয়ত একটি নির্দিষ্ট আয়তের সমান হয়।

৬। AB একটি বৃত্তের জ্যা। C উহার ক্ষুদ্রতর চাপের একটি বিন্দু। বৃত্তের চাপের উপর এরূপ একটি D বিন্দু নির্ণয় কর যেন, BA রেখা DBC কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৭। OA, ও OB তুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিল। OA এর উপর C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। OA রেখাকে C বিন্দুতে এবং OB রেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

৮। এরূপ তুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁক যেন, ক্ষুদ্রবৃত্তটিকে স্পর্শকারী বৃহত্তর বৃত্তের জ্যাগুলি ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসের সমান হয়।

৯। একটি ত্রিভুজের মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যেন, উহার বাহুগুলি ঐ বিন্দুতে তিনটি সমান কোণ উৎপন্ন করে।

১০। কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, পরিবৃত্তের ও অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১১। A, B, C তিনটি বৃত্ত। A, B এর মধ্যে এবং B, C এর মধ্যে অবস্থিত। যদি সম্ভব হয় তবে Bএর পরিধিস্থ একটি বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা টান যেন, উহার A এবং C দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশ B এর পরিধি-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়।

১২। কোন বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট জ্যা এর সহিত ৪৫° কোণ করিয়া নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা অঙ্কিত কর।

১৩। ২″ দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর (১) ৪৫° কোণ-বিশিষ্ট এবং (২) ৬০° কোণ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর।

১৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করাইয়া ২″ ও ৩″ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট তুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

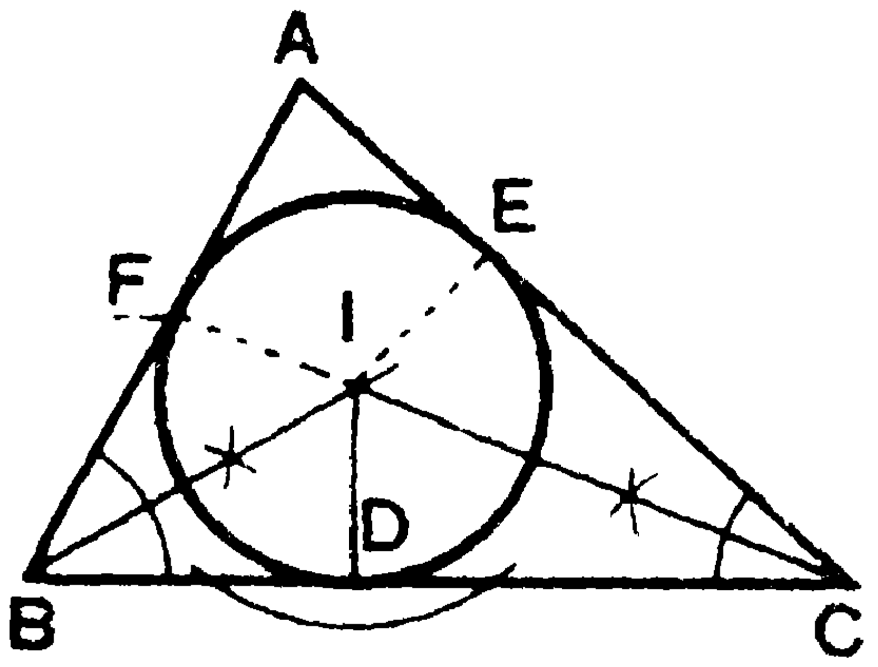
১৫। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করাইয়া অঙ্কিত কর।

২৩শ সম্পাদ্য—(ইউ—৪।৪)

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (in-circle) অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—ABC ও ACB কোণদ্বয়কে যথাক্রমে BI এবং CI রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর। BI ও CI রেখাদ্বয় I বিন্দুতে মিলিত হইলে, I বিন্দুটিই অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।



প্রমাণ— I বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব টান।

এখন, DIB, FIB দুইটি ত্রিভুজের $\angle DBI = \angle FBI$;

$\angle BDI = \angle BFI =$ এক সমকোণ।

এবং BI উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $DI = FI$ [১১শ উপঃ]

এইরূপে, $DI = EI$. $\therefore$ $DI = FI = EI$.

সুতরাং, I কেন্দ্র হইতে ID ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহা D, E ও F বিন্দু দিয়া হইবে এবং ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়কে স্পর্শ করিবে। কারণ, ত্রিভুজের বাহুগুলি ID, IE, IF ব্যাসার্ধগুলির লম্ব।

[ই. স. বি.]

১ম দ্রষ্টব্য। মনে কর r = ব্যাসার্ধ, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

$$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle AIB + \triangle BIC + \triangle CIA.$$
$$= \tfrac{1}{2}\, rc + \tfrac{1}{2}\, ra + \tfrac{1}{2}\, rb$$
$$= \tfrac{1}{2}\, r\,(a+b+c).$$

সুতরাং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$S = \tfrac{1}{2}\, r\ (a+b+c)$$
$$= r.\ s.\ (\ 2s \equiv a+b+c \text{ লিখিয়া })।$$

এবং ক্ষেত্রফল S নির্ণয় করিয়া, $r = \dfrac{S}{s}$.

অন্তঃকেন্দ্র—এই বৃত্তটিকে ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (in-circle) এবং I বিন্দুকে অন্তঃকেন্দ্র (in-centre) বলে।

২য় দ্রষ্টব্য। AI যোগ করিলে দেখা যায় যে, AI রেখা BAC কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং কোন ত্রিভুজের অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডকত্রয় উহার অন্তঃকেন্দ্রে মিলিত হয়।

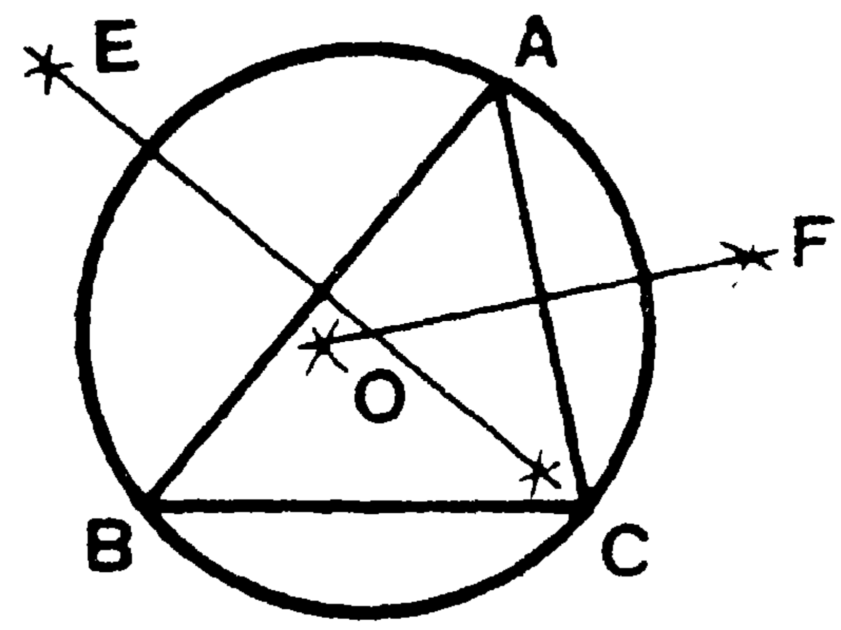
অনু—প্রমাণ কর যে, $\angle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}A$.

২৪শ সম্পাদ্য—(ইউ—৪।৫)

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—AB এবং AC বাহুকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিয়া EO ও FO রেখা টান। মনে কর EO এবং FO রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইল। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলেই উদ্দিষ্ট পরিবৃত্ত হইবে, অর্থাৎ উহা A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে।



প্রমাণ— EO রেখা AB বাহুকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে বলিয়া, উহার প্রত্যেকটি বিন্দু A ও B বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

$$\therefore \quad AO = BO.$$

এইরূপে, FO রেখার প্রত্যেকটি বিন্দু A ও C বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

$$\therefore \quad AO = CO. \qquad \therefore \quad AO = BO = CO.$$

সুতরাং O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে, অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত হইবে। [**ই. স. বি.**]

অনু—যে কোন তিনটি বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য। এই বৃত্তটিকে ABC ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (circum-circle) এবং ইহার কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) বলে।

২৫শ সম্পাদ্য—(ইউ—৪।৫)

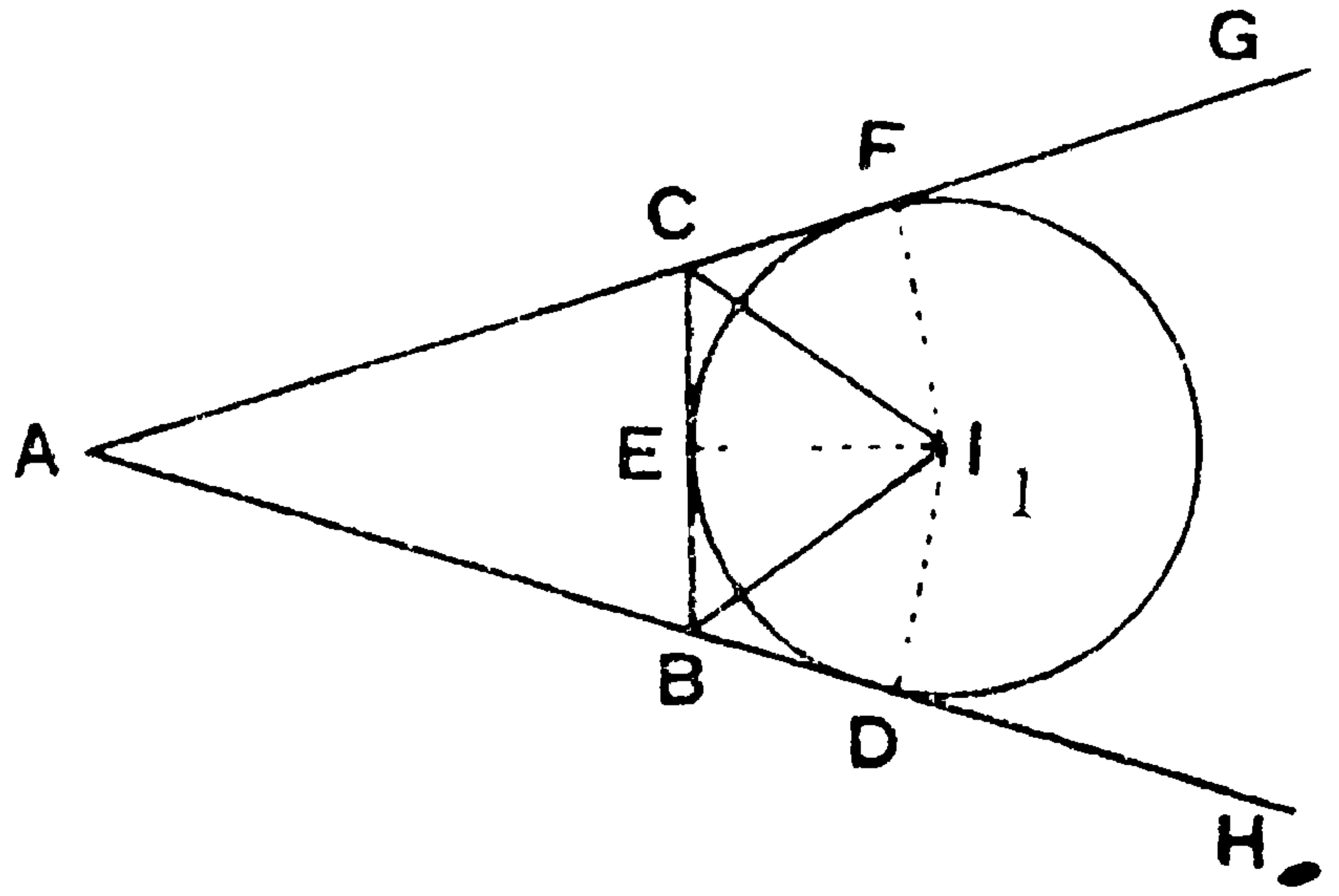
সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় যথাক্রমে H ও G বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইল।

BC এবং বর্ধিত AB ও AC বাহুকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—HBC ও GCB কোণদ্বয়কে যথাক্রমে BI_1, CI_1 রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর BI_1 ও CI_1 রেখাদ্বয় I_1 বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে I_1 বিন্দুটিই উদ্দিষ্ট বহির্বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।



প্রমাণ— I_1 বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে I_1E, I_1F ও I_1D লম্ব টান।

এখন, BEI_1 ও BDI_1 দুইটি ত্রিভুজের, $\angle EBI_1 = \angle DBI_1$।

$\angle BEI_1 = \angle BDI_1 =$ এক সমকোণ ;

এবং BI_1 উভয়ের একটি সাধারণ অতিভুজ।

$\therefore \quad EI_1 = DI_1.$ [১৫শ উপঃ]

ঐরূপে, CEI_1, FCI_1, ত্রিভুজদ্বয় হইতে, $EI_1 = FI_1$.

$\therefore \quad EI_1 = DI_1 = FI_1.$

এখন I_1 কেন্দ্র হইতে I_1E ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D, E ও F বিন্দুগত হইবে, এবং BC ও বর্ধিত AB, AC বাহুকে স্পর্শ করিবে (কারণ, D, E ও F বিন্দুর কোণগুলি প্রত্যেকেই এক সমকোণ)।

[ই. স. বি.]

দ্রষ্টব্য। প্রত্যেক বাহুর বহির্ভাগে এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়। সুতরাং প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত হইবে। এই বৃত্ত তিনটিকে ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (ex-circle) ও উহাদের কেন্দ্রকে (ex-centre) **বহির্কেন্দ্র** বলে।

অনুশীলনী

১। যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান উহার পরিবৃত্ত আঁক।

২। একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

৩। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৪। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলি ছেদ করিয়া এমন একটি বৃত্ত আঁক যেন বৃত্তের ছিন্নচাপগুলি পরস্পর সমান হয়।

৫। ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্র তিনটি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। একটি বৃত্তের পরিগত একটি রম্বস্ আঁক।

৭। ২″ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহার অন্তর্লিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। বর্গক্ষেত্রটির বাহু ও ক্ষেত্রফল বাহির কর। (উঃ—২·৮ ইঞ্চি স্থূলত)।

৮। একটি সমবাহু ত্রিভুজ ও একটি বর্গক্ষেত্র একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত হইল। যদি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a হয় এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য b হয়, প্রমাণ কর যে, $2a^2 = 3b^2$.

৯। A ও B দুইটি বিন্দু ২″ দূরে অবস্থিত। একটি বিন্দু P এরূপভাবে অবস্থিত যে, AP = 2BP. P বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। কখন এরূপ অঙ্কন অসম্ভব হইবে?

২৬শ সম্পাদ্য—(ইউ—৪।২)

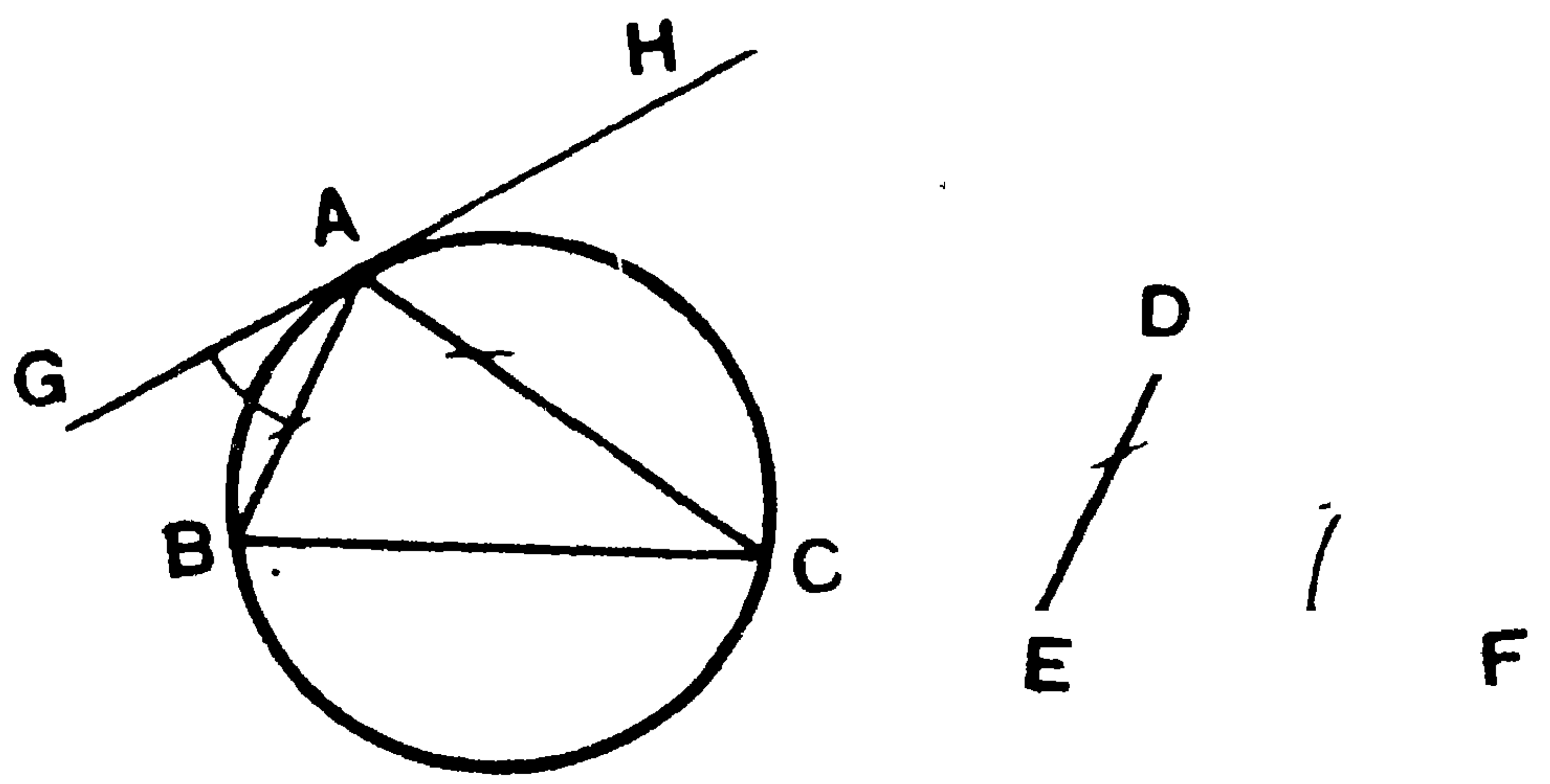
সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ একটি ত্রিভুজ একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং DEF একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

DEF ত্রিভুজের সদৃশকোণ একটি ত্রিভুজ ABC বৃত্তে অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—পরিধির যে কোন A বিন্দুতে GAH একটি স্পর্শক টান। এবং A বিন্দুতে ∠DEFএর সমান ∠HAC ও ∠ DFEএর সমান ∠GAB আঁক। BC যোগ কর।

এখন ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।



প্রমাণ—যেহেতু বৃত্তের A বিন্দুতে GAH রেখা স্পর্শক এবং AB উহার একটি জ্যা।

∴ বৃত্তাংশস্থ একান্তর ∠ACB = ∠GAB = ∠DFE.

∴ ∠GAB = বৃত্তাংশস্থ একান্তর ∠ACB = ∠DFE. [৪৮উপঃ].

ঐরূপে, ∠ABC = ∠DEF.

∴ অবশিষ্ট ∠BAC = ∠অবশিষ্ট ∠EDF.

অর্থাৎ ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের সদৃশকোণ এবং ইহাই বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। [ই. স. বি.]

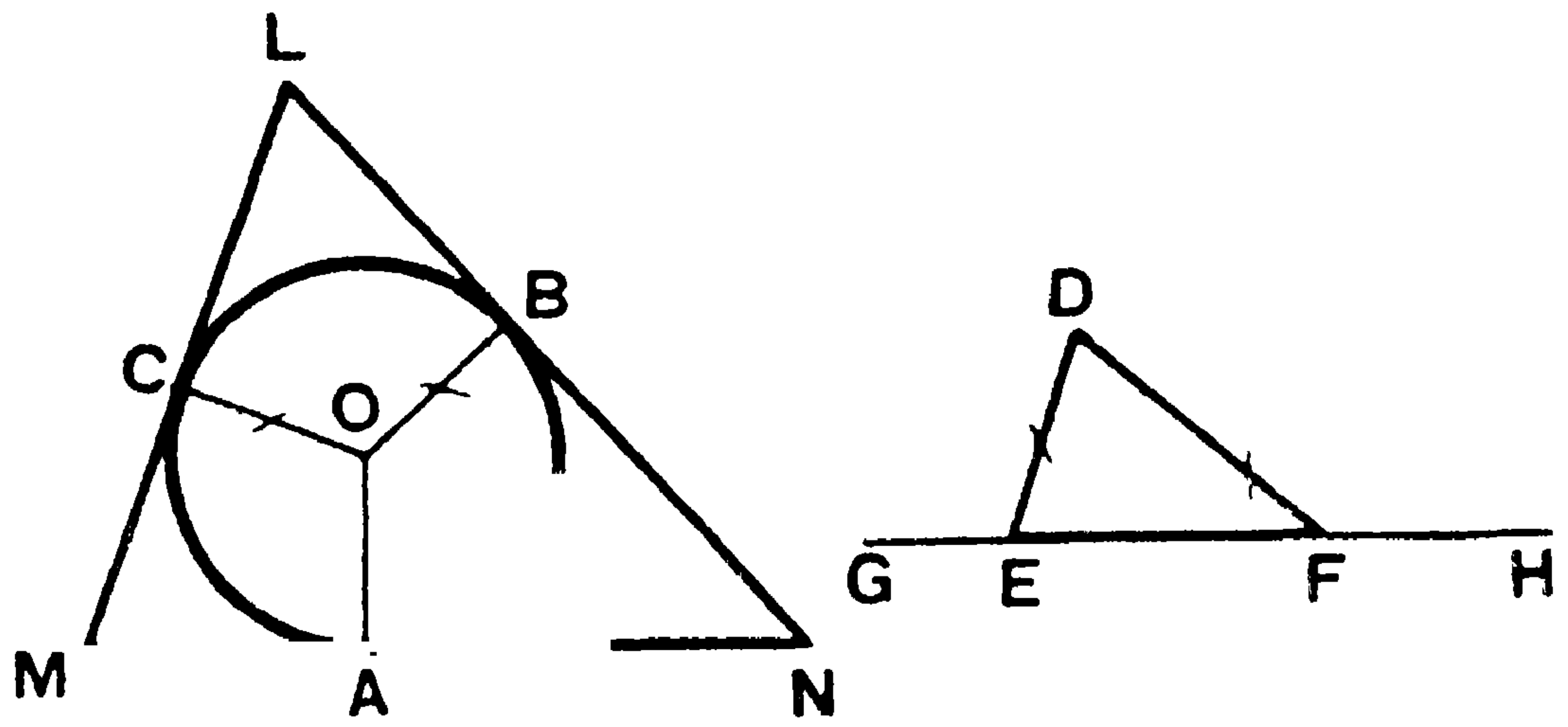
২৭শ সম্পাদ্য—(ইউ—৪।৩)

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ একটি ত্রিভুজ একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে পরিলিখিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, DEF ত্রিভুজের সদৃশকোণ একটি ত্রিভুজ ABC বৃত্তের পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—EF বাহুকে উভয়দিকে G ও H পর্যন্ত বর্ধিত কর। ABC বৃত্তের O কেন্দ্র হইতে OB ব্যাসার্ধ টান এবং O বিন্দুতে ∠DEG এর সমান ∠AOB, এবং ∠DFH এর সমান ∠ BOC আঁক।

এখন A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক টান। মনে কর উহারা LMN ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল।



প্রমাণ—BOAN চতুর্ভুজের কোণ চারটির সমষ্টি = ৪ সমকোণ।

∴ ∠AOB + ∠ANB = ২ সমকোণ।

∴ ∠ANB অর্থাৎ ∠LNM = ∠AOBএর সম্পূরক,

= ∠DEGএর সম্পূরক,

= ∠DEF.

ঐরূপে, ∠AMC অর্থাৎ ∠LMN = ∠DFE.

∴ অবশিষ্ট ∠MLN = অবশিষ্ট ∠EDF.

সুতরাং LMN ত্রিভুজটি DEF এর সদৃশকোণ। [**ই. স. বি.**]

অনুশীলনী

১। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে অন্তঃস্পর্শ করিয়া চারটি সমান বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন, উহারা পরস্পর বহির্ভাবে স্পর্শ করে।

২। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন, ইহার শিরঃকোণটি যে-কোন ভূমি-সংলগ্ন কোণের তিনগুণ হয়।

৩। দুইটি পরস্পর-ছেদী সমান বৃত্তের সাধারণ ক্ষেত্রাংশে একটি বর্গ-ক্ষেত্র আঁক।

৪। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত রম্বস্ অঙ্কিত কর।

৫। ৩″, ৪″ ও ৫″ বাহু-বিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [উঃ—ব্যাসার্ধ = ২·৫″]

৬। ১″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহাতে একটি সমবাহু ত্রিভুজ পরিলিখিত কর। প্রমাণ কর যে এই ত্রিভুজটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩·৪৬″।

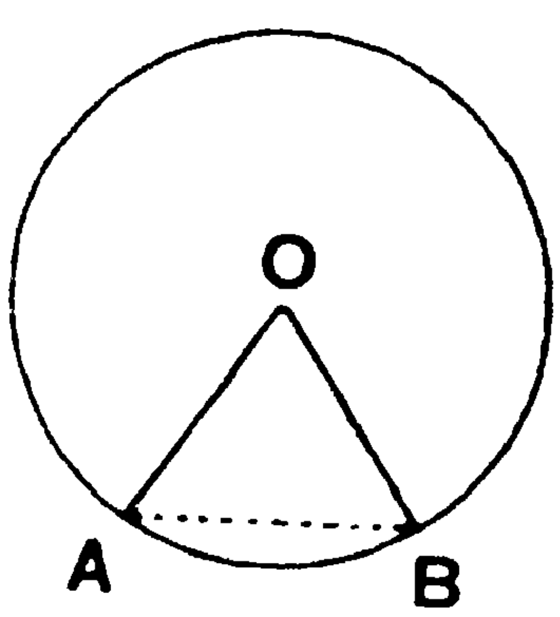
৭। উক্ত বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিয়া দেখাও যে, উহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ১·৭৩″।

৮। $I, I_1, I_2,$ ও I_3 বিন্দু চতুষ্টয় যথাক্রমে কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও A, B, C কোণের বিপরীত বহিঃকেন্দ্রত্রয়। যদি উক্ত কোণ-ত্রয়ের বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c হয় তবে দেখাও যে, I_2, A, I_3 ; I_3, B, I_1 ; I_1, C, I_2 একই সরলরেখায় অবস্থিত।

২৮শ সম্পাদ্য

সাঃ নিঃ—কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত (২) পরিলিখিত একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—এস্থলে দেখা যায় যে, কোন সুষম বহুভুজ ABCDE⋯কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত হইলে, উহার সমান বাহুগুলি এক একটি জ্যা হইবে এবং উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপগুলি পরস্পর সমান হইবে। সুতরাং ঐ সকল চাপ বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। যদি ত্রিভুজের বাহুসংখ্যা n হয়, তবে O বিন্দুস্থ ৩৬০° কোণ সমান n অংশে বিভক্ত হয়।



অঙ্কন—(১) n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কোন সুষম বহুভুজ নিদিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত করিতে হইলে, বৃত্তের O কেন্দ্রে OA ও OB দুইটি ব্যাসার্ধ টান যেন, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ হয়। এখন, AB যোগ করিয়া উহার সমান BC, CD, DE,⋯ইত্যাদি জ্যা বৃত্তে স্থাপন কর। এইরূপে ABCDE⋯ই উদ্দিষ্ট সুষম বহুভুজ হইবে।

ABCDE⋯⋯বহুভুজটি সমবাহু এবং সমান-কোণী হইবে।

(২) n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ কোন বৃত্তের পরিলিখিত করিতে হইলে, পূর্বের ন্যায় A, B, C, D⋯⋯বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করিয়া ঐ বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শক টানিতে হইবে। এই স্পর্শকগুলি

একটি n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ উৎপন্ন করিবে এবং উহার বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। ইহাই পরিলিখিত সুষম বহুভুজ হইবে।

অনু—কোন নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজের (১) অন্তর্বৃত্ত, (২) পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

বহুভুজের যে-কোন দুইটি ক্রমিক কোণ দ্বিখণ্ডিত করিলে, দ্বিখণ্ডকদ্বয় এক বিন্দুতে মিলিত হইবে। এই বিন্দুই নির্ণেয় বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র হইবে।

(১) ঐই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ইহা হইতে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকিলে এই বৃত্তটি বহুভুজের অন্তর্বৃত্ত হইবে।

(২) এই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ বিন্দু হইতে যে-কোন কৌণিক বিন্দুর দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকিলে, এই বৃত্তটি বহুভুজের পরিলিখিত হইবে।

অনুশীলনী

১। একটি সুষম সপ্তভুজ ২″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত কর। ইহার একটি কোণ ও বাহুর দৈর্ঘ্য মাপিয়া বল।

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজ ও একটি সুষম ষড়ভুজ কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইয়াছে। যদি a ও b উহাদের বাহুর দৈর্ঘ্য হয় তবে প্রমাণ কর যে,—

(১) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ষড়ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

(২) $a^2 = 3b^2$.

৩। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের B ও C কোণের প্রত্যেকটি A কোণের দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, BC রেখা ঐ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের একটি বাহু।

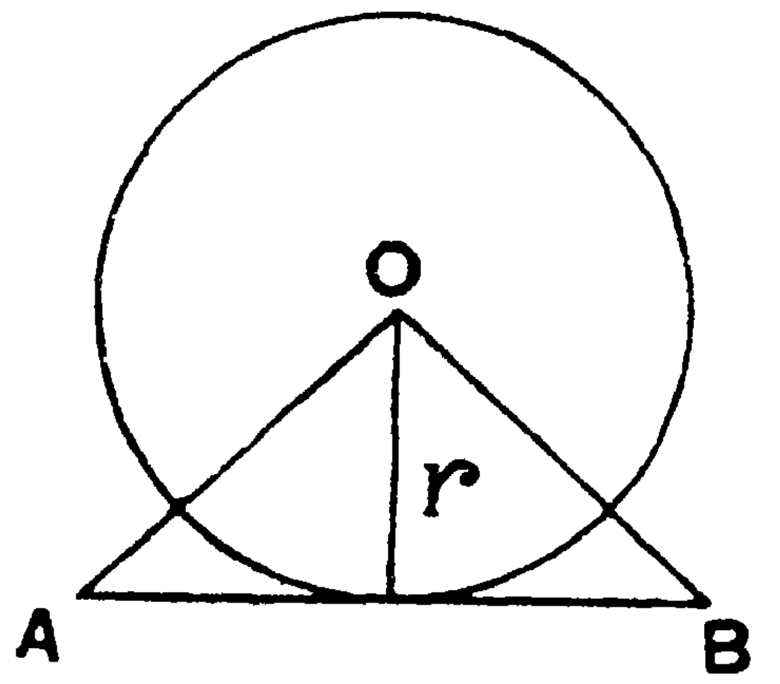
৪। প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বৃত্তের পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রফলের $\frac{3}{4}$ অংশ।

৫। প্রমাণ কর যে, কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ উহার উন্নতির একতৃতীয়াংশ।

৬। একটি রম্বসের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, বৃত্তের ব্যাস রম্বসের উন্নতিব সমান।

বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

মনে কর, কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং r উহার ব্যাসার্ধ। এই বৃত্তের পরিলিখিত n-সংখ্যক বাহু-বিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের AB একটি বাহু।



বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times \Delta OAB = n \times \frac{1}{2}$. AB. r.

$= \frac{1}{2} r \times n \times AB$

$= \frac{1}{2}$ (বহুভুজের বাহুসমষ্টি) $\times r$.

বহুভুজের বাহু-সংখ্যা যাহাই হউক না কেন, এই সূত্রটি সর্বদা সত্য। সুতরাং যদি বাহুর সংখ্যা ক্রমে বৃদ্ধি করিয়া অবশেষে অসংখ্য মনে করা যায়, তবে বাহুগুলির সমষ্টি অর্থাৎ বহুভুজের পরিসীমা ক্রমেই বৃত্তের পরিধির সমান হইতে অগ্রসর হইবে এবং চরম অবস্থায় উহাদের অন্তর এত ক্ষুদ্রতম হইবে যে তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর রাশি কল্পনা করা যায় না। কাজেই এই চরম (limiting) পরিসীমা ও বৃত্তের পরিধি সমান ধরা যাইতে পারে। সুতরাং বহুভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলও সমান ধরা যাইতে পারে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (**পরিসীমা**) $\times$ **r.**

$= \frac{1}{2} \times$ **পরিধি** $\times$ **r**

পরীক্ষা দ্বারা স্থিরীকৃত হইয়াছে যে,

$$\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাস}} = \pi(\text{পাই}) = \frac{22}{7} \ (\text{আসন্ন মান})$$

অর্থাৎ **পরিধি** $= \pi \times$ **ব্যাস** $= 2\pi r = \frac{44}{7}r.$

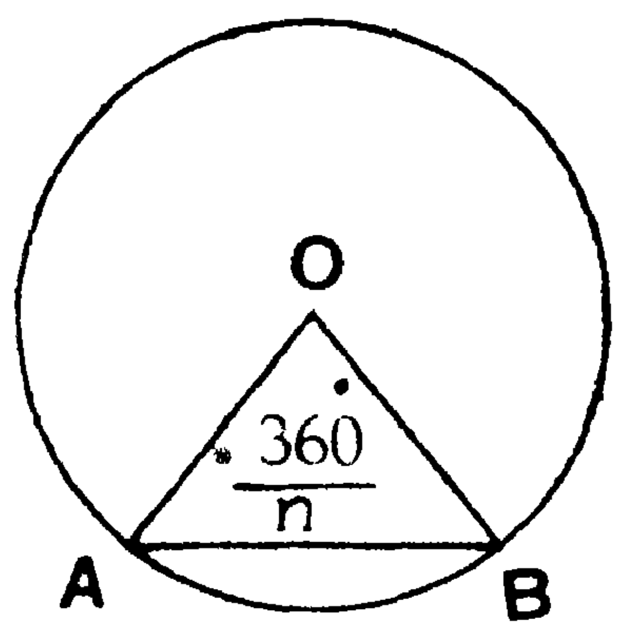
$\therefore$ **বৃত্তের ক্ষেত্রফল** $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2 = \frac{22}{7}r^2.$

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

যদি কোন বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধের অন্তর্ভূত কোণ $1°$ হয়, তবে তাহারা (১) যে চাপ ছেদ করে তাহার দৈর্ঘ্য পরিধির $\frac{1}{360}$ অংশ, এবং (২) যে বৃত্তকলা ছেদ করে তাহার পরিমাণ = বৃত্তের $\frac{1}{360}$ অংশ।

সুতরাং OA ও OB ব্যাসার্ধের অন্তর্ভূত কোণ D° হইলে,



(১) ACB চাপ $= \frac{D}{360} \times$ পরিধি।

(২) AOB বৃত্তকলা = বৃত্তের কালির $\frac{D}{360}$ অংশ

$= \frac{D}{360} \times \frac{1}{2}$ পরিধি $\times$ ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{2} \times$ ACB চাপ $\times$ ব্যাসার্ধ।

অনুশীলনী

১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ=৫″। উহার পরিধি ও ক্ষেত্রফলের মান নির্ণয় কর। [উঃ—৩১·৪২″ ; ৭৮·৫ বর্গ ইঞ্চি।]

২। একটি ৩″ বাহু-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ—৯·৪″ ইঞ্চি ; ৭ বর্গ ইঞ্চি (স্থূলত)।]

৩। একটি ৬ সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তে বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত হইল। উহাদের ক্ষেত্রফলের অন্তর কত ? [উঃ—৪১ সে. মি. (স্থূলত)]

৪। একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত আয়তের বাহুদ্বয় যথাক্রমে ৮ সে. মি. এবং ৬ সে. মি.। ঐ আয়তের বহিঃস্থ চারটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির আসন্ন মান নির্ণয় কর। [উঃ—৩০·৫৭ বর্গ সে. মি.]

৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ৫″। ইহার পরিবৃত্তের ও অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অন্তর নির্ণয় কর। [উঃ—১৯·৬ বর্গ ইঞ্চি]

৬। দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের অন্তর্বর্তী বৃত্তাকার মণ্ডলের ক্ষেত্রফল ২৫ বর্গ ইঞ্চি এবং উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তর ১″। ঐ বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের আসন্ন মান নির্ণয় কর। [উঃ—৪·৫″ ; ৩·৫″ (স্থূলত)]

৭। নির্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট শিরঃকোণ-বিশিষ্ট এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু নির্দিষ্ট থাকিবে।

৮। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের একটি ভেদককে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। দেখাও যে, এইপ্রকার দুইটি সমান বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

৯। ABC একটি ত্রিভুজ। P ও Q যথাক্রমে ইহার অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র। যদি A, P ও Q বিন্দুত্রয় একই রেখায় অবস্থিত হয়, তবে AB=AC প্রমাণ কর।

১০। উপরি উক্ত ত্রিভুজে দেখাও যে, PQ রেখা A বিন্দুতে যে কোণটি উৎপন্ন করে উহা ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেকের সমান। আরও প্রমাণ কর যে, BC বাহুর উপর AD লম্ব টানিলে, AP রেখা DAQ কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১১। কোন বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত এবং আর একটি সমবাহু ত্রিভুজ পরিলিখিত হইল। প্রমাণ কর যে, শেষোক্ত ত্রিভুজের বাহু প্রথম ত্রিভুজের বাহুর দ্বিগুণ।

১২। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

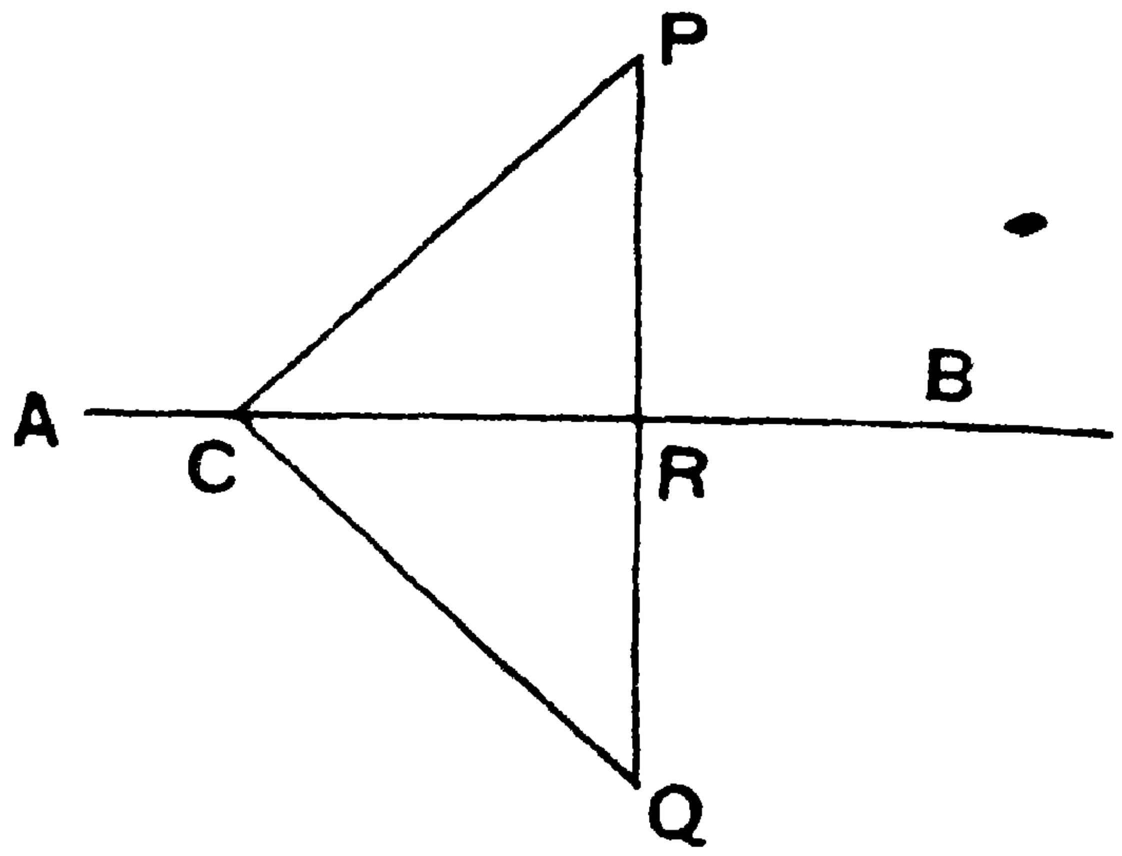
১৩। প্রমাণ কর যে, কোন সুষম বহুভুজের কোন অন্তর্বিন্দু O হইতে উহার বাহুগুলির উপর পাতিত লম্বগুলির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক (constant)।

১৪। A, B ও C বিন্দুত্রয় তিনটি বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তগুলি দুই দুইটি করিয়া D, E ও F বিন্দুতে বহির্ভাবে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তই DEF ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

১৫। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র D। AD বর্ধিত হইয়া ত্রিভুজের পরিবৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, BDC ত্রিভুজের D বিন্দুটিই পরিকেন্দ্র।

বিবিধ সমাধান

১। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত তাহারা কোন একটি বিন্দুতে ছেদ করিলে আর একটি বিন্দুতেও ছেদ করিবে।



মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P বিন্দু হইতে ABএর উপর PR লম্ব টান। PR রেখাকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং PRএর সমান RQ অংশ ছেদ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, যে বৃত্তের কেন্দ্র AB এর উপর অবস্থিত এবং যাহা P বিন্দুগত হয়, উহা Q বিন্দু দিয়া যাইবে।

প্রমাণ—মনে কর ABএর উপর C বিন্দু একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহা P বিন্দু দিয়া গিয়াছে।

PC, QC যোগ কর।

এখন, PRC এবং QRC দুইটি ত্রিভুজের—

PR = RQ এবং CR উভয়ের একটি সাধারণ বাহু।

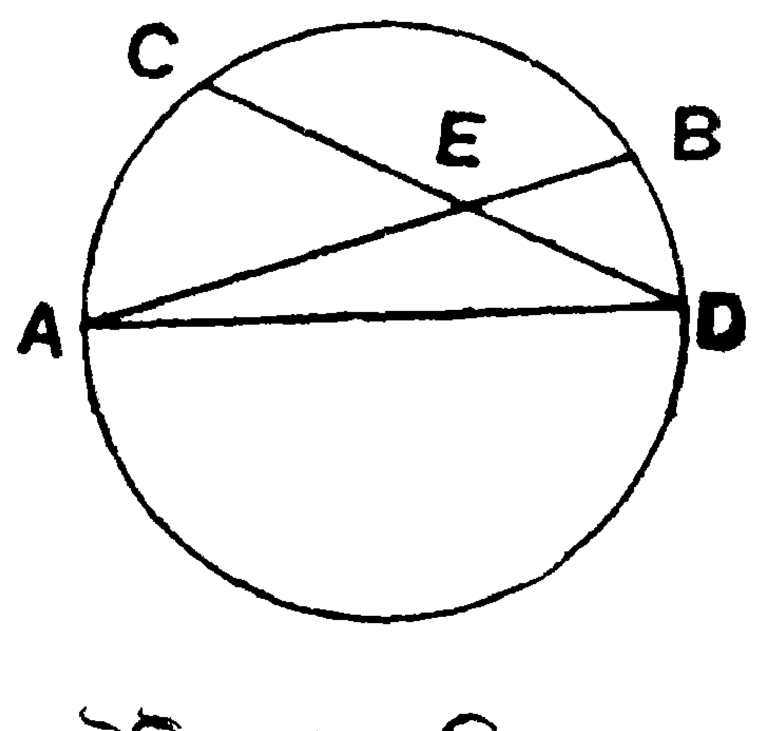
এবং $\angle$PRC = $\angle$QRC = এক সমকোণ।

$\therefore$ PC = QC. [১০ম উপঃ].

সুতরাং C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকিলে তাহা P ও Q উভয় বিন্দু দিয়া যাইবে।

AB রেখার উপর যে-কোন C বিন্দু নিলেই এরূপ হইবে।

২। **বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেকের উপর কেন্দ্রস্থ কোণের সমান হইবে।**



মনে কর AB ও CD দুইটি জ্যা E বিন্দুতে ছেদ করিল;

AD যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AEC কোণটি AC ও BD চাপের সমষ্টির অর্ধেকের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের সমান।

প্রমাণ—বহিঃস্থ ∠AEC = ∠EDA + ∠EAD [৮ম উপঃ].

= AC ও BD চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি

= AC ও BD চাপদ্বয়ের সমষ্টির উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ

= AC ও BD চাপের সমষ্টির অর্দ্ধেকের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ।

৩। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি এক বিন্দুগামী হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A ও B বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব AD ও BE পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

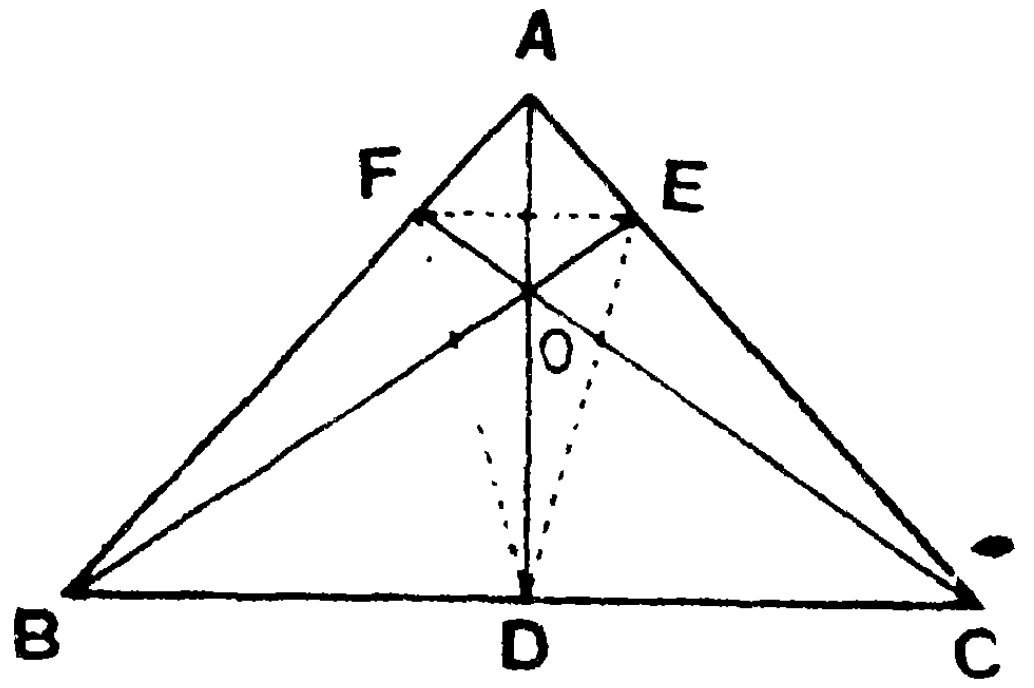
CO যোগ কর। বর্ধিত CO রেখা AB বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CF রেখা ABএর উপর লম্ব। DE যোগ কর।

প্রমাণ— ∠OEC = ∠ODC = এক সমকোণ।

∴ O, E, C ও D বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ (cyclic)।

∴ ∠DEC = ∠DOC (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ)

= বিপ্রতীপ ∠FOA.



আবার, ∠AEB = ∠ADB = এক সমকোণ।

∴ A, E, D ও B বিন্দুচতুষ্টয় বৃত্তস্থ। [৪০শ উপঃ]

∴ ∠DEB = ∠BAD (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ)

∴ ∠BAD (অর্থাৎ ∠FAO) + ∠FOA = ∠DEB + ∠DEC

= এক সমকোণ।

∴ অবশিষ্ট ∠AFO অর্থাৎ ∠AFC = এক সমকোণ।

সুতরাং CF রেখা ABএর উপর লম্ব।

অতএব AD, BE ও CF লম্ব তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হইল।

লম্ববিন্দু (Orthocentre)—শিরঃকোণ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় যে O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল, তাহাকে **লম্ববিন্দু** বলে। (১২৭ পৃঃ, চতুর্থ সমাধান দ্রষ্টব্য।)

পাদ-ত্রিভুজ (Pedal Triangle)—লম্ব তিনটির পাদত্রয় সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহাকে উক্ত ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ বলে। চিত্রে DEF ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ হইল।

৪। কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত AD, BE ও CF লম্ব তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হইল। DEF ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ। (৩য় সমাধানের চিত্র দেখ।)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE ও CF রেখাত্রয় যথাক্রমে FDE, DEF ও EFD কোণত্রয়কে দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ— $\angle OEC = \angle ODC =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C ও E বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ। [৪১শ উপঃ]

$\therefore$ $\angle ODE = \angle OCE$ (একই চাপের উপর)

আবার, $\angle OFB = \angle ODB =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B ও F বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ।

$\therefore$ $\angle ODF = \angle OBF$.

কিন্তু $\angle OCE$ ও $\angle OBF$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক বলিয়া, উহারা পরস্পর সমান।

$\therefore$ $\angle ODE = \angle ODF$;

অর্থাৎ AD রেখা $\angle EDF$ এর দ্বিখণ্ডক।

এইপ্রকারে দেখা যাইতে পারে যে, DEF ও EFD কোণ দুইটিও যথাক্রমে BE ও CF রেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

১ম অনু—মূল ত্রিভুজের কোন বাহুতে পাদ-ত্রিভুজের যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, তাহারা উক্ত বাহুর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

কারণ, $\angle EDC = \angle ODE$এর পূরক

$= \angle OCE$এর পূরক $= \angle BAC$.

এইরূপ $\angle FDB = \angle BAC$; $\therefore \angle EDC = \angle FDB$; ইত্যাদি।

২য় অনু—BDF, DEC ও AFE ত্রিভুজত্রয় ABC এর সদৃশকোণ।

দ্রষ্টব্য। ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজ হইলে, অর্থাৎ BAC কোণটি স্থূল-কোণ হইলে, BE ও CF লম্বদ্বয় পরস্পর বহিচ্ছেদ করিবে এবং পাদ-ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ দুইটিকে বহির্ভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে। এইক্ষেত্রে O বিন্দুটি পাদ-ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্র হইবে। কিন্তু সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজে O বিন্দুটি পাদ-ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হইবে।

অনুশীলনী

১। ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু। AD লম্ব বর্ধিত হইয়া পরিবৃত্তের সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, OD = DG.

২। উপরি উক্ত ত্রিভুজে AK রেখা পরিবৃত্তের ব্যাস হইলে, প্রমাণ কর যে, BOCK একটি সামান্তরিক।

৩। উপরি উক্ত ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, BOC ও BAC কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

৪। যদি ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O হয়, তবে O, A, B ও Cএর যে-কোন একটি অন্য তিনটি বিন্দু-দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

৫। কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু এবং লম্ববিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত উহার পরিবৃত্তের সমান।

৬। একটি ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু, লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্র নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

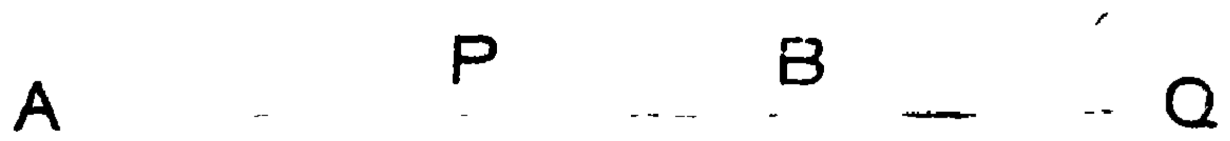
চতুর্থ অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

বৈজিকসূত্রের জ্যামিতিক পরিচয়*।

অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ ছেদ-বিন্দু—

AB সরলরেখায় P একটি বিন্দু কল্পনা করিলে, AB রেখা P বিন্দুতে AP ও PB দুইখণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে এরূপ বলা হয়। এস্থলে, AB রেখার অন্তঃস্থ ছেদ-বিন্দু P, অথবা AB রেখা P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে এরূপ বলা যায়। আবার, AB রেখা Q বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, AB



রেখার বহিঃস্থ ছেদ-বিন্দু Q, অথবা AB রেখা Q বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে এরূপ বলা হয়। এস্থলে QA এবং QB ই AB রেখার বহিশ্ছিন্ন খণ্ডদ্বয় এরূপ মনে করা যায়।

সুতরাং কোন রেখা কোন একটি বিন্দুতে অন্তশ্ছিন্ন বা বহিশ্ছিন্ন হইতে পারে। প্রত্যেক স্থলেই ছেদ-বিন্দু হইতে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের দূরত্বকেই উহার খণ্ড বা অংশ বলা হয়।

অর্থাৎ $AP + PB = AB$,

এবং $AQ - QB = AB$.

---

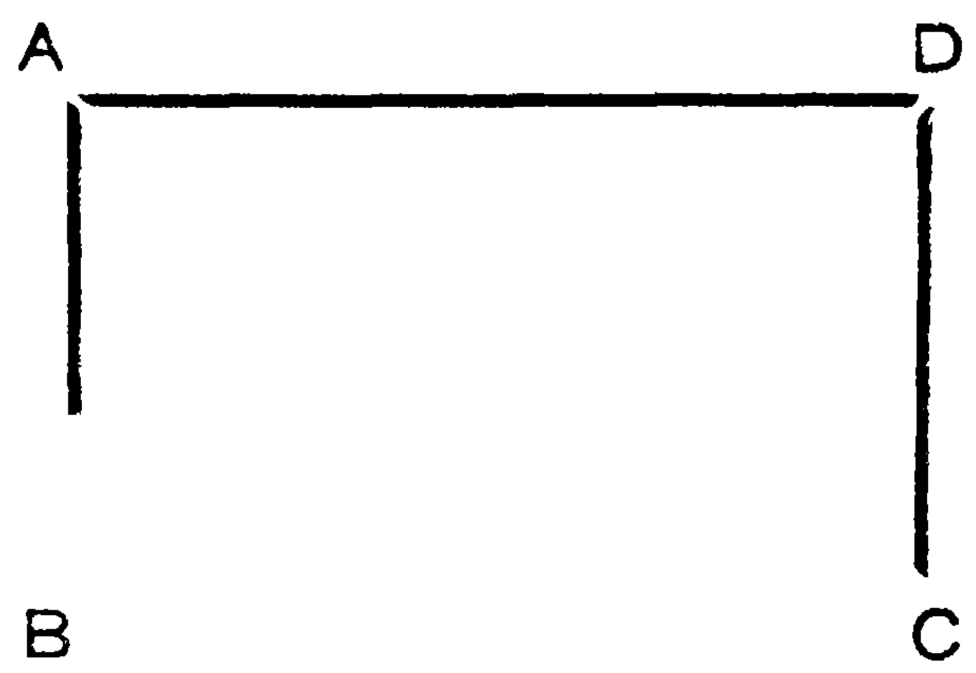
* ইউক্লিড তাহার Elements এর ২য় খণ্ডে কতকগুলি বৈজিকসূত্রের জ্যামিতিক প্রমাণ দিয়াছেন।

দ্রষ্টব্য—উপরের চিত্র হইতে সহজেই বুঝা যাইবে যে, AB রেখাটি ইহার অন্তর্চ্ছিন্ন বা বহিশ্ছিন্ন খণ্ডদ্বয়ের সমষ্টি বা অন্তরের সমান। অন্তর্চ্ছিন্ন হইলে, অংশ দুইটি সমান অথবা অসমান হইতে পারে, কিন্তু বহিশ্ছিন্ন হইলে উহার অংশদ্বয় সর্বদা অসমান হইবে।

আয়ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল—

AB রেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে, উহাকে AB রেখার উপর বর্গ বা AB^2 দ্বারা সূচিত করা হয়।

এইরূপ, ABCD আয়তটির সন্নিহিত বাহু দুইটি AB ও AD হইলে, উহাকে AB ও AD এর অন্তর্গত আয়ত, অথবা AB. AD আয়ত (অথবা AC আয়ত) বলা হয়।



সুতরাং কোন বর্গক্ষেত্র বা আয়তকে জ্যামিতির সাংকেতিক ভাষায় ব্যক্ত করিতে হইলে, উহাদের বাহুর পরিমাণ ধরিয়া ক্ষেত্রফল-সূচক সূত্র-দ্বারাই প্রকাশ করা হয়। যথা—বর্গক্ষেত্র AB^2, আয়ত AB. AD, ইত্যাদি।

৪৯শ উপপাদ্য—(ইউ—২।১)

সাঃ নিঃ—যদি দুইটি সরলরেখার মধ্যে একটি কতিপয় অংশে বিভক্ত হয়, তবে ঐ রেখা দুইটির অন্তর্গত আয়ত

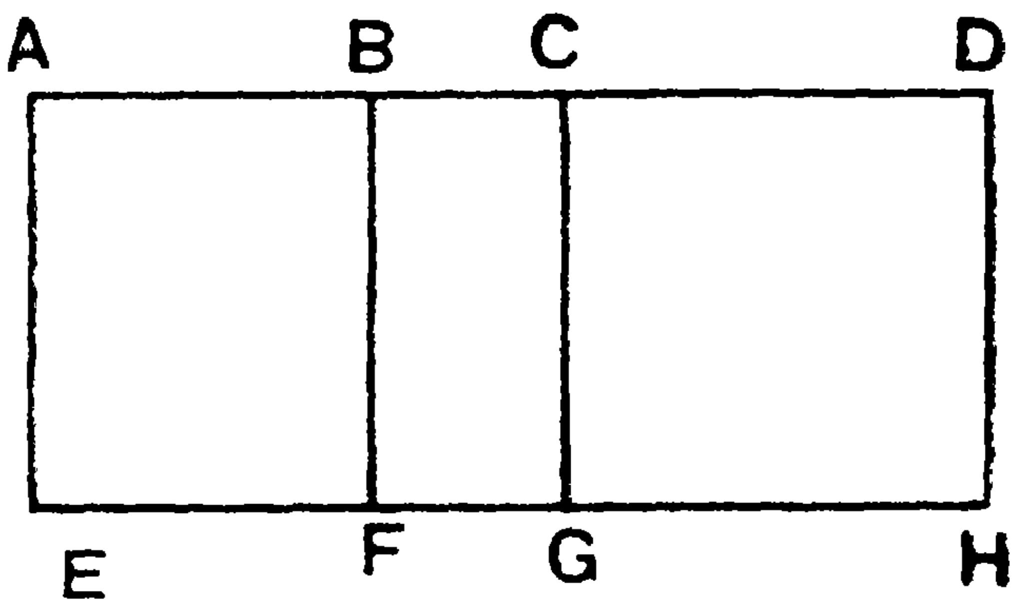
অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার বিভিন্ন অংশের অন্তর্গত আয়ত সমূহের সমষ্টির সমান হইবে।

এই উপপাদ্যটির অনুরূপ বৈজিক সূত্র—

$$k(a+b+c\cdots\cdots)=(ka+kb+kc+\ldots\ldots)$$

বিঃ নিঃ—মনে কর AD রেখাটি AB, BC, CD প্রভৃতি কতিপয় অংশে বিভক্ত হইয়াছে। যদি এই বিভক্ত অংশগুলির পরিমাণ যথাক্রমে a, b, $c\cdots$দ্বারা সূচিত হয়, তবে AD $=a+b+c\cdots\cdots$

মনে কর $k\equiv$AE আর একটি অভিভক্ত রেখা।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD এবং k এর অন্তর্গত আয়ত = AB, k এর অন্তর্গত আয়ত + BC, k এর অন্তর্গত আয়ত + $\cdots\cdots\cdots$।

অর্থাৎ $k(a+b+c+\cdots\cdots\cdots)$

$=ka+kb+kc+\cdots\cdots$ ইত্যাদি।

অঙ্কন—AB রেখার A বিন্দুতে k এর সমান AE লম্ব টান। E বিন্দু হইতে AD এর সমান্তরাল EH রেখা টান এবং B, C ও D বিন্দু হইতে যথাক্রমে BF, CG ও DH রেখা AE এর সমান্তরাল করিয়া টান।

প্রমাণ—এখন AF, BG ও CH এক একটি আয়তক্ষেত্র।

এবং AH আয়ত = AF ক্ষেত্র + BG ক্ষেত্র + CH ক্ষেত্র ;

এবং ইহার ক্ষেত্রফল = AD. $k=(a+b+c+\cdots\cdots)\,k.$

কিন্তু AH ক্ষেত্র = AD. AE আয়ত = AD.k আয়ত।

এইরূপ, AF ক্ষেত্র = AB. k আয়ত, এবং ইহার ক্ষেত্রফল = AB.k = ak.

BG ক্ষেত্র = BC. k আয়ত, এবং ইহার ক্ষেত্রফল = BC. k = bk.

CH ক্ষেত্র = CD. k আয়ত, এবং ইহার ক্ষেত্রফল = CD. k = ck.

সুতরাং AD.k আয়ত = AB.k আয়ত

+ BC.k আয়ত + CD.k আয়ত।

অর্থাৎ $(a+b+c+\cdots)\ k=(ak+bk+ck+\ldots\ldots)$.

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—AB রেখা P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে,

AB এর উপর বর্গ = AB. AP আয়ত + AB. PB আয়ত। (ইউ—২।২)

অথবা, AB^2 = AB. AP + AB. PB.

যদি AP = a, PB = b, সুতরাং AB = $a+b$ হয়, তবে এই উপপাদ্যটি $(a+b)^2=a\ (a+b)+b\ (a+b)$ সূত্রদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্র ঐ রেখা এবং উহার প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তের সমষ্টির সমান।

২য় অনু—AB রেখা P বিন্দুতে AP ও BP দুই খণ্ডে বিভক্ত হইলে,

AB. AP আয়ত = AP এর বর্গ + AP. PB আয়ত।

অথবা, AB. AP = AP^2 + AP. PB ;

অর্থাৎ $a(a+b)=a^2+ab.$

সুতরাং কোন সরলরেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সম্পূর্ণরেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, ঐ অংশের উপরের বর্গক্ষেত্র এবং দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের সমষ্টির সমান।

অনুশীলনী

১। নিম্নলিখিত বৈজিক অভেদগুলি (algebraic identities) জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ কর :—

(i) $(২+৩)৫=২\times৫+৩\times৫$

(ii) $x(x+7)=x^2+7x$

(iii) $(x+y)^2=x(x+y)+y(x+y)$

২। জ্যামিতিক চিত্রে নিম্নের অভেদটি প্রকাশ কর এবং অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্যটি লিখ :—

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

৩। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে ১২০′ ও ৮০′। লম্বাভাবে উহা দুই সমান অংশে বিভক্ত হইলে, জ্যামিতির সাহায্যে উহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ D বিন্দুতে বিভক্ত হইয়া, $BC.\ CD=AC^2$ হইল। প্রমান কর যে, $BC.\ BD=AB^2$.

৫। AB সরলরেখা H বিন্দুতে বিভক্ত হইয়া, $AB.\ BH=AH^2$ হইল এবং AH এর উপর এমন একটি বিন্দু P লওয়া হইল যেন, $HP=HB$. প্রমাণ কর যে, $AH.\ AP=HP^2$.

৬। একটি সরলরেখার উপর ক্রমান্বয়ে A, B, C ও D চারটি বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে, $AC.\ BD=AB.\ CD+AD.\ BC$.

৭। ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে,

$$AO.\ BC+BO.\ CA+CO.\ AB=4\triangle ABC.$$

৮। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A কোণটি সমকোণ। BC এর একটি বিন্দু D এবং বর্ধিত BC এর উপর E একটি বিন্দু লওয়া হইল যেন, $\angle DAE$ একটি সমকোণ। প্রমাণ কর যে,

$$BD.CE+BE.CD=2AD.AE.$$

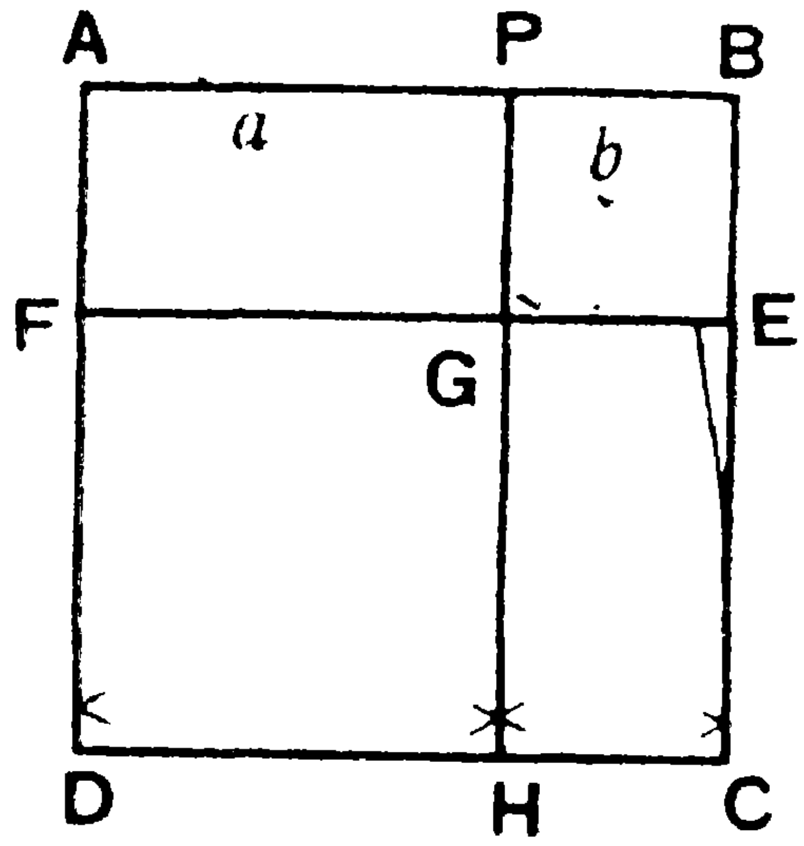
৫০শ উপপাদ্য—(ইউ—২।৪)

সাঃ নিঃ—কোন সরলরেখা এক বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে সম্পূর্ণ রেখার উপর বর্গক্ষেত্রটি উহার দুই অংশের উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB সরলরেখা P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AP^2 + BP^2 + 2AP.\ BP.$

যদি AP ও BP এর পরিমাণ যথাক্রমে a ও b হয়, তবে $AB = a + b.$ বর্তমান উপপাদ্যটি নিম্নলিখিত বৈজিক সূত্র-দ্বারা প্রকাশ করা যায়—

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$



অঙ্কন—AB এর উপর ABCD একটি বর্গক্ষেত্র আঁক। এবং BC হইতে PB এর সমান করিয়া BE অংশ ছেদ কর; তাহা হইলে $BE = PB = b.$ P ও E বিন্দু হইতে যথাক্রমে AD এবং AB এর সমান্তরাল PH ও EF রেখা টান। মনে কর উহারা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore\quad AP = FG = GH = CE$ এবং $BP = BE.$

প্রমাণ—এখন, AC ক্ষেত্র = FH ও PE ক্ষেত্রদ্বয় + AG ও GC ক্ষেত্রদ্বয়। কিন্তু অঙ্কনানুসারে,

AC ক্ষেত্র $= AB^2$, FH ক্ষেত্র $= FG^2 = AP^2$;

PE ক্ষেত্র $= BE^2 = PB^2.$

GC ক্ষেত্র = PB ও EC এর আয়ত = PB. EC = PB. AP ;

এইরূপ, AG ক্ষেত্র = AP ও AF এর আয়ত = PB. AP.

সুতরাং $AB^2 = AP^2 + PB^2 + PB.\ AP + PB.\ AP.$

$= AP^2 + PB^2 + 2\ PB.\ AP$;

$= AP^2 + PB^2 + 2\ AP.\ PB.$

অর্থাৎ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$ [**ই. উ. বি.**]

অনু—কোন সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের চারগুণ।

অনুশীলনী

১। জ্যামিতিক অঙ্কন-দ্বারা নিম্নলিখিত সূত্রসমূহ প্রমাণ কর—

(i) $(2a)^2 = 4a^2.$

(ii) $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2.$

(iii) $(a+3)(a+4) = a^2 + 7a + 12.$

(iv) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

২। যদি AB রেখা C বিন্দুতে বিভক্ত হইয়া $AC^2 + 2BC^2 = AB^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = 2AC.

৩। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর AD লম্ব। যদি $BD.\ DC = AD^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BAC একটি সমকোণ।

৪। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর লম্ব AO. প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + AC^2 + 2BO.\ OC = BC^2 + 2AO^2.$$

৫। যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, এই লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অতিভুজের খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান।

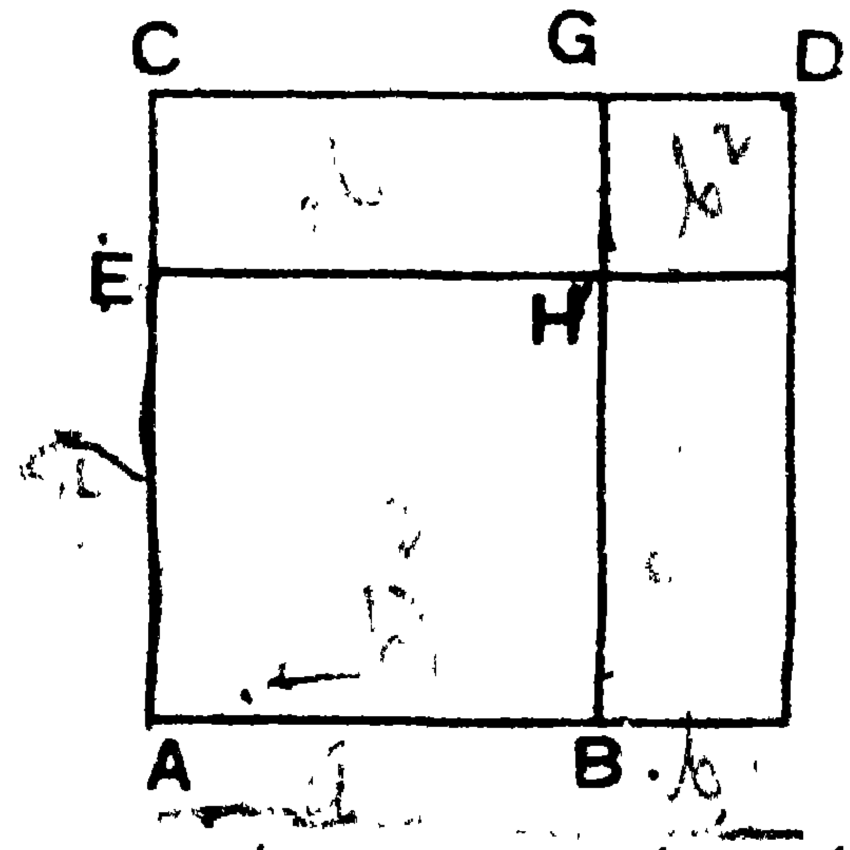
৫১শ উপপাদ্য—(ইউ—২।৭)

সাঃ নিঃ—একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে দুই অংশে বহির্বিভক্ত হইলে, উক্ত রেখার উপর বর্গক্ষেত্রটি উহার দুই অংশের উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি ও উহাদের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের অন্তরের সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB সরলরেখা P বিন্দুতে AP ও BP দুই অংশে বহির্বিভক্ত হইয়াছে, এবং AB > BP. ∴ AP – PB = AB. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP.\ PB$.

যদি AP ও PBএর পরিমাণ যথাক্রমে a ও b হয়, তবে AB $= a - b$, এবং এই উপপাদ্যটি বৈজিক সূত্র-দ্বারা নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়—

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$



অঙ্কন—APএর উপর APDC একটি বর্গক্ষেত্র আঁক। AC হইতে ABএর সমান করিয়া AE অংশ ছেদ কর। তাহা হইলে EC = BP = b. এখন B ও E বিন্দু হইতে যথাক্রমে AC ও AP এর সমান্তরাল করিয়া BG ও EF রেখা টান যেন, উহারা পরস্পর H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ— AH ক্ষেত্র = AD ও HD ক্ষেত্রদ্বয় – PG ও CF ক্ষেত্রদ্বয়।

কিন্তু অঙ্কনানুসারে—

AH ক্ষেত্র = ABএর উপর বর্গক্ষেত্র = AB^2 ;

AD ক্ষেত্র = APএর উপর বর্গক্ষেত্র = AP^2 ;

HD ক্ষেত্র $=$ BPএর উপর বর্গক্ষেত্র $= BP^2$;

PG ক্ষেত্র $=$ PD, PBএর আয়ত $=$ AP, PBএর আয়ত

$= AP.PB.$

CF ক্ষেত্র $=$ CD, CEএর আয়ত $=$ AP, BPএর আয়ত

$= AP.PB.$

সুতরাং $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP.PB$;

অর্থাৎ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$ [ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। ছক-কাগজে চিত্র অঙ্কিত করিয়া নিম্নলিখিত বৈজিক অভেদ-গুলির সত্যতা প্রতিপন্ন কর :—

(*i*) $(a-2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab.$

(*ii*) $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca.$

(*iii*) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2).$

২। দুইটি অসমান সরলরেখার অন্তর্গত আয়ত উহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির অর্ধেক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৩। AB রেখা C বিন্দুতে এরূপভাবে বিভক্ত হইল যেন, $AB.BC = AC^2$। প্রমাণ কর যে,

(*i*) $AB^2 + BC^2 = 3AC^2.$

(*ii*) $(AB+BC)^2 = 5AC^2.$

৪। প্রমাণ কর যে, দুইটি সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি কখনও ঐ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে।

৫। AB সরলরেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল এবং Q বিন্দুতে দুই অসমান অংশে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে,

$$AQ^2 + BQ^2 = 2AQ.BQ + 4PQ^2.$$

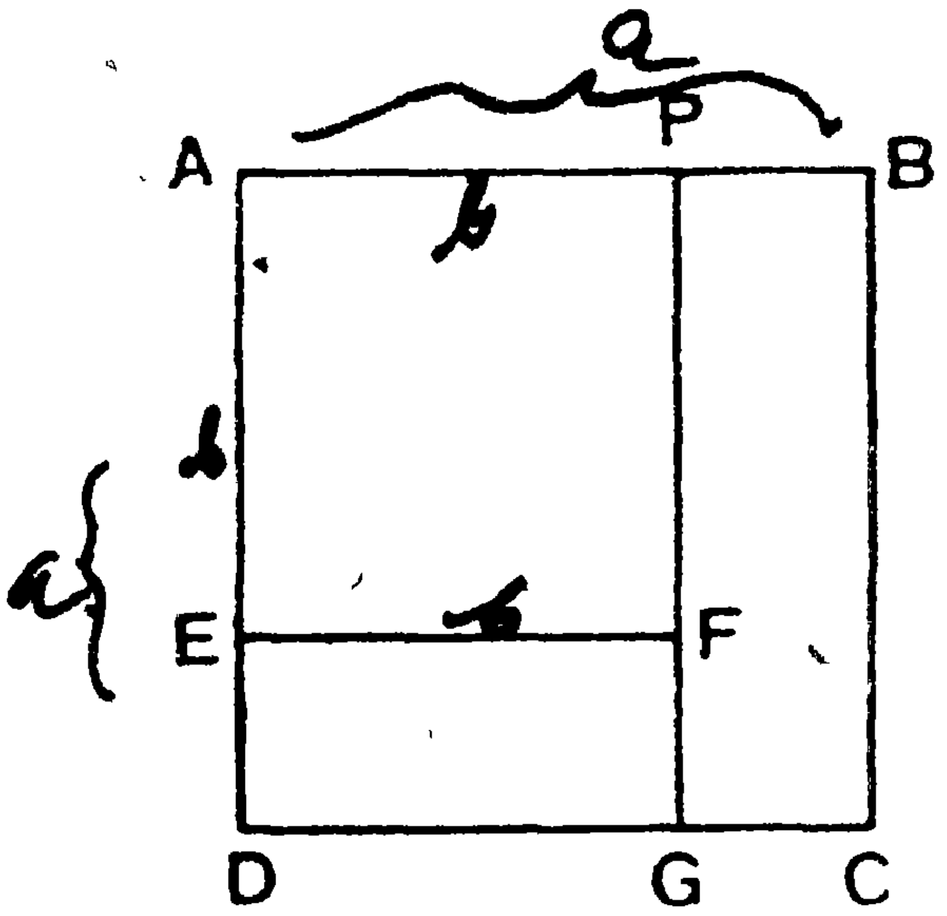
৬। AB রেখা G বিন্দুতে বিভক্ত হইল। H এবং K যথাক্রমে AG ও GB রেখার মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে,

$$AK^2 + 3BK^2 = BH^2 + 3AH^2.$$

৫২শ উপপাদ্য—(ইউ—২।৫।৬)

সাঃ নিঃ—দুইটি সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তর উহাদের সমষ্টি এবং অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর AB ও AP দুইটি সরলরেখা একই সরলরেখায় অবস্থিত। AB − AP = PB. প্রমাণ করিতে হইবে যে—



$$AB^2 - AP^2 = (AB + AP)\ (AB - AP).$$

যদি AB $= a$ ও AP $= b$ হয়, তবে এই উপপাদ্যটি নিম্নলিখিত বৈজিক সূত্র-দ্বারা প্রকাশ করা যায়—

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b).$$

অঙ্কন—AB ও APএর উপর যথাক্রমে ABCD ও APFE দুইটি বর্গক্ষেত্র আঁক। এবং PFকে বর্ধিত কর যেন, DCএর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হয়। তাহা হইলে, ED = PB $= a - b$.

প্রমাণ—$AB^2 - AP^2$ = AC বর্গক্ষেত্র − AF বর্গক্ষেত্র

= EG আয়ত + PC আয়ত

= ED.DG আয়ত + PB.BC আয়ত

= PB.AP আয়ত + PB.AB আয়ত

= (AP + AB). PB আয়ত

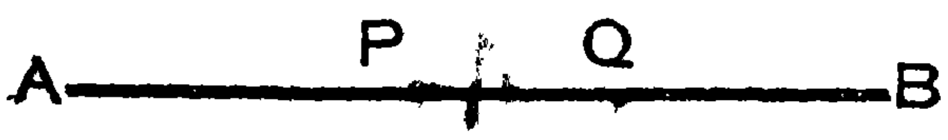
= (AP + AB) (AB − AP) আয়ত।

অর্থাৎ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

[ই. উ. বি.]

মন্তব্য—ইউক্লিড Elements এর ২য় খণ্ডে ৫ম ও ৬ষ্ঠ উপপাদ্যে যে সত্য প্রমাণিত করিয়াছেন, ঐ দুইটি একত্র করিয়া বর্ত্তমান উপপাদ্যটি দেওয়া হইল। ৫২শ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তরূপে ইউক্লিডের ৫ম ও ৬ষ্ঠ উপপাদ্য দুইটি পাওয়া যায়।

অনু—যদি কোন সরলরেখা একটি বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং আর একটি বিন্দুতে দুই অসমান অংশে (অন্তঃ বা বহিঃ)—বিভক্ত হয়, তাহা হইলে এই অসমান অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত উক্ত রেখার অর্দ্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্র ও ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থ রেখার উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান।



(১ম চিত্র)

(২য় চিত্র)

AB সরলরেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত ও Q বিন্দুতে (১ম চিত্রে) অন্তর্বিভক্ত ও (২য় চিত্রে) বহির্বিভক্ত হইয়াছে। তাহা হইলে,

$$AQ.QB = AP^2 \sim PQ^2$$

অর্থাৎ (*i*) $AQ.QB = AP^2 - PQ^2$ (১ম চিত্রে)

(*ii*) $AQ.QB = PQ^2 - AP^2$. (২য় চিত্রে)

(*i*) ১ম চিত্রে, $AQ.QB = (AP+PQ)(PB-PQ)$

$$= (AP+PQ)(AP-PQ)$$

$$= AP^2 - PQ^2.$$

(*ii*) ২য় চিত্রে, $AQ.QB = (PQ+AP)(PQ-PB)$

$$= (PQ+AP)(PQ-AP)$$

$$= PQ^2 - AP^2.$$

মন্তব্য। এই অনুসিদ্ধান্তটি ইউক্লিড একটি স্বতন্ত্র উপপাদ্যরূপে দিয়াছেন। (ইউ—২।৯,১০)। এস্থলে বর্ত্তমান উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তরূপে দেওয়া হইল।

১। দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমষ্টি ও অন্তরের উপর দুই বর্গ-ক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর উক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের চতুর্গুণ।

২। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির D বিন্দু A বিন্দুর সহিত যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, $AD^2 = BD^2 + CD^2 + BD.CD$.

৩। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর সমষ্টি এবং অন্তরের অন্তর্গত আয়ত অপর বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমান।

৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অতিভুজ ও উহার উক্ত বাহু-সংলগ্ন অংশের অন্তর্গত আয়তের সমান।

৫। ABCD আয়তের AE রেখা CD বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। CEএর মধ্যবিন্দু F। প্রমাণ কর যে, $AC^2 \sim AE^2 = 4CF.DF$.

৬। AB সরলরেখা H বিন্দুতে এমন দুই অংশে বিভক্ত হইল যেন, $AB.BH = AH^2$ এবং AH অংশের মধ্যবিন্দু K. প্রমাণ কর যে, AH, KH এবং KB একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান।

৭। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তর, তৃতীয় বাহু এবং উহার উপর উহার দ্বিখণ্ডক মধ্যমার অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ।

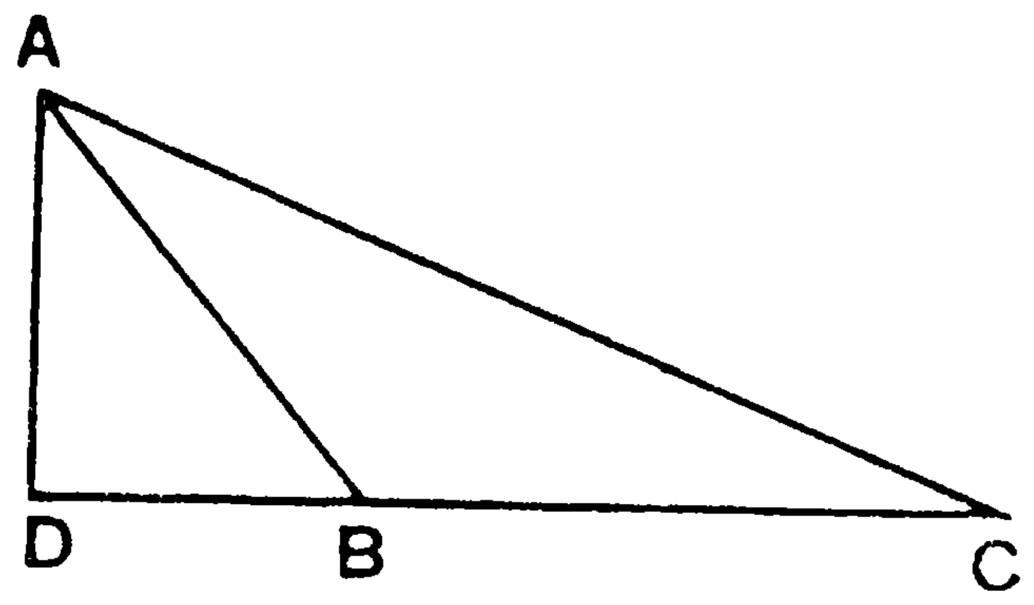
৮। AB এর মধ্যবিন্দু P. AB, Q পর্যন্ত এবং BA, R পর্যন্ত বর্ধিত হইল। প্রমাণ কর যে $AQ.BQ \sim AR.BR = PQ^2 \sim PR^2$.

৯। PQRS একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম। উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয় PQ ও RS. প্রমাণ কর যে, $PQ.RS = PR^2 - PS^2$.

৫৩শ উপপাদ্য—(ইউ—২।১২)

সাঃ নিঃ—কোন স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রটি এই কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির এবং পার্শ্বস্থ একটি বাহু ও অপর বাহুর উপর উহার অভিক্ষেপের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠ABC স্থূলকোণ। BC এর



উপর AD লম্ব টান। মনে কর AD, বর্ধিত CB এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। স্থতরাং BC এর উপর ABএর অভিক্ষেপ BD। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2BC.BD.$

প্রমাণ— ∠ADC = এক সমকোণ বলিয়া,

$\therefore \quad AC^2 = CD^2 + AD^2$ [৩০শ উপঃ]

$= (BC + BD)^2 + AD^2$

$= BC^2 + 2BC.BD + BD^2 + AD^2$

$= BC^2 + 2BC.BD + AB^2.$

অতএব $AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2BC.BD.$

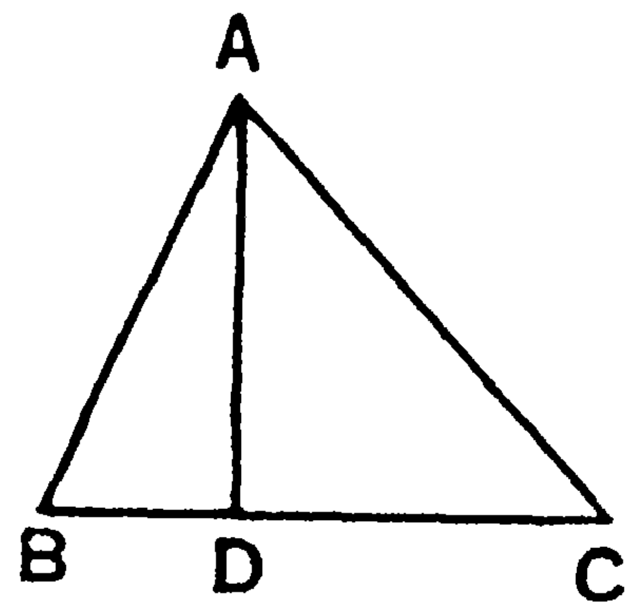
[ই. উ. বি.]

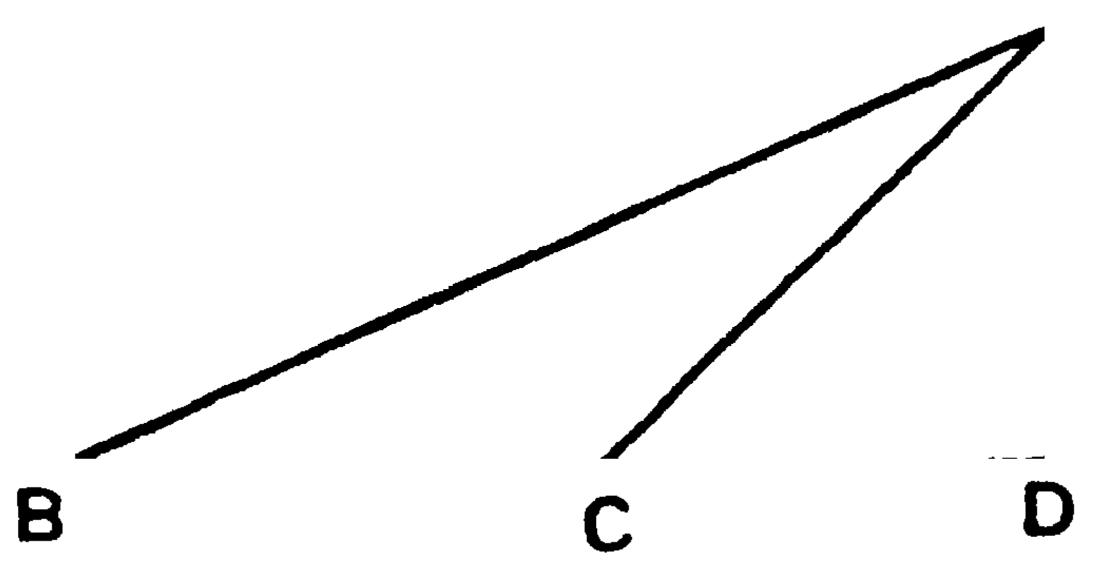
৫৪শ উপপাদ্য—(ইউ—২।১৩)

সাঃ নিঃ—সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রটি ঐ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি এবং পার্শ্বস্থ একটি বাহু ও অপর বাহুর উপর উহার অভিক্ষেপের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের অন্তরের সমান।

বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ত্রিভুজের ABC কোণটি সূক্ষ্মকোণ এবং BC অথবা বর্ধিত BC এর উপর AD লম্ব; সুতরাং BC এর উপর AB বাহুর অভিক্ষেপ BD. প্রমাণ করিতে হইবে যে—

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC.BD.$$





প্রমাণ— $\angle ADB$ এক সমকোণ বলিয়া—

$$AC^2 = CD^2 + AD^2$$ [৩০শ উপঃ]

$$= (BC - BD)^2 + AD^2$$ (১ম চিত্র)

অথবা $$= (BD - BC)^2 + AD^2$$ (২য় চিত্র)

$$= BC^2 + BD^2 - 2\ BC.BD + AD^2$$

কিন্তু, $AB^2 = BD^2 + AD^2$;

সুতরাং $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\ BC.BD.$

[ই. উ. বি.]

ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর বর্গের পরস্পর সম্বন্ধ

৩০শ উপপাদ্য এবং ৫৩শ ও ৫৪শ উপপাদ্যে কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর বর্গের মধ্যে একটি সম্বন্ধ স্থাপিত হইয়াছে। একটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হইলে তাহার সম্মুখীন বাহুর উপর বর্গ অপর দুই বাহুর উপর বর্গের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর বর্গ অপর দুই বাহুর উপর বর্গের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। কিন্তু সমকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর বর্গ অর্থাৎ অতিভুজের উপর বর্গ উক্ত সমষ্টির সমান। এই তিনটি উপপাদ্যকে একত্র করিয়া নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় ঃ—

ত্রিভুজের কোন বাহুর সম্মুখীন কোণ সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হইলে, উহার উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান বা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর হইবে ; অসমান পক্ষে, উহাদের অন্তর উক্ত বাহুদ্বয়ের একটি এবং অপর বাহুর উপর ইহার অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ।

অনুশীলনী

১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB বাহু AC বাহুর সমান এবং BD রেখা AC এর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2AC.\ CD = BC^2$.

২। ABC ত্রিভুজের $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. প্রমাণ কর যে—

(১) C কোণ ৬০° হইলে, $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

(২) C কোণ ১২০° হইলে, $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

৩। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইল এবং AD সংযুক্ত হইল। দেখাও যে—

$$AD^2 = BC^2 + BD^2 - BC.\ CD.$$

৪। ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ O বিন্দু হইতে BC, CA ও AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE ও OF লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে—

$$AC.\ CE+BA.AF+CB.\ BD=CA.AE+AB.\ BF+BC.\ CD.$$

৫। ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি, উহার তির্যক বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল DE রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, $BE^2=BC.DE+CE^2$.

৭। ABC ত্রিভুজের C কোণ স্থূলকোণ। বর্ধিত BC এর উপর লম্ব AD। বর্ধিত AD হইতে AB এর সমান করিয়া DF এবং AC এর সমান করিয়া DG অংশ ছেদ করা হইল। প্রমাণ কর যে, FC=GB.

৮। ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের O লম্ব বিন্দু। প্রমাণ কর যে—

$$OA^2+OB^2+OC^2<\tfrac{1}{2}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

৯। কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির বর্গ-সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের বর্গ সমষ্টির সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

১০। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক রেখা দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

৫৫শ উপপাদ্য

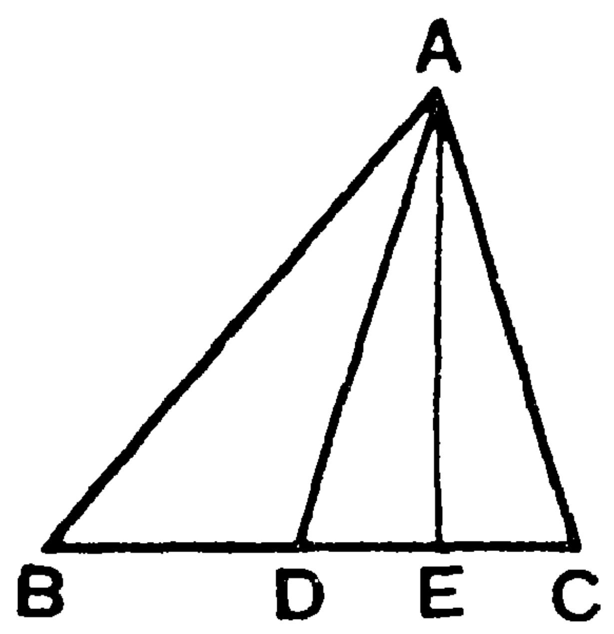
(Apolonius' Theorem)

সাঃ নিঃ—কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপব বর্গক্ষেত্র এবং ঐ বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে।

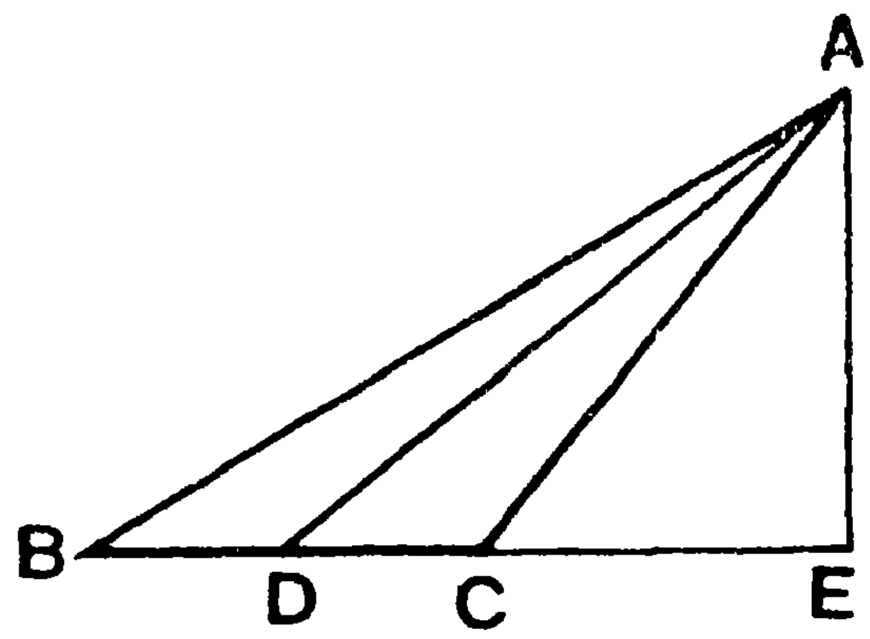
বিঃ নিঃ—মনে কর ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BC বাহুকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2\ (BD^2 + AD^2)$$

BC অথবা বর্ধিত BC এর উপর AE লম্ব টান।



(১ম চিত্র)



(২য় চিত্র)

প্রমাণ— $\angle$AEC সমকোণ বলিয়া,

$\angle$ADC একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle$ADB একটি স্থূলকোণ।

এখন, ADB স্থূলকোণী ত্রিভুজে—

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD.ED \quad \cdots \quad (১)$$

[৫৩শ উপঃ]

আবার, ACD সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজে—

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.ED. \quad \cdots \quad (২)$$

[৫৪শ উপঃ]

(১) ও (২) যোগ করিয়া—

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + DC^2$$
$$= 2\ (BD^2 + AD^2).$$

[ই. উ. বি.]

অনুশীলনী

১। A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। যদি O এরূপ একটি বিন্দু হয় যে, OA^2+OB^2 সর্বদা একই হইবে, তাহা হইলে O বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

২। ABCD সামান্তরিকের অন্তঃস্থ P একটি বিন্দু। উহার কর্ণদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে,

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=AB^2+BC^2+4PG^2$$

৩। কোন ত্রিভুজের দুইবাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর ঐ ত্রিভুজের ভূমি এবং শীর্ষবিন্দু হইতে উহার উপর পাতিত লম্বের পাদবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দুর অন্তর্বর্তী অংশের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ।

৪। একটি সামান্তরিকের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

৫। ABC ত্রিভুজের BC বাহু D বিন্দুতে, BD রেখা H বিন্দুতে এবং CD রেখা K বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল। AH এবং AK রেখাদ্বয় যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$8\,(HM^2 \sim KL^2)=3\,(AB^2 \sim AC^2)$$

বিবিধ অনুশীলনী

১। ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G, ও H. প্রমাণ কর যে, $AC^2+BD^2=2(EG^2+FH^2)$.

২। ABC একটি ত্রিভুজ। যদি $AB^2+BC.CA=BC^2+CA^2$ হয়, তবে দেখাও যে, C কোণটি ৬০°।

৩। ABC ত্রিভুজের O ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে,

$$AB^2+BC^2+CA^2=3\,(OA^2+OB^2+OC^2)$$

৪। ABC ত্রিভুজের A কোণ স্থূলকোণ; CA ও BA বাহুর উপর BD ও CE লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2=AB.\ BE+AC.\ CD.$

৫। ABC একটি ত্রিভুজ। উহার AB, BC ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে ABDE, BCFG এবং ACHK বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, $KE^2+DG^2+FH^2=3\,(AB^2+BC^2+CA^2)$.

৬। কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির চারগুণ বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির তিনগুণের সমান।

৭। ABCD একটি চতুর্ভুজ। AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু E এবং F. প্রমাণ কর যে,

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4\ EF^2.$$

৮। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি D বিন্দুতে এমন ভাবে বিভক্ত হইল যে, $p.\ BD=q.\ CD$. প্রমাণ কর যে,

$$p.\ AB^2+q.\ AC^2=p.\ BD^2+q.CD^2+(p+q)\ AD^2.$$

৯। ABC ত্রিভুজের B ও C কোণ দুইটি সূক্ষ্মকোণ। যদি AC ও AB বাহুর উপর BE এবং CF লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$BC^2=AB.BF+AC.\ CE.$$

১০। ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র। AG এর মধ্যবিন্দু D. প্রমাণ কর যে, $DB^2+DC^2=AB^2+AC^2-10\ AD^2$.

১১। ABCD আয়তের অন্তঃস্থ P একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

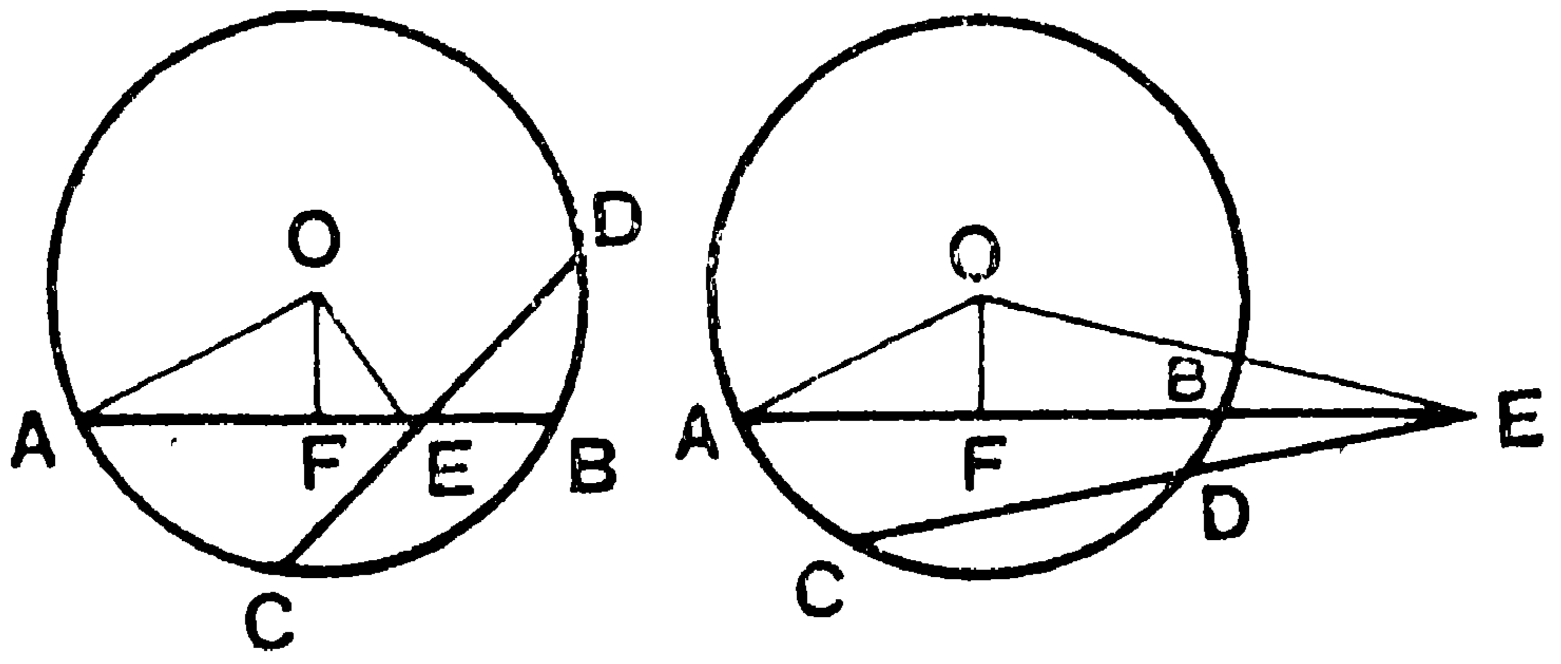
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

বৃত্ত-সম্বন্ধীয় আয়ত

৫৬শ উপপাদ্য—(ইউ—৩।৩৫, ৩৬)

সাঃ নিঃ—কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা উহার অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত অন্যটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর O বৃত্তটির কেন্দ্র, AB ও CD দুইটি জ্যা অন্তর্বিন্দু E (১ম চিত্র) বা বহির্বিন্দু E (২য় চিত্র) তে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AE. EB আয়ত = CE. ED আয়ত।



প্রমাণ— AB এর উপর OF লম্ব টান এবং

AO ও OE সংযুক্ত কর।

AB এর উপর OF লম্ব বলিয়া, AF = BF. [৩২শ উপঃ]

(১) E বিন্দু বৃত্তের অন্তঃস্থ হইলে (১ম চিত্র)

AE. EB আয়ত $= (AF + FE)(BF - FE)$

$= (AF + FE)(AF - FE)$

$= AF^2 - FE^2.$ [৫২ উপঃ]

$= (AF^2 + OF^2) - (FE^2 + OF^2)$

$= AO^2 - OE^2.$ [৩০শ উপঃ]

এই প্রকারে, $CE.\ ED$ আয়ত $= CO^2 - OE^2 = AO^2 - OE^2$.

$\therefore$ $AE.\ EB$ আয়ত $= CE.\ ED$ আয়ত।

(২) E বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থ হইলে (২য় চিত্রে)

$AE.\ EB$ আয়ত $= (AF + FE)\ (EF - FB)$

$= (EF + AF)\ (EF - AF)$

$= EF^2 - AF^2$ (৫২ উপঃ)

$= (EF^2 + OF^2) - (AF^2 + OF^2)$

$= OE^2 - OA^2$.

এই প্রকারে, $CE.\ DE$ আয়ত $= OE^2 - OB^2 = OE^2 - OA^2$.

$\therefore$ $AE.\ EB$ আয়ত $= CE.\ ED$ আয়ত

[ই. উ. বি.]

১ম অনু—বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগত প্রত্যেকটি জ্যা এর অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত জ্যাএর অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

২য় অনু—নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ হইলে, প্রত্যেকটি আয়ত ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

৩য় অনু—বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার একটি ঐ বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিল এবং অন্যটি তাহার সহিত সংলগ্ন হইল। যদি সম্পূর্ণ ছেদকরেখা ও উহার বহিঃস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত, সংলগ্ন-রেখার উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে সংলগ্ন-রেখাটি ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

৪র্থ অনু—দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখার একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইলে, উহাদের প্রান্তবিন্দু চতুষ্টয় বৃত্তস্থ হইবে।

অনুশালনা

১। ABC ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ। C বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর CD লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে,

$$AB.\ AD = AC^2 \text{ এবং } AD.\ DB = CD^2.$$

২। ABC ত্রিভুজের A ও B কোণ হইতে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর AP ও BQ লম্ব টানা হইল। AP ও BQ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AO. OP = BO. OQ.

বিবিধ অনুশীলনী

১। ABCD একটি চতুর্ভুজ কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইল। যদি BA ও CD বর্ধিত হইয়া O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে,

$$OA.\ OB = OC.\ OD.$$

২। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত হইয়া উহাদের সাধারণ স্পর্শককে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩। দুইটি পরস্পর-ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত করিলে, উহার যে-কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় সমান হইবে।

৪। P বিন্দু হইতে কোন দুইটি বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান হইলে উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। দুইটি পরস্পর-ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত করিয়া উহার বর্ধিত অংশের কোন বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি জ্যা টানিলে, উহাদের ছেদ-বিন্দু চতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ হইবে।

৬। তিনটি বৃত্তের দুই দুইটি করিয়া পরস্পর ছেদ করিলে, উহাদের সাধারণ জ্যা তিনটি এক বিন্দুগামী হইবে।

৭। তিনটি বৃত্তের দুই দুইটি পরস্পর স্পর্শ করিলে, স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শকত্রয় এক বিন্দুগামী হইবে।

৮। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, উহাদের সহিত কোন তৃতীয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা দুইটির ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হইবে।

৯। নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট সমস্ত আয়তের মধ্যে বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা লঘিষ্ঠ।

১০। নির্দিষ্ট পরিসীমা-বিশিষ্ট সমস্ত আয়তক্ষেত্রের মধ্যে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

১১। কোন বৃত্তের কেন্দ্র I এবং ব্যাসার্ধ IC. বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে IC এর উপর OQ লম্ব টানা হইল। যদি OC বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, OC. CB $=2$IC. CQ.

১২। কোন বৃত্তের কেন্দ্র O. A, B ও C উহার পরিধিস্থ তিনটি স্থির বিন্দু। যদি BC এর মধ্যবিন্দু P হয় এবং A বিন্দুগত AKL জ্যাটি BC রেখাকে K বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে,

$$AK.\ KL \ngtr AO^2 - OP^2.$$

১৩। ABC ত্রিভুজের A কোণ সূক্ষ্মকোণ। A বিন্দু হইতে BC ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক AP. প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AP^2.$$

১৪। একটি বৃত্তের পরিধিস্থ স্থির বিন্দু P হইতে পরস্পর-লম্ব দুইটি জ্যা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ইহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি সর্বদা একই হইবে।

১৫। R ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট কোণ বৃত্তের চাপের উন্নতি h হইলে এবং ঐ চাপার্ধের জ্যা b হইলে, প্রমাণ কর যে $b^2 = 2Rh$.

১৬। AB ব্যাসের উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। AC ও BD দুইটি জ্যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP.$$

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

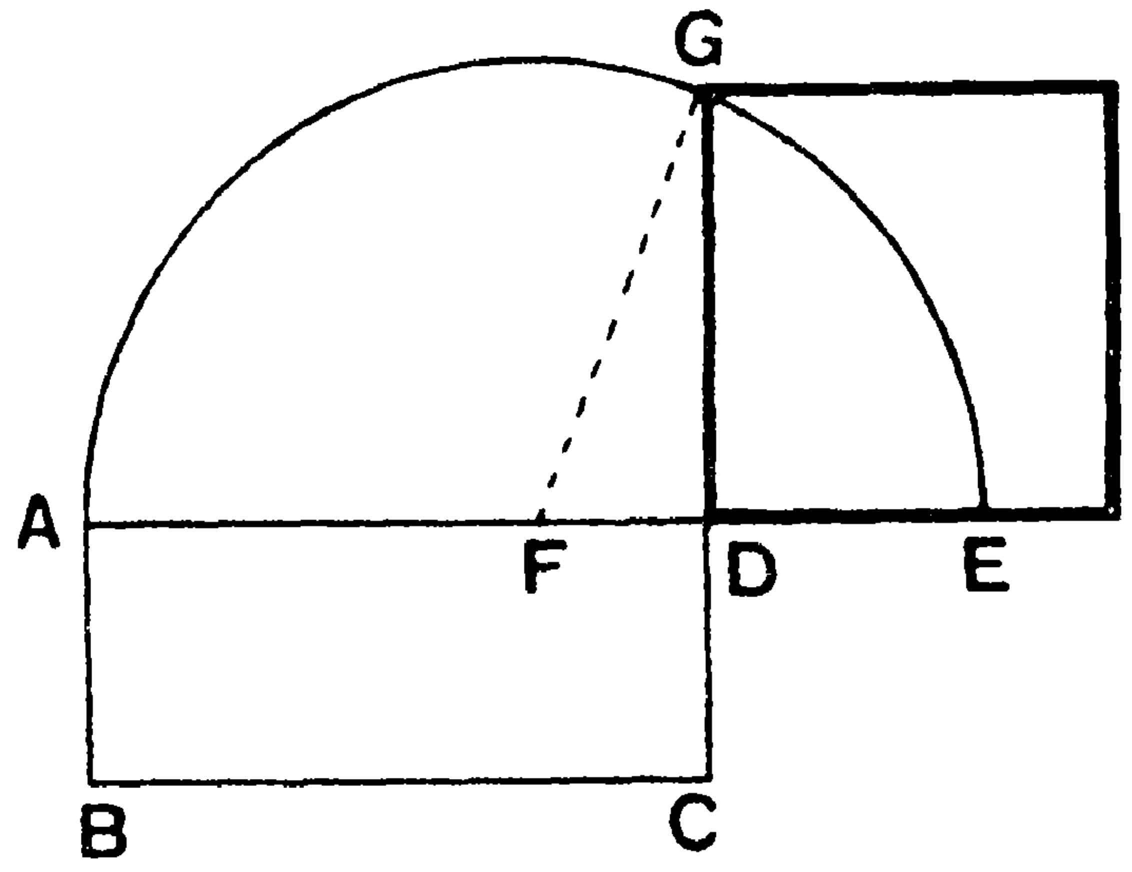
ঋজুরেখ ক্ষেত্র ও বৃত্তাঙ্কন

২৯শ সম্পাদ্য—(ইউ—২।১৪)

সাঃ নিঃ—কোণ নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিঃ নিঃ—মনে কর, ABCD আয়ত ক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন—যদি AB = AD হয়, তবে আয়তটি বর্গক্ষেত্র হইল। যদি তাহা না হয়, তবে AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, DE, CD এর সমান হয়।



AE কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্তার্ধ আঁক। AE এর মধ্যবিন্দু F ই উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র।

CD বর্ধিত হইয়া পরিধির সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে DG এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ— FG যোগ কর।

$DG^2 = FG^2 - FD^2$ (GDF কোণ সমকোণ বলিয়া) [৩০ উপঃ]

$= AF^2 - FD^2 = (AF + FD)(AF - FD)$ [৫২ উপঃ]

$= AD.\ DE$ আয়ত। (কারণ AE, F বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত)

$= BC.\ CD$ আয়ত। [**ই. উ. বি.**]

টীকা। একটি বহুভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়। (১৮শ সম্পাদ্য।)

অনুশীলনী

১। একটি সামান্তরিকের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

২। ৫″ বাহুর একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক এবং উহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ মাপিয়া দেখ কত হয়।

[উঃ—৩.৩″ ইঞ্চি]

৩। ৬″ ও ৪″ সন্নিহিত বাহু-বিশিষ্ট একটি আয়ত আঁক। ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। উহার বাহুর পরিমাণ মাপিয়া বল।

[উঃ—৪.৯″ ইঞ্চি (স্থূলত)]

৪। ৫ বর্গইঞ্চি ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি আয়ত আঁকিয়া উহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং বাহুর পরিমাণ মাপিয়া বল। [উঃ—২·২″]

৫। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অতিভুজ লইয়া একটি সমকোণী ত্রিজভু অঙ্কিত কর যেন, একবাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অতিভুজ ও অন্য বাহুর অন্তর্গত আয়তের সমান হয়।

৬। একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হয়।

৭। একটি বর্গক্ষেত্র এবং উহার তুল্য (equivalent) একটি আয়তের একটি বাহু দেওয়া আছে। অপর বাহুটি নির্ণয় কর।

৮। একটি স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন, বৃহত্তম বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র যে-কোন সমান বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ হয়।

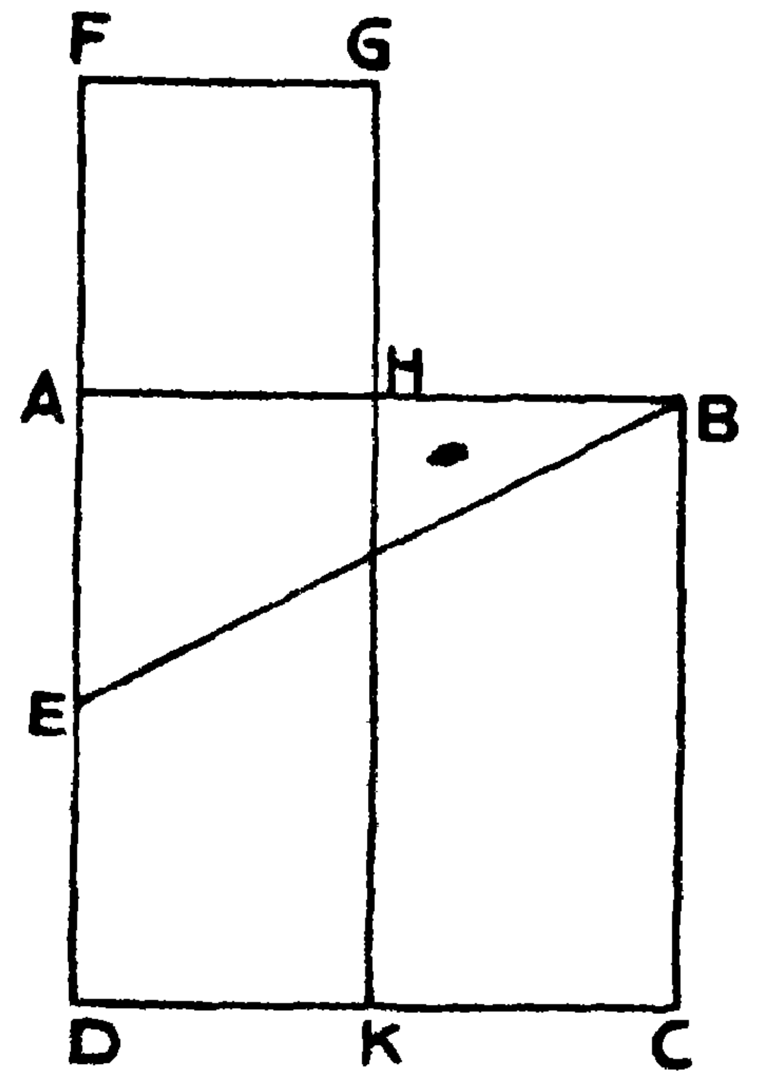
৩০শ সম্পাদ্য—(ইউ—২।১১)

সাঃ নিঃ—একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ তুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যে সম্পূর্ণ রেখাটি ও তাহার এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

বিঃ নিঃ—AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে H বিন্দুতে এরূপ তুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন, $AB.BH = AH^2$.

অঙ্কন—AB রেখার উপর ABCD একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। AC বাহুর মধ্যবিন্দু Eকে Bএর সহিত সংযুক্ত কর। বর্ধিত DA হইতে EBএর সমান EF অংশ ছেদ কর। এখন AFএর উপর AFGH বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। এবং ইহার AH বাহু AB রেখার সহিত একই রেখা হইবে। মনে কর GH বাহু বর্ধিত হইয়া DC রেখার সহিত K বিন্দুতে মিলিত হইল।

H বিন্দুই AB রেখাকে উদ্দিষ্ট তুই অংশে বিভক্ত করিবে।



প্রমাণ—AC ক্ষেত্র $= AB^2 = BE^2 - EA^2$

$= EF^2 - EA^2 = (EF + EA)\ (EF - EA)$

$= (EF + ED)\ AF = DF.AF$ আয়ত

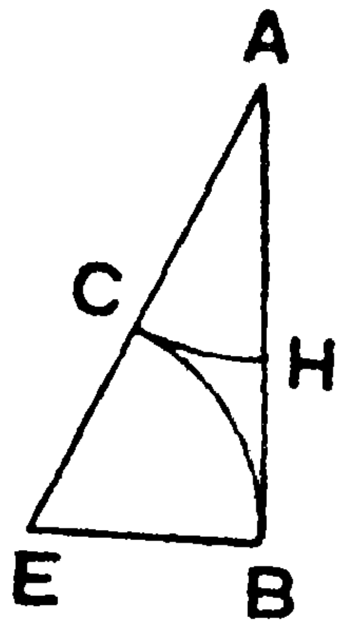
$= DF.FG$ আয়ত।

এই উভয় ক্ষেত্র হইতে সাধারণ AK আয়তটি বাদ দিলে, অবশিষ্ট HC আয়ত = অবশিষ্ট AG বর্গক্ষেত্র ;

$$\text{অর্থাৎ,}\quad AB.BH = AH^2.$$

[ই. স. বি.]

দ্রষ্টব্য—উপরি উক্ত সম্পাদ্যটি আরও সহজে নিম্নলিখিতরূপে সম্পন্ন করা যায়। AB রেখার B বিন্দুতে উহার উপর BE লম্ব টান এবং ABএর অর্ধেকের সমান BE অংশ ছেদ কর। EA যোগ কর এবং EA হইতে EB এর সমান EC অংশ এবং AB রেখা হইতে AC রেখার সমান AH অংশ ছেদ কর। তাহা হইলে AB রেখা H বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল। বীজগণিতের নিয়মানুসারেও AH অংশের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়।



মনে কর, AB $= a$ এবং AH $= x$. $\therefore$ BH $= a - x$.

$$BE = EC = \tfrac{1}{2}a, \quad \text{এবং} \quad AC = AH = x.$$

$$AB^2 = AE^2 - BE^2 = (AE + BE)\,(AE - BE)$$

$$= (AC + 2BE)\,(AE - CE)$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad a^2 = (x + a)x, \qquad \text{অথবা} \quad a(a - x) = x^2\ ;$$

$$i.e.,\ AB.BH = AH^2.$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল (root) $= (\tfrac{1}{2}a\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}a)$

এবং $-(\tfrac{1}{2}a\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}a)$

সুতরাং ইহা হইতে AH এর পরিমাণ নির্ণয় করা যায়।

১ম টীকা। উপরি উক্ত সমীকরণের দুইটি মূল হইতে AHএর দুইটি মান পাওয়া যায়। একটি a অর্থাৎ AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং আর একটি AB অপেক্ষা বৃহত্তর। বস্তুত x এর ক্ষুদ্রতর মানটি ধরিলে H বিন্দু AB রেখাকে অন্তর্বিভক্ত করে, আর বৃহত্তর মানটি ধরিলে H বিন্দুটি AB রেখাকে বহির্বিভক্ত করে। সুতরাং AB রেখা H বিন্দুতে উদ্দিষ্ট প্রকারে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হইতে পারে।

২য় টীকা। বহিচ্ছেদী H′ বিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইলে উপরের অঙ্কনে AE রেখা বর্ধিত করিয়া EC অংশ এবং BA রেখা বর্ধিত করিয়া AH′ অংশ ছেদ করিতে হইবে। তাহা হইলেই $AB.BH' = AH'^2$ হইবে।

মাধ্যানুপাতিক ছেদ (Medial Section)—যদি কোন সরল-রেখা এরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে, সম্পূর্ণরেখাটি ও উহার এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে রেখাটি ছেদ-বিন্দুতে 'মাধ্যানুপাতিক' অংশে ছিন্ন হইয়াছে এরূপ বলা হয়।

বস্তুত, $AB.BH = AH^2$ হইলে, $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{GH}$. সুতরাং AH অংশ AB ও BH এর মধ্য-সামানুপাতিক (mean proportional) হয়।

অনুশীলনী

১। AB সরলরেখাটি H বিন্দুতে মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BH^2 = 3AH^2$.

২। যদি কোন সরলরেখা মাধ্যানুপাতিক অংশে অন্তর্বিভক্ত হয় এবং বৃহত্তর অংশ হইতে ক্ষুদ্রতরের সমান অংশ ছেদ করা হয়, তবে বৃহত্তর অংশটিও মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত হয়, প্রমাণ কর।

৩। কোন সরলরেখা মাধ্যানুপাতিক অংশে বিভক্ত হইলে, অংশদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরের অন্তর্গত আয়ত অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

৪। BC রেখা AB রেখার লম্ব এবং $BC = \frac{1}{2}AB$. CA রেখা হইতে CB এর সমান CD অংশ ছেদ কর। AB রেখা হইতে AD এর সমান AE অংশ ছেদ করিয়া প্রমাণ কর যে, $AB.BE = AE^2$.

৩১শ সম্পাদ্য

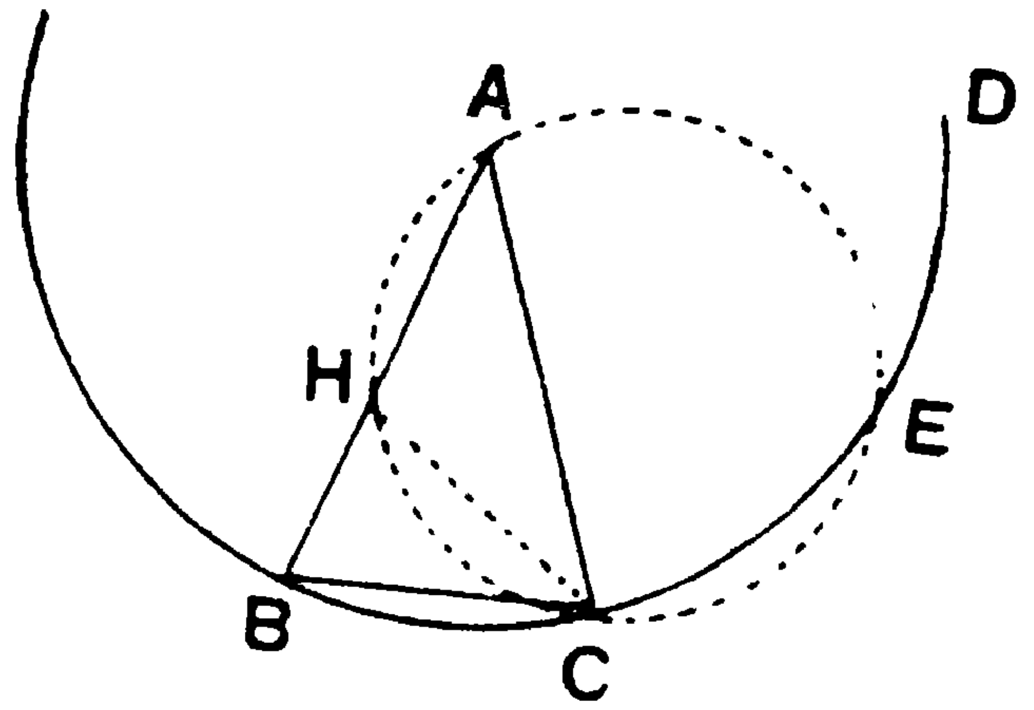
সাঃ নিঃ—একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় প্রত্যেকেই শিরঃকোণের দ্বিগুণ হয়।

অঙ্কন—AB একটি সরলরেখাকে H বিন্দুতে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, $AB.\ BH = AH^2$ হয়।

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া BCED বৃত্ত অঙ্কিত কর। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AH এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তাংশ আঁক যেন, উহা BCED বৃত্তটিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

BC, AC যোগ কর।

তাহা হইলে ABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।



প্রমাণ— CH যোগ কর।

AHC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত AHC আঁক।

এখন, $AB.\ BH = AH^2 = BC^2$ বলিয়া,

BC রেখা AHC বৃত্তকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

$\therefore$ $\angle BCH$ = বৃত্তাংশস্থ একান্তর $\angle HAC$;

$\therefore$ $\angle BCH + \angle ACH = \angle HAC + \angle ACH$,

অর্থাৎ $\angle BCA$ = বহিঃস্থ $\angle BHC$.

কিন্তু $\angle ABC = \angle ACB$. $\therefore$ $\angle ABC = \angle BHC$.

$\therefore$ $BC = HC = AH$;

স্থতরাং $\angle HAC = \angle HCA = \angle A$.

$\therefore$ $\angle ABC = \angle ACB = \angle BHC$

$= \angle HAC + \angle HCA = 2\angle A$.

[ই. স. বি.]

১ম দ্রষ্টব্য। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$ প্রত্যেকে $\angle A$ এর দ্বিগুণ বলিয়া, উহার কোণসমষ্টি $\angle A$ এর পাঁচগুণ।

স্থতরাং, $\angle A =$ দুই সমকোণের এক পঞ্চমাংশ এবং $\angle B$, $\angle C$ এর প্রত্যেকটি দুই সমকোণের দুই পঞ্চমাংশ অর্থাৎ চার সমকোণের এক পঞ্চমাংশ।

২য় দ্রষ্টব্য। এই সম্পাদ্যের সাহায্যে কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত স্থষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায়। উপরি উক্ত প্রণালীতে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া, কোন বৃত্তের কেন্দ্রে উহার ভূমি-সংলগ্ন কোণের সমান পাঁচটি কোণ অঙ্কিত কর। এই সকল কোণের বাহু সমূহের পরিধিস্থ প্রান্তবিন্দু-যোজক রেখা দ্বারাই একটি স্থষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত হইবে। এই অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহে অঙ্কিত স্পর্শক পাঁচটি দ্বারাই পরিলিখিত একটি স্থষম পঞ্চভুজ উৎপন্ন হইবে।

অনুশীলনী

১। একটি সমকোণকে কি প্রকারে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করা যায় দেখাও।

২। ABC ত্রিভুজের $\angle B = \angle C = 2\angle A$. A শিরঃকোণটির পরিমাণ কত ডিগ্রি ?

প্রমাণ কর যে, $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

৩। ৩১ সম্পাদ্যের চিত্রে দেখাও যে, HC চাপের মধ্যবিন্দু HCB ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

৪। ৩১শ সম্পাদ্যের চিত্র হইতে এমন একটি ত্রিভুজ নির্দেশ কর যাহার শিরঃকোণটি ভমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটির তিন গুণ।

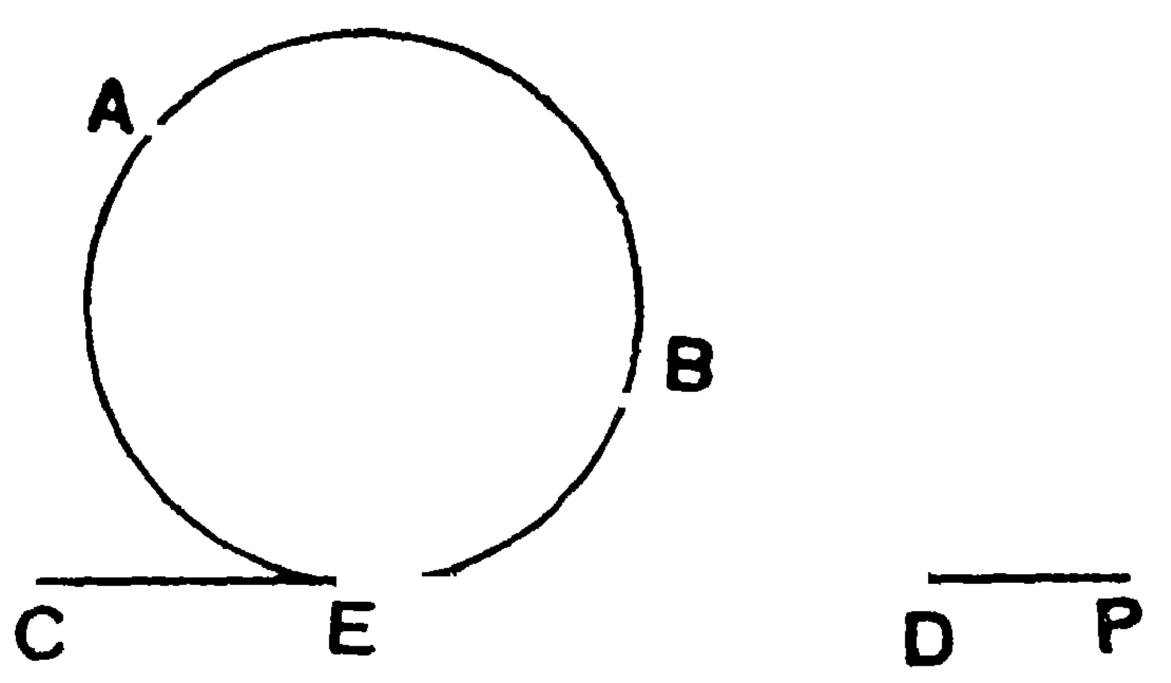
বিবিধ বৃত্তাঙ্কন

১। কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং ঐ সরলরেখাটিকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু CP সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

অঙ্কন—AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর যেন, উহা PCএর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।

AD.BD আয়তের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক। DC হইতে ঐ বর্গ-ক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান DE অংশ ছেদ কর। এখন A, B ও E বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।



প্রমাণ— $AD.BD = DE^2$ বলিয়া,

DE রেখা ABE বৃত্তকে E বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

[৫৬শ উপঃ, ২য় অনু.]

দ্রষ্টব্য। AB রেখা CP এর সমান্তরাল হইলে AB রেখাকে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া PCএর উপর OE লম্ব টান। এখন A, B ও E বিন্দুগত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

২। কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

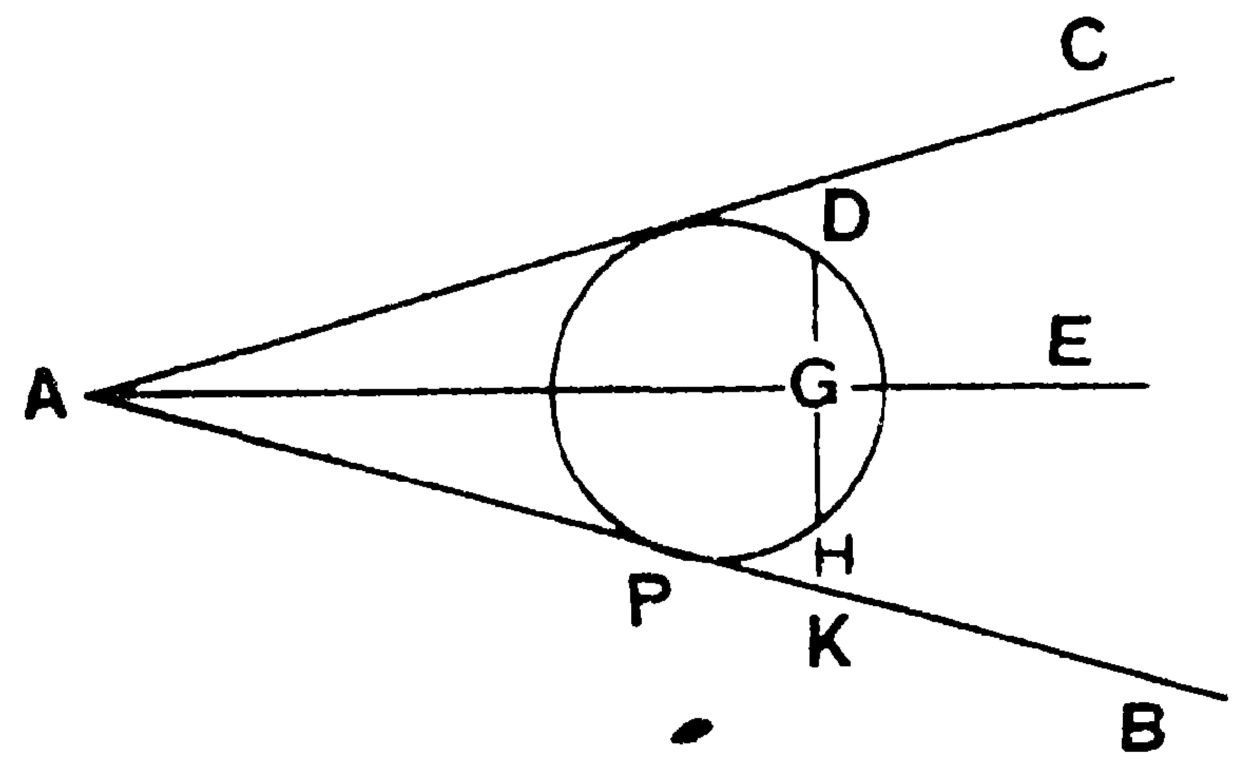
AB ও AC দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং D একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন—AE রেখা ∠BAC এর দ্বিখণ্ডক হইলে, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র AE রেখার উপর অবস্থিত হইবে।

D বিন্দু হইতে AEএর উপর DG লম্ব টানিয়া, উহাকে H পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, GH = DG হয়।

সুতরাং যে বৃত্তের কেন্দ্র AE রেখার উপর অবস্থিত উহা যদি D বিন্দুগত হয় তবে উহা H বিন্দু দিয়াও যাইবে।

এখন, D ও H বিন্দু দিয়া AB রেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া একটি



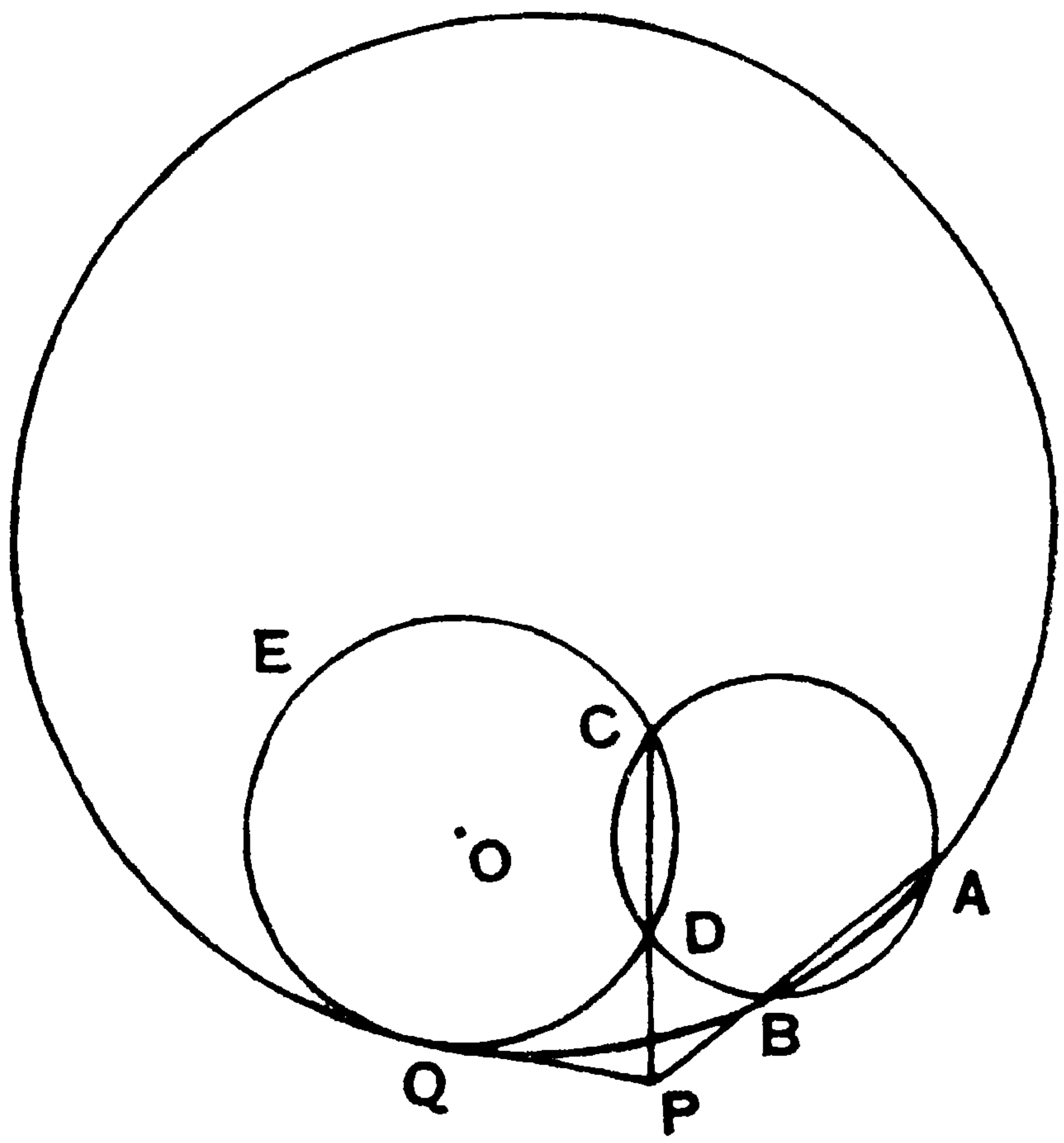
বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই অঙ্কিত বৃত্তটিই AC রেখাকেও স্পর্শ করিবে; কারণ উহার কেন্দ্র AE রেখায় অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে উহাদের উভয়ের সমদূরবর্তী একটি সমান্তরাল সরলরেখা টান। উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এই রেখায় অবস্থিত হইবে।

৩। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং DCE একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত।

অঙ্কন—DCE বৃত্তের পরিধির উপর C একটি বিন্দু লও এবং A, B ও C বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত আঁক। যদি এই বৃত্তটি DCE বৃত্তটিকে স্পর্শ করে, তবে এইটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে। যদি তাহা না করে, তবে উহা DCE বৃত্তটিকে আর একটি D বিন্দুতে ছেদ করিবে।



AB এবং CD যোগ করিয়া উভয়কে বর্ধিত কর। উহারা যেন P বিন্দুতে মিলিত হইল। P বিন্দু হইতে DCE বৃত্তের PQ স্পর্শক টান। মনে কর ইহার স্পর্শবিন্দু Q।

A, B ও Q বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ—কারণ, $PA.PB = PC.PD$

$= PQ^2.$

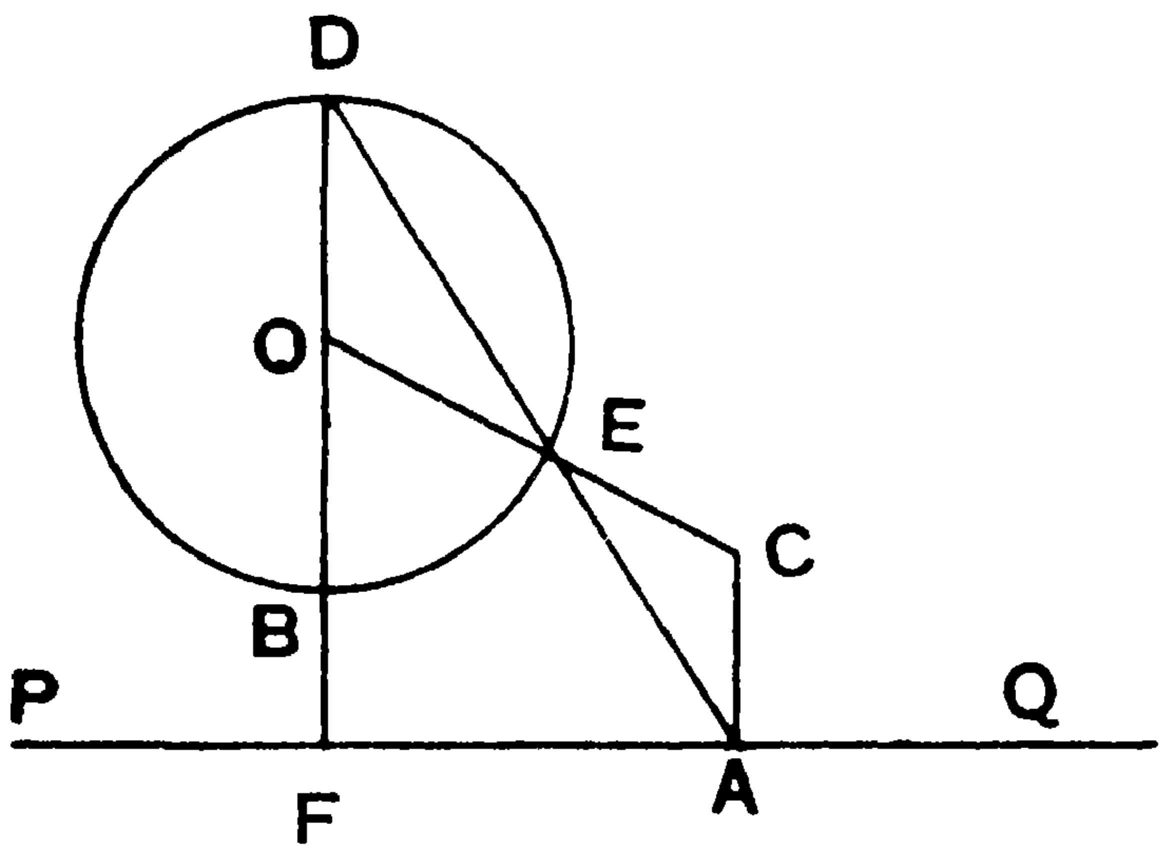
সুতরাং PQ রেখা A, B ও Q বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ABQ বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। এবং ইহা DCE বৃত্তটিকেও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং PQ রেখা ABQ ও DCE বৃত্তদ্বয়ের Q বিন্দুতে একটি সাধারণ স্পর্শক, অর্থাৎ ABQ বৃত্তটি DCE বৃত্তকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং ইহা A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত।

দ্রষ্টব্য। AB এর সমকোণে দ্বিখণ্ডক রেখা DCE বৃত্তের কেন্দ্রগত হইলে উপরি উক্ত অঙ্কনে চলিবে না।

তখন AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে। এস্থলে AB এর সমান্তরাল করিয়া DCE বৃত্তের একটি স্পর্শক টানিতে হইবে।

৪। একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং PQ নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর A একটি নিদিষ্ট বিন্দু।



অঙ্কন—O বিন্দু হইতে পরিধিকে B ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়া PQএর উপর OF লম্ব টান। মনে কর PQ রেখা হইতে B অপেক্ষা D অধিকতর দূরবর্তী।

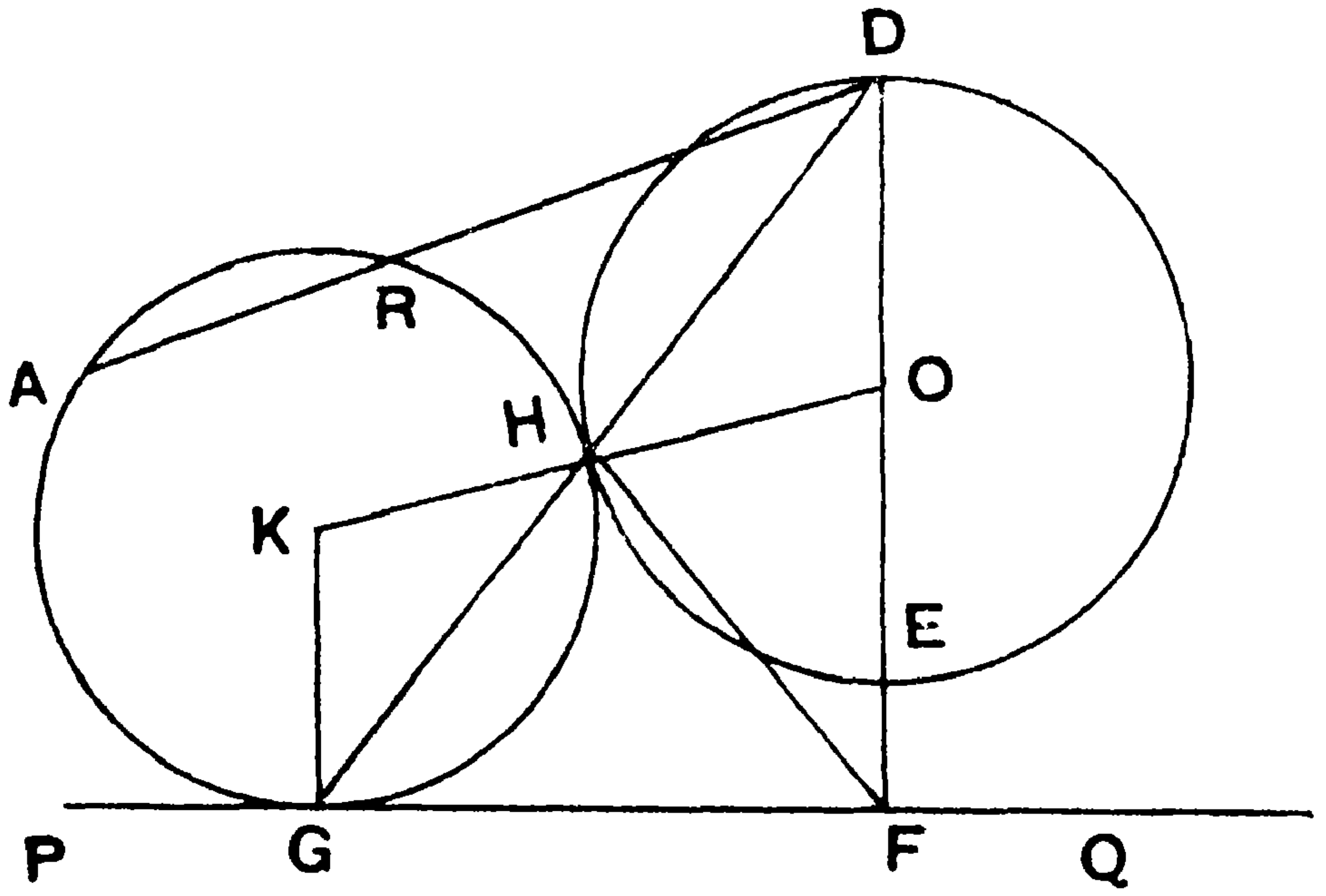
AD যোগ কর। মনে কর উহা পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু হইতে PQ এর উপর AC লম্ব টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর। মনে কর বর্ধিত OE রেখা AC এর সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইল। C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহাই PQ রেখাকে A বিন্দুতে এবং নির্দিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

বিকল্প অঙ্কন—A, B যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে উহা পরিধির সহিত একটি বিন্দুতে মিলিত হইবে। এবং পূর্ব প্রকারে আর একটি বৃত্তও অঙ্কিত করা যাইবে।

৫। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং কোন নির্দিষ্ট DHE বৃত্তের কেন্দ্র O.

অঙ্কন—O বিন্দু হইতে PQএর উপর OF লম্ব টান। মনে কর ইহা PQ রেখাকে F বিন্দুতে ও বৃত্তের পরিধিকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। (PQ রেখা হইতে E অপেক্ষা D অধিকতর দূরবর্তী)। AD যোগ কর।



এবং A, F ও E বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন, উহা AD (অথবা বর্ধিত AD) রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AD.DR আয়ত = DF.DE আয়ত।

এখন, A ও R বিন্দু দিয়া এবং PQ রেখাকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। (১ম সমাধান।)

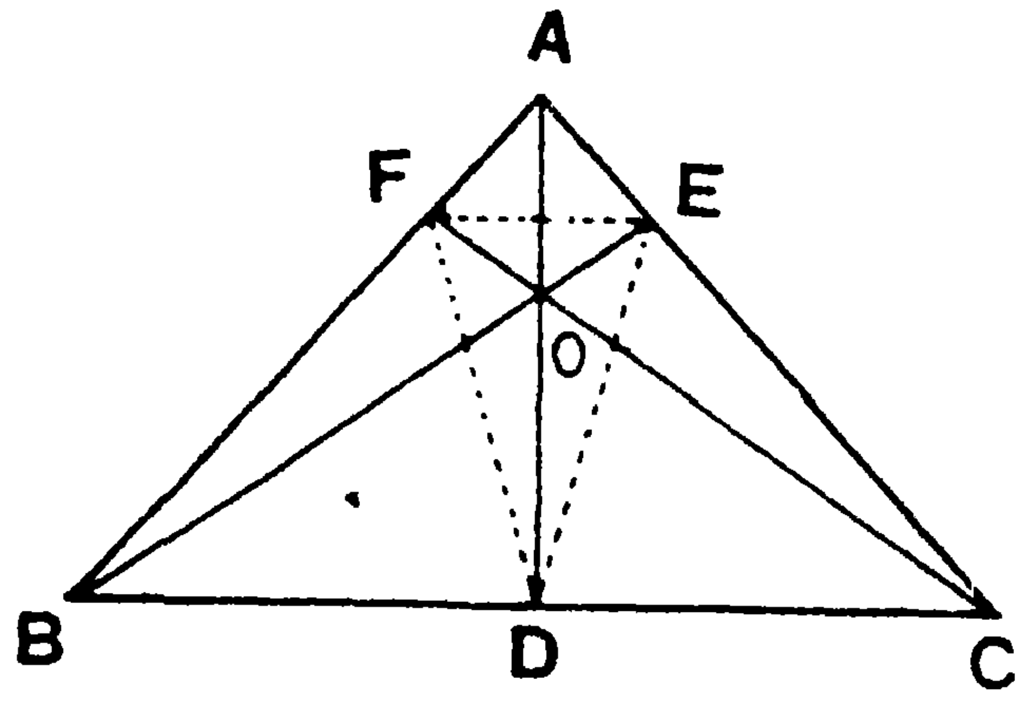
ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে এবং নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে।

(চিত্র অনুসারে প্রমাণ কর।)

দ্রষ্টব্য। চার প্রকারে এইরূপ বৃত্ত-অঙ্কন করা যাইতে পারে। কারণ, A ও R বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া এবং PQ রেখাকে স্পর্শ করিয়া দুইটি বৃত্ত আঁকা যায় এবং AD এর পরিবর্তে AE যোগ করিয়া পূর্ব প্রকারে আরও দুইটি বৃত্তটি অঙ্কিত হইতে পারে।

৬। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের পাদ-বিন্দুত্রয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, D, E ও F লম্বপাদ-বিন্দুত্রয়।



অঙ্কন—D, E ও F বিন্দুত্রয় যোগ করিয়া DEF পাদ ত্রিভুজের D, E ও F কোণত্রয়কে দ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর দ্বিখণ্ডক রেখা তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন, OD, OE ও OF রেখার D, E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে উহাদের উপর লম্ব টান। এই লম্ব তিনটি পরস্পর A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করিলে, ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

৭। একটি ত্রিভুজের ভূমি, উন্নতি ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, AB ত্রিভুজটির ভূমি, H উহার নির্দিষ্ট উন্নতি এবং K উহার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন—ABএর মধ্যবিন্দু D হইতে উহার উপর DG লম্ব টান। DG হইতে Hএর সমান করিয়া DX অংশ ছেদ কর। X বিন্দু হইতে AB এর সমান্তরাল করিয়া PQ রেখা আঁক। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া K এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন, উহা DGকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া K এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক যেন, ইহা PQ রেখাকে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AC, BC, AC′, BC′ যোগ কর। তাহা হইলে, ACB অথবা AC′Bই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (চিত্রাঙ্কন করিয়া প্রমাণ কর।)

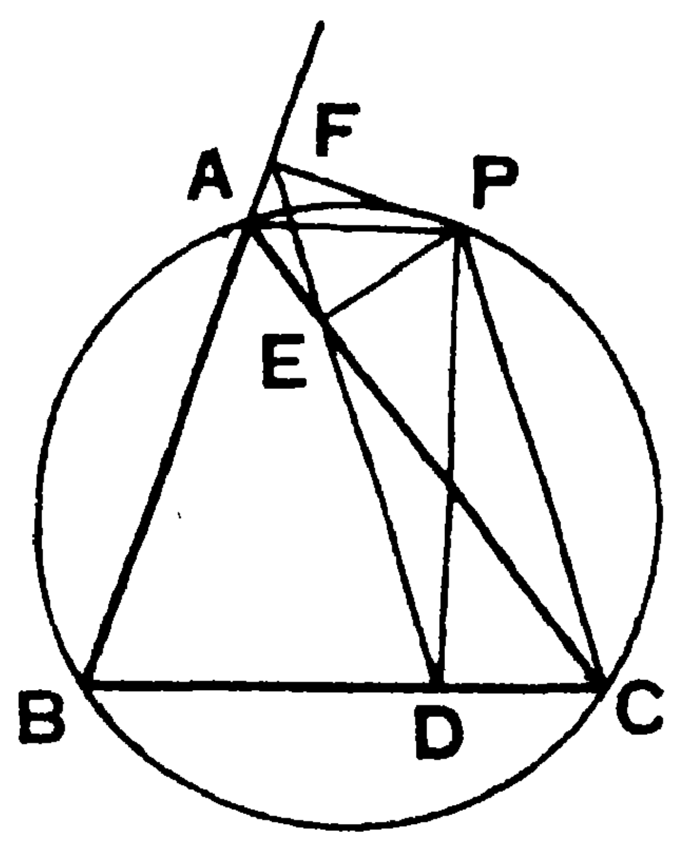
৮। পাদরেখা বা সিম্‌সনের রেখা (Simpson's Line)

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর **লম্ব** টানিলে, লম্ব-পাদত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর P বিন্দু হইতে বাহুত্রয়ের উপর PD, PE ও PF লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D, E ও F তিনটি পাদ-বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

EF, ED, PA, PC যোগ কর।



প্রমাণ—∠PEA ও ∠PFA উভয়ই সমকোণ বলিয়া, P, A, E ও F বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ।

∴ ∠PEF = ∠PAF (একই চাপের উপর)

= ∠PAB এর সম্পূরক

= ∠PCD.

(কারণ, A, P, C ও B বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ)

আবার, $\angle PEC$ ও $\angle PDC$ উভয়েই সমকোণ বলিয়া, P, E, D ও C বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ।

∴ $\angle PED = \angle PCD$ এর সম্পূরক

= PEF এর সম্পূরক।

∴ FE ও ED একই সরলরেখায় অবস্থিত। [২য় উপঃ]

অর্থাৎ, D, E ও F পাদত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। FED রেখাকে ABC ত্রিভুজের 'সিম্‌সন রেখা' অথবা **পাদরেখা** বলে।

অনুশীলনী

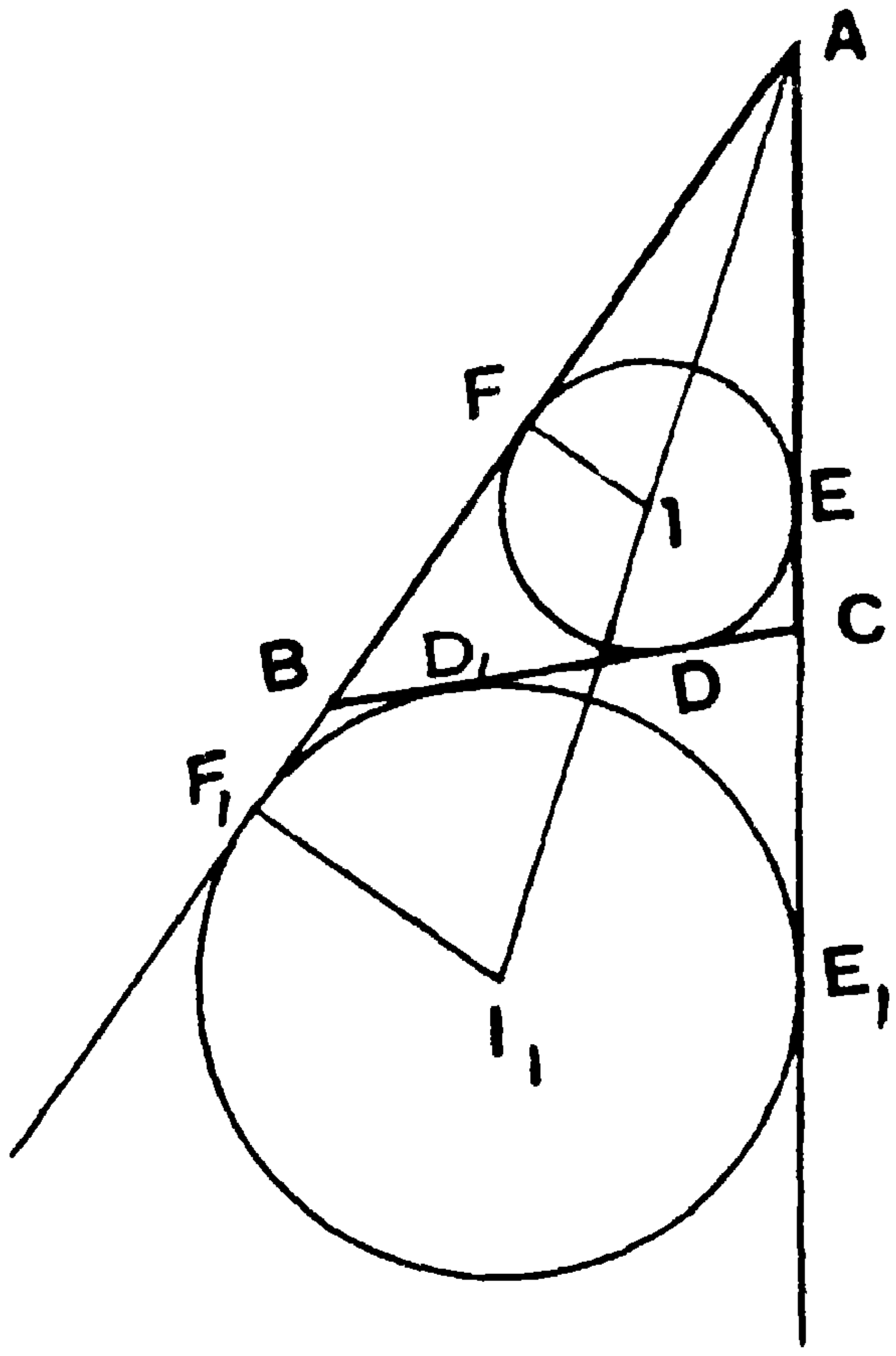
১। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দু P লম্ববিন্দু Oএর সহিত যুক্ত হইলে, OP রেখা P বিন্দুর পাদরেখা-দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

২। ABC ত্রিভুজের উপরিস্থ P বিন্দু হইতে BC ও AB বাহুর উপর PD ও PF লম্ব টানা হইল। যদি FD (অথবা বর্ধিত FD) AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, PE রেখা AC এর উপর লম্ব।

৩। ABC ও A′B′C′ দুইটি ত্রিভুজের একটি সাধারণ কোণ আছে। উহাদের পরিবৃত্ত দুইটি P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, P বিন্দু হইতে AB, AC, BC ও B′ C′ এর উপর অঙ্কিত লম্ব-পাদ সমূহ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। এস্থলে ইহা সহজেই প্রতীয়মান হইবে যে, যদি P বিন্দু হইতে ABC ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব-পাদত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়, তবে P বিন্দুর সঞ্চারপথটি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত হইবে।

৯। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু D, E ও F; এবং D_1, E_1 ও F_1 উহার একটি বহির্বৃত্তের স্পর্শবিন্দুত্রয়; I এবং I_1 যথাক্রমে অন্তঃকেন্দ্র ও বহিঃকেন্দ্র। r এবং r_1 বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ। (এস্থলে AB ও AC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করা হইয়াছে।)



মনে কর BC $= a$, CA $= b$ এবং AB $= c$.

I_1F_1B এবং I_1D_1B ত্রিভুজ দুইটি সমান বলিয়া, $BF_1 = BD_1$;

এইরূপে, $CD_1 = CE_1$.

আবার, AE_1I_1 এবং AF_1I_1 ত্রিভুজ দুইটি সমান বলিয়া, $AE_1 = AF_1$.

$$\therefore \quad AB + BD_1 = AC + CD_1.$$

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিসীমা $2s$, অর্থাৎ $AB + BC + CA = 2s$.

$$\therefore \quad (১) \quad AF_1 = AE_1 = AC + CE_1 = AC + CD_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(AC + CD_1 + AB + BD_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) = \tfrac{1}{2} \times 2s = s.$$

(২) $CD_1 = CE_1 = AE_1 - AC = AF_1 - AB = s - b.$

এইরূপে, $BD_1 = BF_1 = AF_1 - AB = s - c.$

এই প্রকারে প্রমাণ করা যায় যে—

(৩) $AE = AF = s - a$; $BD = BF = s - b$; $CD = CE = s - c.$

(৪) $CD = BD_1$, এবং $BD = CD_1$.

(৫) $EE_1 = FF_1 = a.$

(৬) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= rs = r_1 (s - a).$

১০। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I এবং I_1, I_2, I_3 তিনটি বহিঃকেন্দ্র।

(১) এখন, AIF ও AIE ত্রিভুজ দুইটি সমান প্রমাণ করা যাইতে পারে বলিয়া, IF = IE ; এবং AI রেখা BAC কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

আবার, AI_1F_1, AI_1E_1 ত্রিভুজ দুইটি সমান বলিয়া, AI_1 রেখাটি BAC কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

একটি কোণকে দুইটি বিভিন্ন সরলরেখা দ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না। সুতরাং AI ও AI_1 একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ A, I ও I_1 একই সরলরেখায় অবস্থিত।

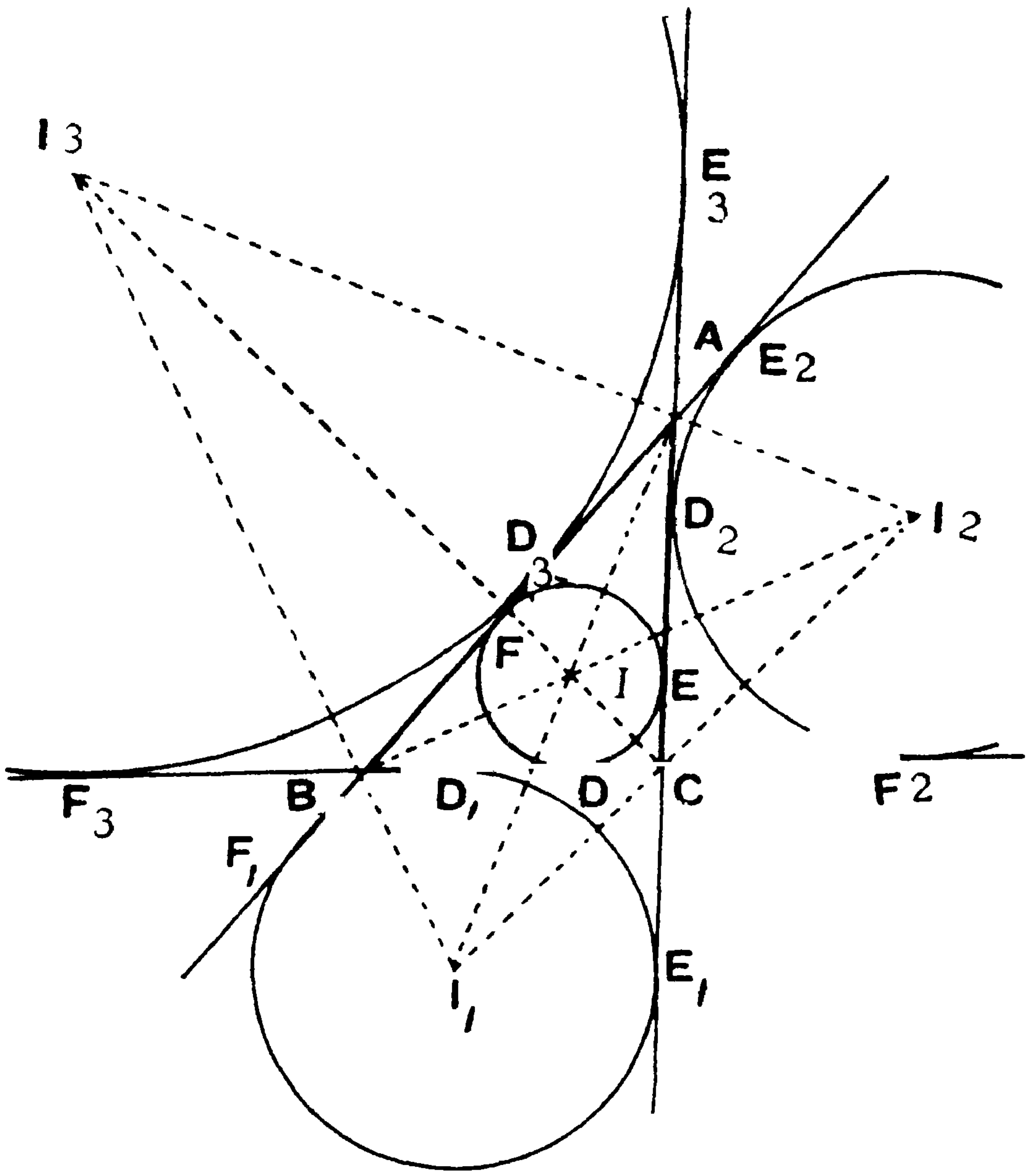
এই প্রকারে, C, I, I_3 এবং B, I, I_2 একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এই প্রকারে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে,

(২) I_2, A, I_3 ; I_3, B, I_1 ; এবং I_1, C, I_2 একই সরলরেখায় অবস্থিত।

(৩) BI_1C, CI_2A, এবং AI_3B ত্রিভুজ তিনটি সদৃশকোণ।

(৪) $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজটি অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন DEF ত্রিভুজের সদৃশকোণ।



(৫) I, I_1, I_2, I_3 বিন্দুচতুষ্টয়ের যে-কোন একটি অন্য তিনটি-দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ব-বিন্দু।

(৬) I, I_1, I_2, I_3 এর যে-কোন তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তগুলি পরস্পর সমান।

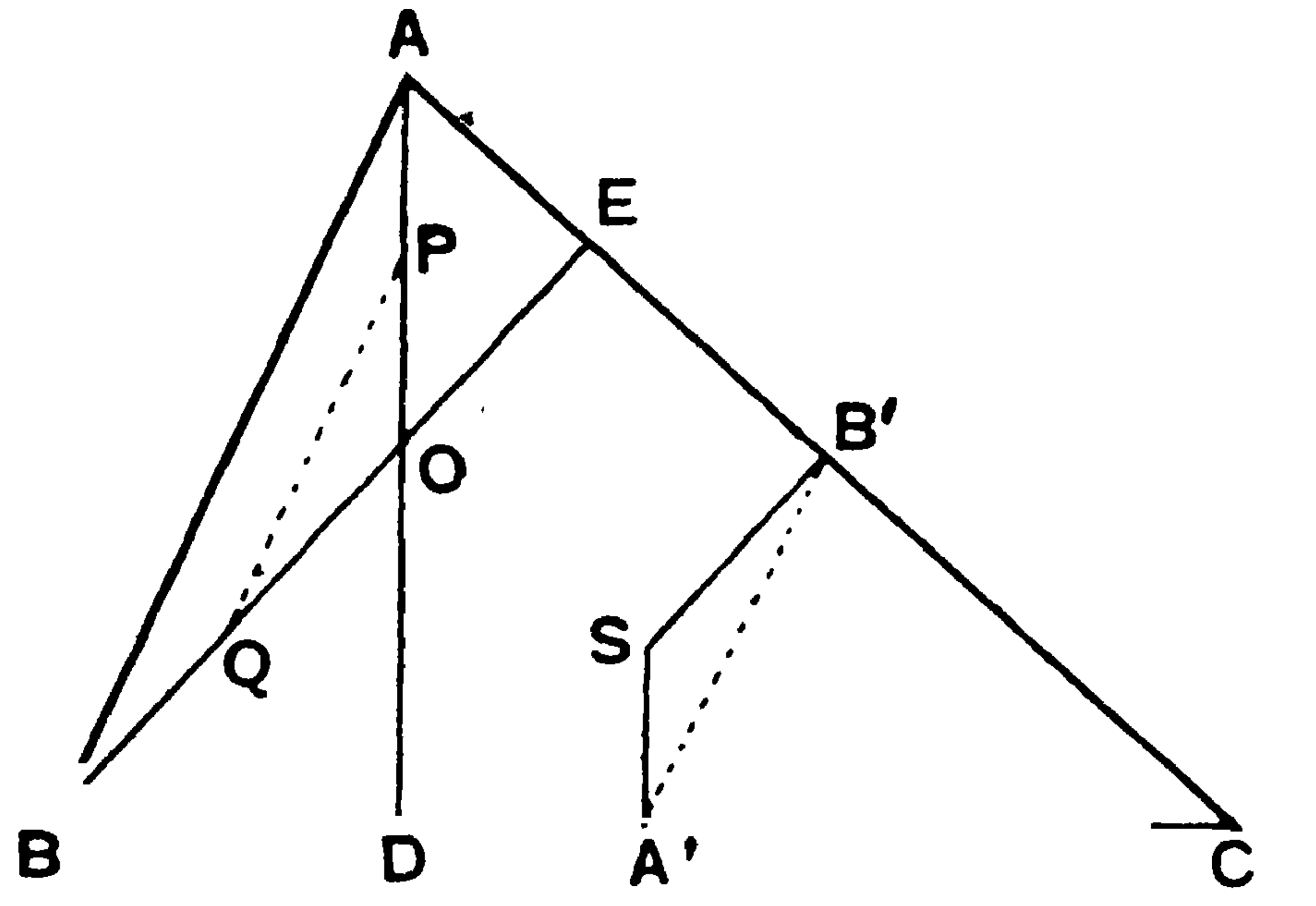
১১। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু উহার কোন শীর্ষবিন্দুর সহিত যুক্ত হইলে উক্তরেখাটি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইতে ঐ শীর্ষকোণের সম্মুখীন বাহুর উপর পাতিত লম্বের দ্বিগুণ হইবে।

ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S. বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত AD এবং BE লম্বদ্বয় পরস্পর O লম্ববিন্দুতে ছেদ করিল।

SA′ ও SB′ যথাক্রমে BC ও CA বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO = 2SA′, BO = 2SB′ এবং CO = 2SC′.

মনে কর AO এবং BO এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। A′B′ সংযুক্ত কর।



প্রমাণ—A′ ও B′ বিন্দুদ্বয় BC ও CA বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু বলিয়া, A′B′ রেখাটি AB এর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

আবার, P ও Q যথাক্রমে AO, BO এর মধ্যবিন্দু বলিয়া, PQ রেখাটি AB-এর সমান্তরাল ও অর্ধেক। সুতরাং PQ এবং A′B′ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

এখন, PQ, AD ও BE যথাক্রমে A′B′, SA′ ও SB′ এর সমান্তরাল।

∴ $\angle QPO = \angle SA'B'$;

এবং $\angle PQO = \angle SB'A'$.

এখন, POQ ও SA′B′ দুইটি ত্রিভুজের—

$\angle QPO = \angle SA'B'$ এবং $\angle PQO = \angle SB'A'$,

এবং $PQ = A'B'$;

∴ $= SA'$ এবং $QO = SB'$.

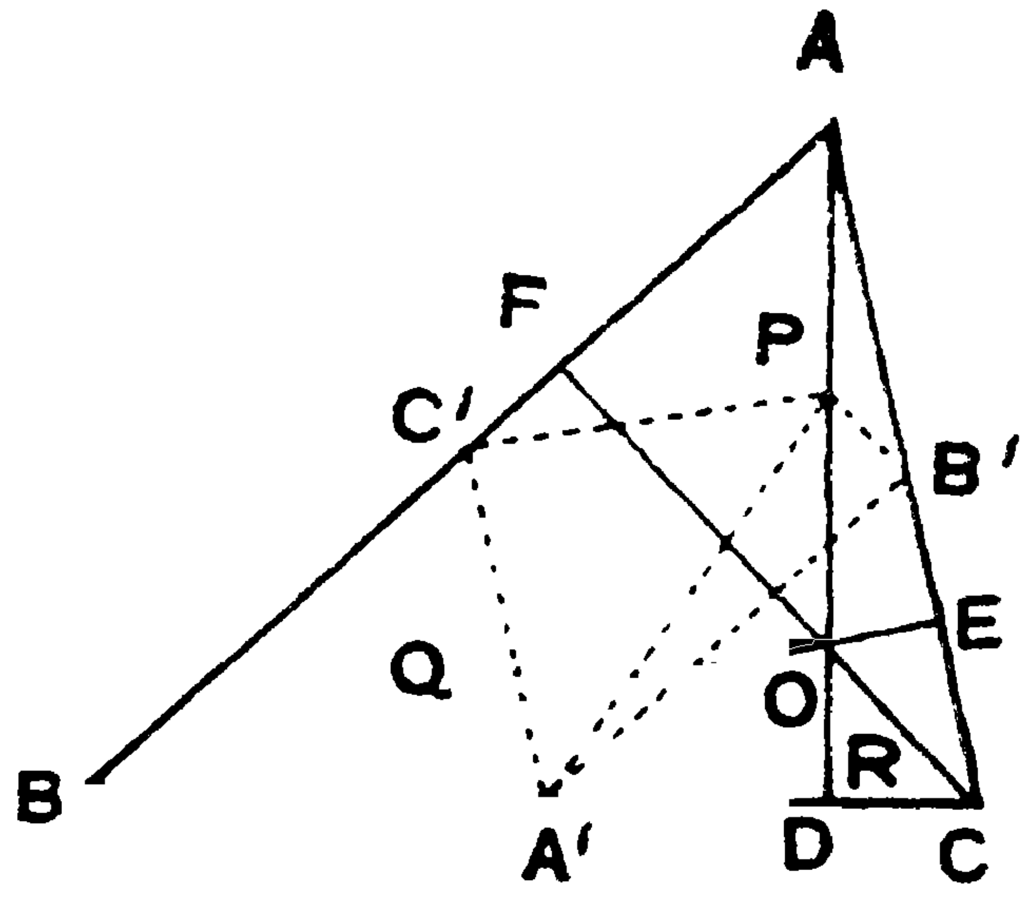
সুতরাং AO = 2SA′ এবং BO = 2SB′.

ঐরূপে, OC = 2SC′.

১২। **নব-বিন্দু বৃত্ত** (Nine-points Circle)

কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয়, শিরঃকোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর পাতিত লম্ব-পাদত্রয়, এবং লম্ববিন্দু ও শীর্ষ-বিন্দু-সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্য বিন্দুগুলি একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত।

মনে কর ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O ; BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A′, B′ ও C′ ; A, B ও C শিরঃকোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর পাতিত লম্ব-পাদত্রয় D, E ও F ; এবং AO, BO ও CO রেখার মধ্যবিন্দুত্রয় যথাক্রমে P, Q এবং R.



প্রমাণ করিতে হইবে যে, A′, B′, C′, D, E, F, P, Q ও R নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত।

A′B′, A′C′, A′P, B′P এবং C′P সংযুক্ত কর।

যেহেতু AC′ = C′B এবং AP = PO ;

∴ C′P, BO এর সমান্তরাল।

আবার, যেহেতু BC′ = C′A এবং BA′ = A′C ;

∴ A′C′, AC এর সমান্তরাল।

কিন্তু বর্ধিত BO, AC এর সহিত সমকোণে মিলিত হইয়াছে।

∴ ∠A′C′P = এক সমকোণ।

ঐরূপে, $\angle A'B'P$ = এক সমকোণ।

∴ A′, C′, P ও B′ বিন্দুচতুষ্টয় একই বৃত্তস্থ ;

অর্থাৎ P বিন্দু A′, B′, ও C′ বিন্দুগামী বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত এবং A′P ঐ বৃত্তের ব্যাস। [৪১শ ও ৪২শ উপঃ]

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, Q ও R বিন্দুদ্বয় ঐ একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত।

আবার, $\angle PDA'$ = এক সমকোণ।

∴ A′ P ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দুগামী হইবে।

এইরূপে, E ও F বিন্দুদ্বয়ও ঐ একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইবে ;

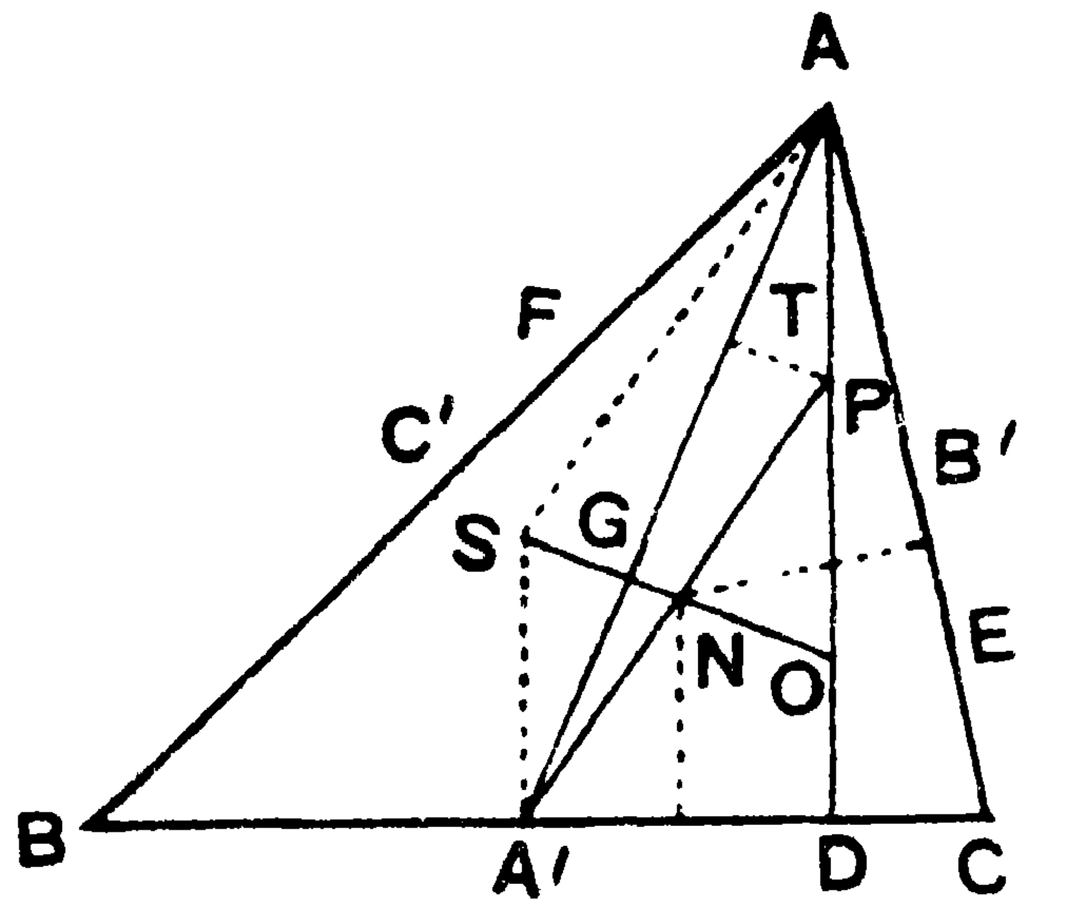
অর্থাৎ, A′, B′, C′, D; E, F, P, Q ও R নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইবে, *i.e.*, একই বৃত্তস্থ।

দ্রষ্টব্য। উপরি উক্ত নয়টি বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বলিয়া এই বৃত্তটিকে অর্থাৎ ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুগামী বৃত্তটিকে **নব-বিন্দু বৃত্ত** বলে। ইহা সহজেই প্রতীয়মান হইবে যে, এই বৃত্তটি উক্ত ত্রিভুজের অন্তর্গত পাদ-ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত।

অনু—(১) লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্রের সংযোগ-রেখার মধ্যবিন্দুই নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

মনে কর S ও N যথাক্রমে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র এবং O উহার লম্ববিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, SO রেখার মধ্যবিন্দু N.



প্রমাণ—A′D এবং B′E এর মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় SO রেখাকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

কিন্তু A′D ও B′E নব-বিন্দু বৃত্তের জ্যা। সুতরাং উহাদের মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুই উহার কেন্দ্র।

[৩২শ উপঃ, ১ম অনু.]

অর্থাৎ N কেন্দ্র SO রেখার মধ্যবিন্দু।

(২) নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

পূর্ব উপপাদ্য অনুসারে, নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস A′P। সুতরাং A′Pএর মধ্যবিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। কিন্তু SO রেখার মধ্যবিন্দুও ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

∴ A′P ও SO পরস্পর N বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

এখন, SNA′ ও ONP দুইটি ত্রিভুজের—

$SN = ON$; $NA' = NP$,

এবং $\angle SNA' = \angle ONP$;

∴ $SA' = OP = AP$.

আবার SA′, AP এর সমান্তরাল।

সুতরাং SAPA′ একটি সামান্তরিক এবং $SA = A'P$.

কিন্তু SA পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং A′P নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস।

∴ নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}A'P$ = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}SA$.

(৩) ভরকেন্দ্র (Centroid), লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র ও নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র একই সরলরেখায় অবস্থিত।

AA′ যোগ কর এবং SO এর সমান্তরাল করিয়া PT রেখা টান। মনে কর, AA′, SO এর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন, AGO ত্রিভুজের $AP = PO$ এবং $PT \parallel OG$. ∴ $AT = TG$.

আবার, A′PT ত্রিভুজের, $PN = NA'$, এবং $NG \parallel PT$.

∴ $TG = GA'$. ∴ $AG = \frac{2}{3} AA'$.

∴ G বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, এবং এই G বিন্দুটি S, N ও O বিন্দুত্রয়ের সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে, পাদ-ত্রিভুজের একটি কোণ এবং একটি বাহু সর্বদা একই হইবে।

২। যে সকল ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র এক তাহাদের নব-বিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্রও একই হইবে।

৩। ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রটি AOB, BOC এবং COA ত্রিভুজগুলির নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

৪। I, I_1, I_2, I_3 বিন্দুগুলি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও তিনটি বহিঃকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রটি উক্ত চার বিন্দুর যে-কোন তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

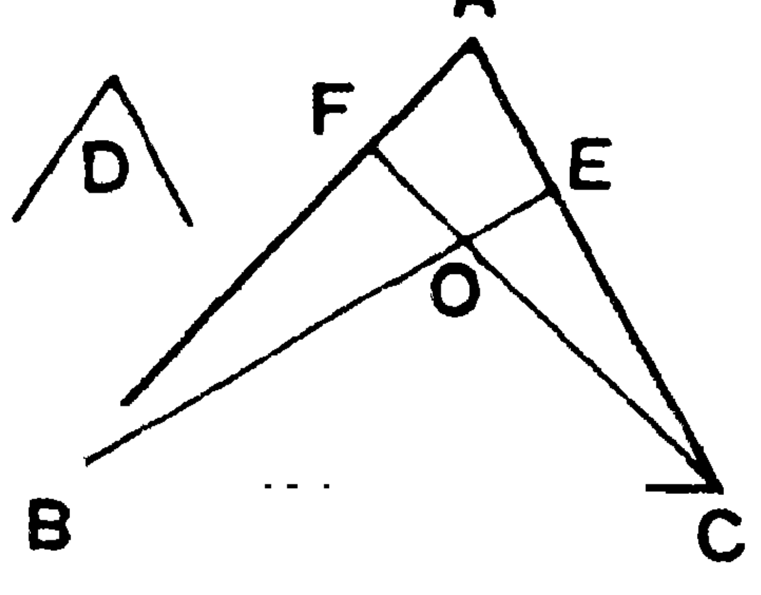
৫। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। ইহার নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৩। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ ও ভূমি দেওয়া আছে; উহার লম্ববিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

মনে কর BAC ত্রিভুজের BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং BAC কোণটি নির্দিষ্ট D কোণের সমান।

B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর পাতিত BE ও CF লম্ব পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন, O বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় করিতে হইবে।



প্রমাণ— $\angle$OFA = $\angle$OEA = এক সমকোণ।

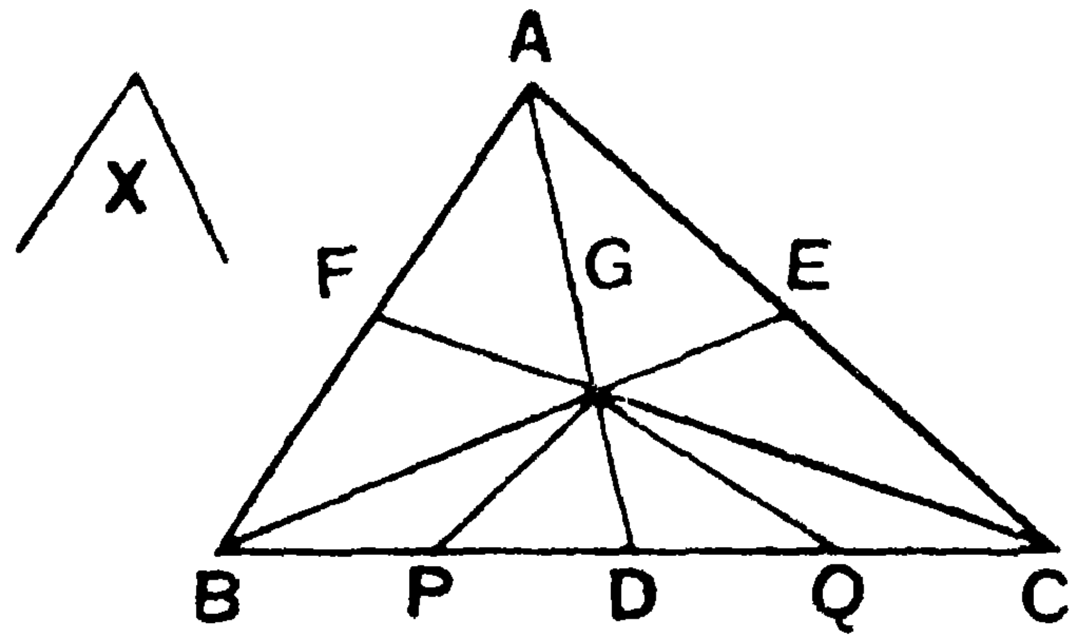
$\therefore$ O, F, A ও E বিন্দুচতুষ্টয় এক বৃত্তস্থ।

$\therefore$ $\angle$FOE ও $\angle$FAE পরস্পর সম্পূরক। [৪১শ উপঃ]

∴ বিপ্রতীপ ∠BOC, ∠FAE অর্থাৎ ∠BAC এর সম্পূরক, অর্থাৎ ∠D এর সম্পূরক। অতএব ∠BOC একটি নির্দিষ্ট কোণ। সুতরাং BOC ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট BC ভূমির উপর অবস্থিত এবং ইহার শিরঃকোণটিও একটি নির্দিষ্ট কোণ; সুতরাং BC জ্যাএর উপর অঙ্কিত এবং ∠D এর সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি চাপই O বিন্দুর সঞ্চার পথ। [৪০শ উপঃ]

১৪। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, উহার মধ্যমাত্রয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর BAC ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট BC ভূমির উপর অবস্থিত এবং উহার



BAC কোণটি নির্দিষ্ট X কোণের সমান। AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয়ের ছেদ-বিন্দু G এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর G বিন্দু হইতে অঙ্কিত যথাক্রমে AB ও AC বাহুর সমান্তরাল GP ও GQ রেখাদ্বয় BC এর সহিত P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ— GP ∥ AB ; ∴ ∠BAG = ∠PGD.

ঐরূপে, ∠CAG = ∠QGD.

∴ ∠PGQ = ∠BAC = ∠X = একটি নির্দিষ্ট কোণ।

আবার, AG এর মধ্যবিন্দু হইতে AB এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে, PD = $\frac{1}{3}$ BD.

ঐরূপে, QD = $\frac{1}{3}$ CD.

$\therefore$ $PQ = PD + DQ = \frac{1}{3}BD + \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}$ BC = নির্দিষ্ট সরলরেখা।

$\therefore$ PQ জ্যাএর উপর অঙ্কিত এবং নির্দিষ্ট $\angle X$ এর সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি চাপই G বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অনুশীলনী

১। কোন ত্রিভুজের ভুমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটির বহিঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতগুলি ঐককেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক টানা হইলে উহাদের স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। উহাদের একটি বৃত্তের পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে PA ও PB রেখা টানা হইল। উহারা (অথবা বর্ধিত হইয়া) অন্য বৃত্তটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিলে, AY ও BX এর ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। একটি বৃত্তের অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগত জ্যাগুলির মধ্য-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত হইলে, কি প্রভেদ হইবে বল।

৫। একটি বৃত্তের পরিধির উপর A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। CD একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট জ্যা। AD, BC এবং AC, BD এর ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং C পরিধিস্থ একটি বিন্দু। ABDC একটি সামান্তরিক টানা হইল। উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। ABC ত্রিভুজের A কোণটি এবং BC ভূমি নির্দিষ্ট। BAকে P পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, AP = AB. P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

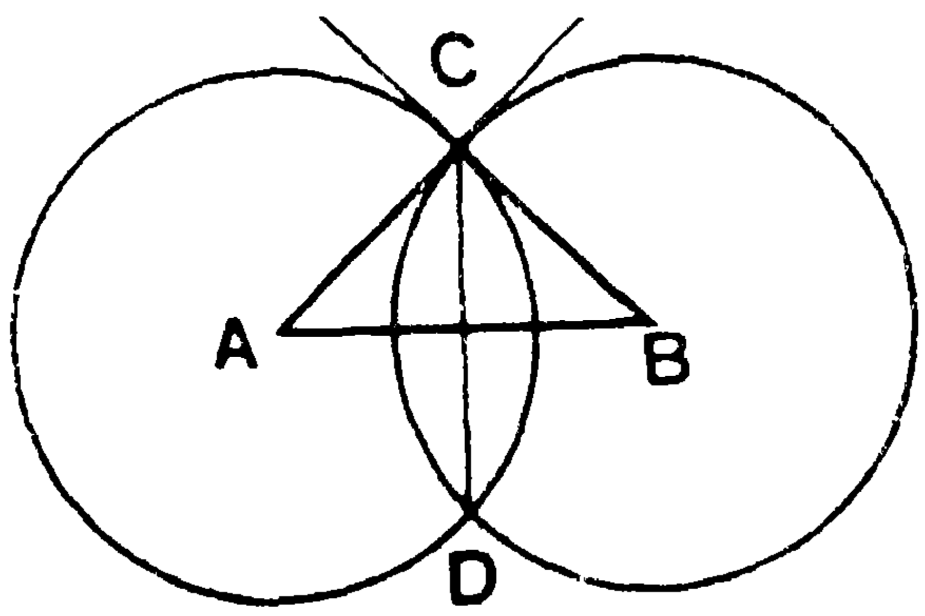
যদি AB এর মধ্যবিন্দু P হয়, তবে সঞ্চারপথটি কিরূপ হইবে? আবার, যদি BP = AP হয়, তবেই বা সঞ্চারপথ কিরূপ হইবে?

৮। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট সরলরেখা সর্বদা কোন নির্দিষ্ট কোণের বাহুদ্বয়ের মধ্যে আবদ্ধ। প্রমাণ কর যে, এইরূপে উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

সমকোণীয় বৃত্ত (Orthogonal Circles)

সংজ্ঞা। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর এরূপভাবে ছেদ করে যে, উভয় বৃত্তের সাধারণ বিন্দুর স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয়, তাহা হইলে একটি বৃত্ত অপরটিকে সমকোণে ছেদ করিল এরূপ বলা হয় এবং বৃত্ত দুইটিকে 'সমকোণীয় বৃত্ত' বলে। এস্থলে একটির স্পর্শক অন্যটির কেন্দ্রগামী হইবে।

চিত্রে দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে A ও B বিন্দুদ্বয়। C উহাদের একটি ছেদ-বিন্দু। C বিন্দুতে উহাদের স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, উহাদের মধ্যে A-বৃত্তের C বিন্দুগত ব্যাসার্ধটি B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং B-বৃত্তের ব্যাসার্ধটি A বিন্দু দিয়া যাইবে।



AB, AC ও BC সংযুক্ত কর।

BC রেখা CA ব্যাসার্ধের লম্ব বলিয়া, ইহা A-বৃত্তের স্পর্শক। এইরূপে AC রেখাও B-বৃত্তের স্পর্শক। সুতরাং ∠ACB একটি সমকোণ এবং বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমকোণীয়।

$$\therefore \; AB^2 = AC^2 + BC^2 \;;$$

অর্থাৎ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র-যোজক রেখার বর্গ ব্যাসার্ধদ্বয়ের বর্গের সমষ্টির সমান হইলে, বৃত্ত দুইটি সমকোণীয় হইবে।

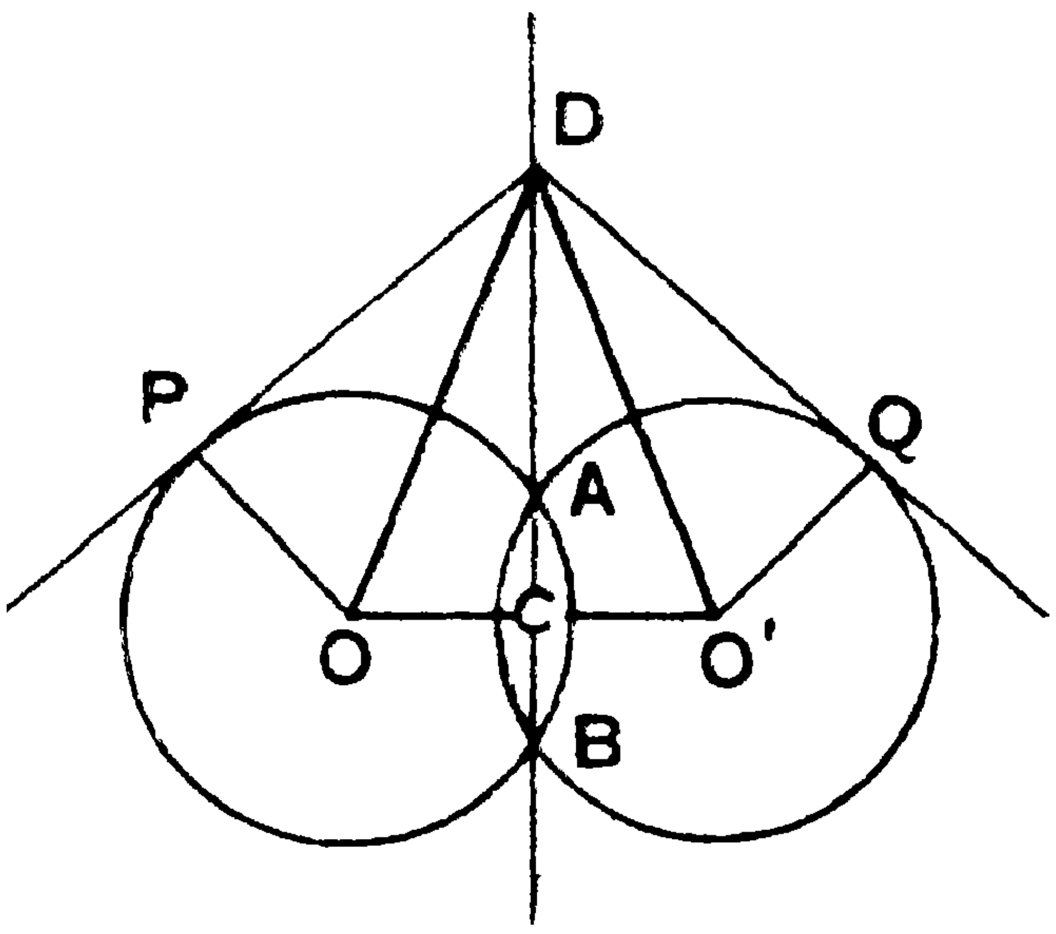
অনু—দুইটি সমকোণীয় বৃত্তের সাধারণ জ্যাটি উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ে পরস্পর সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে।

মূলাক্ষ (Radical Axis)

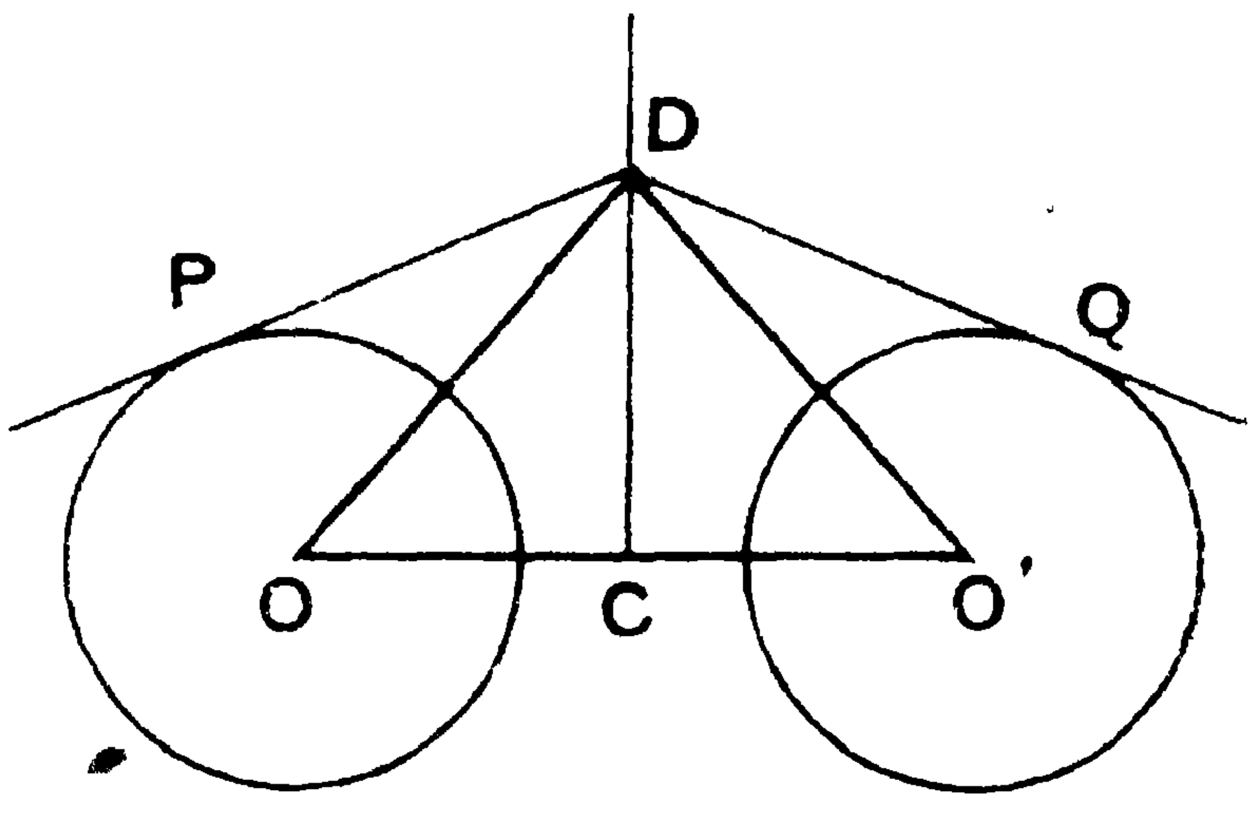
দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং r. যদি এই বৃত্ত দুইটির O, O′ কেন্দ্রদ্বয় সংযুক্ত হয় এবং ঐ যোজক-রেখা C বিন্দুতে এরূপভাবে বিভক্ত হয় যে, $OC^2 - O'C^2 = R^2 - r^2$, এবং OO′ এর উপর CD লম্ব হয়, তবে CD এর যে-কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্ত দুইটির স্পর্শকদ্বয় সমান হইবে।

D বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটির DP ও DQ স্পর্শক টান।

DO, PO, DO′, O′Q যোগ কর।



(১ম চিত্র)



(২য় চিত্র)

প্রমাণ— যেহেতু DPO কোণটি সমকোণ,

$\therefore \quad DP^2 + OP^2 = DO^2 = DC^2 + OC^2.$

এইরূপে, $DQ^2 + O'Q^2 = O'D^2 = DC^2 + O'C^2.$

$\therefore \quad (DP^2 - DQ^2) + (OP^2 - O'Q^2) = OC^2 - O'C^2.$

কিন্তু $OC^2 - O'C^2 = R^2 - r^2 = PO^2 - O'Q^2$;

$\therefore \quad DP^2 - DQ^2 = 0$, অর্থাৎ $DP^2 = DQ^2$;

সুতরাং $DP = DQ$;

এইরূপে দেখা যায় যে, AB বা CD রেখার যে-কোন বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শক টানিলে তাহারা সমান হইবে। সুতরাং কোন বিন্দু হইতে দুইটি বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হইবে। এই সঞ্চারপথকে বৃত্তদ্বয়ের **মূলাক্ষ** (radical axis) বলে।

উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে সহজেই বুঝা যাইবে যে, বৃত্তদ্বয় পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে (১ম চিত্র) AB রেখাকে উহাদের মূলাক্ষ বলে এবং মূলাক্ষটি কেন্দ্র-যোজক রেখাটিকে সমকোণে ছেদ করে। মনে রাখিবে, যদিও AB সাধারণ জ্যাটির কোন বিন্দু হইতেই বৃত্তদ্বয়ের কোন স্পর্শক টানা যায় না, তথাপি AB রেখাকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে সম্পূর্ণ রেখাটিকে উহাদের মূলাক্ষ বলা হয়। পরন্তু বৃত্তদ্বয় পরস্পর ছেদ না করিলে (২য় চিত্র) মূলাক্ষটি কেন্দ্র-যোজক রেখার উপর লম্ব এবং উভয় স্থলেই মূলাক্ষটি OO′ রেখাটিকে এমন একটি C বিন্দুতে ছেদ করে যেন, $OC^2 - O'C^2 = R^2 - r^2$.

অনু—দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের সাধারণ স্পর্শকটিই উহাদের মূলাক্ষ।

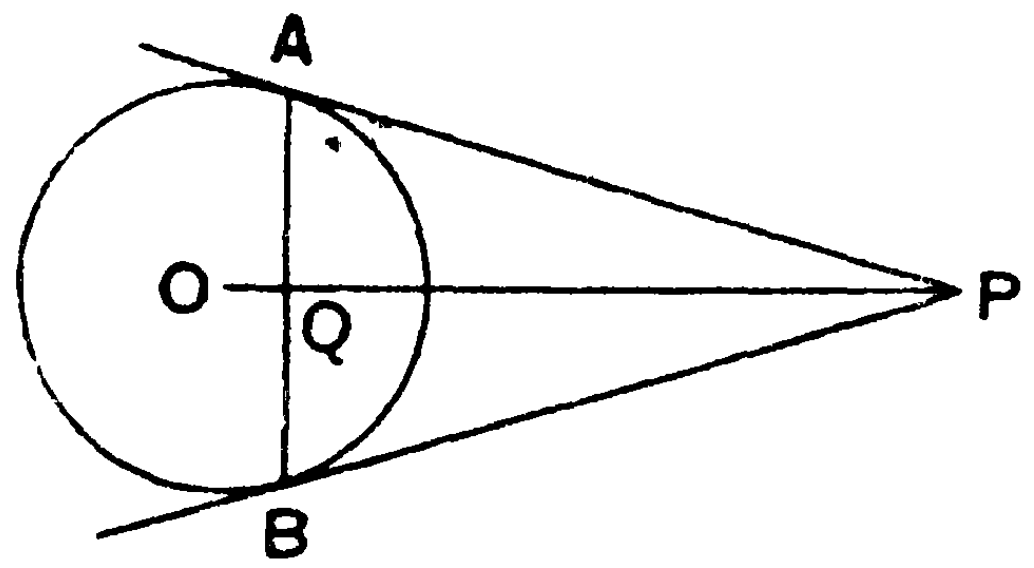
মূলকেন্দ্র—তিনটি বৃত্তের দুই দুইটি লইয়া একটি মূলাক্ষ পাওয়া যায়। এইরূপে যে তিনটি মূলাক্ষ পাওয়া যায়, তাহারা পরস্পর এক বিন্দুতে মিলিত হয় এবং উহাদের সম্পাতবিন্দুকে মূলকেন্দ্র (radical centre) বলে। কিন্তু বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, উক্ত তিনটি মূলাক্ষ একই সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল, সুতরাং কোন বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না। (এস্থলে মূলাক্ষত্রয় অনন্তে মিলিয়াছে এরূপ মনে করা যাইতে পারে।)

সহজেই দেখা যাইবে যে, মূলকেন্দ্র হইতে অঙ্কিত বৃত্তত্রয়ের স্পর্শকগুলি পরস্পর সমান হইবে।

সমাক্ষবৃত্ত (Co-axial Circles)—কতিপয় বৃত্তের যে-কোন দুইটির মূলাক্ষ একই সরলরেখা হইলে উহাদিগকে 'সমাক্ষবৃত্ত' বলা হয়।

উপপাদ্য। কোন বিন্দু P হইতে কোন বৃত্তের PA ও PB দুইটি স্পর্শক টানিয়া যদি P বিন্দুকে O কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করা হয় এবং OP রেখা AB জ্যাটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে—

$$OP.\ OQ = (\text{ব্যাসার্ধ})^2 \text{ হইবে।}$$



প্রমাণ— যেহেতু ৪৬শ উপপাদ্যের সাহায্যে দেখা যায় যে,

PQA = এক সমকোণ ;

∴ AP রেখা APQ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস হইবে।

আবার, OAP = এক সমকোণ। [৪৫শ উপঃ]

∴ AO ব্যাসার্ধ APQ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

∴ $OP.\ OQ = OA^2 = (\text{ব্যাসার্ধ})^2$ ।

দ্রষ্টব্য। PA = PB হওয়ায়, AB এর সমকোণে-দ্বিখণ্ডকটি P বিন্দু দিয়া যাইবে। এইরূপে উক্ত দ্বিখণ্ডকটি O কেন্দ্রগত হইবে। সুতরাং OP রেখাই AB এর সমকোণে-দ্বিখণ্ডক। ইহা হইতে নিম্নের সিদ্ধান্তটি পাওয়া যায়—

কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর যোজক রেখাটি উক্ত বিন্দু ও কেন্দ্রের যোজক-রেখা-দ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হয়।

ব্যস্তবিন্দু (Inverse Points)—উপরের চিত্রে P এবং Q বিন্দুদ্বয়কে বৃত্তটির পরস্পর 'ব্যস্ত বা বিপরীত' বিন্দু বলে। অর্থাৎ কোন বৃত্তের

কেন্দ্রগত একটি সরলরেখার উপর P এবং Q দুইটি বিন্দু নিলে যদি OP.OQ = ব্যাসার্ধের বর্গের সমান হয়, তবে উক্ত বিন্দুদ্বয়কে বৃত্তটির 'ব্যস্তবিন্দু' বলে।

চিত্রে P, Q এর এবং Q, P এর ব্যস্তবিন্দু।

বিলোমক্রিয়া (Inversion)—যে প্রক্রিয়া-দ্বারা কোন বিন্দুর ব্যস্ত-বিন্দুটি নির্ধারণ করা যায় তাহাকে 'বিলোমক্রিয়া' বলে।

অনুশীলনী

১। যে সকল বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বাহির কর।

২। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে সমকোণে ছেদ করে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বাহির কর।

৩। যদি একটি বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হইয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে সমকোণে ছেদ করে, তাহা হইলে ইহা আর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগত হইবে। প্রমাণ কর যে, এই বৃত্তটির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হইবে।

৪। কোন বিন্দু P হইতে দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অন্তর নির্দিষ্ট আছে। P বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, উহাদের একটি ছেদ-বিন্দুর স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি অপর ছেদ-বিন্দুর স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমান হইবে।

৬। কোন দুইটি বৃত্তের মূলাক্ষ উহাদের সাধারণ স্পর্শকগুলিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৭। জ্যামিতিক অঙ্কন-দ্বারা তিনটি বৃত্তের মূলকেন্দ্র নির্ণয় কর।

বিবিধ দুরূহ অনুশীলনী

১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC. BA ও CA বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, AE রেখা AFএর সমান হয়। FB ও EC কে K এবং L বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া প্রমাণ কর যে, AK = AL.

২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle B = \angle C = 2\angle A$. B কোণের BD দ্বিখণ্ডক ACএর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, AD = BC.

৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের C কোণটি সমকোণ। AC বাহুর উপর AEKC ও BC বাহুর উপর BCLF বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল। যদি EG ও FH রেখাদ্বয় ACএর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, EG + FH = AC. যদি BC এবং ACএর উপর DBC ও ECA সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হয় এবং EA ও DB বর্ধিত হইয়া F বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, FC রেখা DEএর লম্ব।

৪। একটি ত্রিভুজের—(১) ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন কোণের অন্তর ও অপর দুই বাহুর অন্তর ; (২) ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। ABC ত্রিভুজের বহির্দিকে AC ও BC বাহুর উপর যথাক্রমে AFGC ও CBHK সামান্তরিক অঙ্কিত করা হইল। FG ও KH বর্ধিত হইয়া L বিন্দুতে মিলিত হইল। LCএর সমান্তরাল AD ও BE রেখাদ্বয় LF ও LKএর সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, ABED একটি সামান্তরিক এবং উহার ক্ষেত্রফল AFGC ও CBHK সামান্তরিক দ্বয়ের সমষ্টির সমান।

৬। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু D ও E. BE এবং CD রেখাদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, AO, BO ও CO এর সমান বাহু-বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{3} \triangle ABC$.

৭। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৮। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোন বিন্দু হইতে অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে-কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

৯। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল। BE এবং CDকে F ও G বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল যেন, $EF = BE$ এবং $DG = DC$. প্রমাণ কর যে, A, F এবং G একই সরলরেখায় অবস্থিত।

১০। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. AD রেখা BCএর লম্ব। প্রমাণ কর যে,

$$\angle EDF = \angle BAC \text{ এবং } \triangle ABC = 2AFDE \text{ ক্ষেত্র।}$$

১১। ABCD আয়তের BC বাহুর উপর E বিন্দুটি এবং CD বাহুর উপর F বিন্দুটি অবস্থিত। প্রমাণ কর যে,

$$ABCD \text{ আয়ত} = 2\triangle AFE + BE.DF \text{ আয়ত।}$$

১২। ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজের উপর AD লম্ব। ACএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কোন বর্ধিত বাহুর সহিত বর্ধিত DA রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, বর্ধিত DA রেখা ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কোন বর্ধিত বাহুর সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইবে, এবং $AO = BC$.

১৩। ABCD সামান্তরিকের AB বাহুর মধ্য বিন্দু E. বর্ধিত CE DA বাহুর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে,

$$\triangle FDC = ABCD \text{ সামান্তরিক।}$$

১৪। দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক। প্রমাণ কর যে, একের ভূমি অপরের উন্নতির দ্বিগুণ।

১৫। ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে,

$$AB^2+BC^2+CA^2=2(AB.AF+BC.BD+AC.CE)$$

যদি P লম্ববিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$AP.BC+BP.CA+CP.AB=4\triangle ABC.$$

১৬। একটি ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ অন্যটির দ্বিগুণ। শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ভূমির খণ্ডদ্বয়ের অন্তর ক্ষুদ্রতর বাহুর সমান।

১৭। ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণ। DA বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইল যেন, AE = AB. বর্ধিত EB বর্ধিত DCএর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল। CBএর সমান্তরাল FG রেখা বর্ধিত ABএর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, BCFG সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে।

১৮। কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকের বিপরীত বাহুদ্বয়-দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশ পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। আরও প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমার সমষ্টি তৃতীয়টি হইতে বৃহত্তর।

১৯। PQR ত্রিভুজের QP ও PR বাহুর উপর অঙ্কিত AQPB ও CPRD সামান্তরিকদ্বয়ের PQR ত্রিভুজের বাহুর সমান্তরাল AB ও DC বাহুদ্বয় বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে মিলিত হইল। QR বাহুর উপর QFGR সামান্তরিক অঙ্কিত করা হইল যেন, উহার QF বাহু EP এর সমান্তরাল ও সমান হয়। প্রমাণ কর যে,

QFGR সামান্তরিক = AQPB সামান্তরিক + CPRD সামান্তরিক।

২০। A, B, C ও D বিন্দুচতুষ্টয় একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু। যদি P এরূপ একটি বিন্দু হয় যে, PA^2, PB^2, PC^2 এবং PD^2এর সমষ্টি সর্বদা স্থির থাকে, তবে P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২১। A একটি স্থির বিন্দু এবং CD একটি অসীম দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট স্থির সরলরেখা। AP সরলরেখা CDএর সহিত P বিন্দুতে মিলিত হইল। AP এর উপর Q এরূপ একটি বিন্দু লওয়া হইল যেন, AP.AQ আয়তের ক্ষেত্রফল সর্বদা স্থির থাকে। Q বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২২। AB একটি বৃত্তের নিশ্চল ব্যাস। অসীম দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট CD একটি স্থির সরলরেখা AB অথবা বর্ধিত AB কে সমকোণে ছেদ করিল। A বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা CD কে P বিন্দুতে ও বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AP.AQ আয়তের ক্ষেত্রফল সর্বদা স্থির থাকিবে।

২৩। AB স্থির ব্যাস-বিশিষ্ট বৃত্তের AP একটি জ্যা। PQ রেখা AB এর সমান্তরাল। PQ এর দৈর্ঘ্য সর্বদা স্থির হইলে, Q বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২৪। C কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের CA ও CB ব্যাসার্ধ দুইটি পরস্পর লম্ব। BP জ্যাটি CA কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BA রেখা ANP ত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শক এবং $BN.BP = 2BC^2$.

২৫। কোন বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং AC স্পর্শকের দৈর্ঘ্য AB এর সমান। CB রেখা বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, CB রেখা D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল এবং $AD = \frac{1}{2}CB$.

২৬। C কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের P ও Q বিন্দুতে PT ও QT স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, $\angle QPT = \frac{1}{2} \angle QCP$ এবং $\angle QTP = 2 \angle QPC$.

২৭। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ভূমি। CDE রেখা ভূমিকে D বিন্দুতে ও পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, পরিবৃত্তের AC স্পর্শক A, D ও E বিন্দুগত হইবে।

২৮। কোন বৃত্তের অন্তর্বর্তী P বিন্দুগত একটি জ্যা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল। TQ ও TR বৃত্তের দুইটি স্পর্শক এরূপভাবে অঙ্কিত হইল যেন, QR জ্যাটি P বিন্দুগত হয়। যদি AB রেখা স্পর্শক দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, XY রেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

২৯। কোন বৃত্তের AB ব্যাস ও C পরিধিস্থ একটি বিন্দু। বর্ধিত AC ও BC রেখা B ও A বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল। C বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক উক্ত স্পর্শকদ্বয়ের সহিত F ও G বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে,

$$FG = \frac{1}{2}(BD + AE).$$

৩০। কোন বৃত্তের AB ও AC স্পর্শক পরস্পর A বিন্দুতে এবং বৃত্তটির সহিত B ও C বিন্দুতে মিলিত হইল। ACএর সমান্তরাল BD সরলরেখা বৃত্তটির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে,

$$BC^2 = AB.BD.$$

৩১। কোন বৃত্তের DR একটি ব্যাস এবং DP ও DQ জ্যা দুইটি R বিন্দুর স্পর্শকের সহিত S ও T বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে,

$$\angle TPS = \angle TQS.$$

৩২। কোন বৃত্তের CD জ্যাটি AB ব্যাসের লম্ব। BC চাপের E একটি বিন্দু। AE রেখা CD কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে,

$$\angle DFE = \angle ACE.$$

৩৩। ADBF বৃত্তের AB একটি ব্যাস। বর্ধিত ABএর উপর C একটি বিন্দু। CD বৃত্তটির স্পর্শক। C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত অন্য একটি বৃত্ত, ADBF বৃত্তটিকে D ও F বিন্দুতে এবং ব্যাসটিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। CA রেখার C বিন্দুগত লম্বের উপর P একটি বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে, PE রেখা P বিন্দু হইতে অঙ্কিত ADBF বৃত্তের স্পর্শকের সমান।

পরিভাষা

Abscissa ভুজ।
absolute পরম।
acute সূক্ষ্ম।
adjacent সন্নিহিত।
alternate একান্তর।
alternendo একান্তর ক্রিয়া।
alternative proof বিকল্প প্রমাণ।
altitude, height উন্নতি, উচ্চতা।
ambiguous দ্ব্যর্থক।
analysis বিশ্লেষণ।
angle কোণ।
antecedent পূর্বরাশি।
answer উত্তর।
application প্রয়োগ।
approximate স্থূল।
approximately স্থূলত।
approximate value আসন্নমান।
arc চাপ।
area কালি, ক্ষেত্রফল।
arithmetic series সমান্তর শ্রেণী।
arm ভুজ, বাহু।
axiom স্বতঃসিদ্ধ।
axis অক্ষ।
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ।
axis of symmetry প্রতিসাম্য-অক্ষ।

Base ভূমি।
bisector দ্বিখণ্ডক।
bisection দ্বিখণ্ডন।
boundary সীমা।
breadth প্রস্থ, বিস্তার।

Centesimal শততমিক।
centre কেন্দ্র।
centre of gravity ভারকেন্দ্র।
centre of inversion বিলোমকেন্দ্র।
centre of similitude সাম্যকেন্দ্র।
centroid ভরকেন্দ্র।
chord জ্যা।
circle বৃত্ত।
circumcentre পরিকেন্দ্র।
circumference পরিধি।
circumscribed পরিলিখিত।
circumscribed circle পরিবৃত্ত।

circular measure বৃত্তীয়মান।
close approximation সূক্ষ্মমান।
co-axial সমাক্ষ।
coincidence সমাপতন।
collinear (points) একরেখীয়।
commensurable প্রমেয়।
commutative law বিনিময় নিয়ম।
complementary (angle) পূরক।
componendo যোগক্রিয়া।
concentric এককেন্দ্রীয়।
concurrent সমবিন্দু।
congruent সর্বসম।
conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী।
conjugate arc প্রতিযোগী চাপ।
constant (quantity) ধ্রুবক।
consequent উত্তররাশি।
continuous সন্তত।
contact স্পর্শ।
construction অঙ্কন।
converse বিপরীত।
converse proposition বিপরীত প্রতিজ্ঞা।
co-ordinates স্থানাঙ্ক।
corrolary অনুসিদ্ধান্ত।
corresponding অনুরূপ।
cosecant কোসেকান্ট্।
cosine কোসাইন।
cotangent কোট্যানজেণ্ট্।
covers কোভার্স্।
cube ঘনক্ষেত্র, ঘনফল, ঘন।
curve রেখা।
curved বক্র।
cyclic বৃত্তস্থ।
Data উপাত্ত।
decimal দশমিক।
deduction সিদ্ধান্ত।
degree অংশ, ডিগ্রি, মান।
denominator হর।
depression অবনতি।
diagonal কর্ণ।
diagonal scale কর্ণমাপনী।
diameter ব্যাস।
difference অন্তর।
digit অঙ্ক।
direct (tangent) সরল।
direction দিক্।
directly similar সমানুরূপ।
distributive law বিচ্ছেদ নিয়ম।
distance দূরত্ব, ব্যবধান।

dividendo ভাগক্রিয়া ।
Enunciation নির্বচন ।
equiangular সদৃশকোণী ।
equidistant সমদূরবর্তী ।
equilateral সমবাহু ।
equivalent তুল্য ।
escribed বহির্লিখিত ।
example উদাহরণ ।
ex-centre বহিঃকেন্দ্র ।
ex-circle বহির্বৃত্ত ।
exercise প্রশ্নমালা, অনুশীলনী ।
explanation ব্যাখ্যা ।
exterior angle বহিঃকোণ ।
external বহিঃস্থ ।
external bisector বহি-র্দ্বিখণ্ডক ।
extreme প্রান্তীয় ।
even যুগ্ম, সম ।
Figure চিত্র ।
formula সূত্র ।
fraction ভগ্নাংশ ।
Geometric series গুণোত্তর শ্রেণী ।
gnomon শঙ্কুক্ষেত্র ।
grade গ্রেড ।
gradient নতিমাত্রা ।
graph লেখ ।
graphical লৈখিক ।
Harmonic series বিপরীত শ্রেণী ।
harmonic (section) সমঞ্জস ।
height উচ্চতা, উন্নতি ।
hypotenuse অতিভুজ ।
hypothesis কল্পনা ।
horizontal অনুভূমিক ।
Identical একরূপ ।
illustration দৃষ্টান্ত ।
image বিম্ব ।
inclination নতি ।
incommensurable অমেয় ।
incentre অন্তঃকেন্দ্র ।
incircle অন্তর্বৃত্ত ।
included angle অন্তর্ভূত কোণ ।
independent স্বাধীন ।
inequality অসমতা ।
infinite, infinity অসীম, অনন্ত ।
integer পূর্ণসংখ্যা ।
internal অন্তঃস্থ ।
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক ।
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ ।
inscribed অন্তর্লিখিত ।

inverse ব্যস্ত, বিপরীত।
inverse ratio ব্যস্ত অনুপাত।
inversely similar ব্যস্ত অনুরূপ।
inversion বিলোম ক্রিয়া।
invertendo বিপরীতক্রিয়া।
irrational অমূলদ।
irregular বিষম।
isosceles সমদ্বিবাহু।
Length দৈর্ঘ্য।
limit সীমা।
limiting point পরিণাম বিন্দু।
line রেখা।
locus সঞ্চারপথ।
Magnitude মান, পরিমাণ।
major arc অধিচাপ।
mean মধ্যক, সমক।
median মধ্যমা।
measure সাংখ্যমান।
minor arc উপচাপ।
minimum অবম, অল্পতম।
minute কলা, মিনিট।
miscellaneous বিবিধ।
maximum চরম, বৃহত্তম।
Negative ঋণ, নেগেটিভ্।
normal অভিলম্ব।
note দ্রষ্টব্য, অবধেয়।
number সংখ্যা।
numerator লব।

Observation পর্যবেক্ষণ।
obtuse angle স্থূলকোণ।
odd অযুগ্ম, বিষম।
opposite বিপরীত।
(vertically) opposite বিপ্রতীপ
ordinate কোটি।
origin মূলবিন্দু।
orthocentre লম্ববিন্দু।
orthogonal সমকোণীয়।
orthogonal projection লম্ব-অভিক্ষেপ।
Parallel সমান্তরাল।
parallelogram সামান্তরিক।
pedal triangle পাদ-ত্রিভুজ।
pentagon পঞ্চভুজ।
perimeter পরিসীমা।
perpendicular লম্ব।
plane সমতল।
plotting অঙ্কন।
point বিন্দু।
point of concurrency সম্পাত-বিন্দু।
polygon বহুভুজ।

polar মেরুরেখা।

pole মেরু।

positive ধন, পজিটিভ্।

position অবস্থান, অবস্থিতি।

postulate স্বীকার্য।

practical ব্যবহারিক।

problem প্রশ্ন, সম্পাদ্য।

process প্রক্রিয়া, পদ্ধতি।

progression প্রগতি।

projected অভিক্ষিপ্ত।

projection অভিক্ষেপ, প্রক্ষেপ।

proof প্রমাণ।

property ধর্ম।

proposition প্রতিজ্ঞা।

proportion সমানুপাত।

proportional সামানুপাতিক।

proved প্রমাণিত।

Quadrant পাদ।

quadrilateral চতুর্ভুজ।

quantity রাশি

question প্রশ্ন।

Radian রেডিয়ান।

radical axis মূলাক্ষ।

radical centre মূলকেন্দ্র।

radius অর, ব্যাসার্ধ।

radius of inversion বিলোম-ব্যাসার্ধ।

ratio অনুপাত।

rational মূলদ।

reciprocal বিপরীত।

reciprocal (figure) অন্যোন্য।

rectangle আয়ত, আয়তক্ষেত্র।

rectilinear figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র.

reflex angle প্রবৃদ্ধ কোণ।

regular সুষম।

relative আপেক্ষিক।

rhombus রম্বস।

right angle সমকোণ।

ruler মাপনী, রুলার।

Scale স্কেল, মাপনী।

scalene বিষমভুজ।

secant ছেদক, সেকাণ্ট্।

second সেকেণ্ড, বিকলা।

section ছেদ।

sector বৃত্তকলা।

segment (of a circle) বৃত্তাংশ।

segment (of a line) খণ্ড, অংশ।

self-conjugate সানুবন্ধ।

self-evident স্বতঃপ্রমাণ।

semi অর্ধ।

semi-circle অর্ধবৃত্ত ।
series শ্রেণী ।
sexagesimal ষষ্টিক ।
side ভুজ, বাহু ।
sign চিহ্ন ।
similar (triangle) সদৃশ ।
similarity সাদৃশ্য ।
similitude সাম্য ।
size আয়তন ।
slope নতি ।
solid ঘন, ঘনবস্তু ।
solution সমাধান ।
space স্থান ।
squared paper ছক কাগজ ।
square বর্গক্ষেত্র ।
straight সবল, ঋজু ।
straight angle সবলকোণ ।
subtended angle সম্মুখ কোণ ।
superposition উপবিপাত ।
supplementary সম্পূরক ।
surface তল ।
symbol প্রতীক, চিহ্ন ।
symmetry প্রতিসাম্য ।
synthesis সংশ্লেষণ ।
Table সারণী, তালিকা ।
tangent স্পর্শক, ট্যানজেন্ট্
theorem উপপাদ্য ।
theoretical তত্ত্বীয, বাদীয় ।
transversal ভেদক ।
transverse (tangent) তির্যক ।
trapezium ট্রাপিজিয়ম ।
triangle ত্রিভুজ, ত্রিকোণ ।
trigonometry ত্রিকোণমিতি ।
trigonometrical ratios কোণানুপাত ।
trisection ত্রিখণ্ডন ।
Unit একক ।
unlike অসদৃশ ।
Value মান ।
variable চল ।
variation ভেদ ।
vers ভার্স্ ।
vertex শীর্ষ ।
vertical উল্লম্ব ।
vertical angle শিরঃকোণ ।
vertically opposite বিপ্রতীপ ।
Work কার্য, কর্ম ।