Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 49

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 49.1. Zeige, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig ist.

AUFGABE 49.2. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

AUFGABE 49.3. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \mid x \mid,$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

AUFGABE 49.4. Es sei M eine Menge und es sei

$$F : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen $\triangle = \{(x,x) \in M \times M \mid x \in M\}$ nicht leer ist.

AUFGABE 49.5. Es sei

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \mid\mid (x,y) \mid\mid \leq 1\}.$$

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f : D \longrightarrow D,$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

AUFGABE 49.6. Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion, die zugleich eine starke Kontraktion sei. Zeige, dass dann die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - x,$$

streng fallend ist.

Aufgabe 49.7. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 49.8. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn f differenzierbar ist?

Aufgabe 49.9. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

(1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
(2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
(3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

In den folgenden Aufgaben seien die Homomorphismenräume $\operatorname{Hom}(V, W)$ mit der Norm

$$|| \varphi || := \sup \left(|| \varphi(v) ||, || v || = 1 \right)$$

versehen (vergleiche auch Arbeitsblatt 22).

Aufgabe 49.10. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

Aufgabe 49.11. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W),\ P \longmapsto (D\varphi)_P,$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.12. (2 Punkte)

Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann vollständig ist, wenn T abgeschlossen ist.

Aufgabe 49.13. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2. Es sei

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 49.14. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 49.15. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x,$$

folgende Eigenschaften besitzt: Es ist

$$|\, f(x) - f(y) \,| < |\, x - y \,|,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$, $x \neq y$, aber f ist nicht stark kontrahierend.

Aufgabe 49.16. (2 Punkte)

Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei euklidischen Vektorräumen V und W genau dann stark kontrahierend ist, wenn $|| \varphi || < 1$ ist.

Aufgabe 49.17. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

(Tipp: Versuche, diese Funktion als Hintereinanderschaltung von einfacheren Abbildungen zu schreiben.)