Fachbereich Mathematik/Informatik 11. Januar 2014
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

Zweite Testklausur - Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Gleichmächtigkeit* von zwei Mengen L und M.
(2) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(3) Die *gleichmäßige Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(4) Das *Cauchy-Produkt* von zwei komplexen Reihen.
(5) Die *Exponentialreihe* zu einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.
(6) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(7) Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
(8) Die *Differenzierbarkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Lösung

(1) Die Mengen L und M heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M$$
gibt.
(2) Man sagt, dass f stetig im Punkt a ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x mit $|a - x| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(a) - f(x)| \leq \epsilon$ gilt.
(3) Die Funktion f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in T$ mit $d(x, x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.
(4) Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$
das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.
(5) Die *Exponentialreihe* in z ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \, .$$
(6) Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T$$

gibt.

(7) Der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ ist durch

$$\log_b x := \frac{\ln\, x}{\ln\, b}$$

definiert.

(8) Man sagt, dass f differenzierbar in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Zwischenwertsatz*.
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion
$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Das *Additionstheorem* für den Sinus.
(4) Die *Quotientenregel* für die Ableitung, also die Formel für die Ableitung von $\frac{f}{g}$ (mit den Voraussetzungen an f und g).

Lösung

(1) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.
(2) Die Stetigkeit von f im Punkt a ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.
(3) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w\ .$$
(4) Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge, $a \in D$ ein Punkt und
$$f, g\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$
Funktionen, die beide in a differenzierbar seien und wobei g keine Nullstelle in D besitze. Dann ist f/g differenzierbar in a mit
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\ .$$

Aufgabe 3. Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe 4. Zeige, dass es stetige Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Lösung

Wir betrachten die Zerlegung von $\mathbb{R}_+$ in die unendlich vielen halboffenen Intervalle $I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ für $n \in \mathbb{N}_+$ und $I_0 = [1, +\infty]$. Auf I_n, $n \in \mathbb{N}_+$, definieren wir die stetige Funktion φ_n durch

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\left(x - \frac{1}{n+1}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right) \\ &= -x^2 + \frac{2n+1}{(n+1)n}x - \frac{1}{(n+1)n}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat an den Intervallgrenzen den Wert 0. Die Ableitung ist

$$-2x + \frac{2n+1}{(n+1)n},$$

das Maximum liegt also im arithmetischen Mittel der Intervallgrenzen vor und besitzt den Wert

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n}\right) &= -\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\frac{1}{2}}{(n+1)n} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{(n+1)n} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Funktionen definieren wir

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0\,, \\ 0, \text{ falls } x \in I_n, n \text{ ungerade}\,, \\ \varphi_n(x), \text{ falls } x \in I_n, n \text{ gerade, } n \geq 2, \\ 0, \text{ falls } x \geq 1\,, \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0\,, \\ \varphi_n(x), \text{ falls } x \in I_n, n \text{ ungerade}\,, \\ 0, \text{ falls } x \in I_n, n \text{ gerade, } n \geq 2, \\ 0, \text{ falls } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind stetig: Dies ist im Innern der Intervalle klar; an den Intervallgrenzen liegt stets der Wert 0 vor; für den Nullpunkt ergibt sich die Stetigkeit, da die Funktionen auf $[0, \frac{1}{n}]$ durch $\frac{1}{n}$ beschränkt sind. Offenbar ist $fg = 0$ und für jedes $\delta > 0$ sind weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion.

Aufgabe 5. Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 = \sqrt{42}\,.$$

Es ist $f(0) = 0$ und $f(5) = 25$ und $0 \leq \sqrt{42} \leq 25$. Da f als Polynomfunktion stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{42}$.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$
Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Lösung

Wegen $f(0) = 1$ und $f(1) = -1$ muss nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[0,1]$ eine Nullstelle von f liegen.

Die Intervallmitte ist $\frac{1}{2}$, dort hat f den Wert
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1-12+8}{8} = -\frac{3}{8}.$$
Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{1}{4}$, dort hat f den Wert
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1-48+64}{64} = \frac{17}{64}.$$
Dies ist positiv, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{3}{8}$, dort hat f den Wert
$$f\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{8}\right) + 1 = \frac{27-576+512}{512} = -\frac{37}{512}.$$
Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] = [\frac{2}{8}, \frac{3}{8}]$ liegen. Die Länge dieses Intervalls ist $\frac{1}{8}$.

Aufgabe 7. Es seien $b > a$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon\ C^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(]a,b[,\mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{]a,b[}.$$

Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Lösung

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ ist eine rationale Funktion von $]a,b[$ nach $\mathbb{R}$, also stetig. Für $x \to a$ konvergiert der Nenner gegen 0, so dass die Funktion unbeschränkt ist. Eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist aber nach Satz 13.9 beschränkt, so dass f nicht die Einschränkung einer stetigen Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sein kann. Die Abbildung Ψ ist also nicht surjektiv.

Für eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\in]a,b[, x\to a} g(x) = g(a)$$

und

$$\lim_{x\in]a,b[, x\to b} g(x) = g(b)\,.$$

Die stetige Funktion g ist also durch ihre Werte auf dem offenen Intervall $]a,b[$ eindeutig bestimmt, so dass Ψ injektiv ist.

Aufgabe 8. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng wachsende Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Folgt daraus $f = g$?

Lösung

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x < \sqrt{2}\,, \\ x+1, \text{ falls } x \geq \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x \leq \sqrt{2}\,, \\ x+1, \text{ falls } x > \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Beide Funktionen sind streng wachsend und stimmen auf $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$ und insbesondere auf $\mathbb{Q}$ überein. Es ist aber $f(\sqrt{2}) \neq g(\sqrt{2})$, so dass die beiden Funktionen verschieden sind.

Aufgabe 9. Beweise die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion, also die Identität

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Lösung

Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z+w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.

Aufgabe 10. Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

Lösung

Nach Voraussetzung besitzt die Potenzreihe die Gestalt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f(-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-z)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1)^{2k+1} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1) z^{2k+1} \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} \right) \\ &= -f(z). \end{aligned}$$

Die Funktion ist also ungerade.

Aufgabe 11. Es sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$
mit
$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$
ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

Lösung

Wir müssen zeigen, dass die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, absolut konvergiert. Es ist
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n z^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \, |z|^n .$$
Für die Reihenglieder gilt
$$|b_n| \, |z|^n \leq |a_n| \, |z|^n .$$
Da die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \, |z|^n$ nach Voraussetzung konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor, so dass auch die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 12. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist
$$(f \circ f^{-1})(y) = y\,.$$
Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung
$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1\,.$$
Also ist
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Lösung

Die Kettenregel setzt voraus, dass beide Abbildungen differenzierbar sind, das weiß man hier aber von f^{-1} nicht.

Aufgabe 13. Wir betrachten das Polynom
$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[X]\,.$$
Bestimme die x-Koordinaten sämtlicher Schnittpunkte der Tangente an f im Punkt $x = 1$ mit dem Graphen von f.

Lösung

Es ist
$$f(1) \,=\, 1 - 1 + 5 + 2 \,=\, 7$$
und
$$f'(1) \,=\, 4 - 3 + 5 \,=\, 6.$$
Die Tangente ist also der Graph der Funktion $t(x) = 6x + 1$. Wir müssen sämtliche Punkte $x \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = t(x)$ bestimmen, wobei der Punkt $x_1 = 1$ dazugehört. Dazu betrachten wir
$$f(x) - t(x) \,=\, x^4 - x^3 + 5x + 2 - 6x - 1 \,=\, x^4 - x^3 - x + 1.$$
Polynomdivision durch $(x - 1)^2$ ergibt
$$x^4 - x^3 - x + 1 \,=\, (x - 1)^2(x^2 + x + 1).$$
Die Nullstellen von $x^2 + x + 1$ sind
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\,.$$

Aufgabe 14. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x)\,.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)' \\ &= -\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2} \\ &= -\frac{\cos(\ln x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

AUFGABE 15. Bestimme für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

die Extrema.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 2^{-x} \\ &= e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema betrachten wir die Ableitung, diese ist

$$f'(x) = (\ln 2)e^{x \ln 2} - (\ln 2)e^{-x \ln 2}.$$

Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt durch Multiplikation mit $e^{x \ln 2}$ und Division durch $\ln 2$ (die beide nicht 0 sind) auf

$$0 = e^{2x \ln 2} - 1.$$

Daher muss

$$e^{2x \ln 2} = 1$$

sein, woraus sich

$$2x \ln 2 = 0,$$

also $x = 0$ ergibt. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = (\ln 2)\left((\ln 2)e^{x \ln 2} + (\ln 2)e^{-x \ln 2}\right)$$

und somit positiv, also liegt im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum vor. Da die Ableitung keine weitere Nullstelle hat, ist dieses Minimum das einzige Minimum und daher ein globales Minimum und es gibt keine Maxima.

Aufgabe 16. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung

Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $g(x) = \ln f(x)$, die wohldefiniert ist, da f nur positive Werte annimmt. Die Funktion g ist differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda f(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Die Ableitung ist also konstant gleich λ, daher ist $g(x) = \lambda x$. Somit ist

$$f(x) = \exp(\ln f(x)) = \exp(\lambda x)$$

und daher

$$f(x+y) = \exp(\lambda(x+y)) = \exp(\lambda x + \lambda y) = \exp(\lambda x) \cdot \exp(\lambda y) = f(x) \cdot f(y).$$

Aufgabe 17. Es sei

$$f(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}\,.$$

Zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die reelle Folge

$$x_n = f^n(x)\,,$$

es gilt also die rekursive Beziehung $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeige, dass für $x_0 \in [-2, 1]$ die Folge einen Häufungspunkt besitzt.

Lösung

Es ist

$$f(-2) \;=\; (-2)^2 - 2 - \frac{7}{4} \;=\; \frac{1}{4}$$

und

$$f(1) \;=\; 1^2 + 1 - \frac{7}{4} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) \;=\; 2x + 1,$$

daher wird das Minimum bei

$$x \;=\; -\frac{1}{2}$$

mit dem Wert

$$f(-\frac{1}{2}) \;=\; (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \;=\; -2$$

angenommen. Daher ist

$$f([-2, 1]) \subseteq [-2, \frac{1}{4}] \subseteq [-2, 1]\,.$$

Bei $x_0 \in [-2, 1]$ sind demnach alle Folgenglieder $x_n \in [-2, 1]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt.