Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 14.5 ohne die Voraussetzung, dass eine surjektive Terminterpretation vorliegt, nicht gelten muss.

Aufgabe 14.2. Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $a = fx$,
(2) $\exists x a = fx$,
(3) $(\neg Rxy \wedge ffx = c) \rightarrow (\exists x a = fx)$,
(4) $(\forall y Rxy) \rightarrow (\exists x a = fx)$.

Aufgabe 14.3. Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke, dass sich bei einer Termsubstitution der Rang eines Ausdrucks nicht ändert.

Aufgabe 14.4. Warum führt man im Beweis zum Satz von Henkin nicht Induktion über den Aufbau der Ausdrücke?

Aufgabe 14.5. Das Symbolalphabet S bestehe aus einer einzigen Variablen x und einem einzigen einstelligen Relationssymbol R. Zeige, dass zu einer Interpretation I die Gültigkeitsmenge $I^{\vDash} \subseteq L^S$ keine Beispiele enthalten muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.6. (3 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien x, z verschiedene Variablen, t ein S-Term und α ein S-Ausdruck, wobei z weder in t noch in α vorkomme. Gilt dann die Gleichheit

$$\left(\alpha \frac{z}{x}\right) \frac{t}{z} = \alpha \frac{t}{x}?$$

Aufgabe 14.7. (5 (2+2+1) Punkte)

Es seien $\alpha, \beta \in L^S$.

a) Zeige, dass
$$(\exists x\,(\alpha \to \beta)) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$$
nicht allgemeingültig ist.

b) Zeige, dass
$$(\exists x\alpha \to \exists x\beta) \to (\exists x\,(\alpha \to \beta))$$
allgemeingültig ist.

c) Zeige, dass
$$(\exists x\alpha \to \exists x\beta) \to (\exists x\,(\alpha \to \beta))$$
nicht allgemeingültig wäre, wenn man auch leere Grundmengen zulassen würde.

Aufgabe 14.8. (2 Punkte)

Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $gxy = c$,
(2) $\forall xgcx = gxx$,
(3) $(\neg Pz \vee ggxyy = gcc) \to (\exists xPx)$,
(4) $(\forall yPy) \to (\neg\exists xgcx = gcgcx \wedge c = c)$.