Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 15

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass jedes Element $f \in L$ algebraisch über K ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra, die außerdem ein Integritätsbereich sei. Es sei $f \in A$ ein über K algebraisches Element. Sei $P \in K[X]$ ein normiertes Polynom mit $P(f) = 0$. Dann ist P das Minimalpolynom von f genau dann, wenn es irreduzibel ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Zeige, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei

$$L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - p)$$

der durch das irreduzible Polynom $X^3 - p$ definierte Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Es sei

$$f = 2 + 3x - 4x^2 \ .$$

Finde die Matrix bzgl. der $\mathbb{Q}$-Basis $1, x, x^2$ von L der durch die Multiplikation mit f definierten $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung.

Berechne die Norm und die Spur von f.

Bestimme das Minimalpolynom von f.

Finde das Inverse von f.

Berechne die Diskriminante der Basis $1, f, f^2$.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $P = X^n - c \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Es sei

$$f = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X + a_0$$

ein Element in der einfachen endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L = K[X]/(P)$ vom Grad n. Zeige, dass die Spur von f gleich na_0 ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper und $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige direkt, dass für diese Körpererweiterung der Satz vom primitiven Element gilt.

In der folgenden Aufgabe werden verschiedene äquivalente Bedingungen an ein Polynom gestellt, die man alle als Definition eines separablen Polynoms nehmen kann. Man darf verwenden, dass es zu jedem Körper einen Erweiterungskörper gibt, in dem ein vorgegebenes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) F und die (formale) Ableitung F' sind teilerfremd.
(2) F und die (formale) Ableitung F' erzeugen das Einheitsideal.
(3) F besitzt in keinem Erweiterungskörper $K \subseteq L$ mehrfache Nullstellen.
(4) Es gibt einen Erweiterungskörper $K \subseteq L$, so dass F als Polynom in $L[X]$ in n verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Gebe eine einfache Charakterisierung dafür, dass F separabel ist.

Zeige, dass in Charakteristik null jedes irreduzible Polynom separabel ist.

Gebe ein Beispiel, dass das in positiver Charakteristik nicht immer stimmen muss.