

Mathematik für Anwender II

Klausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(n-teil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ
Mögliche Punkte	4	4	4	2	8	4	4	5	4	3	6	11	5	64
Erhaltene Punkte														

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Die *Norm* eines Vektors $v \in V$ auf einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$.
- (2) Eine *Orthonormalbasis* in einem euklidischen Vektorraum V .
- (3) Ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.
- (4) Die *Faser* zu einer Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

über einem Punkt $y \in M$.

- (5) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).

- (6) Ein *kritischer Punkt* $P \in \mathbb{R}^n$ einer total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

- (7) Eine bezüglich einem Punkt $P \in T$ *sternförmige Menge* $T \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (8) Die *Laplace-Ableitung* einer zweimal differenzierbaren Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lösung

- (1) Zu einem Vektor $v \in V$ heißt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von v .

- (2) Eine Basis v_1, \dots, v_n von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j.$$

gilt.

- (3) Ein *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten* ist eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist.

- (4) Die Menge

$$F_y = \{x \in L \mid \varphi(x) = y\}$$

heißt die *Faser* von φ über y .

- (5) Die lineare Abbildung L mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)$$

(wobei $r : U(0, \delta) \rightarrow W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist) heißt das totale Differential von φ an der Stelle P .

- (6) Der Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ heißt *kritischer Punkt* von φ , wenn

$$\text{rang}(D\varphi)_P < \min(n, m)$$

ist.

- (7) Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $P \in T$, wenn für jeden Punkt $Q \in T$ die Verbindungsstrecke $sQ + (1-s)P$, $s \in [0, 1]$, ganz in T liegt.

- (8) Man nennt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}$$

die *Laplace-Ableitung* von u .

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

- (1) Das *Folgenkriterium für die Stetigkeit* in einem Punkt $x \in L$ zu einer Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

zwischen metrischen Räumen L und M .

- (2) Die *Mittelwertabschätzung* für eine differenzierbare Kurve

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

- (3) Der *Lösungsansatz für Zentralfelder*. Man beschränke sich auf Zentralfelder der Form

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v)v$$

zu einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- (4) Die *Formel für das Volumen* einer kompakten Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ unter einer linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Lösung

- (1) Die Abbildung φ ist im Punkt x stetig genau dann, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ auch die Bildfolge $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $\varphi(x)$ ist.

- (2) Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\|.$$

- (3) Zu $w \in \mathbb{R}^n$ und einer Lösung

$$\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

der eindimensionalen Differentialgleichung

$$z' = g(t, zw) \cdot z \text{ mit } \alpha(t_0) = 1$$

ist

$$v(t) = \alpha(t) \cdot w$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = F(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w.$$

- (4) Es ist

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |\det \varphi| \cdot \lambda^n(T).$$

AUFGABE 3. (4 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 an.

Lösung

Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Norm $\sqrt{5}$, somit ist

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Der zweite Vektor muss senkrecht zu u_1 sein und zusammen mit u_1 den Untervektorraum $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ aufspannen.

Dies führt zum Ansatz

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 + 5\lambda,$$

so dass

$$\lambda = -\frac{2}{5}$$

ist. Somit ist

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Norm dieses Vektors ist $\frac{\sqrt{30}}{5}$. Der normierte Vektor zu w_2 ist demnach

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Der dritte Vektor muss senkrecht auf u_1 und u_2 (bzw. auf w_1 und w_2) stehen. Ein solcher Vektor ist

$$w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor der Orthonormalbasis nehmen.

AUFGABE 4. (2 (4 · 0,5) Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$B_0(t) = (1 - t)^2, B_1(t) = 2t(1 - t) \text{ und } B_2(t) = t^2.$$

Es seien $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Wir definieren die Kurve

$$f(t) := B_0(t)v_0 + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2.$$

- a) Berechne $f(0)$ und $f(1)$.
- b) Berechne $f'(t)$.
- c) Zeige, dass $f'(0)$ ein Vielfaches von $v_1 - v_0$ und $f'(1)$ ein Vielfaches von $v_2 - v_1$ ist.
- d) Skizziere für $v_0 = (0, 1)$, $v_1 = (1, 1)$ und $v_2 = (2, 0)$ das Bild der Kurve $f(t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

Lösung

- a) Es ist

$$f(0) = B_0(0)v_0 + B_1(0)v_1 + B_2(0)v_2 = v_0$$

und

$$f(1) = B_0(1)v_0 + B_1(1)v_1 + B_2(1)v_2 = v_2.$$

- b) Es ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= B_0'(t)v_0 + B_1'(t)v_1 + B_2'(t)v_2 \\ &= (2t - 2)v_0 + (-4t + 2)v_1 + (2t)v_2. \end{aligned}$$

- c) Es ist

$$f'(0) = -2v_0 + 2v_1 = 2(v_1 - v_0)$$

und

$$f'(1) = -2v_1 + 2v_2 = 2(v_2 - v_1).$$

- d) Skizze.

In der folgenden Aufgabe darf elementargeometrisch argumentiert werden.

AUFGABE 5. (8 (4+4) Punkte)

Wir betrachten die reelle Ebene \mathbb{R}^2 ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und Radius 3, also

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt $A = (5, 0)$ und möchte zum Punkt $B = (-5, 0)$, wobei sie sich nur in T bewegen darf.

- a) Zeige, dass die Person von A nach B entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge 12,5 ist.
- b) Zeige, dass die Person von A nach B entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal 11,9 ist.

Lösung

a) Wir betrachten die (obere) Tangente an den Kreis durch $(5, 0)$. Es sei C der Schnittpunkt des Kreises mit dieser Tangente. Diese steht senkrecht auf dem Ortsvektor zu C . Nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das rechtwinklige Dreieck M, C, A , besitzt die Verbindungsstrecke von A nach C die Länge 4. Es sei D der Schnittpunkt der Tangente mit der y -Achse. Wir betrachten das (rechtwinklige) Dreieck M, D, C . Der Winkel dieses Dreiecks an M stimmt mit dem Winkel des zuerst betrachteten Dreiecks an A überein. Daher sind die beiden Dreiecke ähnlich (d.h. es gelten die gleichen Längenverhältnisse) und daher besteht, wenn x die Länge von C nach D bezeichnet, die Beziehung

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{4}.$$

Also ist $x = 2,25$. Daher ist die Strecke von A nach D gleich

$$4 + 2,25 = 6,25.$$

Man kann also auf dieser Tangente von A nach D und von dort mit der gespiegelten Tangente von D nach B gelangen und legt dabei einen Weg der Länge 12,5 zurück.

b) Die Person bewegt sich nun von A nach C längs der Tangenten, folgt dann dem Kreis bis zu dem C gegenüberliegenden Punkt C' und läuft dann längs der gespiegelten Tangenten von C' nach B . Dieser Weg ist offenbar stetig. Es sei α der Winkel des Dreiecks M, C, A an A . In diesem rechtwinkligen Dreieck besteht die Beziehung („Gegenkathete durch Hypotenuse“)

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Daher ist $\alpha = 0,6435\dots$ im Bogenmaß. Wie unter a) bemerkt, tritt dieser Winkel auch im Dreieck M, D, C an M auf und beschreibt daher den Winkel, der den zugehörigen Kreisbogen bestimmt, entlang dem sich die Person bewegt. Da der Radius 3 ist, ist der zugehörige Bogen maximal gleich

$$3 \cdot 0,644 = 1,932.$$

Daher ist die Gesamtlänge dieses Weges gleich

$$8 + 2 \cdot 1,932 = 8 + 3,864 = 11,864 < 11,9.$$

AUFGABE 6. (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

über \mathbb{C} .

Lösung

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & x + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte kann man aus der vorletzten Zeile direkt ablesen; diese sind

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Zur Berechnung der Eigenräume setzen wir die Eigenwerte für x in die obige Matrix ein und bestimmen den Kern.

Für x_1 ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix},$$

der Kern wird vom Vektor

$$\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}, -3\right)$$

erzeugt. Also ist $E_1 = \mathbb{C} \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}, -3\right)$.

Für x_2 ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix},$$

der Kern wird vom Vektor

$$\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}, 3\right)$$

erzeugt. Also ist $E_2 = \mathbb{C}\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}, 3\right)$.

AUFGABE 7. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung

Es handelt sich um ein Zentralfeld, das auf die eindimensionale Differentialgleichung

$$z' = -e^t z^2$$

mit $z(0) = 1$ führt. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Es ist

$$-\frac{z'}{z^2} = e^t$$

und somit

$$z^{-1} = e^t + c.$$

Also ist

$$z = \frac{1}{e^t + c}$$

und wegen der Anfangsbedingung muss $c = 0$ sein, also ist

$$z = e^{-t}.$$

Die Lösung für das Zentralfeld ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 8. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 x - xy \\ t^3 + x^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 1 \text{ und } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

Lösung

Wir machen den Potenzreihenansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ und $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$.
Aufgrund der Anfangsbedingung ist

$$a_0 = 1 \text{ und } b_0 = 0.$$

Das Differentialgleichungssystem führt auf die beiden Potenzreihengleichungen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} = t^3 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^2,$$

die wir gradweise auswerten. Für den Grad 0 (der Potenzreihengleichungen) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$a_1 = -a_0 b_0 = 0 \text{ und } b_1 = a_0^2 = 1.$$

Für den Grad 1 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$2a_2 = -a_1 b_0 - a_0 b_1 = -1 \text{ und } 2b_2 = 2a_0 a_1 = 0,$$

also ist $a_2 = -\frac{1}{2}$ und $b_2 = 0$. Für den Grad 2 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$3a_3 = a_0 - a_0 b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_0 = 1 \text{ und } 3b_3 = 2a_0 a_2 + a_1 a_1 = -1,$$

also ist $a_3 = \frac{1}{3}$ und $b_3 = -\frac{1}{3}$. Für den Grad 3 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$4a_4 = a_1 - a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ und } 4b_4 = 1 + 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

also ist $a_4 = \frac{5}{24}$ und $b_4 = \frac{5}{12}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 4 ist demnach

$$\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{24}t^4, t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{12}t^4 \right).$$

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = e^x y z^2 - xy,$$

im Punkt $(1, 0, -1)$.

Lösung

Die relevanten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^x y z^2 - y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x z^2 - x, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2e^x y z, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= e^x y z^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} &= 2e^x y, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x z^2 - 1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2e^x y z, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2e^x z. \end{aligned}$$

Somit sind die Werte der relevanten Ableitungen im Punkt $(1, 0, -1)$ gleich

$$\begin{aligned} f(1, 0, -1) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, -1) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, -1) &= e - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, -1) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1, 0, -1) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1, 0, -1) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(1, 0, -1) &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, -1) = e - 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, -1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, -1) = -2e.$$

Daher ist das Taylor-Polynom der Ordnung zwei gleich

$$(e - 1)y + (e - 1)(x - 1)y - 2ey(z + 1).$$

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Begründe ohne Differentialrechnung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 - y^2,$$

kein lokales Extremum besitzt.

Lösung

Die Funktion $h \mapsto h^2$ ist für $h \geq 0$ streng wachsend und für $h \leq 0$ streng fallend, für $h \mapsto -h^2$ ist es umgekehrt. Daher kann man für jeden Punkt (x, y) in einer beliebig kleinen Ballumgebung den Funktionswert von $f(x, y)$ erhöhen, indem man y beibehält und x größer (bei $x \geq 0$) bzw. kleiner (bei $x < 0$) macht. Ebenso kann man den Funktionswert kleiner machen, indem man x beibehält und y größer (bei $y \geq 0$) bzw. kleiner (bei $y < 0$) macht.

AUFGABE 11. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P = (x, y, z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

Lösung

Die Jacobi-Matrix von F ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Ein Punkt P ist genau dann ein regulärer Punkt, wenn der Rang dieser Matrix 3 ist, wenn die Matrix also invertierbar ist.

Wenn $x = y$ ist, so stimmen die erste und die zweite Spalte überein; wenn $x = z$ ist, so stimmen die erste und die dritte Spalte überein; wenn $y = z$ ist, so stimmen die zweite und die dritte Spalte überein. Daher liegt bei Punkten, bei denen zwei Koordinaten übereinstimmen, eine lineare Abhängigkeit zwischen den Spalten vor und der Rang der Matrix ist nicht 3. Solche Punkte sind also nicht regulär.

Zum Beweis der Umkehrung berechnen wir die Determinante der Matrix. Diese ist (Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned} & (x + z)xy - xz(x + y) - (y + z)xy + yz(x + y) + (y + z)xz - yz(x + z) \\ &= x^2y - x^2z - xy^2 + y^2z + xz^2 - yz^2 \\ &= x^2(y - z) + x(z^2 - y^2) + yz(y - z) \\ &= x^2(y - z) + x(z - y)(z + y) + yz(y - z) \\ &= (y - z)(x^2 - x(z + y) + yz) \\ &= (y - z)(x - y)(x - z). \end{aligned}$$

Wenn die Koordinaten paarweise verschieden sind, so ist die Determinante nicht 0 und die Matrix ist invertierbar, also sind diese Punkte regulär (mit diesem Argument beweist man gleichzeitig auch die Hinrichtung).

AUFGABE 12. (11 (4+7) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^4.$$

a) Bestimme zu jedem Punkt $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq x \leq r + 1, s \leq y \leq s + 1, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

b) Zeige, dass das (von (r, s) abhängige) Volumen aus Teil a) in genau einem Punkt (r, s) minimal ist (dieser Punkt muss nicht explizit angegeben werden).

Lösung

a) Das Volumen ist

$$\begin{aligned} \int_r^{r+1} \int_s^{s+1} x^2 + y^4 \, dy \, dx &= \int_r^{r+1} \left(x^2 y + \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_s^{s+1} dx \\ &= \int_r^{r+1} \left(x^2 (s+1-s) + \frac{1}{5} ((s+1)^5 - s^5) \right) dx \\ &= \int_r^{r+1} \left(x^2 + \frac{1}{5} (5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1) \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 + \left(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{1}{5} \right) x \right) \Big|_r^{r+1} \\ &= \frac{1}{3} ((r+1)^3 - r^3) + \left(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{1}{5} \right) (r+1-r) \\ &= \frac{1}{3} (3r^2 + 3r + 1) + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{1}{5} \\ &= r^2 + r + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

b) Die Ableitung der Volumenfunktion

$$V(r, s) = r^2 + r + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{8}{15}$$

ist

$$(2r + 1, 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1).$$

Ein Minimum kann nur vorliegen, wenn die Ableitung 0 ist. Wir zeigen, dass dies nur für ein (r, s) der Fall sein kann. Wegen der ersten Komponente muss $r = -\frac{1}{2}$ sein. Wir zeigen, dass die zweite Komponente

$$h(s) = 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

ebenfalls nur eine Nullstelle besitzt, indem wir zeigen, dass h streng wachsend ist. Die Ableitung von h ist

$$h'(s) = 12s^2 + 12s + 4 = 12s(s + 1) + 4.$$

Diese Funktion ist für $s \rightarrow \infty$ und $s \rightarrow -\infty$ offenbar positiv, sie besitzt also genau ein Minimum, und zwar wegen

$$h''(s) = 24s + 12$$

bei

$$s = -\frac{1}{2}.$$

Der Wert des Minimums von h' ist

$$h' \left(-\frac{1}{2} \right) = 12 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + 4 = -12 \cdot \frac{1}{4} + 4 = -3 + 4 = 1 > 0.$$

Dies bedeutet, dass h' stets positiv ist und somit ist h streng wachsend. Da ferner h ein Polynom vom Grad 3 ist, also $h(s) \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$ und $h(s) \rightarrow -\infty$ für $s \rightarrow -\infty$ gilt, besitzt h genau eine Nullstelle. Insgesamt besitzt also $V(r, s)$ genau einen kritischen Punkte.

Wir müssen noch zeigen, dass in dem einzigen kritischen Punkt ein Minimum von $V(r, s)$ vorliegt. Die Hesse-Matrix zu V ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12s^2 + 12s + 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für jedes s nach der oben durchgeführten Berechnung positiv definit, also liegt im kritischen Punkt ein Minimum vor.

AUFGABE 13. (5 Punkte)

Die rechteckige Grundseite (Unterseite) eines Bootes (unter Wasser) habe die Breite 2m und die Länge 10m, die (ebenfalls rechteckige) Deckseite (Oberseite) habe die Breite 3m und die Länge 12m, wobei die Seiten parallel zueinander seien und den Abstand 2m besitzen. Die vier übrigen Seiten seien ebene Verbindungen zwischen Ober- und Unterseite. Das Boot wiegt mit Besatzung, aber ohne Ladung 12.000kg. Der Tiefgang des Bootes soll maximal 1,5m betragen. Mit welcher Masse kann das Boot maximal beladen werden?

Lösung

Wir berechnen zuerst die Länge und die Breite der Querschnittsebene des Bootes zu einer Höhe h über der Grundseite. Für die Länge gilt

$$L(h) = h + 10,$$

da die Abhängigkeit von der Höhe linear ist. Für die Breite gilt

$$B(h) = \frac{1}{2}h + 2.$$

Daher ist der Flächeninhalt der Querschnittsfläche gleich

$$Q(h) = L(h) \cdot B(h) = (h + 10) \left(\frac{1}{2}h + 2 \right) = \frac{1}{2}h^2 + 7h + 20$$

Nach dem Cavalieri-Prinzip ist daher das Volumen (in Kubikmetern) des Bootes von der Grundseite bis zur Höhe g gleich

$$V(g) = \int_0^g \frac{1}{2}h^2 + 7h + 20 \, dh = \frac{1}{6}g^3 + \frac{7}{2}g^2 + 20g.$$

Für $g = 1,5$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V(1,5) &= \frac{1}{6} \cdot 1,5^3 + \frac{7}{2} \cdot 1,5^2 + 20 \cdot 1,5 \\ &= 0,25 \cdot 2,25 + \frac{7}{2} \cdot 2,25 + 30 \\ &= 0,5625 + 7,875 + 30 \\ &= 38,4375 \end{aligned}$$

in Kubikmetern. Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht des verdrängten Wasservolumens. Also darf das Schiff maximal 38,4375 Tonnen wiegen, so dass es eine Ladung von 26,4375 Tonnen befördern kann.

Hilfsmittel

$$\arcsin(0,6) = 0,643501109\dots$$