Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 46

Totale Differenzierbarkeit

Wir möchten Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen differenzieren (ohne auf eine Richtung Bezug zu nehmen), und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi\colon G \longrightarrow W,$$

wobei $G \subseteq V$ eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von φ (genauer: Der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt x wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit φ' bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schmiegt sich die Tangente im Punkt $(P, f(P))$ an den Graphen zu f an. Zu einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt $(P, f(P))$ eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen zu f gibt.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie schon gezeigt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab.

Definition 46.1. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge und $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung. Dann heißt φ *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt $P \in G$, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon V \to W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + ||\,v\,||\; r(v)$$

gibt, wobei $r\colon U(0,\delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P,\delta) \subseteq G$ gilt.

Diese lineare Abbildung heißt, falls sie existiert, das *(totale) Differential* von φ an der Stelle P und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$r(v) = \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)}{||\, v\, ||}$$

für $v \to 0$ gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{||\, \varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)\, ||}{||\, v\, ||}$$

existiert und gleich 0 ist (siehe Aufgabe 46.9).

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und weniger konkreten Berechnungen zugänglich. Wir werden später dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 47.6 in der nächsten Vorlesung).

Lemma 46.2. *Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei die Abbildung $\varphi\colon G \to W$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq V$ definiert. Sei $P \in G$ ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition. Ist φ im Punkt P differenzierbar, so ist das totale Differential $(D\varphi)_P$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gelte $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_1(v) + ||\, v\, || \cdot r_1(v)$ und $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_2(v) + ||\, v\, || \cdot r_2(v)$ mit zwei linearen Abbildungen L_1 und zwei L_2 und im Punkt 0 stetigen Funktionen $r_1, r_2\colon U(0,\delta) \to W$ mit $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Wir müssen $L_1 = L_2$ zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum W handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + ||\, v\, || \cdot (r_1(v) - r_2(v))\,.$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + ||\, v\, || \cdot r(v)$$

gilt, wobei L linear und r eine in 0 stetige Funktion ist mit $r(0) = 0$. Wenn L nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = w \neq 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$0 = L(sv) + \|\, sv \,\|\, r(sv) = sw + |s| \cdot \|\, v \,\| \cdot r(sv)\,.$$

Dies impliziert, dass $r(sv) = -sw/(|s| \cdot \|\, v \,\|)$ für $s \neq 0$ gilt. Die Norm von $r(sv)$ ist daher konstant gleich $\|\, w \,\| \,/\, \|\, v \,\| \neq 0$. Also gilt $\lim_{s \to 0} \|\, r(sv) \,\| \neq 0$, ein Widerspruch. □

Beispiel 46.3. Ist $\varphi \colon V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$, so ist φ differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 46.6).

Proposition 46.4. *Sei $L \colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist L in jedem Punkt $P \in V$ differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

Beweis. Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P + v) = L(P) + L(v)\,.$$

Also können wir $r = 0$ wählen. □

Diese Aussage gilt auch für affin-lineare Abbildungen, also Abbildungen der Form

$$\varphi \colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto L(v) + w,$$

mit einer linearen Abbildung L und einem festen Vektor $w \in W$. In diesem Fall ist das totale Differential gleich L.

Lemma 46.5. *Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f \colon I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann ist γ genau dann in $t \in I$ als Kurve differenzierbar, wenn γ in t total differenzierbar ist. In diesem Fall besteht die Beziehung

$$\gamma'(t) \;=\; (D\gamma)_t(1).$$

Beweis. Die Kurvendifferenzierbarkeit im Punkt t bedeutet nach Definition die Existenz des Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\,.$$

Diese Existenz ist (entsprechend Satz 19.5) dazu äquivalent, dass man

$$\gamma(t+h) \;=\; \gamma(t) + hw + h \cdot r(h)$$

mit einem Vektor $w \in V$ und einer in 0 stetigen Abbildung r mir $r(0) = 0$ schreiben kann (wobei $w = \gamma'(t)$ sein muss). Dabei kann man hinten h durch $|h|$ ersetzen (wobei man auch $r(h)$ abwandeln muss). Diese lineare Approximierbarkeit ist aber die Definition der totalen Differenzierbarkeit. □

Proposition 46.6. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildungen mit den Differentialen $(D\varphi_1)_P$ und $(D\varphi_2)_P$. Dann ist auch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in P differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P \, .$$

Ebenso gilt $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$.

Beweis. Sei $\varphi_1(P+v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \| v \| \cdot r_1(v)$ und $\varphi_2(P+v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \| v \| \cdot r_2(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_1 + \varphi_2)(P+v) &= \varphi_1(P+v) + \varphi_2(P+v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \| v \| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \| v \| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \| v \| \, (r_1(v) + r_2(v)).\end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch $r_1 + r_2$ in 0 stetig ist mit $(r_1 + r_2)(0) = 0$. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich. □

Proposition 46.7. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Sei $\varphi \colon G \to W$ eine in $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ auch stetig im Punkt P.*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + \| v \| \cdot r(v)$. Die rechte Seite ist stetig (nach Definition und Satz 33.10) in $v = 0$. Damit ist φ stetig in P. □

Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen. Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

Proposition 46.8. *Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi \colon G \to W$ eine im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ in P in jede Richtung v differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P \, (v) \; .$$

Beweis. Da $(D\varphi)_P$ eine lineare Abbildung von V nach W ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor $v \in V$ einen Vektor in $(D\varphi)_P \, (v) \in W$. Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P \, (v) + \| v \| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an r). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines) $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P+sv) = \varphi(P) + s \, (D\varphi)_P \, (v) + |s| \cdot \| v \| \cdot r(sv) \, .$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{\varphi(P+sv)-\varphi(P)}{s} &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{s\,(D\varphi)_P\,(v)+|s|\cdot ||\,v\,||\cdot r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \left((D\varphi)_P\,(v)+\frac{|s|}{s}\,||\,v\,||\cdot r(sv)\right) \\ &= (D\varphi)_P\,(v)\,,\end{aligned}$$

da $\lim_{s\to 0} r(sv)=0$ und der Ausdruck $\frac{|s|}{s}\,||\,v\,||$ beschränkt ist. □

BEMERKUNG 46.9. Es sei $G\subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon G\to \mathbb{R}^m$ eine in $P\in G$ total differenzierbare Abbildung. Dann existieren nach Proposition 46.8 und nach Lemma 45.3 die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

im Punkt P. Daher existiert die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix beschreibt das totale Differential bezüglich den Standardbasen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

SATZ 46.10. *Sei $G\subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon G\to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Seien x_i, $i=1,\ldots,n$, die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ und $P\in G$ ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von P existieren und in P stetig sind. Dann ist φ in P (total) differenzierbar. Ist die Abbildung φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ durch die Koordinatenfunktionen $f_1,\ldots,f_m$ gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in P durch die Jacobi-Matrix*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$$

beschrieben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

KOROLLAR 46.11. *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 46.10 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, die nach Satz 33.12 stetig sind. □