Fachbereich Mathematik/Informatik **11. Januar 2014**
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	7	8	2	3	4	3	4	2	3	2	4	2	3	4	5	64
erhaltene Pkt.:																		

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Gleichmächtigkeit* von zwei Mengen L und M.
(2) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(3) Die *gleichmäßige Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(4) Das *Cauchy-Produkt* von zwei komplexen Reihen.
(5) Die *Exponentialreihe* zu einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.
(6) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(7) Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
(8) Die *Differenzierbarkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Zwischenwertsatz*.
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Das *Additionstheorem* für den Sinus.
(4) Die *Quotientenregel* für die Ableitung, also die Formel für die Ableitung von $\frac{f}{g}$ (mit den Voraussetzungen an f und g).

Aufgabe 3. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Zeige, dass es stetige Funktionen
$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$
mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Es seien $b > a$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon C^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(]a,b[,\mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{]a,b[}.$$

Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng wachsende Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Folgt daraus $f = g$?

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion, also die Identität

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y\,.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1\,.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[X]\,.$$

Bestimme die x-Koordinaten sämtlicher Schnittpunkte der Tangente an f im Punkt $x = 1$ mit dem Graphen von f.

Aufgabe 14. (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 15. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

die Extrema.

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 17. (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}\,.$$

Zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die reelle Folge

$$x_n = f^n(x)\,,$$

es gilt also die rekursive Beziehung $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeige, dass die Folge für $x_0 \in [-2, 1]$ einen Häufungspunkt besitzt.