**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2010**

# Mathematik II

## Vorlesung 33

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

### Partielle Integration

Satz 33.1. *Es seien*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.$$

*Beweis.* Aufgrund der Produktregel ist $fg$ eine Stammfunktion von $fg' + f'g$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \;=\; \int_a^b (fg' + f'g)(t)\,dt \;=\; fg|_a^b.$$

□

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form $fg'$ vor, sondern einfach als Produkt $uv$ (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung $1u$ manchmal helfen kann). Dann muss man einen Faktor integrieren und dn anderen differenzieren. Wenn $V$ eine Stammfunktion von $v$ ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V\,.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das zweite Integral rechts, also $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$, integriert werden kann.

Beispiel 33.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels partieller Integration, wobei wir $\ln x = 1 \cdot \ln x$ schreiben und 1 integrieren und den Logarithmus differenzieren. Damit ist

$$\int_a^b \ln x\,dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b 1\,dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - x|_a^b.$$

Die Stammfunktion ist also $x \cdot \ln x - x$.

Beispiel 33.3. Die Stammfunktion der Sinusfunktion $\sin x$ ist $-\cos x$. Um Stammfunktionen zu $\sin^n x$ zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für $n \geq 2$ ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^n t\, dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t\, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t)\, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\, dt - \int_0^x (\sin^{n-2} t \cos t) \cos t\, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\, dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t\, |_0^x - \frac{1}{n-1}(\int_0^x \sin^n t\, dt).\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $n-1$ und Umstellen erhält man

$$n \int_0^x \sin^n t\, dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t\, dt - \sin^{n-1} x \cos x\,.$$

Speziell ergibt sich für $n = 2$

$$\int_0^x \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\,.$$

John Wallis (1616-1703)

Korollar 33.4. *Es gilt die Darstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}\,.$$

*Beweis.* Wir setzen

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt\,.$$

Dies ist eine fallende Folge, für die aufgrund von Beispiel 33.3 die rekursive Beziehung

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$

und die Anfangsbedingungen $a_0 = \frac{\pi}{2}$ und $a_1$ =1 gelten. Ausgeschrieben bedeutet dies für gerades $n$

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und für ungerades $n$

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3}.$$

Mit $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$ schreibt sich dies als

$$a_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

bzw. als

$$a_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3}.$$

Da die Folge fallend ist und $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ gilt konvergieren die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ gegen 1. Also ist insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3}} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 5^2\cdot 3^2\cdot 1}{(2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2)^2}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier kann man den Zähler, indem man zwei aufeinander folgende Faktoren ausmultipliziert, als $\prod_{k=1}^m (4k^2-1)$ und den Nenner als $\prod_{k=1}^m 4k^2$ schreiben. Daher ist

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^m 4k^2}{\prod_{k=1}^m (4k^2-1)} = \frac{\pi}{2}.$$

□

## Integration der Umkehrfunktion

Satz 33.5. *Es sei $f : [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei $F$ eine Stammfunktion von $f$. Dann ist*

$$G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

*eine Stammfunktion der Umkehrfunktion $f^{-1}$.*

*Beweis.* Ableiten unter Verwendung von Lemma 27.7 und Satz 27.8 ergibt

$$\begin{aligned} (yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f(f^{-1}(y))\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y). \end{aligned}$$

□

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ eine streng wachsende Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen $[a, b]$ und $[f(a), f(b)]$ induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s)\,ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Für die Stammfunktion $G$ von $f^{-1}$ mit dem Startpunkt $f(a)$ gilt daher, wenn $F$ die Stammfunktion zu $f$ bezeichnet, die Beziehung

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{f(a)}^{y} f^{-1}(t)\,dt \\ &= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t)\,dt \\ &= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y)) - af(a) - \int_a^{f^{-1}(y)} f(s)\,ds \\ &= yf^{-1}(y) - af(a) - F(f^{-1}(y)) + F(a) \\ &= yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) - af(a) + F(a), \end{aligned}$$

wobei $-af(a) + F(a)$ eine Integrationskonstante ist.

Beispiel 33.6. Wir berechnen eine Stammfunktion von $\arctan x$ unter Verwendung von Satz 33.5. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t\ dt = -\ln(\cos x)\,.$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von $\arctan x$.

## Die Substitutionsregel

Satz 33.7. *Sei $I$ ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Es sei*

$$g : [a, b] \longrightarrow I$$

*stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds\,.$$

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit von $f$ und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von $g$ existieren beide Integrale. Es sei $F$ eine Stammfunktion von $f$, die aufgrund von Korollar 32.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$ die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

□

Beispiel 33.8. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind bspw.

$$\int g^n(t)g'(t)$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1}g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln g\,.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

Korollar 33.9. *Es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion und es sei*

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b],\ s \longmapsto \varphi(s),$$

*eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds$$

*Beweis.* Nach Satz 33.7 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi(\varphi^{-1}(b))} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Bemerkung 33.10. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

ausgerechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung $\varphi'(t)$ und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion $\varphi^{-1}$ berechenbar ist). Mit $c = \varphi^{-1}(a)$ und $d = \varphi^{-1}(b)$ liegt insgesamt die Situation

$$[c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

(1) Ersetze $f(t)$ durch $f(\varphi(s))$.
(2) Ersetze $dt$ durch $\varphi'(s)ds$.
(3) Ersetze die Integrationsgrenzen $a$ und $b$ durch $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt \;=\; d\varphi(s) \;=\; \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der Differentialformen auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

Beispiel 33.11. Die obere Kreislinie des *Einheitskreises* ist die Punktmenge

$$\{(x,y) |\, x^2 + y^2 = 1,\, -1 \leq x \leq 1,\, y \geq 0\}\,.$$

Zu gegebenem $x$, $-1 \leq x \leq 1$, gibt es genau ein $y$, das diese Bedingung erfüllt, nämlich $y = \sqrt{1-x^2}$. Daher ist der Flächeninhalt des oberen Einheitskreises gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1,1]$, also gleich

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution

$$x = \cos t \text{ und } t = \arccos x$$

(wobei $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arccos a}^{\arccos b} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt \\
&= -\int_{\arccos a}^{\arccos b} \sin^2 t\; dt \\
&= \frac{1}{2}(\sin t \cos t - t)|_{\arccos a}^{\arccos b}\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2}(x \cdot \sin(\arccos x) - \arccos x) = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1-x^2} - \arccos x)$$

eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\sin 0 + \sin \pi + \pi) = \pi/2.$$

Beispiel 33.12. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2-1}$ unter Verwendung der Hyperbelfunktionen $\sinh t$ und $\cosh t$, für die die Beziehung $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt. Die Substitution

$$x = \cosh t \text{ mit } dx = \sinh t\, dt$$

liefert

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\, dx = \int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} \sqrt{\cosh^2 t - 1} \cdot \sinh t\, dt = \int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} \sinh^2 t\, dt.$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2 t = (\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}))^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2).$$

Daher ist

$$\int \sinh^2 t\, dt = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} - 2u) = \frac{1}{4} \sinh 2u - \frac{1}{2}u$$

und somit

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arccosh} x) - \frac{1}{2} \operatorname{arccosh} x.$$

Beispiel 33.13. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}$$

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$(x \cos x - \sin x)^{-1}.$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{(x \cos x - \sin x)^2} = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2}.$$

Wir schreiben daher $f$ als ein Produkt

$$f(x) = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$(\frac{x}{\sin x})' = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= (x \cos x - \sin x)^{-1} \cdot \frac{x}{\sin x} \\
&\quad - \int (x \cos x - \sin x)^{-1} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}\,dx \\
&= (x \cos x - \sin x)^{-1}\left(-\frac{x}{\sin x}\right) + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \\
&= (x \cos x - \sin x)^{-1}\left(-\frac{x}{\sin x}\right) - \cot x\,.
\end{aligned}$$

# Abbildungsverzeichnis