Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Anhang 6

Separable und rein-inseparable Elemente

LEMMA 6.1. *Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ und sei $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann gibt es ein irreduzibles und separables Polynom $G \in K[X]$ mit $F = G(X^{p^e})$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Da F irreduzibel ist, ist der Grad von F mindestens 1. Es sei e der maximale Exponent derart, dass man $F = G(X^{p^e})$ mit einem Polynom $G \in K[X]$ schreiben kann. Dies muss es geben, da G nicht konstant ist und daher der Grad von $G(X^{p^e})$ mindestens so groß wie p^e ist. Das Polynom G ist ebenfalls irreduzibel, da eine Zerlegung davon sofort zu einer Zerlegung von F führt. Wegen der Maximalität von e ist $G \notin K[X^p]$. Daher ist $G' \neq 0$ und somit ist G' teilerfremd zum irreduziblen Polynom G. Also ist G nach Fakt separabel. $\square$

DEFINITION 6.2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt *separabel*, wenn x algebraisch über K ist, und sein Minimalpolynom separabel ist.

DEFINITION 6.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt *rein-inseparabel*, wenn x algebraisch ist und sein Minimalpolynom F in jedem Erweiterungskörper nur eine Nullstelle besitzt.

Ein Element $x \in L$, das zu K gehört, ist gemäß dieser Definition rein-inseparabel; sein Minimalpolynom ist ja $X - x$. In Charakteristik 0 sind dies auch schon die einzigen rein-inseparablen Elemente. In positiver Charakteristik kann man die folgende Charakterisierung angeben.

LEMMA 6.4. *Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$, es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $x \in L$ ein über K algebraisches Element. Dann ist x genau dann rein-inseparabel, wenn $x^{p^e} \in K$ ist für ein $e \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $x^{p^e} = y \in K$. Dann ist $X^{p^e} - y = (X - x)^{p^e} \in K[X]$ ein Polynom, das x annuliert. Dieses Polynom besitzt über $K(x)$ die einzige Nullstelle x, so dass dies auch für das Minimalpolynom von x über K gilt, und zwar auch in jedem Erweiterungskörper. Also ist x rein-inseparabel. Sei nun x rein-inseparabel, mit dem Minimalpolynom $F \in K[X]$. Nach Fakt gibt es ein irreduzibles separables Polynom $G \in K[X]$ und ein $e \in \mathbb{N}$ mit $F = G(X^{p^e})$. Sei d der Grad von G. Es sei $K \subseteq M$ der Zerfällungskörper von G und $G = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$ die Faktorzerlegung von G über M. Wegen der Separabilität von G sind diese Nullstellen verschieden. Bei $d > 1$ hätte auch F verschiedene Nullstellen (in einem geeigneten Erweiterungskörper $M \subseteq M'$). Also ist $d = 1$ und somit ist $F = X^{p^e} - y$ mit einem $y \in K$. $\square$

Definition 6.5. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *rein-inseparabel*, wenn jedes Element $x \in L$ rein-inseparabel über K ist.

Lemma 6.6. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x \in L$ ein Element, das sowohl separabel als auch rein-separabel über K ist. Dann ist $x \in K$.*

Beweis. Es sei $F \in K[X]$ das Minimalpolynom von x. Dann besitzt F wegen der Separabilität in jedem Erweiterungskörper nur einfache Nullstellen, aber wegen der reinen Inseparabilität überhaupt nur eine Nullstelle. Also besitzt F den Grad 1 und somit ist $x \in K$. $\square$

Definition 6.7. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Unter dem *separablen Abschluss* (von K in L) versteht man die Teilmenge $S \subseteq L$, die aus allen über K separablen Elementen aus L besteht.

Lemma 6.8. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei S, $K \subseteq S \subseteq L$, der separable Abschluss von K in L. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *S ist ein Körper.*
(2) *Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist separabel.*
(3) *Der separable Abschluss von S in L ist gleich S.*

Beweis. (1). Für zwei Elemente $x, y \in S$ ist $K[x, y]\,(\subseteq L)$ eine über K nach Fakt eine endliche und nach Fakt separable Körpererweiterung. Also ist $K[x, y] \subseteq S$ und S ist ein Unterring. Für $x \neq 0$ ist auch $x^{-1} \in K[x, y]$, so dass ein Körper vorliegt. (1) ist klar. (3). Sei $x \in L$ separabel über S. Dann ist x auch separabel über einem Körper M, $K \subseteq M \subseteq S$, der endlich über K ist. Daher ist x algebraisch über K. Es sei F das Minimalpolynom von x über K, das nach Fakt die Gestalt

$$F = G(X^q)$$

mit $q = p^e$ und einem irreduziblen separablen Polynom $G \in K[X]$. Für

$$y = x^q$$

ist G ein separables annullierendes Polynom, so dass $y \in S$ ist. Daher wird x von $X^q - y \in S[X]$ annulliert, so dass x auch rein-inseparabel über S ist. Daher ist $e = 0$ und $x = y \in S$. $\square$

Satz 6.9. *Eine endliche Körpererweiterung ist genau dann étale, wenn sie separabel ist.*

Beweis. Sei zunächst $K \subseteq L$ separabel und $x \in L$. Das Minimalpolynom $F \in K[X]$ von x ist separabel, daher ist nach Fakt $F'(x) \neq 0$. Somit folgt aus

$$0 \;=\; dF(x) \;=\; F'(x)dx,$$

dass

$$dx \;=\; 0$$

ist. Sei nun umgekehrt $\Omega_{L|K} = 0$ vorausgesetzt. Wir verwenden den separablen Abschluss $K \subseteq S \subseteq L$ und müssen $S = L$ zeigen. Wir nehmen an, dass $S \neq L$ ist. Dann gibt es eine Kette

$$S \subseteq S(x_1) \subseteq S(x_1, x_2) \subseteq \ldots \subseteq S(x_1, \ldots, x_n) = L\,,$$

wobei wir $M = S(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq L$ annehmen können. Da $S \subseteq L$ rein-inseparabel ist, ist auch $M \subseteq L = M(x_n)$ rein-inseparabel. Daher ist das Minimalpolynom von x_n über M gleich $X^q - a$ mit $a \in M$ und $q = p^e$ mit $e \geq 1$. Also ist $L = M[X]/(X^q - a)$ und daher ist

$$\Omega_{L|M} \;\cong\; LdX/(X^q - a)'dX \;\cong\; LdX \;\neq\; 0$$

nach Fakt. Daher ist auch $\Omega_{L|K} \neq 0$ aufgrund von Fakt im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$