Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass eine widersprüchliche Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.2. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine Ausdrucksmenge, die Repräsentierungen erlaube. Zeige, dass jede größere Ausdrucksmenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ ebenfalls Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.3. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine widerspruchsfreie und R-entscheidbare Ausdrucksmenge.

a) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^r$ R-entscheidbar ist.

b) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

R-berechenbar ist.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass in der erststufigen Peano-Arithmetik die Addition von natürlichen Zahlen repräsentierbar ist.

Aufgabe 22.5. Zeige, dass eine endlich axiomatisierbare Theorie auch durch einen einzigen Ausdruck axiomatisierbar ist.

Aufgabe 22.6. Es sei $T \subseteq L^S$ eine aufzählbar axiomatisierbare Theorie und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^S$. Zeige, dass dann auch

$$T' = (T \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})^{\vdash}$$

aufzählbar axiomatisierbar ist.

Aufgabe 22.7. Zeige, dass es zwischen der erststufigen Peano-Arithmetik und der Standardarithmetik unendlich viele Theorien gibt.

In den folgenden Aufgaben verwenden wir den Begriff der Aufzählbarkeit nicht nur für Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$, sondern auch für Teilmengen aus L^S.

Aufgabe 22.8. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten und Funktionssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Terme gibt.

Aufgabe 22.9. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Ausdrücke gibt.

Aufgabe 22.10. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Tautologien gibt.

Aufgabe 22.11. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol. Zeige, dass der Ausdruck

$$\exists y \left((f x_1 \ldots x_n = y) \wedge \forall z \left((f x_1 \ldots x_n = z) \rightarrow y = z \right) \right)$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 22.12. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol. Erstelle eine Ableitung für den Ausdruck

$$\exists y \left((f x_1 \ldots x_n = y) \wedge \forall z \left((f x_1 \ldots x_n = z) \rightarrow y = z \right) \right) .$$