Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 46

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 46.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum V^* die gleiche Dimension wie V besitzt.

Aufgabe 46.2. Berechen den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz}$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 46.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 46.4. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 46.5. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten grad $f(P)$ ist.

Aufgabe 46.6. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

AUFGABE 46.7. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

AUFGABE 46.8. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

AUFGABE 46.9. Betrachte die Linearform

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) |\, 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

AUFGABE 46.10. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt mit

$$\langle v_i, v_j \rangle \; = \; \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

AUFGABE 46.11. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

AUFGABE 46.12. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bzgl. einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

AUFGABE 46.13. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von f in jedem Punkt $P \in G$ symmetrisch ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 46.14. (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

AUFGABE 46.15. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y\,.$$

AUFGABE 46.16. (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gegebene abgeschlossene Dreieck ist.

AUFGABE 46.17. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

AUFGABE 46.18. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + \sin y - xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten von g bzgl. der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.

Aufgabe 46.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V und einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, aber $\langle -, - \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 46.20. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$