Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 53

Wir haben schon für verschiedene Differentialgleichungen gezeigt, dass eine Lösung existiert und durch eine Anfangswertbedingung eindeutig bestimmt ist. Der *Satz von Picard-Lindelöf* beweist dies recht allgemein unter der Voraussetzung, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lipschitz-Bedingung

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Für den Satz von Picard-Lindelöf wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 53.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt mit

$$|| f(t,u) - f(t,v) || \leq L \cdot || u - v ||$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$.

Die reelle Zahl L nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld f.

Definition 53.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t,v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t,v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

gibt derart, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 53.3. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t,v_1,\ldots,v_n) \longmapsto f(t,v_1,\ldots,v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$v' = A(t)v + z(t)$$

mit einer stetigen Matrix $A(t)$ sind die Bedingungen der vorstehenden Aussage erfüllt. Die i-te Komponente des Vektorfelds besitzt ja die Gestalt

$$f_i(t,v_1,\ldots,v_n) \,=\, a_{i1}(t)v_1 + \ldots + a_{in}(t)v_n + z_i(t).$$

Daraus folgt, dass f_i nach v_j partiell ableitbar ist mit der stetigen Ableitung $a_{ij}(t)$, so dass die Bedingungen erfüllt sind.

Differential- und Integralgleichungen

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve, das wir in Vorlesung 36 eingeführt haben, kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

Lemma 53.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0,w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (insbesondere muss v differenzierbar sein)

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt.

Beweis. Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist $v(t_0) = w$ und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt $v'(t) = f(t, v(t))$. Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass v differenzierbar ist.Wenn umgekehrt v eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist $v'(s) = f(s, v(s))$ und daher

$$w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \;=\; w + \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds \;=\; w + v(t) - v(t_0) \;=\; v(t).$$

□

Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 53.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon\ I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Dann gibt es zu jedem $(t_0, w) \in I \times U$ ein offenes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$ derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w$$

existiert.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die Picard-Lindelöf-Iteration

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, den wir nicht vorgeführt haben, läuft über die äquivalente Integralgleichung und ist prinzipiell kontruktiv. Darauf beruht die *Picard-Lindelöf-Iteration*, mit der man Lösungen approximieren kann. Die Güte der Approximationen wird dabei durch geeignete Normen auf Funktionenräumen gemessen, was wir nicht ausführen.

Bemerkung 53.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ eine Anfangsbedingung. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. In der *Picard-Lindelöf-Iteration* definiert man iterativ eine Folge von Funktionen

$$\varphi_n\colon I \longrightarrow V$$

durch $\varphi_0 = w$ (dies ist also die konstante Funktion mit dem Wert w) und durch

$$\varphi_{n+1}(t) = w + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Dann gibt es ein Teilintervall $]a,b[\subseteq I$ mit $t_0 \in]a,b[$ derart, dass für $t \in]a,b[$ die Folge $\varphi_n(t)$ gegen einen Punkt $\varphi(t)$ konvergiert (man sagt, dass die Funktionenfolge punktweise konvergiert; es gelten hier auch stärkere Konvergenzaussagen). Diese Grenzfunktion φ ist dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

Bei einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen konvergiert dieses Verfahren auf ganz I.

Wir wenden dieses Verfahren auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen an, für die wir die Lösung schon kennen (siehe Aufgabe 30.7).

Beispiel 53.7. Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf die Differentialgleichung

$$y' = F(t,y) = ty$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ an. Daher ist $\varphi_0 = 1$. Die erste Iteration liefert

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Die zweite Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t F\left(s, \varphi_1(s)\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4. \end{aligned}$$

Die dritte Iteration liefert

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t F\left(s, \varphi_2(s)\right) ds$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\int_0^t F\left(s, 1+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{8}s^4\right) ds \\
&= 1+\int_0^t s+\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{8}s^5 ds \\
&= 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{48}t^6.
\end{aligned}
$$

Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen

Der Satz von Picard-Lindelöf sagt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen lokal, also auf einem gewissen Teilintervall, eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung gibt. Die folgende Aussage zeigt, dass eine Lösung dort, wo sie definiert ist, eindeutig bestimmt ist. Wir verwenden die folgende Zusammenhangseigenschaft eines reellen Intervalls J, die aus dem Zwischenwertsatz folgt: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq J$, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, muss gleich ganz J sein.

SATZ 53.8. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U, das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $J \subseteq I$ offen und es seien

$$v_1, v_2\colon J \longrightarrow V$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

Dann ist $v_1 = v_2$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J \mid v_1(t) = v_2(t)\}\ .$$

Wegen $t_0 \in M$ ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt $t \in I$ gibt es nach Satz 53.5 eine offene Intervallumgebung $t \in J'$, worauf es zu gegebener Anfangsbedingung $v(t) = v_0$ genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn $t \in M$ ist, so ist $v_1(t) = v_2(t)$ und daher stimmen v_1 und v_2 in einer offenen Umgebung $t \in J'$ mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist $J' \subseteq M$. Dies bedeutet, dass M eine offene Teilmenge von J ist. Andererseits sind v_1 und v_2 stetig und daher ist nach Aufgabe 33.6 die Menge M auch abgeschlossen in M. Aus der Vorbemerkung folgt $M = J$. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Beispiel ist das Vektorfeld nach v ableitbar, die Ableitung ist aber nicht stetig, so dass Lemma 53.3 nicht anwendbar ist.

Beispiel 53.9. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0\,,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 \text{ für } t < a, \\ 0 \text{ für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 \text{ für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von a nach b) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt $\neq 0$ befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

Bemerkung 53.10. Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall J für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen },\ t_0 \in J,\ \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 53.8 stimmen zwei Lösungen v_J und $v_{J'}$ auf dem Durchschnitt $J \cap J'$ überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung $J \cup J'$. Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall J.

Dieses Teilintervall kann kleiner als I sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

Abbildungsverzeichnis