Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 33

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 33.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto m,$$

stetig ist.

AUFGABE 33.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x,$$

stetig ist.

AUFGABE 33.3. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

AUFGABE 33.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f : [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g : [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h : [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 33.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ gilt für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x.

Aufgabe 33.6. Es seien L und M metrische Räume und es seien

$$f,g : L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L |\, f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

Aufgabe 33.7. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

Aufgabe 33.8. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 33.9. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 33.10. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

Aufgabe 33.11. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (\,\cos t\,,\, \sin t\,).$$

Zeige, dass φ eine Bijektion zwischen $[0, 2\pi[$ und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Aufgabe 33.12. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f : Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Aufgabe 33.13. Es sei

$$f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 33.14. Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen z_i, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgabe 33.15. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.16. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \right\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a,b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M,P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 33.17. (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 33.18. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 3 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis[1] mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

[1]Diese Aufgabe macht auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

a) (63.5, 63.5)

b) (100, 100)

c) (63.5, 192,5)

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Welche Winkeltoleranz liegt in a) bis d) vor, wenn man die anliegenden Banden mitberücksichtigt?

Aufgabe 33.19. (4 Punkte)

Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 33.20. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto || v ||,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 33.21. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 33.22. (8 Punkte)

Fertige in der Situation der Aufgabe 33.18 eine hochladbare Grafik an, die auf dem Billardtisch die Linien von gleichem Schwierigkeitsgrad (also gleicher Winkeltoleranz zum Einlochen) zeigt.