Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 13

Rechenregeln für Folgen

LEMMA 13.1. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)+(\lim_{n\to\infty}y_n)\,.$$

(2) *Die Folge $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}y_n)\,.$$

(3) *Für $c\in\mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}cx_n=c(\lim_{n\to\infty}x_n)\,.$$

(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty}x_n=x\neq 0$ und $x_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x}\,.$$

(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty}x_n=x\neq 0$ und $x_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}y_n}{x}\,.$$

Beweis. Wir beweisen nur (2) und (4), die anderen Teile sind als Übungen zu beweisen. (2). Sei $\epsilon>0$ vorgegeben. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein D mit $|x_n|\leq D$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sei $x:=\lim_{n\to\infty}x_n$ und $y:=\lim_{n\to\infty}y_n$. Wir setzen $C=\max\{D,|y|,1\}$. Daher gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n-x|\leq\frac{\epsilon}{2C}\text{ für }n\geq N_1\text{ und }|y_n-y|\leq\frac{\epsilon}{2C}\text{ für }n\geq N_2\,.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n\geq N:=\max\{N_1,N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned}|x_ny_n-xy| &= |x_ny_n-x_ny+x_ny-xy|\\ &\leq |x_ny_n-x_ny|+|x_ny-xy|\\ &= |x_n||y_n-y|+|y||x_n-x|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht null ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon|x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

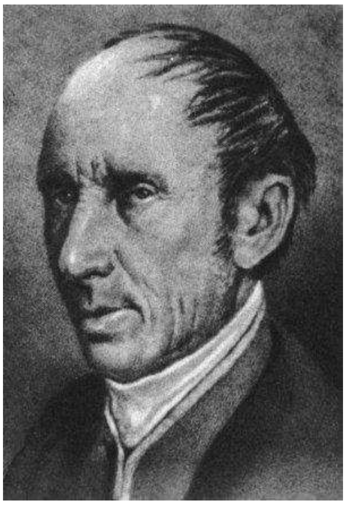
Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}| = |\frac{x_n - x}{x x_n}| = \frac{1}{|x||x_n|}|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon|x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in R betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 13.2. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 13.3. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \;\leq\; |x_n - x| + |x - x_m| \;\leq\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. $\square$

Definition 13.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Lemma 13.5. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 Indizes $n > m \geq n_0$ gibt mit $x_n - x_m \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wegen der Monotonie gibt es dann auch zu jedem n_0 ein $n > n_0$ mit $x_n - x_{n_0} \geq \epsilon$. Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon\,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon\,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_{n_0}\,.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_{n_0} &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \ldots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_{n_0}. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. $\square$

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Axiom 13.6. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede reelle Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus").

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade" zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung.

Folgerungen aus der Vollständigkeit

Korollar 13.7. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 13.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. $\square$

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0, \ldots, 9\}$ ist nämlich die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a,\ x_1 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10},\ x_2 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, dass sie nach oben beschränkt ist (beispielsweise durch $a+1$), so dass dadurch in der Tat eine reelle Zahl definiert wird.

Satz 13.8. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$ wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, handelt es sich nach Lemma 13.7 um eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit besitzt die konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist, eine Cauchy-Folge mit demselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ angenommen für ein $z \in M$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Beispiel 13.9. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} |\, x^k \leq a\}\,.$$

Diese Menge ist wegen $0 \in M$ nicht leer und nach oben beschränkt (bei $a \leq 1$ ist 1 eine obere Schranke, sonst ist a eine obere Schranke). Es sei $s = \sup(M)$, das es nach Satz 13.10 geben muss. Dann ist $s^k = a$, d.h. s ist eine k-te Wurzel von a, da sowohl die Annahme $s^k < a$ als auch die Annahme $s^k > a$ zu einem Widerspruch führen.

Intervallschachtelungen

Definition 13.10. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}\,,$$

gegen null konvergiert.

Satz 13.11. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 13.3. □

Definition 13.12. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Abbildungsverzeichnis