Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 25

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1.*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve
$$V(X^3 + Y^2 - XY + X)$$
eine nichtkonstante Potenzreihenlösung $X = F(Y)$ im Nullpunkt bis zum sechsten Glied.

Aufgabe 25.2.*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve
$$V(X^2Y + X^2 + Y^2 - 5XY + Y)$$
eine nicht-konstante Potenzreihenlösung $Y = F(X)$ im Nullpunkt bis zur fünften Ordnung.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Komplettierung eines lokalen Ringes.

Aufgabe 25.3. Betrachte zu einem lokalen Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ das Diagramm
$$\longrightarrow R/\mathfrak{m}^4 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^3 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}\,.$$
Dabei sind die Abbildungen die kanonischen Projektionen $\varphi_n : R/\mathfrak{m}^{n+1} \to R/\mathfrak{m}^n$, die durch die Idealinklusionen $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n$ induziert werden. Eine Folge von Elementen
$$a_n \in R/\mathfrak{m}^n$$
heißt *verträglich*, wenn $\varphi_n(a_{n+1}) = a_n$ gilt für alle n. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller verträglichen Elemente (diesen Ring nennt man die *Komplettierung* von R.) Zeige ferner, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus von R in die Komplettierung gibt.

Aufgabe 25.4. Sei R ein eindimensionaler lokaler noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass die kanonische Abbildung von R in die Komplettierung von R injektiv ist.

Bemerkung: Die Injektivität gilt für jeden noetherschen lokalen Ring, ist aber schwieriger zu beweisen.

Aufgabe 25.5. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in R)$$

Umgebungsbasen definiert werden. Zeigen Sie außerdem, dass die auf R induzierte Topologie genau dann hausdorffsch ist, wenn $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Bemerkung: Die Komplettierung eines lokalen Ringes bezüglich seines maximalen Ideals entspricht dann genau der (topologischen) Komplettierung bezüglich dieser Topologie.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.6. (4 Punkte)

Betrachte die Kardioide

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

im Punkt $(2, 0)$. Bestimme eine formale Parametrisierung (bis zum fünften Term) der Kurve in diesem Punkt in Abhängigkeit von einem Tangentenparameter.

Aufgabe 25.7. (4 Punkte)

Betrachte den Einheitskreis $X^2 + Y^2 = 1$ im Punkt $(1, 0)$. Bestimme Potenzreihen G und $H \in K[[T]]$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und mit $G(T)^2 + H(T)^2 = 1$.

Aufgabe 25.8. (4 Punkte)

Betrachte die Neilsche Parabel $C = V(Y^3 - X^2)$ im Punkt $(1, 1)$. Finde eine Parametrisierung der Kurve in diesem Punkt mit Potenzeihen (bis zum fünften Glied) derart, dass eine Potenzreihe davon ein lineares Polynom ist.

Aufgabe 25.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* ist eine unendliche Summe der Form
$$F = \sum_{n=k}^{\infty} a_n T^n \text{ mit } a_n \in K \text{ und } k \in \mathbb{Z}\,.$$
Zeige, dass der Ring der formalen Laurentreihen (mit geeigneten Ringoperationen) isomorph zum Quotientenkörper des Potenzreihenringes $K[[T]]$ ist.

Aufgabe 25.10. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[T]$ der Polynomring in einer Variablen. Es sei R die Lokalisierung von $K[T]$ am maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (T)$. Zeige, dass die Komplettierung von R isomorph zum Potenzreihenring $K[[T]]$ ist.

Aufgabe 25.11. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der Potenzreihenring. Zeige, dass es in R keine Quadratwurzel für T gibt. Zeige ferner, dass für $K = \mathbb{Z}/(7)$ das Element $T + 2$ eine Quadratwurzel in R besitzt, und gebe die ersten fünf Koeffizienten von einer Quadratwurzel davon an.

Aufgabe 25.12. (5 Punkte)

Sei $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom und $R = K[X,Y]/(F)$ der integre Koordinatenring der ebenen Kurve $C = V(F)$. Es sei $R \to S = R^{\text{norm}}$ die Normalisierung von R und es sei $R \to K[[T]]$ der Ringhomomorphismus zu einer nichtkonstanten formalen Potenzreihenlösung der Kurve. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S \to K[[T]]$ gibt derart, dass das Diagramm
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr] & S \arrow[d] \\ & K[[T]] \end{tikzcd}$$
kommutiert.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 25.13. (4 Punkte)

Zeichne mittels eines geeigneten Programms eine der Beispielkurven der Vorlesung sowie die verschiedenen dort berechneten polynomialen Approximationen.