

## Invariantentheorie

### Vorlesung 31

#### Invariantenringe bei linear reduktiver Gruppe

Wir möchten zeigen, dass der Invariantenring zu einer algebraischen Operation einer linear reduktiven Gruppe ein direkter Summand ist, woraus folgt, dass er endlich erzeugt ist. Wir beginnen mit äquivalenten Charakterisierungen von linear reduktiv.

**SATZ 31.1.** *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $G$  eine affin-algebraische Gruppe über  $K$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $G$  ist linear reduktiv.
- (2) Zu jeder  $K$ -rationalen Darstellung auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  besitzt  $V^G \subseteq V$  ein eindeutig bestimmtes  $G$ -Komplement  $W \subseteq V$ . Dabei gilt  $(W^*)^G = 0$ .
- (3) Zu jeder  $K$ -rationalen Darstellung auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  und jedem  $v \in V^G$ ,  $v \neq 0$ , gibt es eine  $G$ -invariante Linearform  $f \in V^*$  mit  $f(v) \neq 0$ .
- (4) Zu jeder  $K$ -rationalen Darstellung auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  und jedem  $G$ -Untervektorraum  $U \subseteq V$  gibt es ein  $G$ -Komplement.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Es sei  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  die Zerlegung in irreduzible Darstellungen. Wegen der Irreduzibilität ist  $(V_i)^G = V_i \cap V^G$  gleich 0 oder gleich  $V_i$ , daher ist (nach Umordnung)  $V^G = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ . Die direkte Summe der verbleibenden irreduziblen Unterräume, also  $W = V_{s+1} \oplus \cdots \oplus V_r$  bilden ein  $G$ -invariantes Komplement. Wenn  $W'$  ein solches  $G$ -Komplement ist, so gilt wieder  $W' \cap V_i = V_i$  oder  $= 0$ . Bei  $W' \cap V_i = 0$  für ein  $i \geq s+1$  würde die Dimension von  $W'$  zu klein werden, also muss  $W' = W$  sein. Den Zusatz kann man für die an  $W$  beteiligten  $V_i$  getrennt beweisen. Es sei also

$$h: V_i \longrightarrow K$$

eine  $G$ -invariante Linearform. Bei  $\dim(V_i) \geq 2$  und  $h \neq 0$  wäre der Kern ein echter  $G$ -invarianter Untervektorraum im Widerspruch zur Irreduzibilität von  $V_i$ . Bei  $\dim(V_i) = 1$  und  $h \neq 0$  wäre  $h$  eine Bijektion, und dann müsste  $G$  auf  $V_i$  identisch wirken. (2)  $\Rightarrow$  (3). Wir betrachten die lineare Projektion

$$\pi: V \longrightarrow V^G$$

zur Zerlegung  $V = V^G \oplus W$  mit dem  $G$ -invarianten Komplement  $W$ . Dabei ist  $\pi(v) = v \neq 0$  und dazu gibt es eine Linearform  $h: V^G \rightarrow K$  mit  $h(v) \neq 0$ .

Die Linearform  $h \circ \pi$  ist  $G$ -verträglich und leistet das Gewünschte. (3)  $\Rightarrow$  (4). Sei zunächst  $U$  irreduzibel. Die Räume  $\text{Hom}_K(U, V)$  und  $\text{Hom}_K(V, U)$  sind dual zueinander, und zwar über die Beziehung

$$\text{Hom}_K(U, V) \times \text{Hom}_K(V, U) \longrightarrow K, (\varphi, \psi) \longmapsto \text{Spur}(\varphi \circ \psi).$$

Dabei ist  $\varphi \circ \psi$  ein Endomorphismus auf  $V$ . Wir fassen die Inklusion  $U \subseteq V$  als eine  $G$ -invariante lineare Abbildung, also als ein Element  $\varphi$  in  $\text{Hom}_K(U, V)^G$ , auf. Nach (3), angewendet auf dieses Element, muss es ein  $G$ -invariantes  $\psi \in \text{Hom}_K(V, U) \cong \text{Hom}_K(U, V)^*$  mit  $\psi(\varphi) \neq 0$  geben, was  $\text{Spur}(\varphi \circ \psi) = \text{Spur}(\psi \circ \varphi) \neq 0$  bedeutet. Die lineare Abbildung

$$\psi \circ \varphi: U \longrightarrow U$$

ist daher nicht die Nullabbildung, und sie ist  $G$ -invariant als Verknüpfung von zwei  $G$ -invarianten linearen Abbildungen. Nach Korollar 30.9 ist  $\psi \circ \varphi$  eine Streckung, die wir zur Identität normieren können. Somit ist  $\psi$  eine  $G$ -invariante Projektion auf  $U$  und daher ist

$$V = U \oplus \text{kern } \psi.$$

Im allgemeinen Fall führen wir Induktion über die Dimension von  $V$ . Es sei

$$0 \neq U' \subseteq U$$

ein  $G$ -invarianter irreduzibler Untervektorraum. Nach der Vorüberlegung ist  $V = U' \oplus V'$ , wobei  $V'$  ebenfalls  $G$ -invariant ist. Es ist dann

$$U = U' \oplus (U \cap V').$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist

$$V' = (U \cap V') \oplus W$$

mit einem  $G$ -invarianten Untervektorraum

$$W \subseteq V'$$

und daher ist

$$V = U' \oplus V' = U' \oplus (U \cap V') \oplus W = U \oplus W.$$

(4)  $\Rightarrow$  (1). Induktion über die Dimension von  $V$ . □

Wir wollen zeigen, dass der Invariantenring zu einer algebraischen Operation einer linear reductiven Gruppe auf einer  $K$ -Algebra von endlichem Typ ein direkter Summand ist, wobei wir Satz 31.1 auf geeignete endlichdimensionale  $G$ -Untervektorräume  $V$  anwenden wollen. Dazu müssen wir zunächst sicherstellen, dass jedes  $f \in R$  in einem endlichdimensionalen  $G$ -Untervektorraum  $V \subseteq R$  liegt. Es sei  $G = \text{Spek}(H)$  ein affines Gruppenschema zu einer endlich erzeugten  $K$ -Hopf-Algebra  $H$ . Die Operation von  $G$  auf  $X = \text{Spek}(R)$ , dem Spektrum einer endlich erzeugten  $K$ -Algebra, ist äquivalent zu einem Ringhomomorphismus (der Kooperation)

$$N: R \longrightarrow H \otimes_K R$$

(mit bestimmten Eigenschaften). Für ein  $f \in R$  kann man dabei

$$N(f) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i$$

mit  $a_i \in H$  und  $f_i \in R$  schreiben. Die Operation des  $K$ -Spektrums von  $H$  auf  $R$  ist folgendermaßen gegeben: Ein Gruppenelement  $\sigma \in K\text{-Spek}(R)$ , also ein  $K$ -Algebrahomomorphismus

$$\sigma: H \longrightarrow K$$

schickt eine Funktion  $f$  auf

$$f\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i) \otimes f_i.$$

Es wird also die Hintereinanderschaltung

$$R \xrightarrow{N} H \otimes_K R \xrightarrow{\sigma \otimes \text{Id}_R} K \otimes_K R \xrightarrow{\cong} R$$

betrachtet.

LEMMA 31.2. *Es sei  $K$  ein Körper,  $G$  ein affines Gruppenschema über  $K$  und*

$$\nu: G \times X \longrightarrow X$$

*eine  $K$ -algebraische Operation von  $G$  auf einem affinen Schema  $X = \text{Spek}(R)$ , wobei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra sei. Dann liegt jedes  $f \in R$  in einem endlichdimensionalen  $G(K)$ -invarianten  $K$ -Untervektorraum von  $R$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die zur Operation gehörige algebraische Situation, also den  $K$ -Algebrahomomorphismus

$$N: R \longrightarrow H \otimes_K R,$$

wobei  $H$  die Hopf-Algebra zu  $G$  sei. Es sei

$$N(f) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i$$

mit  $a_i \in H$  und  $f_i \in R$ . Für jedes  $\sigma \in G(K)$  ist

$$f\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i) \otimes f_i = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i) f_i,$$

d.h. diese liegen alle in dem von  $f_1, \dots, f_n$  erzeugten  $K$ -Untervektorraum von  $R$ . Der von all diesen  $f\sigma$ ,  $\sigma \in G(K)$ , erzeugte Untervektorraum ist also  $G(K)$ -invariant und endlichdimensional.  $\square$

SATZ 31.3. *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $G$  eine linear reductive Gruppe über  $K$ , die auf einer endlich erzeugten  $K$ -Algebra  $R$  algebraisch operiere. Dann ist  $R^G \subseteq R$  ein direkter Summand.*

*Beweis.* Es sei  $V \subseteq R$  ein endlichdimensionaler  $G$ -Untervektorraum. Nach Satz 31.1 (2) ist  $V = V^G \oplus W$  mit einem  $G$ -Komplement, das überdies eindeutig bestimmt ist und für welches  $(W^*)^G = 0$  gilt. Es ist sinnvoll, zuerst die Eindeutigkeit einer Reynolds-Abbildung nachzuweisen. Es sei

$$\Phi: R \longrightarrow R^G$$

eine Reynolds-Abbildung. Nach Lemma 31.2 gibt es zu jedem  $f \in R$  einen endlichdimensionalen  $G$ -Untervektorraum  $V \subseteq R$  mit  $f \in V$ . Wegen der  $G$ -Invarianz von  $\Phi$  ist  $\Phi(V) \subseteq V$  und die Einschränkung  $\Phi|_{V^G}$  ist die Identität auf  $V^G$ . Ferner ist  $\Phi(W) = 0$ . Bei  $u \in \Phi(W)$ ,  $u \neq 0$ , könnte man nämlich mit Hilfe einer  $K$ -linearen Abbildung

$$h: R^G \longrightarrow K$$

mit  $h(u) \neq 0$  eine Linearform  $\neq 0$  auf  $R$ , nämlich  $h \circ \Phi$ , angeben, die zu  $(W^*)^G$  gehört. Dadurch ist  $\Phi$  auf  $V$  eindeutig bestimmt und somit kann es maximal eine Reynolds-Abbildung geben. Zur Existenz. Wir wählen zu  $f \in R$  gemäß Lemma 31.2 einen endlichdimensionalen  $G$ -Untervektorraum  $V \subseteq R$  und setzen

$$\Phi(f) := \pi_V(f),$$

wobei

$$\pi_V: V \longrightarrow V^G$$

die Projektion von  $V$  auf  $V^G$  längs des  $G$ -Komplementes  $W$  von  $V^G$  in  $V$  bezeichnet. Dabei ist  $\Phi(f)$  unabhängig von der Wahl von  $V$ . Zu einem anderen  $V'$  ist nämlich  $\pi_{V'}|_{V \cap V'} = \pi_V|_{V \cap V'}$ . Um dies zu zeigen kann man  $V \subseteq V'$  annehmen. Aus  $V' = (V')^G \oplus W'$  ergibt sich durch Schneiden mit  $V$  sofort eine Zerlegung von  $V$ , die wegen der Eindeutigkeit mit  $V^G \oplus W$  übereinstimmen muss. Somit haben wir eine wohldefinierte  $K$ -lineare Abbildung

$$\Phi: R \longrightarrow R^G.$$

Zu  $f \in R^G$  ist natürlich  $f \in V^G$  (für einen gewählten Unterraum) und somit ist die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $R^G$  die Identität. Für ein Gruppenelement  $\sigma \in G$  und  $f \in R$  kann man  $\Phi(f\sigma)$  mit dem gleichen Untervektorraum  $V$  berechnen. Es sei  $f = (u, w)$  die Zerlegung von  $f$  in der direkten Zerlegung

$$V = V^G \oplus W.$$

Die Zerlegung von  $f\sigma$  hat dann die Form  $(u, w')$ , da ja die Zerlegung die Gruppenoperation respektiert und die Gruppe in der ersten Komponente identisch operiert. Somit ist

$$\Phi(f\sigma) = \pi_V(f\sigma) = u = \pi_V(f) = \Phi(f),$$

und  $\Phi$  ist in der Tat eine Reynolds-Abbildung. □

**SATZ 31.4.** *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $G$  eine linear reduktive Gruppe über  $K$ , die auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$   $K$ -rational operiere. Dann ist der Invariantenring  $K[V]^G$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 31.3 und aus Korollar 12.7 (die Homogenitätsvoraussetzung ist erfüllt).  $\square$

**SATZ 31.5.** *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $G$  eine linear reductive Gruppe über  $K$ , die auf einer endlich erzeugten  $K$ -Algebra  $R$   $K$ -algebraisch operiere. Dann ist der Invariantenring  $R^G$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra.*

*Beweis.* Es sei  $f_1, \dots, f_n$  ein  $K$ -Algebraerzeugendensystem von  $R$ . Nach Lemma 31.2 gibt es einen endlichdimensionalen  $K$ -Untervektorraum  $V \subseteq R$ , der  $G$ -invariant ist. Es sei  $K[V]$  der zum Vektorraum  $V$  gehörende Polynomring, auf dem  $G$  linear operiert. Es ist

$$p: K[V] \longrightarrow R$$

ein surjektiver  $K$ -Algebrahomomorphismus, der mit den Operationen von  $G$  verträglich ist. Zu einem invarianten Element  $f \in R^G$  gibt es ein  $h \in K[V]$ , das auf  $f$  abbildet. Wiederum nach Lemma 31.2 gibt es einen endlichdimensionalen  $G$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq K[V]$  mit  $h \in U$ . Dann ist  $f \in p(U)$  ebenfalls  $G$ -invariant und nach Aufgabe 31.5, angewandt auf

$$p|_U: U \longrightarrow p(U)$$

gibt es auch ein  $G$ -invariantes  $h' \in K[V]$ , das auf  $f$  abbildet. Es ist also

$$K[V]^G \longrightarrow R^G$$

ebenfalls surjektiv. Nach Satz 31.4 ist  $K[V]^G$  und somit  $R^G$  endlich erzeugt.  $\square$