

Invariantentheorie

Vorlesung 14

Funktorielle Eigenschaften des Spektrums

Das Spektrum ordnet nicht nur einem kommutativen Ring einen topologischen Raum zu, sondern auch einem Ringhomomorphismus eine stetige Abbildung zu.

PROPOSITION 14.1. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Zuordnung*

$$\varphi^*: \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R), \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}),$$

ist (wohldefiniert und) stetig.

(2) *Es ist $(\varphi^*)^{-1}(D(\mathfrak{a})) = D(\mathfrak{a}S)$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.*

(3) *Für einen weiteren Ringhomomorphismus*

$$\psi: S \longrightarrow T$$

gilt $(\psi \circ \varphi)^ = \varphi^* \circ \psi^*$.*

Beweis. Die Abbildung ist nach Aufgabe 14.1 wohldefiniert. Zur Stetigkeit ist die Aussage (2) zu zeigen. Wir argumentieren mit den abgeschlossenen Mengen. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(S)$ ist $\varphi^*(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist. Dies ist äquivalent zu $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}$ und ebenso zu $\mathfrak{a}S \subseteq \mathfrak{q}$. (3) ist klar. \square

Die in der vorstehenden Aussage eingeführte stetige Abbildung heißt *Spektrumsabbildung* (zu dem gegebenen Ringhomomorphismus). Bei einem Unterring $R \subseteq S$ geht es einfach um die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap R$. In diesem Fall spricht man auch von „Runterschneiden“. Vor der nächsten Aussage erinnern wir an einige topologische Eigenschaften von stetigen Abbildungen. Eine stetige Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen (offen)*, wenn Bilder von abgeschlossenen (offenen) Mengen wieder abgeschlossen (offen) sind. Unter einer Einbettung versteht man eine injektive Abbildung, bei der die eingebettete Menge homöomorph zur Bildmenge ist.

PROPOSITION 14.2. *Es sei R ein kommutativer Ring. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ und der Restklassenabbildung*

$$q: R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$$

ist die Spektrumsabbildung

$$q^*: \text{Spek}(R/\mathfrak{a}) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, deren Bild $V(\mathfrak{a})$ ist.

- (2) *Zu einem multiplikativen System $M \subseteq R$ ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota: R \longrightarrow R_M$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*: \text{Spek}(R_M) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

injektiv, und das Bild besteht aus der Menge der Primideale von R , die zu M disjunkt sind.

- (3) *Zu $f \in R$ ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota: R \longrightarrow R_f$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*: \text{Spek}(R_f) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

eine offene Einbettung, deren Bild gleich $D(f)$ ist.

Beweis. (1) folgt aus Aufgabe 10.10: Die Primideale in R/\mathfrak{a} entsprechen über $\mathfrak{p} \mapsto q^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ den Primidealen von R , die \mathfrak{a} enthalten. Die angegebene Abbildung ist also bijektiv und hat das beschriebene Bild. Zu einem Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R/\mathfrak{a}$ und einem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R/\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ genau dann, wenn

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{a} = q^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

gilt. Also ist das Bild von $V(\mathfrak{b})$ gleich $V(\mathfrak{b} + \mathfrak{a})$ und damit abgeschlossen. Für (2) siehe Aufgabe 14.2. (3). Da für ein Primideal \mathfrak{p} und ein Element $f \in R$ die Beziehung $f \notin \mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn \mathfrak{p} zum multiplikativen System $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunkt ist, folgt aus Teil (2), dass die Abbildung injektiv ist und dass ihr Bild gleich $D(f)$ ist. Das gleiche Argument, angewendet auf $g \in R$ bzw. $\frac{g}{1} \in R_f$ zeigt, dass das Bild von $D(g) \subseteq \text{Spek}(R_f)$ gleich $D(fg)$ und damit offen ist. \square

LEMMA 14.3. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*: \text{Spek}(S) \longrightarrow \text{Spek}(R), \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spek}(R)$ gleich $\text{Spek}((S/\mathfrak{q}S)_{\varphi(R \setminus \mathfrak{q})})$. D.h. die Faser besteht aus allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \text{Spek}(S)$ mit $\mathfrak{q}S \subseteq \mathfrak{p}$ und mit $\mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) = \emptyset$.

Beweis. Aufgrund von Proposition 14.2 müssen wir nur die zweite Formulierung beweisen. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq S$ gilt $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ genau dann, wenn sowohl $\varphi(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$ als auch $\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \subseteq S \setminus \mathfrak{p}$ gilt. Die erste Bedingung ist zu $\mathfrak{q}S \subseteq \mathfrak{p}$ und die zweite Bedingung ist zu

$$\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$$

äquivalent. □

Insbesondere ist die Faser eines Spektrumsmorphisms über einem Punkt selbst wieder das Spektrum eines Ringes. Wir werden später eine weitere Beschreibung der Faser mit Hilfe des Tensorprodukts kennenlernen. Ein Spezialfall der vorstehenden Aussage ist, dass die Faser über einem maximalen Ideal \mathfrak{m} gleich $\text{Spek}(S/\mathfrak{m}S)$ ist, da in diesem Fall aus $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{p}$ sofort $\mathfrak{m} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ folgt und wegen der Maximalität Gleichheit gelten muss. Bei einem Integritätsbereich R und dem Nullideal erübrigt es sich, das Erweiterungsideal zu betrachten, die Faser wird einfach durch $\text{Spek}(S_{\varphi(R \setminus \{0\})})$ beschrieben.

KOROLLAR 14.4. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*: \text{Spek}(S) \longrightarrow \text{Spek}(R), \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spek}(R)$ genau dann leer, wenn $\mathfrak{q}S \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \neq \emptyset$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 14.3 und Proposition 13.4 (6). □

BEISPIEL 14.5. Es sei K ein Körper und sei ein K -Algebrahomomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[Y_1, \dots, Y_m], X_i \longmapsto P_i,$$

gegeben. Nach Lemma 14.3 wird die Faser über einem maximalen Ideal der Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ durch $V(P_1 - a_1, \dots, P_n - a_n)$ beschrieben. Ein K -Punkt $(Y_1 - b_1, \dots, Y_m - b_m)$ gehört zu dieser abgeschlossenen Menge genau dann, wenn

$$P_i(b_1, \dots, b_m) = a_i$$

für $i = 1, \dots, n$ ist.

BEISPIEL 14.6. Die Faser zu

$$\text{Spek}(\mathbb{Z}[X]) \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{Z})$$

über einem Primideal (p) zu einer Primzahl p ist nach Lemma 14.3 und Proposition 14.2 (1) gleich

$$V(p\mathbb{Z}[X]) = \text{Spek}(\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X]) = \text{Spek}(\mathbb{Z}/(p)[X]).$$

Über dem Nullideal (0) ist die Faser gleich

$$\text{Spek}((\mathbb{Z}[X])_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}) = \text{Spek}(\mathbb{Q}[X]).$$

In jedem Fall ist also die Faser gleich $\text{Spek}(K[X])$, wenn K den Restekörper zum Primideal bezeichnet.

Die Spektrumsabbildung bei einer ganzen Erweiterung

Wir betrachten Besonderheiten der Spektrumsabbildung zu einer ganzen Erweiterung. Die folgende Aussage heißt die *going up*-Eigenschaft einer ganzen Erweiterung.

LEMMA 14.7. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein ganzer Ringhomomorphismus. Es seien $\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1$ Primideale in R und \mathfrak{p}_0 ein Primideal in S mit $\varphi^(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{q}_0$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_0$ in S mit $\varphi^*(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{q}_1$.*

Beweis. Wir betrachten die injektive Abbildung

$$R/\mathfrak{q}_0 \longrightarrow S/\mathfrak{p}_0,$$

die nach wie vor ganz ist. Wir können also annehmen, dass eine ganze Erweiterung $R \subseteq S$ von Integritätsbereichen vorliegt und müssen ein Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Spek}(S)$ finden, das auf ein vorgegebenes Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spek}(R)$ runterschneidet. Wir lokalisieren R an \mathfrak{q} und S an $R \setminus \mathfrak{q} \subseteq S$, wobei die induzierte Abbildung

$$R_{\mathfrak{q}} \longrightarrow S_{R \setminus \mathfrak{q}}$$

nach wie vor ganz ist. Wir können also annehmen, dass R ein lokaler Integritätsbereich ist und $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung. Wir suchen ein Primideal aus S , das auf das maximale Ideal \mathfrak{m} herunterschneidet. Nehmen wir an, dass die Faser über \mathfrak{m} leer ist. Dann ist nach Korollar 14.4 das Erweiterungsideal $\mathfrak{m}S$ gleich dem Einheitsideal. Dann gibt es Elemente $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ und $s_1, \dots, s_n \in S$ mit $s_1 f_1 + \dots + s_n f_n = 1$. Diese Gleichung gilt auch im Unterring $T = R[s_1, \dots, s_n] \subseteq S$. Die Erweiterung $R \subseteq T$ ist endlich erzeugt und ganz, also nach Satz 11.10 sogar endlich. Es ist $\mathfrak{m}T = T$ und damit $T/\mathfrak{m}T = 0$. Aus dem Lemma von Nakayama folgt daraus $T = 0$, ein Widerspruch. \square

Die folgende Aussage heißt die *lying over*-Eigenschaft einer injektiven ganzen Erweiterung.

LEMMA 14.8. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*: \text{Spek}(S) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

surjektiv.

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \in \text{Spek}(R)$ vorgegeben. Die induzierte Abbildung

$$R_{\mathfrak{q}} \longrightarrow S_{R \setminus \mathfrak{q}}$$

ist ebenfalls injektiv. Der Beweis zu Lemma 14.7 zeigt, dass es ein Primideal aus $S_{R \setminus \mathfrak{q}}$ gibt, das auf \mathfrak{q} runterschneidet. \square

SATZ 14.9. *Es seien R und S kommutative Ringe und es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*: \text{Spek}(S) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

abgeschlossen. Wenn φ zusätzlich injektiv ist, so ist φ^ surjektiv.*

Beweis. Wir zeigen für eine beliebige abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spek}(S)$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$, dass das Bild

$$\varphi^*(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$$

ist, also insbesondere wieder abgeschlossen ist. Dafür betrachten wir den induzierten Ringhomomorphismus

$$R/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}) \longrightarrow S/\mathfrak{a},$$

der ebenfalls ganz und zusätzlich injektiv ist. Daher ist

$$V(\mathfrak{a}) \cong \text{Spek}(S/\mathfrak{a}) \longrightarrow V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})) \cong \text{Spek}(R/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$$

nach Lemma 14.8 surjektiv. Also ist $\varphi^*(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$. Der Zusatz folgt ebenfalls aus Lemma 14.8. \square

LEMMA 14.10. *Es sei K ein Körper, A ein Integritätsbereich und $K \subseteq A$ eine ganze Erweiterung. Dann ist auch A ein Körper.*

Beweis. Es sei $a \in A$, $a \neq 0$. Wir betrachten eine Ganzheitsgleichung

$$a^n + r_{n-1}a^{n-1} + \dots + r_1a + r_0 = 0.$$

Wenn $r_0 = 0$ ist, so können wir a ausklammern und erhalten, da a ein Nichtnullteiler ist, eine Ganzheitsgleichung kleineren Grades. Wir können also annehmen, dass $r_0 \neq 0$ ist. Dann ist

$$a \cdot (a^{n-1} + r_{n-1}a^{n-2} + \dots + r_1) \cdot (-r_0^{-1}) = 1$$

und somit ist a eine Einheit. \square

LEMMA 14.11. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein ganzer Ringhomomorphismus. Es seien $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ Primideale in S mit $\varphi^(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\mathfrak{q})$. Dann ist $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. D.h. die Fasern sind nulldimensional.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{r} := \varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\mathfrak{q})$. Wir machen den Übergang

$$R \longrightarrow R_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}} = \kappa(\mathfrak{r})$$

und betrachten die induzierte Abbildung

$$\kappa(\mathfrak{r}) =: K \longrightarrow (S/\mathfrak{r}S)_{\varphi(R \setminus \mathfrak{r})} =: A,$$

die ebenfalls ganz ist. Nach Lemma 14.3 ist $\text{Spek}(A)$ die Faser von φ^* über \mathfrak{r} . Wir müssen also zeigen, dass das Spektrum einer über einem Körper K ganzen Algebra nulldimensional ist, es also keine Inklusionen von Primidealen gibt. Sei $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ eine Inklusion von Primidealen aus A . Wir gehen zu $K \rightarrow A/\mathfrak{p}$ über. Somit ist A/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich und eine ganze Erweiterung eines Körpers. Nach Lemma 14.10 ist A/\mathfrak{p} selbst ein Körper. Also ist

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}.$$

□

SATZ 14.12. *Es sei*

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist

$$\dim(S) = \dim(R).$$

Beweis. Zu einer Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ aus S ist die Kette $\varphi^*(\mathfrak{p}_0) \subset \varphi^*(\mathfrak{p}_1) \subset \dots \subset \varphi^*(\mathfrak{p}_n)$ nach Lemma 14.11 ebenfalls echt, so dass

$$\dim(S) \leq \dim(R)$$

ist. Zu einer Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_n$ aus R gibt es zunächst nach Lemma 14.8 ein Primideal \mathfrak{p}_0 aus S mit $\varphi^*(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{q}_0$. Nach Lemma 14.7 kann man dies sukzessive zu einer Kette $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ mit $\varphi^*(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{q}_i$ fortsetzen. Daher ist auch

$$\dim(S) \geq \dim(R).$$

□

SATZ 14.13. *Es sei*

$$R \longrightarrow S$$

ein endlicher Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen. Dann bestehen die Fasern der Spektrumsabbildung

$$\text{Spek}(S) \longrightarrow \text{Spek}(R)$$

aus endlich vielen Punkten.

Beweis. Siehe Aufgabe 14.16. □