

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

AUFGABE 9.1. Bestimme die freien Variablen in den folgenden Ausdrücken, wobei x, y, z Variablen seien und f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol sei.

- (1) $\forall x (fx = y)$,
- (2) $\forall x (fx = y) \wedge \exists z (fx = y)$,
- (3) $\forall x \exists y Rxfy$,
- (4) $(\forall x \exists y Rxfy) \rightarrow x = y$.

AUFGABE 9.2. Bestimme die kleinsten Symbolmengen, mit denen die folgenden Ausdrücke formulierbar sind.

- (1) $\exists y (fx = y)$,
- (2) $\forall x (fx = gyc) \wedge \exists z (Rzxy)$,
- (3) $\forall x \exists y Sxhuy$.

AUFGABE 9.3. Es sei $\alpha \in L_0^S$ ein Satz einer erststufigen Sprache über einem Symbolalphabet S . Es sei eine S -Struktur mit Trägermenge M gegeben und I_1 und I_2 zwei auf M definierte S -Interpretationen. Zeige $I_1 \models \alpha$ genau dann, wenn $I_2 \models \alpha$ gilt.

AUFGABE 9.4. Es seien c, d Konstanten einer erststufigen Sprache, x, y, z, v Variablen, f ein einstelliges und g, h zweistellige Funktionssymbole. Bestimme die Substitution

$$ghhxcdfz \frac{fx, \quad gxz, \quad hvfx}{x, \quad y, \quad z}.$$

AUFGABE 9.5. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien x_1, \dots, x_k paarweise verschiedene Variablen und t_1, \dots, t_k fixierte S -Terme.

- a) Interpretiere die Termsubstitution $\frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}$ als Abbildung.
 b) Interpretiere die Substitution von Ausdrücken $\frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}$ als Abbildung.

AUFGABE 9.6. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Zeige, dass die Substitution $\frac{x}{x}$ die Identität ist (und zwar für die Terme also auch für die Ausdrücke).

AUFGABE 9.7. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben, es sei x eine Variable und t ein fixierter S -Term. Gehört die Symbolkette (!) $\alpha \frac{t}{x}$ zu L^S ?

AUFGABE 9.8. Es sei c eine Konstante einer erststufigen Sprache, x, y, z, u Variablen, f ein einstelliges Funktionssymbol, g, h zweistellige Funktionssymbole und R ein zweistelliges Relationssymbol. Bestimme die Substitution

$$(\forall y Rxy \wedge \neg Ryz) \frac{fx, \quad gxz, \quad hcfx}{x, \quad y, \quad z}.$$

AUFGABE 9.9. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Man gebe ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}$ und einen S -Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke

$$\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \left(\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \left(\left(\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \dots$$

immer länger werden.

AUFGABE 9.10. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien x_1, \dots, x_k paarweise verschiedene Variablen und t_1, \dots, t_k fixierte S -Terme. Zeige, dass für jeden S -Satz $\alpha \in L_0^S$ die Gleichheit

$$\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} = \alpha$$

gilt.

AUFGABE 9.11. Es sei $\alpha \in L^S$. Zeige, dass die Gleichheit

$$\left(\alpha \frac{y}{x} \right) \frac{z}{y} = \alpha \frac{y, z}{x, y}$$

im Allgemeinen nicht gilt.

AUFGABE 9.12. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien x_1, \dots, x_k paarweise verschiedene Variablen und t_1, \dots, t_k fixierte S -Terme. Zeige, dass zu einem allgemeingültigen Ausdruck α auch die Substitution $\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}$ allgemeingültig ist. Gilt hiervon auch die Umkehrung?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 9.13. (5 Punkte)

Es seien u, x, y, z Variablen und f, g einstellige Funktionssymbole. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent sind.

a)

- (1) $\forall x \forall y ((fx = fy \rightarrow x = y) \wedge (gx = gy \rightarrow x = y))$,
- (2) $\forall x \forall y (fx = fy \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y (gx = gy \rightarrow x = y)$,
- (3) $\forall x \forall y \forall u \forall z ((fx = fy \rightarrow x = y) \wedge (gu = gz \rightarrow u = z))$.

b)

- (1) $\forall x \exists y (fy = x) \wedge \forall x \exists y (gy = x)$,
- (2) $\forall x \exists y (fy = x \wedge gy = x)$,
- (3) $\forall x \exists y \forall u \exists z (fy = x \wedge gz = u)$,
- (4) $\forall x \forall u \exists y \exists z (fy = x \wedge gz = u)$.

AUFGABE 9.14. (2 Punkte)

Es sei α ein S -Ausdruck. Zeige, dass es einen S -Ausdruck β der Form $\beta = \alpha \wedge \gamma$ derart gibt, dass

$$\text{Frei}(\beta) = \text{Var}(\alpha) = \text{Var}(\beta)$$

gilt.

AUFGABE 9.15. (3 Punkte)

Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent¹ sind.

- (1) $\forall x \exists y (fx = y)$,
- (2) $\forall x \exists x (fx = x)$,
- (3) $\exists x (fx = x)$.

¹Zwei Ausdrücke α und β heißen äquivalent, wenn $\alpha \leftrightarrow \beta$ allgemeingültig ist.

AUFGABE 9.16. (3 Punkte)

Man gebe für jedes $r \in \mathbb{N}_+$ ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}$ und einen S -Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke

$$\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \left(\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \left(\left(\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k}, \dots$$

eine Periode der Länge r besitzen.

AUFGABE 9.17. (3 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_\ell$ fixierte S -Terme. Zeige, dass für Terme τ , in denen y_1, \dots, y_ℓ nicht vorkommen, die Gleichheit

$$\left(\tau \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell} = \tau \frac{t_1 \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}, \dots, t_k \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}}{x_1, \dots, x_k}$$

gilt.

AUFGABE 9.18. (2 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_\ell$ fixierte S -Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Terme τ die Gleichheit

$$\left(\tau \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell} = \tau \frac{t_1 \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}, \dots, t_k \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}}{x_1, \dots, x_k}$$

nicht gelten muss.

AUFGABE 9.19. (4 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_\ell$ fixierte S -Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Ausdrücke α die Gleichheit (von Ausdrücken)

$$\left(\alpha \frac{t_1, \dots, t_k}{x_1, \dots, x_k} \right) \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell} = \alpha \frac{t_1 \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}, \dots, t_k \frac{s_1, \dots, s_\ell}{y_1, \dots, y_\ell}}{x_1, \dots, x_k}$$

nicht gelten muss.