Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige ausgehend von den Dedekind-Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

Aufgabe 12.2. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' \colon M \to M$ an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 12.3. Definiere auf der Menge der Wörter zum einelementigen Alphabet $A = \{|\}$ ein Dedekind-Peano-Modell. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.4. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Addition durch die Bedingungen

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.5. Zeige, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ und assoziativ ist und dass die Abziehregel (d.h., dass aus $n+k = m+k$ für ein k stets $n = m$ folgt) gilt.

Aufgabe 12.6. Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Multiplikation durch die Bedingungen

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.7. Zeige, dass in der arithmetischen Sprache erster Stufe mit den Konstanten $0, 1$, dem Nachfolgersymbol N und den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ nur abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ „adressierbar“ sind und dass daher das zweitstufige Induktionsaxiom der Dedekind-Peano-Axiome nicht in dieser Sprache formulierbar ist.

Aufgabe 12.8. Zeige, dass man für jede Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ die arithmetische Sprache erster Stufe um ein einstelliges Relationssymbol R_T und die erststufigen Peano-Axiome um geeignete Axiome ergänzen kann, derart, dass diese neue Axiomatik in der Standardinterpretation $\mathbb{N}$ genau dann gilt, wenn R_T als T interpretiert wird. Man folgere daraus, dass mit überabzählbar vielen Relationssymbolen alle Teilmengen der natürlichen Zahlen „adressierbar“ sind.

(Dies bedeutet aber weder, dass für jede Struktur einer solchen Axiomatik jede Teilmenge adressierbar ist, noch, dass das zweitstufige Induktionsaxiom, das eine Aussage über alle Teilmengen macht, erststufig formulierbar ist).

Aufgabe 12.9. Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$nRm \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen). Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$ ergibt und skizziere exemplarisch diese Ordnung.

Zeige ferner, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}$, $n^\star \neq n$, derart gibt, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren). Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Peano-Axiome?

Wir erinnern an die Definition eines algebraisch abgeschlossenen Körpers. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra), die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht.

Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nichtkonstante Polynom $F \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt.

Aufgabe 12.10. Definiere über der Symbolmenge $\{0, 1, +, \cdot\}$ einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit Hilfe eines Axiomenschemas.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (5 Punkte)

Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ das Ziffernalphabet. Definiere die Teilmenge $N \subseteq A^*$, die aus den korrekt gebildeten Zifferndarstellungen einer natürlichen Zahl besteht. Definiere auf N eine Nachfolgerabbildung und zeige, dass N zu einem Dedekind-Peano-Modell wird. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.12. (7 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 12.7 festgelegten Multiplikation. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2)
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. $1 = 0'$ ist das neutrale Element für die Multiplikation.

(3)
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Multiplikation ist kommutativ.

(5) Die Multiplikation ist assoziativ.

(6) Aus einer Gleichung $n \cdot k = m \cdot k$ mit $k \neq 0$ folgt $n = m$ (*Kürzungsregel*).

(7) Für beliebige $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(Distributivgesetz).

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Es sei $(N, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass das erststufige Axiomenschema für die Induktion in N gilt.