Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 53

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 53.1. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

Es sei

$$f\colon\ L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in L$ mit $d(x, x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Aufgabe 53.2. Es sei

$$f\colon\ L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 53.3. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 53.4. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, \text{ falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 53.5. Sei

$$f\colon\ I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t,P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Aufgabe 53.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 53.7. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \;=\; y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 53.8. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 53.9. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 53.10. (3 Punkte)

Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit $u(0) = a$ und $v(0) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 53.11. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (t, x, y, z) \mapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) \\ + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2). \end{aligned}$$

Aufgabe 53.12. (2 Punkte)

Bestimme in Beispiel 53.7 eine explizite Formel für die Iterationen φ_n.

Aufgabe 53.13. (4 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 53.14. (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.