Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 17

Tensorprodukt von Ringen

Wir betrachten jetzt die Situation, in der zwei kommutative R-Algebren vorliegen.

Lemma 17.1. *Es sei R ein kommutativer Ring und A, B seien kommutative R-Algebren. Dann ist das Tensorprodukt*

$$A \otimes_R B$$

eine kommutative R-Algebra und es gibt R-Algebrahomomorphismen

$$A \longrightarrow A \otimes_R B,\, a \longmapsto a \otimes 1,$$

und

$$B \longrightarrow A \otimes_R B,\, b \longmapsto 1 \otimes b.$$

Beweis. Die Multiplikationen auf A bzw. auf B führen zu R-linearen Abbildungen $\mu_A\colon\ A \otimes_R A \to A$ und $\mu_B\colon\ B \otimes_R B \to B$. Dies ergibt eine R-bilineare Abbildung

$$(A \otimes_R A) \times (B \otimes_R B) \longrightarrow A \otimes_R B$$

und damit zu einer R-linearen Abbildung

$$\mu\colon\ (A \otimes_R A) \otimes_R (B \otimes_R B) \longrightarrow A \otimes_R B.$$

Aufgrund der Kommutativität des Tensorprodukts können wir dies als eine R-lineare Abbildung

$$\mu\colon\ (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) \longrightarrow A \otimes_R B$$

auffassen, wodurch eine Multiplikation auf $A \otimes_R B$ definiert wird. Diese Multiplikation wird auf den zerlegbaren Tensoren explizit durch

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \,=\, a_1a_2 \otimes b_1b_2$$

und allgemein durch

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j \otimes d_j \right) \,=\, \sum_{i,j} a_ic_j \otimes b_ib_j$$

gegeben. Die bisherige Überlegung sichert, dass dies wohldefiniert ist. Der Nachweis, dass durch diese Multiplikation das Tensorprodukt zu einem kommutativen Ring wird, erfolgt über diese explizite Beschreibung, wobei man sich auf die zerlegbaren Elementen beschränken kann. Dass Ringhomomorphismen vorliegen ergibt sich ebenfalls aus der expliziten Beschreibung. □

Beispiel 17.2. Zu einem kommutativen Ring R und den Polynomringen $A = R[X_1, \ldots, X_m]$ und $B = R[Y_1, \ldots, Y_n]$ ist

$$A \otimes_R B \;=\; R[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n].$$

Die Vorgabe $X_i \mapsto X_i \otimes 1$ und $Y_j \mapsto 1 \otimes Y_j$ definiert den Einsetzungshomomorphismus

$$R[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n] \longrightarrow A \otimes_R B.$$

Die Zuordnung

$$A \times B \longrightarrow R[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n],\ (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

ist R-bilinear und definiert nach Lemma 16.3 (2) einen R-Modulhomomorphismus

$$A \otimes_R B \longrightarrow R[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n].$$

Beide Abbildungen sind invers zueinander.

Beispiel 17.3. Zu einem kommutativen Ring R und endlich erzeugten R-Algebren $A = R[X_1, \ldots, X_m]/\mathfrak{a}$ und $B = R[Y_1, \ldots, Y_n]/\mathfrak{b}$ ist

$$A \otimes_R B \;=\; R[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Dies wird ählich wie die Isomorphie in Beispiel 17.2 begründet.

Beispiel 17.4. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Zu einem Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ ist die Faser zu φ^* über $\mathfrak{p}$ gleich $\operatorname{Spek}(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R S)$. Dies folgt aus

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R S \;=\; R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \otimes_R S \;\cong\; (S/\mathfrak{p})_{\varphi(R \setminus \mathfrak{p})}$$

(nach Proposition 16.9) und der Beschreibung der Faser in Lemma 14.3.

Satz 17.5. *Es sei R ein kommutativer Ring und A, B, S seien kommutative R-Algebren. Dann ist*

$$\operatorname{Hom}_R^{\text{alg}}(A \otimes_R B, S) \;=\; \operatorname{Hom}_R^{\text{alg}}(A, S) \times \operatorname{Hom}_R^{\text{alg}}(B, S)\,.$$

Beweis. Über die natürlichen R-Algebrahomomorphismen (siehe Lemma 17.1)

$$A \longrightarrow A \otimes_R B,\ a \longmapsto a \otimes 1,$$

und

$$B \longrightarrow A \otimes_R B,\ b \longmapsto 1 \otimes b,$$

erhält man eine Abbildung von links nach rechts. Da die $a \otimes 1$ und $1 \otimes b$ ein R-Algebraerzeugendensystem von $A \otimes_R B$ bilden, ist darauf ein R-Algebrahomomorphismus nach S festgelegt. Es kann also zu

$$(\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}_R^{\text{alg}}(A, S) \times \operatorname{Hom}_R^{\text{alg}}(B, S)$$

maximal einen Homomorphismus links geben, der darauf abbildet. Die Abbildung ist also injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei (φ, ψ) gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$A \times B \longrightarrow S,\ (a, b) \longmapsto \varphi(a)\psi(b).$$

Diese Abbildung ist offenbar R-bilinear, daher gibt es dazu nach Lemma 16.3 einen R-Modulhomomorphismus

$$\theta\colon\ A \otimes_R B \longrightarrow S.$$

Dieser ist wegen

$$\begin{aligned}
\theta(a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2) &= \theta(a_1a_2 \otimes b_1b_2)\\
&= \varphi(a_1a_2) \cdot \psi(b_1b_2)\\
&= \varphi(a_1)\varphi(a_2)\psi(b_1)\psi(b_2)\\
&= \theta(a_1 \otimes b_1) \cdot \theta(a_2 \otimes b_2)
\end{aligned}$$

auch mit der Multiplikation verträglich. $\square$

Bei $Z = \operatorname{Spek}(R)$, $X = \operatorname{Spek}(A)$ und $Y = \operatorname{Spek}(B)$ schreibt man auch

$$X \times_Z Y\ =\ \operatorname{Spek}(A \otimes_R B)$$

(manchmal auch $X \times_R Y$) und nennt dies das *Produkt der affinen Schemata* X und Y (über Z). Der obige Satz übersetzt sich zur folgenden universellen Eigenschaft dieses Produkts: Zu einem affinen Schemamorphismus (also einer Spektrumsabbildung)

$$\psi\colon\ T = \operatorname{Spek}(C) \longrightarrow Z = \operatorname{Spek}(R)$$

und zwei Morphismen $\varphi_1\colon\ T \to X$ und $\varphi_2\colon\ T \to Y$ über ψ gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$\varphi\colon\ T \longrightarrow X \times_Z Y,$$

der mit allen vorgegebenen Morphismen kommutiert. Wenn $Z = \operatorname{Spek}(K)$ das Spektrum eines Körpers ist, so bedeutet dies für die K-wertigen Punkte insbesondere

$$(X \times_Z Y)(K)\ =\ X(K) \times Y(K).$$

Hopf-Algebren und affine Gruppenschemata

Wir haben zu einer Operation einer Gruppe G auf einem kommutativen Ring R eine geometrische Interpretation gefunden, nämlich die Operation der Gruppe auf dem Spektrum von R. Der Ring bildet zusammen mit seinem Spektrum eine algebraisch-geometrische Einheit, und die Gruppenwirkung hat algebraische und geometrische Eigenschaften, die eng miteinander verflochten sind. Die Gruppenoperation können wir als einen Gruppenhomomorphismus in die Automorphismengruppe des Ringes oder des affinen Schemas auffassen. Wir haben aber bisher noch keine Sprache dafür, ob die Operation als Ganzes algebraisch-geometrisch ist, und wir haben noch nicht geklärt, ob wir die operierende Gruppe eher als ein algebraisches oder als ein geometrisches Objekt ansehen wollen.

Zum ersten Problemkreis betrachten wir einerseits die multiplikative Gruppe $(K^\times, 1, \cdot)$ und andererseits die additive Gruppe $(K, 0, +)$ zu einem Körper K. Die typischen Operationen dieser beiden Gruppen haben ziemlich verschiedene Eigenschaften. Die multiplikativen Operationen sind „diagonalisierbar" und eng mit den Graduierungen (siehe Satz 7.10) verbunden, die Invariantenringe sind daher recht einfach zu berechnen und sind insbesondere direkte Summanden. Letzteres muss für die additive Gruppe nicht gelten, wie Beispiel 6.9 (vergleiche auch Beispiel 15.9) zeigt. Dieser Unterschied ist aber bisher lediglich eine Beobachtung, da wir nur einige Beispiele von Operationen dieser Gruppen betrachtet, aber noch nicht fixiert haben, auf welche Art diese Gruppen operieren sollen.

Beispiel 17.6. Die Exponentialfunktion ist bekanntlich ein Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, 1, \cdot) \subset \mathbb{R}^\times,\ t \longmapsto e^t,$$

mit dem natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion. Daher kann man jede Gruppenoperation der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf einer beliebigen Menge auch als eine Operation der positiven multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_+$ ansehen und umgekehrt. Sämtliche operationstheoretischen Konzepte wie Bahn, Isotropiegruppe, Invariantenring stimmen dabei überein. Beispielsweise kann man die skalare Multiplikation von $\mathbb{R}^\times$ auf dem $\mathbb{R}^n$ als die Operation

$$(\mathbb{R}, 0, +) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (e^t x_1, \ldots, e^t x_n),$$

auffassen. Diese Operation kann man nur unter Verwendung einer transzendenten Funktion hinschreiben. Wenn man nur „algebraische Operationen" zulassen möchte, so sind die multiplikative und die additive Gruppe nicht isomorph, und sie besitzen sehr unterschiedliche Operationen.

Die Gruppenaxiome kann man durch die folgenden kommutativen Diagramme ausdrücken. Dabei sei G die Gruppe, μ die Multiplikation, e das neutrale Element und inv die Inversenabbildung.

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \stackrel{\mu \times \mathrm{Id}_G}{\longrightarrow} & G \times G \\ \mathrm{Id}_G \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\mathrm{Id} \times e}{\longrightarrow} & G \times G \\ & \mathrm{Id}_G \searrow & \downarrow \mu \\ & & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\mathrm{inv} \times \mathrm{Id}_G}{\longrightarrow} & G \times G \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ \{e\} & \longrightarrow & G \end{array}$$

Die duale Formulierung dieser Diagramme führt zum Begriff der *Hopf-Algebra.*

DEFINITION 17.7. Es sei K ein kommutativer Ring.[1] Eine kommutative K-Algebra H heißt *Hopf-Algebra*, wenn es fixierte K-Algebrahomomorphismen (genannt *Komultiplikation*, *Koeinheit* und *Koinverses*)

$$\Delta\colon H \longrightarrow H \otimes_K H,$$

$$\epsilon\colon H \longrightarrow K$$

und

$$S\colon H \longrightarrow H$$

gibt, derart, dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{\Delta}{\longrightarrow} & H \otimes_K H \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id}_H \otimes \Delta \\ H \otimes_K H & \stackrel{\Delta \otimes \mathrm{Id}_H}{\longrightarrow} & H \otimes_K H \otimes_K H \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{\Delta}{\longrightarrow} & H \otimes_K H \\ & \cong \searrow & \downarrow \epsilon \otimes \mathrm{Id}_H \\ & & K \otimes_K H \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{\Delta}{\longrightarrow} & H \otimes_K H \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id}_H \cdot S \\ K & \longrightarrow & H \end{array}$$

kommutieren.

BEISPIEL 17.8. Es sei $(G, 1, \cdot)$ eine endliche Gruppe und K ein kommutativer Ring. Wir setzen

$$H := \operatorname{Abb}(G, K)$$

mit der Addition und Multiplikation von Abbildungen, die unabhängig von G sind. Wir definieren auf H eine Hopf-Algebra-Struktur unter Verwendung der Gruppenstruktur. Die Gruppenmultiplikation

$$\mu\colon G \times G \longrightarrow G$$

führt zur Abbildung

$$\operatorname{Abb}(G, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(G, K) \otimes \operatorname{Abb}(G, K) \cong \operatorname{Abb}(G \times G, K),\ f \longmapsto f \circ \mu,$$

wodurch wir die Komultiplikation

$$\Delta\colon H \longrightarrow H \otimes_K H$$

[1] Wir schreiben hier K für den kommutativen Grundring; die Schlagkraft des Konzeptes zeigt sich bereits vollständig im Fall, dass K ein Körper ist, so dass man sich unter K gerne einen Körper vorstellen kann.

festlegen. Das Basiselement e_σ zu $\sigma \in G$ wird dabei auf

$$\sum_{\tau \cdot \rho = \sigma} e_\tau \otimes e_\rho \, = \, \sum_\tau e_\tau \otimes e_{\tau^{-1} \cdot \sigma}$$

abgebildet. Das neutrale Element $1 \in G$ induziert die Auswertungsabbildung

$$\epsilon\colon\ H = \text{Abb}\,(G,K) \longrightarrow K,\ f \longmapsto f(1),$$

und die Inversenbildung

$$\text{inv}\colon\ G \longrightarrow G,\ \sigma \longmapsto \sigma^{-1},$$

führt zu

$$S\colon\ \text{Abb}\,(G,K) \longrightarrow \text{Abb}\,(G,K)\,,\ f \longmapsto f \circ \text{inv},$$

wobei das Basiselement e_σ auf $e_{\sigma^{-1}}$ abgebildet wird. Die Abbildungen Δ, ϵ, S sind offenbar K-Algebrahomomorphismen. Die Gruppenaxiome kann man durch die Kommutativität geeigneter Diagramme ausdrücken. Wendet man auf diese den Funktor Abb $(-,K)$ in Zusammenhang mit geeigneten Identifizierungen an, so erhält man die Kommutativität der Diagramme in der Definition einer Hopf-Algebra.

Beispiel 17.9. Es sei K ein kommutativer Ring. Auf dem Polynomring $K[X]$ kann man folgendermaßen eine Hopf-Struktur erklären. Die Komultiplikation wird durch

$$\Delta\colon\ K[X] \longrightarrow K[X] \otimes_K K[X] \cong K[X,Y],\ X \longmapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X = X + Y,$$

erklärt. Die Koeinheit wird durch

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto 0,$$

festgelegt und das Koinverse ist durch

$$K[X] \longrightarrow K[X],\ X \longmapsto -X,$$

definiert. Nach Aufgabe 17.14 ist dies in der Tat eine Hopf-Algebra, die man die *Hopf-Algebra der additiven Gruppe* nennt.

Beispiel 17.10. Es sei K ein kommutativer Ring. Auf $K[X,X^{-1}] \cong K[X]_X$ kann man folgendermaßen eine Hopf-Struktur erklären. Die Komultiplikation wird durch

$$\begin{aligned} \Delta : K[X,X^{-1}] \longrightarrow K[X,X^{-1}] \otimes_K K[X,X^{-1}] \cong K[X,X^{-1},Y,Y^{-1}], \\ X \longmapsto X \otimes 1 \cdot 1 \otimes X = X \cdot Y, \end{aligned}$$

erklärt. Die Koeinheit wird durch

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto 1,$$

festgelegt und das Koinverse ist durch

$$K[X,X^{-1}] \longrightarrow K[X,X^{-1}],\ X \longmapsto X^{-1},$$

definiert. Nach Aufgabe 17.17 ist dies in der Tat eine Hopf-Algebra, die man die *Hopf-Algebra der multiplikativen Gruppe* nennt.

Beispiel 17.11. Es sei $(D, 0, +)$ eine kommutative Gruppe, K ein kommutativer Ring und $K[D]$ der zugehörige Gruppenring, also

$$K[D] = \bigoplus_{d \in D} K X^d .$$

Darauf lässt sich die Struktur einer Hopf-Algebra erklären, indem man die Komultiplikation als

$$\Delta\colon\ K[D] \longrightarrow K[D] \otimes_K K[D],\ X^d \longmapsto X^d \otimes X^d ,$$

die Koeinheit als

$$\epsilon\colon\ K[D] \longrightarrow K,\ X^d \longmapsto X^0 = 1,$$

und das Koinverse als

$$S\colon\ K[D] \longrightarrow K[D],\ X^d \longmapsto X^{-d},$$

ansetzt. Diese K-Algebrahomomorphismen gehören zu den Gruppenhomomorphismen $D \to D \times D$, $d \mapsto (d, d)$, $D \to 0$ und $D \to D$, $d \mapsto -d$, im Sinne von Korollar 8.6.

Die Konstruktion in Beispiel 17.10 ist ein Spezialfall der Hopf-Algebrastruktur auf einem Gruppenring, nämlich für $D = \mathbb{Z}$.