Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 18

In den drei folgenden Aufgaben wird der Begriff des primitiven Polynoms verwendet:

Ein Polynom $F \in \mathbb{Z}[X]$ heißt primitiv, wenn die Koeffizienten von F teilerfremd sind.

Aufgabe 1. (1 Punkt)

Sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass man F schreiben kann als $F = n\tilde{F}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und primitivem $\tilde{F}$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Seien $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ primitive Polynome. Zeige, dass dann auch das Produkt FG primitiv ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist F, aufgefasst als Polynom in $\mathbb{Q}[X]$, ebenfalls irreduzibel.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R\ .$$

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Bestimme die Primideale in R, die über den Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7$ liegen.

Aufgabe 6. (3+ Punkte)

Sei p eine Primzahl und betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - p)$$

vom Grad 3. Sei $f = aX^2 + bX + c \in L$ ein Element davon mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Berechne das Minimalpolynom von f und gebe die Koeffizienten davon explizit an. Bestimme insbesondere die Norm und die Spur von f.

Welche Bedingungen an a, b, c ergeben sich aus der Voraussetzung, dass f ganz über $\mathbb{Z}$ ist?

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei R ein Dedekindbereich und seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ verschiedene Primideale $\neq 0$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$R/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \longrightarrow R/\mathfrak{p} \times R/\mathfrak{q} \ .$$

Die folgende Aufgabe benutzt das Produkt von Idealen.

Zu zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in einem kommutativen Ring wird das Produkt definiert durch

$$\mathfrak{ab} = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k\} \text{ mit } a_i \in \mathfrak{a},\ b_i \in \mathfrak{b}.$$

Das ist das Ideal, das von allen Produkten ab ($a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$) erzeugt wird.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei R ein Dedekindbereich und seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei verschiedene Primideale. Dann ist

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \ .$$

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Gebe ein Beispiel für einen Dedekindbereich, wo jeder Restklassenring $\neq 0$ unendlich ist, und für einen Dedekindbereich, der einen Körper enthält und wo alle echten Restklassenringe endlich sind.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Zeige: Ein kommutativer Ring R ist noethersch genau dann, wenn es in R keine unendliche echt aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \ldots$$

gibt.