

## Vorlesung 27

### Der projektive Raum

**Definition 1.** Sei  $K$  ein Körper. Der *projektive  $n$ -dimensionale Raum*  $\mathbb{P}_K^n$  besteht aus allen Geraden des  $\mathbb{A}_K^{n+1}$  durch den Nullpunkt, wobei diese Geraden als Punkte aufgefasst werden. Ein solcher Punkt wird repräsentiert durch *homogene Koordinaten*  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , wobei nicht alle  $a_i = 0$  sein dürfen, und wobei zwei solche Koordinatentupel genau dann den gleichen Punkt repräsentieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in K^\times$  ineinander übergehen.

Wir werden den projektiven Raum zunehmend mit mehr Strukturen versehen.

**Satz 2.** Sei  $K$  ein Körper und  $\mathbb{P}_K^n$  ein projektiver Raum. Sei  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  fixiert. Dann gibt es eine natürliche Abbildung

$$\varphi_i : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n, (u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

Diese Abbildung ist injektiv und induziert eine Bijektion zu denjenigen Punkten des projektiven Raumes, bei denen die  $i$ -te homogene Koordinate nicht null ist. Die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_K^n \supset D_+(X_i) &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Der projektive Raum wird überdeckt von diesen  $n + 1$  affinen Räumen. Das Komplement eines solchen affinen Raumes  $\mathbb{A}_K^n \cong D_+(X_i) \subset \mathbb{P}_K^n$  ist ein  $(n - 1)$ -dimensionaler projektiver Raum.

*Beweis.* Die Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert, da die 1 sicher stellt, dass mindestens eine homogene Koordinate nicht null ist. Die Abbildung ist injektiv, da aus einer Gleichung der Form (für homogene Koordinaten)

$$(u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n) = \lambda(v_1, \dots, v_i, 1, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

sofort  $\lambda = 1$  folgt wegen der 1. Die Umkehrabbildung ist auf der angegebenen Teilmenge wohldefiniert, und ist invers zu der Abbildung. Die Überdeckungseigenschaft ist klar, da für jeden Punkt des projektiven Raumes mindestens eine homogene Koordinate nicht null ist. Das Komplement zu  $D_+(X_i)$  ist

$$V_+(X_i) = \{(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_j \in K\}$$

mit keinerlei Einschränkung an die übrigen  $n$  Variablen und mit der Identifizierung von zwei solchen Tupeln, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander übergehen.  $\square$

**Beispiel 3.** (Die projektive Gerade) Die projektive Gerade  $\mathbb{P}_K^1$  ist gegeben als die Menge der Geraden durch den Nullpunkt in der affinen Ebene  $\mathbb{A}_K^2$ . Eine solche Gerade ist entweder die  $x$ -Achse oder aber eine Gerade, die die Gerade  $V(y-1)$  (also die zur  $x$ -Achse parallele Gerade durch  $(0, 1)$ ) in genau einem Punkt schneidet. Umgekehrt liefert jeder Punkt  $P \in V(y-1) \cong \mathbb{A}_K^1$  eine eindeutig bestimmte Gerade durch den Nullpunkt. D.h. die projektive Gerade besteht aus einer affinen Gerade und einem weiteren Punkt, den man den „unendlich fernen“ Punkt nennt. Wichtig ist dabei aber, dass dieser unendlich ferne Punkt nicht wesensverschieden von den anderen Punkten ist. Wenn man eine beliebige Gerade  $G$  durch den Nullpunkt nimmt sowie eine dazu parallele Gerade  $L \neq G$ , so übernimmt  $L$  die Rolle der affinen Geraden, und  $G$  repräsentiert dann einen (von dieser affinen Geraden aus gesehen) unendlich fernen Punkt.

**Beispiel 4.** (Die projektive Ebene) Die Punkte in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_K^2$  entsprechen den Geraden durch den Nullpunkt im affinen Raum  $\mathbb{A}_K^3$ . Jeder Punkt der projektiven Ebene wird repräsentiert durch ein Tupel  $(x, y, z)$ , wobei nicht alle  $x, y, z$  gleichzeitig null sein dürfen und wobei zwei Koordinatentupel identifiziert werden, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$  ineinander überführt werden können. Die projektive Ebene wird überdeckt durch drei affine Ebenen, nämlich

$$D_+(X), D_+(Y) \text{ und } D_+(Z).$$

Dabei besteht  $D_+(Z)$  aus allen Punkte wo die dritte Koordinate nicht null ist. Durch Multiplikation mit  $z^{-1}$  kann man diese Punkte identifizieren mit

$$(x/z, y/z, z/z) = (u, v, 1),$$

so dass wirklich eine affine Ebene vorliegt. Das Komplement der affinen Ebene  $D_+(Z)$  ist die Menge  $V_+(Z)$  der Punkte, wo die dritte Komponente null ist. Da man nach wie vor Punkte identifiziert, die durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander überführbar sind, ist  $V_+(Z)$  eine projektive Gerade. Ein Punkt  $(x, y, 0)$  auf dieser Geraden und der Nullpunkt  $(0, 0, 1)$  von  $D_+(Z)$  definieren die Gerade durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor  $(x, y)$  (und der homogenen Geradengleichung  $yX - xY = 0$  bzw.  $V_+(yX - xY)$ .) Man kann sich also die projektive Ebene gut vorstellen als eine affine Ebene, in der jede Gerade durch den Nullpunkt noch einen zusätzlichen („unendlich fernen“) Punkt definiert.

### Nullstellen von homogenen Polynomen

Für ein beliebiges Polynom  $F \in K[X_0, \dots, X_n]$  macht es keinen Sinn zu sagen, ob ein Punkt  $P \in \mathbb{P}_K^n$  eine Nullstelle davon ist, da diese Eigenschaft nicht invariant unter der Multiplikation mit einem Skalar ist und daher vom Repräsentanten von  $P$  abhängt. Für homogene Polynome sieht das anders aus.

**Lemma 5.** Sei  $K$  ein Körper und sei  $F \in K[X_0, \dots, X_n]$  ein homogenes Polynom vom Grad  $d$ . Dann gilt für einen Punkt  $(x_0, \dots, x_n)$  und einen Skalar  $\lambda, \lambda \neq 0$ , die Beziehung

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

Insbesondere verschwindet  $F$  an  $P \in \mathbb{P}_K^n$  genau dann, wenn  $F$  an  $\lambda P \in \mathbb{P}_K^n$  verschwindet.

*Beweis.* Dies kann man auf den Fall eines Monoms vom Grad  $d$  zurückführen. Für  $X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}$  mit  $\sum_{i=0}^n d_i = d$  und  $\lambda \in K$  gilt

$$(\lambda X_0)^{d_0} \cdots (\lambda X_n)^{d_n} = (\lambda^{d_0} X_0^{d_0}) \cdots (\lambda^{d_n} X_n^{d_n}) = \lambda^d (X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}).$$

□

Man beachte, dass es durch diese Aussage zwar wohldefiniert ist, ob ein homogenes Polynom an einem projektiven Punkt verschwindet oder nicht, dass es aber keinen Sinn macht, einem homogenen Polynom einen Wert an jedem Punkt des projektiven Raumes zuzuordnen. Ein homogenes Polynom definiert keine Funktion auf dem projektiven Raum.

**Definition 6.** Sei  $K$  ein Körper. Zu einem homogenen Polynom  $F$  bezeichnet man die Menge

$$V_+(F) = \{P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_K^n : F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

als die *projektive Nullstellenmenge* zu  $F$ .

**Definition 7.** Sei  $K$  ein Körper und  $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$  ein Ideal. Das Ideal heißt *homogen*, wenn für jedes  $H \in \mathfrak{a}$  mit homogener Zerlegung  $H = \sum_i H_i$  auch  $H_i \in \mathfrak{a}$  ist für alle homogenen Bestandteile  $H_i$ .

**Definition 8.** Zu einem homogenen Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, \dots, X_n]$  nennt man

$$V_+(\mathfrak{a}) = \{P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_K^n : F(P) = 0 \text{ für alle homogenen } F \in \mathfrak{a}\}$$

das *projektive Nullstellengebilde* oder die *projektive Varietät* zu  $\mathfrak{a}$ .

**Definition 9.** Der projektive Raum  $\mathbb{P}_K^n$  wird mit der *Zariski-Topologie* versehen, bei der die Mengen  $V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_K^n$  zu einem homogenen Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  als abgeschlossen erklärt werden.

Die offenen Mengen des projektiven Raumes sind demnach die Mengen der Form  $D_+(\mathfrak{a})$  mit einem homogenen Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, \dots, X_n]$ . Dabei sind die offenen Mengen  $D_+(X_i)$  isomorph zu einem affinen Raum der Dimension  $n$ .

**Bemerkung 10.** Ein Punkt  $P = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$  ist abgeschlossen, und zwar ist  $P = V_+(\mathfrak{a})$  mit

$$\mathfrak{a} = (a_i X_j - a_j X_i : 0 \leq i, j \leq n).$$

Wenn  $a_0 \neq 0$  ist, so kann man dies auch schreiben als  $(X_j - \frac{a_j}{a_0} X_0 : j \neq 0)$ . Die Erzeuger  $a_i X_j - a_j X_i, i \neq 0$ , sind dann überflüssig. Dies ist offenbar ein

homogenes Ideal, und  $P$  liegt in  $V_+(\mathfrak{a})$ . Sei  $a_0 \neq 0$  angenommen. Für einen weiteren Punkt  $Q = (b_0, \dots, b_n) \in V_+(\mathfrak{a})$  folgt sofort  $b_j - \frac{a_j}{a_0} b_0 = 0$  bzw.

$$(b_0, \dots, b_n) = \frac{b_0}{a_0} (a_0, \dots, a_n),$$

so dass es sich projektiv um den gleichen Punkt handelt.

Das Ideal  $\mathfrak{a}$  ist kein maximales Ideal, es ist aber maximal unter allen homogenen Idealen, die von  $(X_0, \dots, X_n)$  verschieden sind. Der Restklassenring  $K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$  ist ein Polynomring in einer Variablen.

### Der projektive Raum über $\mathbb{C}$

Wir wollen uns ein Bild über die projektiven Räume für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  machen. Die (reell)  $n$ -dimensionale Sphäre ist

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

Dabei ist  $\|x\| = \sqrt{x_0^2 + \dots + x_n^2}$  die *euklidische Norm*.

**Satz 11.** *Man kann den reell-projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  repräsentieren durch die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  modulo der Äquivalenzrelation, die antipodale Punkte miteinander identifiziert.*

*Den komplex-projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  kann man repräsentieren durch die  $(2n+1)$ -dimensionale Sphäre  $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$  modulo der Äquivalenzrelation, die zwei Punkte  $z, w \in S^{2n+1}$  miteinander identifiziert, wenn man  $z = \lambda w$  mit einem  $\lambda \in S^1$  schreiben kann.*

*Beweis.* Wir behandeln die beiden Fälle parallel. Jeder Punkt der Sphäre  $S$  definiert eine (reelle oder komplexe) Gerade durch den Nullpunkt im umliegenden Raum  $\mathbb{R}^{n+1}$  oder  $\mathbb{C}^{n+1}$  und damit einen Punkt im projektiven Raum. Zwei Punkte  $z, w \in S$  definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn es einen Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  gibt mit  $z = \lambda w$ . Wegen der Multiplikativität der Norm ist dann auch  $\|z\| = |\lambda| \cdot \|w\|$ , woraus sich wegen  $z, w \in S$  sofort  $|\lambda| = 1$  ergibt. Dies bedeutet im reellen Fall  $\lambda = \pm 1$  und im komplexen Fall, dass  $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$  ist, also zum Einheitskreis gehört.  $\square$

Wir haben insgesamt Abbildungen

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$$

(im reellen Fall) bzw.

$$S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

(im komplexen Fall). Nach dem vorstehenden Lemma sind die Gesamtabbildungen jeweils surjektiv. Man versieht die reell und die komplex-projektiven Räume mit der Quotiententopologie zur metrischen Topologie des reellen Vektorraumes unter dieser Abbildung, d.h. man erklärt eine Teilmenge  $U \subseteq$

$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  für offen, wenn das Urbild in  $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$  offen ist. (dies ist äquivalent dazu, dass das Urbild auf der jeweiligen Sphäre offen ist). Mit dieser (*metrischen* oder *natürlichen*) Topologie auf dem projektiven Raum sind diese Abbildungen stetig. Dies hat folgende Konsequenz.

**Lemma 12.** *Für den reell-projektiven und den komplex-projektiven Raum sind die Teilmengen  $D_+(X_i)$  offen in der natürlichen Topologie und homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ . Insbesondere sind die reell- und komplex-projektiven Räume topologische Mannigfaltigkeiten.*

*Beweis.* Das Urbild von  $D_+(X_i)$  unter der kanonischen Abbildung ist  $D(X)$ , also das Komplement eines  $n$ -dimensionalen Untervektorraumes und damit offen in der natürlichen Topologie. Wir betrachten die stetigen Abbildungen

$$\mathbb{K}^n \cong V(X_i - 1) \subset D(X_i) \longrightarrow D_+(X_i).$$

Die Gesamtabbildung ist eine Bijektion und  $D_+(X_i)$  trägt die Quotiententopologie unter der zweiten Abbildung. Wir müssen zeigen, dass die Bijektion eine Homöomorphie ist. Dazu genügt es, die Offenheit zu zeigen. Sei also  $U \subseteq V(X_i - 1) \cong \mathbb{K}^n$  offen und  $U'$  das zugehörige Bild in  $D_+(X_i)$ . Die Offenheit von  $U'$  ist nach Definition der Quotiententopologie äquivalent dazu, dass das Urbild  $U'' \subseteq D(X_i)$  von  $U'$  offen ist. Diese Menge  $U''$  besteht aus allen Punkten in  $D(X_i)$ , die auf einer Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt aus  $U$  liegen. Sei  $Q$  ein solcher Punkt, und  $Q = \lambda P$  mit  $P \in U$  und  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ . Sei  $B$  eine offene Ballumgebung um  $P$  in  $V(X_i - 1)$ . Dann ist auch der dadurch definierte Kegel in  $D(X_i)$  offen und liegt ganz in  $U''$ .  $\square$

**Korollar 13.** (*Kompaktheit der projektiven Räume*) *Die reell-projektiven und die komplex-projektiven Räume sind kompakt und hausdorffsch in der natürlichen Topologie.*

*Beweis.* Es gibt eine surjektive stetige Abbildung von einer Sphäre auf einen jeden projektiven Raum. Die Sphäre ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines reellen endlichdimensionalen Vektorraumes und daher kompakt. Da unter einer stetigen Abbildung das Bild einer kompakten Menge wieder kompakt ist, folgt, dass die projektiven Räume kompakt sind.

Für die Hausdorff-Eigenschaft seien  $P, Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  zwei verschiedene Punkte. Man kann annehmen, dass sie beide auf einem der affinen überdeckenden Räume  $D_+(X_i)$  liegen. Damit gibt es nach Satz 27.12 trennende Umgebungen.  $\square$