# Mathematik für Anwender I

## Arbeitsblatt 29

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}\,.$$

Aufgabe 29.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}\,.$$

Aufgabe 29.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y\,.$$

Aufgabe 29.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7\,.$$

Aufgabe 29.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,.$$

Aufgabe 29.6. Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die $f$ eine Lösung ist.

Aufgabe 29.7. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $g$ und es sei $y$ eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass $y$ ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt $t_0$. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 19.17, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 29.8.*

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ( $t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ( $t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 29.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei $y_1$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei $y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.10. (2 Punkte)

Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 29.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2-1)$$

erfüllen.

Aufgabe 29.11. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2-3}\,.$$

Aufgabe 29.12. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2+2}y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 29.13. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 29.14. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3-2t+5}{t^2-3}\,.$$